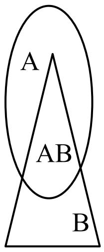
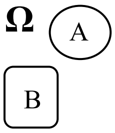
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Соединения, определения вероятности

		Названия, обозначения	Пояснения	Примеры
С О Е Д И Н Е Н И Я	1	**Перестановки** из ***n*** элементов $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$	Соединения отличаются только порядком элементов.	Число способов поменять местами 10 студентов, стоящих в шеренгу $10! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10 = 3628800$
	2	**Перестановки с повторениями** $p_{c\ повтор} = \dfrac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!}$ $\alpha+\beta+\gamma=n$	Соединения из *n* одинаковых элементов, распределенных по подгруппам из α, β, γ элементов, отличающиеся порядком элементов.	Число способов разбить группу из 12 студентов на подгруппы по 3, 4, 5 человек $P_{c\ повт} = \dfrac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!} = 27720$
	3	**Размещения** из ***n*** элементов по ***m*** ($m \le n$) $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!} =$ $= \underbrace{n\cdot(n-1)\ldots(n-m+1)}_{m\ сомножителей}$	Соединения отличаются хотя бы одним элементом или порядком элементов.	Число способов распределить 3 различных обязанности между 10 студентами (по одной обязанности на одного студента) $A_{10}^3 = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$
	4	**Размещения с повторениями** **из *n* видов** элементов по ***m*** ($\forall m$ натуральное) $(A_n^m)_{c\ повт} = n^m$	Соединения содержат любой элемент из *n* сколько угодно раз от 0 до *m*.	Число способов распределить 3 различные обязанности между 10 студентами, если один студент может выполнять любое число из них $(A_{10}^3)_{c\ повт} = 10^3 = 1000$
	5	**Сочетания** из ***n*** элементов по ***m*** ($m \le n$) $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{A_n^m}{m!}$	Соединения отличаются хотя бы одним элементом (порядок элементов не учитывается) $C_n^m = C_n^{n-m};\ C_n^0 = 1;\ C_n^1 = n$	Число способов распределить 3 студентов из 10 на три одинаковые должности $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$
	6	**Сочетания** из ***n*** элементов по ***m*** **с повторениями** (*m* может быть больше, чем *n*) $(C_n^m)_{c\ повт} = C_{n+m-1}^m$	Соединения состоят не только из *m* различных элементов, но и из *m* каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.	Число способов выбрать 6 пирожных в кондитерской, если есть 4 разных сорта пирожных $C_{4+6-1}^6 = \dfrac{9!}{6!\cdot 3!} = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 84$
В Е Р О Я Т Н О С Т Ь	1	**Статистический** подход $P_A = P(A) = \lim\limits_{n_k\to\infty} P_{n_k}^*(A)$	В серии из n_k испытаний событие *A* появилось m_k раз; частота $P_{n_k}^*(A) = \dfrac{m_k}{n_k},\ k = 1,2,\ldots$ обладает свойством устойчивости.	
	2	**Классическое** определение $P(A) = \dfrac{m}{n},\ m \le n$	Пространство элементарных событий *Ω* дискретно и состоит из конечного числа *n* элементарных равновозможных несовместных событий ω_i, называемых случаями. Вероятность $P(A)$ наступления события *A* равна числу случаев *m*, благоприятствующих наступлению события *A*, деленному на число всех возможных исходов *n*.	
	3	**Геометрическое** определение $P(A) = \dfrac{mes\, g}{mes\, G}$	Пространством элементарных событий является некоторая область, мера которой *mes G*, событию *A* соответствует область, мера которой $mes\, g \subseteq mes\, G$.	
	4	**Аксиоматическое** определение $A \in F$ – *поле событий*: 1. $P(A) \ge 0$; 2. $P(\Omega) = 1$; 3. $P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_k),\ \ A_i \cap A_j = 0, i \ne j$	**Свойства операций над событиями** $A + A = A,\ A + B = B + A,\ A + \Omega = \Omega,\ A + 0 = A,\ A + \overline{A} = \Omega$ $AB = BA,\ A\cdot A = A,\ A\cdot\Omega = A,\ A\cdot 0 = 0,\ \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B},\ \overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B},$ $A(B + C) = AB + AC,\ (A + B)(A + C) = A + BC,$ $(A + B) + C = A + (B + C)$	

