

ББК 22.11

Ч 84

Чудесенко В. Ф.

Ч 84 Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты: Учебное пособие. 4-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2007. — 192 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0661-6

Сборник содержит индивидуальные задания (31 вариант каждой задачи) по специальным разделам курса высшей математики: теории функций комплексного переменного и операционное исчисление, теории вероятностей и элементы математической статистики, уравнения математической физики. Каждый раздел сборника содержит теоретические вопросы, теоретические упражнения и расчетную часть.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению «Математика».

ББК 22.11

Рецензент

канд. физ.-мат. наук А. С. ПОСПЕЛОВ

Обложка

С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН

*Охраняется Законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.  
Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2007  
© В. Ф. Чудесенко, 2007  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2007

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Активная самостоятельная работа студентов — залог успешного овладения изучаемым курсом. Одной из форм активизации учебного процесса по математике служит система типовых расчетов (ТР). Применение системы ТР рекомендовано действующей программой по высшей математике для инженерно-технических специальностей вузов.

Основой системы ТР является индивидуализация заданий. Задачи — расчетные задания входящие в настоящий сборник представлены каждая 31 вариантом, что позволяет предложить каждому студенту учебной группы индивидуальное задание. Помимо задач типовые расчеты содержат теоретические вопросы и теоретические упражнения, общие для всех студентов. Расчетные задания сопровождаются ссылками на справочный материал, в котором содержатся необходимые теоретические сведения и примеры решения некоторых задач.

Система ТР не исключает традиционных текущих заданий. Поскольку не все разделы спецкурсов отражены в книге в равной мере, важно, чтобы ТР и текущие домашние задания дополняли друг друга.

Расчетные задания выполняются частями по мере продвижения в изучении курса. Теоретические вопросы прорабатываются по лекционному материалу и обсуждаются на аудиторных занятиях. Теоретические упражнения и задачи решаются студентами самостоятельно и сдаются на проверку в указанные преподавателем сроки. Решение каждой задачи приводится на отдельном листе стандартного формата. Неверно решенные примеры возвращаются

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ P \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i \right| < \varepsilon \right\} = 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Решить задачу для двух значений параметра  $\alpha$ :  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . (См. п. 2.11 и исходные данные.)

**Задача 33.** На отрезке  $[0, \alpha]$  случайным образом выбраны  $n$  чисел, точнее, рассматриваются  $n$  независимых случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , равномерно распределённых на отрезке  $[0, \alpha]$ . Найти вероятность того, что их сумма заключена между  $x_1$  и  $x_2$ , т. е.  $P \left\{ x_1 < \sum_{i=1}^n \xi_i < x_2 \right\}$ . (См. п. 2.12

и исходные данные.)

**Задача 34.** Известно, что случайная величина  $\xi$  имеет распределение Пуассона  $P(\xi = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ , неизвестным является параметр  $a$ . Используя указанный ниже метод получения точечных оценок, найти по реализации выборки  $(x_1, x_2, \dots, x_8)$  значение оценки  $a^*$  неизвестного параметра  $a$ .

Варианты 1–15. Метод моментов.

Варианты 16–31. Метод максимального правдоподобия.

(См. п. 2.13 и исходные данные.)

**Задача 35.** Известно, что случайная величина  $\xi$  имеет биномиальное распределение  $P(\xi = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ , неизвестным является параметр  $p$ . Используя указанный ниже метод получения точечных оценок, найти по реализации выборки  $(x_1, x_2, \dots, x_8)$  значение оценки  $p^*$  неизвестного параметра  $p$ .

Варианты 1–15. Метод максимального правдоподобия.

Варианты 16–31. Метод моментов.

(См. п. 2.13 и исходные данные.)

**Задача 36.** Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием  $a$  и известной дисперсией  $\sigma^2$ . По выборке  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

объема  $n$  вычислено выборочное среднее  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = a^*$ .

Определить доверительный интервал для неизвестного параметра распределения  $a$ , отвечающий заданной доверительной вероятности  $P$ . (См. п. 2.14 и исходные данные.)

**Задача 37.** Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с неизвестными математическим ожиданием  $a$  и дисперсией  $\sigma^2$ . По выборке  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  объема  $n$  вычислены оценки

$$a^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

и

$$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - a^*)^2 \quad (22)$$

неизвестных параметров. Найти доверительный интервал для математического ожидания  $a$ , отвечающий доверительной вероятности  $P$ . (См. п. 2.14 и исходные данные.)

**Задача 38.** В результате  $n$  опытов получена несмещенная оценка (22) для дисперсии нормальной случайной величины. Найти доверительный интервал для дисперсии при доверительной вероятности  $P$ . (См. п. 2.16 и исходные данные.)

**Задача 39.** В серии из  $n$  выстрелов по мишени наблюдалось  $m$  попаданий. Найти доверительный интервал для вероятности  $p$  попадания в мишень при доверительной вероятности  $P = 0,95$ . (См. п. 2.16 и исходные данные.)

