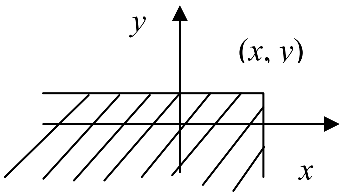
§ Функция распределения системы двух случайных величин

Определение функции распределения системы двух случайных величин	Функцией распределения системы двух случайных величин X и Y называется неслучайная функция двух действительных аргументов, определяемая как вероятность совместного выполнения двух неравенств $F(x,y) = P(X < x,\ Y < y)$.

$$F(x,y) = P(X < x,\ Y < y)$$



Свойства функции распределения системы двух случайных величин X **и** Y	•1. $0 \le F(x,y) \le 1$. •2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0;\ \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0;\ \lim\limits_{x\to-\infty,\,y\to-\infty} F(x,y) = 0;\ \lim\limits_{x\to+\infty,\,y\to+\infty} F(x,y) = 1.$ •3. $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = F_1(x);\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y) = F_2(y).$ •4. $F(x,y)$ *неубывающая функция по каждому аргументу при фиксированном втором.* •5. $P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = F(x_2,y_2) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1)$. •6. $F(x,y) = F_1(x)\cdot F_2(y) \Leftrightarrow X$ *и* Y *независимые СВ.* •7. $F(x,y) = F_1(x)\cdot F(y/x);\ F(x,y) = F_2(y)\cdot F(x/y),$ *где* $F(x/y), F(y/x)$ – *условные функции распределения.*

§ Непрерывно распределённая система двух случайных величин

Определение непрерывно распределённой системы двух случайных величин X **и** Y	Систему двух случайных величин X и Y называют непрерывно распределённой, если её функция распределения $F(x,y) = P(X < x,\ Y < y)$ непрерывна на всей плоскости и существует такая неотрицательная интегрируемая функция $\rho(x,y)$, называемая плотностью распределения вероятностей системы двух случайных величин X и Y**,** что $\rho(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$**.**

Свойства плотности вероятностей непрерывно распределённой системы случайных величин *X*, *У*	•1. $\rho(x,y) \ge 0$. •2. *Если* $\rho(x,y)$ *непрерывна , то* $P(x \le X < x+\Delta x, y \le Y < y+\Delta y) = \rho(\xi,\eta)\Delta x\Delta y,$ *где* $\xi \in \Delta x, \eta \in \Delta y$. •3. *Если* $\rho(x,y)$ *непрерывна в* D, *то* $P[(x,y)\in D] = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$. •4. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\rho(x,y)dxdy$. •5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dxdy = 1$. •6. $F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dx)dy;\quad F_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dx)dy;.$ •7. $\rho_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dy;\ \ \rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dx.$ •8. X *и* $У$ *независимы* $\Leftrightarrow \rho(x,y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$. •9. *Условные плотности распределения* $\rho(x/y) = \dfrac{\rho(x,y)}{\rho_2(y)};\ \rho(y/x) = \dfrac{\rho(x,y)}{\rho_1(x)_1}.$ *Для зависимых* X *и* $У$: $\rho(x,y) = \rho_1(x)\rho(y/x);\quad \rho(x,y) = \rho_2(y)\rho(x/y).$ •10. $Z = \varphi(X,Y) \Rightarrow F(z) = P(Z<z) = P(\varphi(x,y)<z) = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy \Leftrightarrow \rho(z) = F'(z),$ *где* $D = \{(x,y) : \varphi(x,y) < z\}$