Основные теоремы теории вероятностей

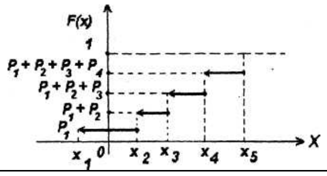
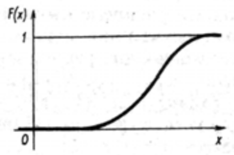
<table>
<tr>
<td rowspan="6">Ω

</td>
<td rowspan="4">У
м
н
о
ж
е
н
и
я</td>
<td rowspan="2">Зависимые события – наступление одного из них изменяет вероятность наступления другого</td>
<td>$P(A_1A_2A\cdots A_n)=$
$=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})$</td>
</tr>
<tr>
<td>$P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)},\ P(B)\neq 0;\quad P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)},\ P(A)\neq 0$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Независимые события – наступление одного из них не изменяет вероятность наступления любого другого и всех возможных их пересечений</td>
<td>$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_n)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$P(A/B)=P(A),\quad P(B/A)=P(B)$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="4">С
л
о
ж
е
н
и
я</td>
<td rowspan="2">Совместные события содержат общие точки пространства элементарных событий Ω</td>
<td>$P(A_1+A_2+A_3+...A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)-$
$-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-...-P(A_{n-1}A_n)+P(A_1A_2A_3)+...+(-1)^{n+1}P(A_1A_2A_3\cdots A_n)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Ω

</td>
<td rowspan="2">Несовместные события не содержат общих точек пространства элементарных событий Ω</td>
<td>$P(A_1+A_2+A_3+...A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$P(A+B)=P(A)+P(B)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Гипотезы H_i образуют полную группу событий:
$H_i\cap H_j=0,$
$i\neq j,$
$\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1$</td>
<td>Формула полной вероятности</td>
<td>$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(H_j)P(A/H_j)=P(H_1)P(A/H_1)+...+P(H_n)P(A/H_n)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Формула Байеса</td>
<td>$P(H_k/A)=\dfrac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)},\quad k=1,2,...,n$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="8">Схема испытаний Бернулли

1 – событие A наступило;
0– событие A не наступило;
$\{0,0,1,0,...,1\}$ последовательность содержит m единиц и (n-m) нулей.
$P(A)=p$,
$P(\overline{A})=$
$=1-p=q$</td>
<td>Формула Бернулли</td>
<td colspan="2">Формула Пуассона</td>
</tr>
<tr>
<td>$P_n(m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$
Вероятность того, что событие A наступит m раз в серии из n испытаний</td>
<td>$p\to 0,\quad n\to\infty,$
$\lambda t=a=np$
интенсивность потока λ</td>
<td>$P_n(m)=\dfrac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}\approx\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Наивероятнейшее число m_0 наступления события A</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">$np-q<m_0<np+p;\quad m_0=\begin{cases}\text{целая часть числа } [np+p], \text{ если } np+p-\text{дробь},\\ \text{два числа } np+p \text{ и } np-q, \text{ если } np+p-\text{целое}\end{cases}.$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Локальная теорема Муавра-Лапласа</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">$P_n(m)\approx\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\quad \text{функция Гаусса } \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\dfrac{x^2}{2})-\text{табулирована},$
$x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}};\varphi(-x)=\varphi(x)-\text{четная.}\qquad P(\left|\dfrac{m}{n}-p\right|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Интегральная теорема Муавра-Лапласа</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">$P(m_1\leq m\leq m_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),\quad \text{функция Лапласа } \Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\exp(-\dfrac{t^2}{2})dt,$
$x_1=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2=\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}};\qquad \Phi(-x)=-\Phi(x)-\text{нечетная},\quad \text{табулирована.}$</td>
</tr>
</table>