**Задача 40.** В серии из  $n$  опытов событие  $A$  не наступило ни разу. Определить число опытов  $n$ , при котором верхняя доверительная граница для вероятности  $P(A)$  равна заданному числу  $p_1$ . Доверительную вероятность принять равной 0,95. (См. п. 2.16 и исходные данные.)

**Задача 41.** Для контроля взяты 200 узлов, собранных на ученическом конвейере. Число узлов  $m_i$ , при сборке которых пропущено  $i$  операций, сведено в таблицу:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	
$m_i$	41	62	45	22	16	8	4	2	Всего 200

Согласуются ли полученные результаты с распределением Пуассона ( $P(\xi = i) = \frac{a^i}{i!} e^{-a}$ , где  $\xi$  — случайное число пропущенных операций) по критерию  $\chi^2$  при уровне значимости  $\alpha$ ? Решить задачу для заданного значения параметра  $a$  и для случая, когда параметр  $a$  оценивается по выборке. (См. п. 2.15; 2.16 и исходные данные.)

Исходные данные к расчетным заданиям  
(в первой горизонтальной строке указаны номера задач, в левом столбце — номера вариантов)

Продолжение

Исходные данные к расчетным заданиям

№	29			30						32		33			
	a	b	n	x <sub>A</sub>	y <sub>A</sub>	x <sub>B</sub>	y <sub>B</sub>	x <sub>C</sub>	y <sub>C</sub>	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>	α	n	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	1	2	1	0	0	1	1	1	-1	-1	0,1	1/3	108	17	20
2	2	1	2	0	0	-1	1	1	1	-2	0,2	1/4	162	22	26
3	3	2	3	0	0	-1	1	-1	-1	-3	0,3	1/5	300	28	33
4	2	3	2	0	0	-1	-1	1	-1	-4	0,4	1/6	432	35	38
5	4	2	4	0	0	2	2	2	-2	-0,5	0,05	1/7	584	40	44
6	2	4	2	0	0	-2	2	2	2	-1,5	0,15	1/8	768	46	51
7	3	4	2	0	0	-2	2	-2	-2	-2,5	0,06	1/9	972	53	56
8	4	3	2	0	0	-2	-2	2	-2	-3,5	0,07	1/10	1200	58	62
9	5	1	2	1	1	1	-1	0	0	-5	0,08	1/11	1452	64	69
10	5	2	5	-1	1	1	1	0	0	-6	0,25	1/12	1728	71	74
11	5	3	4	-1	1	-1	-1	0	0	-7	0,26	1/13	2028	76	80
12	3	5	2	-1	-1	1	-1	0	0	0	0,27	2/3	108	34	40
13	2	2	3	2	2	2	-2	0	0	-4,5	0,01	1/2	162	44	52
14	3	7	3	-2	2	2	2	0	0	-5,5	0,02	2/5	300	56	66
15	7	4	2	-2	2	-2	-2	0	0	-6,5	0,03	2/7	584	80	88
16	4	5	1	-2	-2	2	-2	0	0	-7,5	0,04	2/9	972	106	112
17	1	2	1	-1	0	0	1	0	-1	-9	0,06	2/11	1454	128	138
18	2	1	2	-1	0	0	2	0	-2	0	0,09	2/13	2028	152	160
19	3	2	3	-1	0	0	-1	0	1	-11	0,31	1	108	51	60
20	2	3	2	-1	0	0	-2	0	2	-12	0,32	3/4	162	66	78
21	4	2	4	-1	0	1	1	1	-1	-8,5	0,33	3/5	300	74	99
22	2	4	2	-1	0	1	2	1	-2	-9,5	0,34	3/7	584	120	152
23	3	4	2	-1	0	1	-1	1	1	-10,5	0,36	3/8	768	138	153
24	4	3	2	-1	0	1	-2	1	2	-11,5	0,37	3/10	1200	174	186
25	5	1	2	0	-1	-1	0	1	0	-13	0,49	3/11	1452	192	207
26	5	2	5	0	-1	-2	0	2	0	-14	0,48	3/13	2028	228	240
27	5	3	4	0	-1	1	0	-1	0	-15	0,47	1/14	584	20	22
28	3	5	2	0	-1	2	0	-2	0	-16	0,46	1/20	1200	29	31
29	2	2	3	0	0	1	1	1	-1	-1,4	0,44	1/26	2028	38	40
30	3	7	3	0	0	-1	1	1	1	-1,6	0,43	2	108	102	120
31	7	4	2	0	0	-1	-1	1	-1	-1,8	0,42	3/2	162	132	156