Числовые характеристики непрерывно распределённой системы случайных величин *X*, *У*	**Начальный момент порядка** $k+s$ равен $m_{k,s}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k y^s \rho(x,y)dxdy$. **Математическими ожиданиями** называются начальные моменты первого порядка $m_{1,0}=m_x=M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\rho(x,y)dxdy;$ $m_{0,1}=m_y=M[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\rho(x,y)dxdy.$ **Центральный момент порядка** $k+s$ равен $\mu_{k,s}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k(y-m_y)^s\rho(x,y)dxdy$. Центральные моменты второго порядка $\mu_{2,0}=D_x=D[X]$, $\mu_{0,2}=D_y=D[Y]$ называются **дисперсиями**, $\mu_{1,1}=K_{xy}=\mathrm{cov}(X,Y)$ называется **ковариацией**. Нормированная ковариация $r_{xy}=\dfrac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ называется **коэффициентом корреляции** системы двух случайных величин. **Среднеквадратичные отклонения** $\sigma_x=\sqrt{D_x}$, $\sigma_y=\sqrt{D_y}$.

§ Дискретно распределённая система двух случайных величин

Определение дискретно распределённой системы двух случайных величин X и Y	Систему двух случайных величин X и Y называют дискретно распределённой, если множество возможных значений $\{x_k, y_m\}$ счётное и задана соответствующая каждой паре вероятность $p_{km}=P\{X=x_k, Y=y_m\}$, удовлетворяющая условию $\sum\limits_k\sum\limits_m p_{km}=1$, где суммирование ведётся по всем возможным значениям индексов k и m.

Числовые характеристики дискретно распределённой системы случайных величин *X*, *У*	**Начальный момент порядка** $k+s$ равен $m_{k,s}=\sum\limits_i\sum\limits_j x_i^k y_j^s p_{ij}$. **Математическими ожиданиями** называются начальные моменты первого порядка $m_{1,0}=m_x=M[X]=\sum\limits_i\sum\limits_j x_i p_{ij}=\sum\limits_i x_i p_i;$ $m_{0,1}=m_y=M[Y]=\sum\limits_i\sum\limits_j y_j p_{ij}=\sum\limits_j y_j p_j.$ **Центральный момент порядка** $k+s$ равен $\mu_{k,s}=\sum\limits_i\sum\limits_j (x_i-m_x)^k(y_j-m_y)^s p_{ij}$. Центральные моменты второго порядка $\mu_{2,0}=D_x=D[X]=\sum\limits_i\sum\limits_j (x_i-m_x)^2 p_{ij}=\sum\limits_i (x_i-m_x)^2 p_i=\sum\limits_i x_i^2 p_i-m_x^2,$ $\mu_{0,2}=D_y=D[Y]=\sum\limits_i\sum\limits_j (y_j-m_y)^2 p_{ij}=\sum\limits_j (y_j-m_y)^2 p_j=\sum\limits_j y_j^2 p_j-m_y^2$ называются **дисперсиями**,

Числовые характеристики дискретно распределённой системы случайных величин *X*, *У*

Центральный момент второго порядка $\mu_{1,1} = K_{xy} = \operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y)\ p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - m_x m_y$ называется **ковариацией**.

Нормированная ковариация $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ называется **коэффициентом корреляции** системы двух случайных величин. σ_x, σ_y – среднеквадратичные отклонения.

Матрица распределения вероятностей системы *X*, *У*

Y	***X***			
	x_1	x_2	**…**	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	**…**	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	**…**	p_{n2}
…	**…**	**…**	**…**	**…**
y_m	p_{1m}	p_{2m}	**…**	p_{nm}

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

***i* – номер столбца,**
***j* – номер строки**

Матрица распределения вероятностей *У*

Y	y_1	y_2	**…**	y_m
$\boldsymbol{p_j}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$	**…**	$\boldsymbol{P_m}$

p_j – сумма вероятностей *j*– й строки матрицы распределения вероятностей системы *X*, *У*

Матрица распределения вероятностей *X*

X	x_1	x_2	**…**	x_n
$\boldsymbol{p_i}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$	**…**	$\boldsymbol{p_n}$

p_i – сумма вероятностей *i* – го столбца матрицы распределения вероятностей системы *X*, *У*.

Условные вероятности

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i},$$

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_j}.$$