Законы распределения случайных величин ξ(ω) (ω – случайные события)

	Дискретные случайные величины $\xi(\omega)$: $\Omega \to R$	**Непрерывные** случайные величины $\xi(\omega)$: $\Omega \to R$	**Свойства**
1	**Функция распределения $F(x)$** $F(x) = P(\xi < x)$ 	**Функция распределения $F(x)$** $F(x) = P(\xi < x)$ 	$1.\ 0 \le F(x) \le 1;$ $2.\ F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1;$ $3.\ x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2);$ $4.\ \exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0);$ $5.\ P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a).$
2	**Квантиль порядка p: η_p** $F(\eta_p - 0) \le p, F(\eta_p + 0) > p$	**Квантиль порядка p: η_p** $F(\eta_p - 0) \le p, F(\eta_p + 0) > p$	η_p существуют для любых случайных величин, обладают свойством устойчивости, легко могут быть измерены.
3	**Медиана** – квантиль порядка 0.5	**Медиана** – квантиль порядка 0.5	
4	**Ряд распределения** ξ | x_1 | x_2 | … | x_n | … P | p_1 | p_2 | … | p_n | … $\sum\limits_{\kappa} p_\kappa = 1, \quad \kappa = 1,2,...$	**Плотность распределения $\rho(x)$** $\rho(x) = F^{/}(x)$	$1.\ \rho(x) \ge 0;$ $2.\ P(a \le \xi < b) = \int\limits_a^b \rho(x)dx;$ $3.\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1;\ 4.\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(x)dx.$
5	**Мода ξ** mod $\xi = x(\max P)$	**Мода ξ** mod $\xi = x(\max \rho(x))$	Унимодальные распределения имеют единственный максимум, полимодальные – два и более.
6	**Начальные моменты порядка κ** $m_k = \sum\limits_j x_j^k p_j,\ j = 1,2,...$	**Начальные моменты порядка κ** $m_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \rho(x)dx$	$1.\ M(C) = C,\ C = const;$ $2.\ M(C\xi) = CM(\xi);$ $3.\ M(\alpha_1\xi + ... + \alpha_n\psi) =$ $= \alpha_1 M(\xi) + ... + \alpha_n M(\psi),$ $\alpha_1, ..., \alpha_n - const;$ $4.\ M(\xi \cdot \psi) = M(\xi) \cdot M(\psi),$ $\xi, \psi -$ *независимые.*
7	**Математическое ожидание ξ: $M(\xi)$** $M(\xi) = m_1 = \sum\limits_j x_j p_j,\ j = 1,2,...$ $M(f(\xi)) = \sum\limits_j f(x_j) p_j$	**Математическое ожидание ξ: $M(\xi)$** $M(\xi) = m_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx,$ $M(f(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x)dx$	
8	**Центральные моменты порядка κ: μ_κ** $\mu_k = \sum\limits_j (x_j - M(\xi))^k p_j,\ j = 1,2,...$	**Центральные моменты порядка κ: μ_κ** $\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^k \rho(x)dx$	$\forall \mu_1 = 0,\ \mu_2 = D(\xi);$ $\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3;$ $\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4;$ $D(C) = 0,\ C = const;$ $D(\alpha_1\xi_1 + ... + \alpha_n\xi_n) =$ $= \alpha_1^2 D(\xi_1) + ... + \alpha_n^2 D(\xi_n),$ $\alpha_1, ..., \alpha_n - const,$ $\xi_i, \xi_j -$ *незав.* $(i, j = 1,2,...n, i \ne j)$ $D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2$
9	**Дисперсия ξ: $D(\xi)$** $D(\xi) = \mu_2 = \sum\limits_j (x_j - M(\xi))^2 p_j,$ $j = 1,2,...$	**Дисперсия ξ: $D(\xi)$** $D(\xi) = \mu_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 \rho(x)dx$	
10	**Характеристическая функция $g_x(t)$** $g_x(t) = M(e^{itx_j}) = \sum\limits_j e^{itx_j} p_j,$ $j = 1,2,...;\quad i^2 = -1$	**Характеристическая функция $g_x(t)$** $g_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \rho(x)dx$ $i^2 = -1$	$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g_x(t)dt;$ $g(0) = 1;\ \lvert g(t) \rvert \le 1;\ g_x^{(k)}(0) = i^k M(\xi^k);$ $M(\xi) = -ig_x^{/}(0) = -i\varphi^{/}(0);$ $D(\xi) = -g_x^{//}(0) + (g_x^{/}(0))^2 = -\varphi^{//}(0);$ $\psi = a\xi + b,$ $(a, b - const,\ y -$ *значения* $\psi) \Rightarrow$ $\Rightarrow g_y(t) = g_x(at)e^{ibt},$ $\varphi_y(t) = ibt + \varphi_x(at);$ $\xi, \psi -$ *незав.*, $\chi = \xi + \psi \Rightarrow$ $\Rightarrow g_z(t) = g_x(t)g_y(t),$ *где* $z -$ *значения* χ.
11	**Кумулянтная функция $\varphi(t)$** $\varphi(t) = \ln g_x(t)$		