Продолжение

№	34, 35								36				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$n$	$a^*$	$n$	$\sigma^2$	$P$
1	52	48	49	49	52	50	47	48	65	110	150	100	0,95
2	117	131	128	118	125	135	123	119	150	110	130	100	0,99
3	32	37	33	35	27	36	35	34	50	110	110	100	0,98
4	101	98	113	117	98	93	105	103	140	110	90	100	0,90
5	27	34	26	33	33	36	28	30	50	120	150	144	0,95
6	81	97	75	79	85	81	78	73	100	120	130	144	0,98
7	19	13	10	11	20	22	15	14	30	120	110	144	0,99
8	73	75	69	74	73	77	68	70	110	120	90	144	0,90
9	43	39	41	45	36	42	41	37	70	110	150	100	0,95
10	5	12	8	15	4	3	7	6	25	110	130	100	0,90
11	25	41	36	34	31	40	15	22	60	110	110	100	0,98
12	40	31	65	56	71	54	36	47	100	110	90	100	0,99
13	36	70	63	58	93	81	25	38	110	120	150	144	0,98
14	18	16	23	14	11	15	27	10	40	120	130	144	0,95
15	35	28	16	45	22	14	39	27	60	120	110	144	0,99
16	25	35	39	41	32	34	28	27	50	120	90	144	0,95
17	67	73	85	63	56	94	55	66	130	110	150	100	0,90
18	35	41	30	36	38	42	35	32	80	110	130	100	0,90
19	167	152	155	161	166	157	158	162	300	110	110	100	0,95
20	25	34	12	36	18	33	16	17	50	110	90	100	0,98
21	18	37	45	33	27	36	19	40	70	120	150	144	0,95
22	98	79	83	85	91	81	86	84	100	120	130	144	0,99
23	45	78	83	66	62	71	73	50	90	120	110	144	0,95
24	14	13	17	15	20	25	13	22	45	120	90	144	0,90
25	35	53	43	35	34	44	37	30	60	110	150	100	0,98
26	35	45	74	77	85	86	89	62	150	110	130	100	0,95
27	11	15	17	20	15	13	17	11	30	110	110	100	0,98
28	33	12	15	17	25	20	28	17	40	110	90	100	0,90
29	21	11	28	12	13	15	22	19	50	120	150	144	0,99
30	83	94	74	77	85	89	80	81	100	120	130	144	0,95
31	14	12	9	8	15	7	11	8	30	120	110	144	0,95

Продолжение

№	37				38			39		40	41	
	$a^*$	$\sigma^{2*}$	$n$	$P$	$n$	$\sigma^{2*}$	$P$	$n$	$m$	$p_1$	$a$	$\alpha$
1	2,1	0,5	31	0,95	14	45	0,98	30	10	0,01	1,70	0,002
2	2,1	0,5	28	0,9	15	1,5	0,98	30	11	0,02	1,71	0,01
3	2,1	0,5	26	0,95	10	18	0,8	30	12	0,03	1,72	0,005
4	2,1	0,5	24	0,95	9	0,2	0,98	30	13	0,04	1,73	0,01
5	1,7	0,8	31	0,8	12	25	0,96	30	14	0,05	1,74	0,05
6	1,7	0,8	28	0,9	17	16	0,96	30	15	0,06	1,75	0,005
7	1,7	0,8	26	0,95	12	42	0,8	30	16	0,07	1,76	0,02
8	1,7	0,8	24	0,98	13	10	0,96	30	17	0,08	1,77	0,002
9	2,1	0,5	31	0,9	25	50	0,8	30	18	0,09	1,78	0,01
10	2,1	0,5	28	0,95	12	8	0,9	30	19	0,011	1,79	0,2
11	2,1	0,5	26	0,98	10	14	0,98	31	8	0,012	1,80	0,05
12	2,1	0,5	24	0,95	22	30	0,9	32	8	0,013	1,81	0,01
13	1,7	0,8	31	0,9	23	8	0,8	33	8	0,014	1,82	0,02
14	1,7	0,8	28	0,95	7	15	0,96	34	8	0,015	1,83	0,002
15	1,7	0,8	26	0,98	11	12	0,98	35	8	0,016	1,84	0,1
16	1,7	0,8	24	0,95	11	56	0,8	36	8	0,017	1,85	0,01
17	2,1	0,5	31	0,95	14	14	0,8	37	8	0,018	1,86	0,02
18	2,1	0,5	28	0,98	21	20	0,96	38	8	0,019	1,87	0,01
19	2,1	0,5	26	0,95	8	3,5	0,98	39	8	0,02	1,88	0,005
20	2,1	0,5	24	0,9	27	5	0,96	40	8	0,021	1,89	0,02
21	1,7	0,8	31	0,95	19	40	0,9	31	14	0,022	1,90	0,1
22	1,7	0,8	28	0,98	20	36	0,9	32	15	0,023	1,76	0,005
23	1,7	0,8	26	0,95	17	24	0,96	33	16	0,024	1,77	0,05
24	1,7	0,8	24	0,9	26	32	0,9	34	17	0,025	1,78	0,02
25	2,1	0,5	31	0,98	24	31	0,98	35	18	0,026	1,79	0,01
26	2,1	0,5	28	0,95	9	36	0,96	36	19	0,027	1,80	0,02
27	2,1	0,5	26	0,9	16	4	0,8	37	20	0,028	1,81	0,05
28	2,1	0,5	24	0,95	15	54	0,8	38	21	0,029	1,82	0,01
29	1,7	0,8	31	0,98	14	32	0,9	39	22	0,03	1,83	0,05
30	1,7	0,8	28	0,95	18	48	0,96	40	23	0,031	1,84	0,02
31	1,7	0,8	26	0,9	16	64	0,98	41	24	0,032	1,85	0,05