Центральная предельная теорема и Закон больших чисел

Функция распределения $N(a, \sigma^2)$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)dt \qquad \rho(x) = F'(x)$$

Функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$; $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

Плотность распределения $N(a, \sigma^2)$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Вероятность попадания X в интервал

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Центральная предельная теорема

Теорема Ляпунова Александра Михайловича (1857-1918).
Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному
(доказана в 1901 г.).

Если $X_1, X_2, ..., X_n -$ независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с конечными математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения случайной величины $Y_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ неограниченно приближается к нормальному.

То есть, если $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n;\ A_n = \sum_{k=1}^{n} M[X_k];\ B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D[X_k],$

то $F(x) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$

Распределение Бернулли, Пуассона

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(\frac{(m-np)^2}{2npq}\right) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}.$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

$$P(m_1 < m < m_2) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Закон больших чисел

Неравенство Чебышева Пафнутия Львовича (1821-1894)

$$P(|X - M[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2},\ \textit{или}\ P(|X - M[X]| < \varepsilon) > 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$$

Сходимость по вероятности Последовательность $\{X_n\}$сходится по вероятности к числу a, если для любых чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется такое число $N(\varepsilon, \delta)$, зависящее от ε и δ, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $P(|X_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta$

Теорема Чебышева П. Л.

Если $X_1, X_2, ... X_n -$ последовательность попарно независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями $M[X_1]$, $M[X_2]$, …, $M[X_n]$ и дисперсиями $D[X_1]$, $D[X_2]$, …, $D[X_n]$, каждая из которых ограничена числом L, то последовательность $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$ сходится по вероятности к среднему арифметическому математических ожиданий $\frac{\sum_{k=1}^{n} M[X_k]}{n}$.

Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний по схеме Бернулли, в каждом из которых может появиться с постоянной вероятностью p некоторое событие A. При неограниченном увеличении числа испытаний n относительная частота p^* появления события A сходится по вероятности к p.

Теорема Пуассона

Если производится n независимых испытаний, и вероятность появления события A в k – м испытании p_k, то при возрастании n относительная частота p^* появления события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_k.

Некоторые дискретные распределения

($M[X]$ – математическое ожидание, $D[X]$ – дисперсия , $A[X]$ – коэффициент асимметрии, $E[X]$ – эксцесс, или коэффициент островершинности)

№	Распределение		Числовые характеристики			
	Название и пояснения	Вероятность	$M[X]$	$D[X]$	$A[X]$	$E[X]$
1	Биномиальное распределение. $P(A)=p;\ P(\overline{A})=q=1-p$ m – число появлений события A в серии из n испытаний	$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, где $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$	np	npq	$\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$	$\frac{1-6pq}{npq}$
2	Распределение Пуассона. $a=np=\lambda t;\ n\geq 10;\ p\leq 0{,}1$ λ – интенсивность пуассоновского потока, t – время	$P_n(m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a};\quad P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}$	a	a	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{a}$
3	Геометрическое распределение. Испытания проводятся до первого появления события A	$P_m=q^{m-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	?	?
4	Гипергеометрическое распределение. M элементов множества N обладают некоторым свойством. Нужно отобрать n элементов этого множества, среди которых m элементов обладали бы указанным свойством.	$P_m=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ dhypergeom(m,n,M,N)	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$	?	?
5	Мультимодальное (полимодальное) распределение. X_1 – число проданных единиц товара A, X_2 – число проданных единиц товара B, …, $X_к$ – число проданных единиц товара К. $X_1+X_2+\ldots+X_k=n$	$P(X_1,X_2,\ldots,X_k)=\frac{n!}{X_1!X_2!\ldots X_k!}p_1^{X_1}p_2^{X_2}\ldots p_k^{X_k}$	?	?	?	?

Вспомогательные формулы для подсчета вероятностей в испытаниях по схеме Бернулли

№	Число наступлений события A	Вычисление вероятности
1	Менее m раз	$P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(m-1)$
2	Более m раз	$P_n(m+1)+P_n(m+2)+\ldots+P_n(n)$
3	Не менее m раз	$P_n(m)+P_n(m+1)+\ldots+P_n(n)$
4	Не более m раз	$P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(m)$
5	Между m_1 и m_2 раз	$P_n(m_1)+P_n(m_1+1)+\ldots+P_n(m_2)$
6	Производящая функция. $\varphi_n(Z)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_iZ)=\sum_{m=0}^{n}P_n(m)Z^m$ p_i – вероятность появления события A в i-м опыте.	Разложение производящей функции $\varphi_n(Z)$ по степеням Z дает в качестве коэффициентов при Z^m вероятности $P_n(m)$. Например, $\phi(Z) := (0.1+0.9\cdot Z)\cdot(0.3+0.7\cdot Z)\cdot(0.4+0.6\cdot Z)$ $(0.1+0.9\cdot Z)\cdot(0.3+0.7\cdot Z)\cdot(0.4+0.6\cdot Z)$ collect, Z $\rightarrow .378\cdot Z^3+.456\cdot Z^2+.154\cdot Z+1.2\cdot 10^{-2}$

Некоторые непрерывные распределения

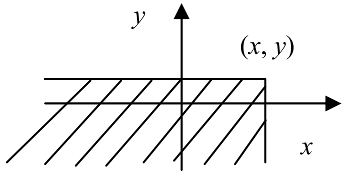
	Название	Плотность распределения	Функция распределения	Матем. ожидание	Дисперсия	Обратная функция для функции распределения	Мода	Медиана
1	Равномерное	$\rho(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b),\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$			$\eta_{0.5}=$ $=\frac{a+b}{2}$
2	Распределение Релея	$\rho(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$	$(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2$	$x=\sigma\sqrt{-2\ln(1-y)}$	mod=σ	$\eta_{0.5}$ – -квантиль порядка $\frac{1}{2}$
3	Гамма-распределение (Г – распределение)	$\rho(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, x\ge 0,\\ 0, \quad x<0\end{cases}$ $\alpha>0, \lambda>0, \Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$	$F(x)=\begin{cases}\int_0^x \rho(x)dx, & x\ge 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$		$x(\rho_{\max})$	$\eta_{0.5}$ – -квантиль порядка $\frac{1}{2}$
4	Показательное распределение (Г – распределение при $\alpha=1$)	$\rho(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ λ>0,	$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$x=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$	$x(\rho_{\max})$	$\eta_{0.5}$ – -квантиль порядка $\frac{1}{2}$
5	Распределение Коши	$\rho(x)=\frac{1}{\pi\cdot b\cdot\left[1+\frac{(x-a)^2}{b^2}\right]}$	$F(x)=\frac{1}{\pi}arctg\left(\frac{x-a}{b}\right)+\frac{1}{2}$	–	–	$x=b\cdot tg\left[\pi\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]+a$	mod=a	*Med*=a
6	Закон арксинуса	$\rho(x)=\frac{1}{\pi\cdot b\cdot\sqrt{1-\frac{(x-a)^2}{b^2}}}$	$F(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\arcsin\left(\frac{x-a}{b}\right)+\frac{1}{2}$	a	$\frac{b^2}{2}$	$x=b\cdot\sin\left[\pi\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]+a$	mod=a	$\eta_{0.5}=a$
7	Нормальное распределение	$\rho(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$	$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$	a	σ^2		mod=a	$\eta_{0.5}=a$

Система двух случайных величин (СВ)

Функция распределения

Определение функции распределения

$F(x,y) = P(X < x, Y < y)$



Свойства функции распределения

- 1. $0 \le F(x,y) \le 1$. • 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$; $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty, y\to-\infty} F(x,y) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty, y\to+\infty} F(x,y) = 1$.
- 3. $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = F_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y) = F_2(y)$. • 4. $F(x,y)$ *неубывающая функция по каждому аргументу при фиксированном втором.*
- 5. $P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = F(x_2,y_2) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1)$. • 6. $F(x,y) = F_1(x)\cdot F_2(y) \Leftrightarrow X$ *и* Y *независимые СВ.*
- 7. $F(x,y) = F_1(x)\cdot F(y/x)$; $F(x,y) = F_2(y)\cdot F(x/y)$, *где* $F(x/y)$, $F(y/x)$ − *условные функции распределения.*

Дискретные случайные величины (ДСВ)

Матрица распределения вероятностей системы *X, У*

Y	X: x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{n2}
…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{nm}

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

***i* – номер столбца,**
***j* – номер строки**

Матрица распределения вероятностей *У*

Y	y_1	y_2	…	y_m
p_j	p_1	p_2	…	P_m

p_j – сумма вероятностей *j*– й строки матрицы распределения вероятностей системы *X*, *У*

Матрица распределения вероятностей *X*

X	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

p_i – сумма вероятностей *i* – го столбца матрицы распределения вероятностей системы *X*, *У*.

Условные вероятности

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i},$$

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_j}.$$

Непрерывные случайные величины (НСВ)

Плотность распределения вероятностей системы *X, У*

$$\rho(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Свойства плотности распределения вероятностей системы *X, У*

- 1. $\rho(x,y) \ge 0$. • 2. *Если* $\rho(x,y)$ *непрерывна, то*
  $P(x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y) = \rho(\xi,\eta)\Delta x\Delta y$, *где* $\xi \in \Delta x, \eta \in \Delta y$.
- 3. *Если* $\rho(x,y)$ *непрерывна в* D, *то* $P[(x,y)\in D] = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$.
- 4. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\rho(x,y)dxdy$. • 5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dxdy = 1$. • 6. $F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dx)dy$;
  $F_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dx)dy$;. • 7. $\rho_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dy$; $\rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dx$.
- 8. X *и* $У$ *независимы* $\Leftrightarrow \rho(x,y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$.
- 9. *Условные плотности распределе ния* $\rho(x/y) = \dfrac{\rho(x,y)}{\rho_2(y)}$; $\rho(y/x) = \dfrac{\rho(x,y)}{\rho_1(x)_1}$.
  Для зависимых X *и* $У$: $\rho(x,y) = \rho_1(x)\rho(y/x)$; $\rho(x,y) = \rho_2(y)\rho(x/y)$.
- 10. $Z = \varphi(X,Y) \Rightarrow F(z) = P(Z < z) = P(\varphi(x,y) < z) = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy \Leftrightarrow \rho(z) = F^{/}(z)$,
  где $D = \{(x,y) : \varphi(x,y) < z\}$

Математическое ожидание функции двух случайных аргументов (ДСВ)

$$Z = \varphi(X,Y) \Rightarrow M[Z] = \sum_{i,j}\varphi(x_i, y_j)p_{ij}$$

Математическое ожидание функции двух случайных аргументов (НСВ)

$$Z = \varphi(X,Y) \Rightarrow M[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\rho(x,y)dxdy.$$

Характеристики связи двух случайных величин (СВ)

<table>
<tr><th>Дискретные случайные величины (ДСВ)</th><th>Непрерывные случайные величины (НСВ)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Регрессия (условные математические ожидания)</td></tr>
<tr><td>Функция регрессии X на У: $M\left[X/Y=y_j\right]=\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{p_{ij}}{p_j}$;
Функция регрессии У на X: $M\left[Y/X=x_i\right]=\sum_{j=1}^{m} y_j \frac{p_{ij}}{p_i}$</td><td>Функция регрессии X на У: $M\left[X/Y=y\right]=\psi(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x/y)dx$
Функция регрессии У на X: $M\left[Y/X=x\right]=\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\rho(y/x)dy$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Условные дисперсии (характеризуют степень отклонения экспериментальных точек от кривых регрессии)</td></tr>
<tr><td>$D\left[X/Y=y_j\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M\left[X/Y=y_j\right]\right)^2 p_{ij}$;
$D\left[Y/X=x_i\right]=\sum_{j=1}^{m}\left(y_j-M\left[Y/X=x_i\right]\right)^2 p_{ij}$</td><td>$D\left[X/Y=y\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M\left[X/Y=y\right]\right)^2\rho(x/y)dx$;
$D\left[Y/X=x\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-M\left[Y/X=x\right]\right)^2\rho(y/x)dy$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ковариация случайных величин X и У: $\operatorname{cov}(X,Y)=M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right]=M\left[X\cdot Y\right]-m_x m_y$
Необходимое условие независимости X и У: $X\ и\ У\ независимы \Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow \operatorname{cov}(X,Y)\neq 0 \Rightarrow X\ и\ У\ зависимые\ СВ$.
Обратное утверждение неверно (за исключением нормального распределения): $\operatorname{cov}(X,Y)=0\Rightarrow\begin{cases} X\ и\ Y\ могут\ быть\ зависимыми\ СВ, \\ X\ и\ Y\ могут\ быть\ независимыми\ СВ. \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}-m_x m_y$</td><td>$\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)\rho(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\rho(x,y)dxdy-m_x m_y$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Коэффициент корреляции (мера линейной зависимости СВ) и прямые среднеквадратической регрессии:
$r_{xy}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}.$
$\begin{cases} y-m_y=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\ прямая\ регрессии\ У\ на\ X, \\ x-m_x=r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)\ прямая\ регрессии\ X\ на\ У. \end{cases}$
$(r_{xy}=0\Rightarrow X\ и\ У\ называют\ некоррелированными)$
$(r_{xy}\neq 0\Rightarrow X\ и\ У\ называют\ коррелированными)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства математического ожидания</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема 1. Если случайные величины X и У имеют конечные математические ожидания, то $M\left[\alpha X+\beta Y\right]=\alpha M\left[X\right]+\beta M\left[Y\right], где\ \alpha\ и\ \beta\ константы$.
Теорема 2. Если случайные величины X и У имеют конечные математические ожидания, то $M\left[X\cdot Y\right]=M\left[X\right]\cdot M\left[Y\right]+\operatorname{cov}(X,Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства дисперсии</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема 3. Если случайные величины X и У имеют конечные дисперсии, то $D\left[\alpha X+\beta Y\right]=\alpha^2 D\left[X\right]+\beta^2 D\left[Y\right]+2\alpha\beta\operatorname{cov}(X,Y), где\ \alpha\ и\ \beta\ константы$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства коэффициента корреляции</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема 4. Если случайные величины X и У имеют конечные дисперсии, то $-1\le r_{xy}\le 1$.
Теорема 5. Если случайные величины X и У связаны линейной зависимостью $Y=aX+b,\quad где\ a\ и\ b\ константы,\ то\ r_{xy}=\begin{cases} 1,\ если\ a>0, \\ -1,\ если\ a<0. \end{cases}$</td></tr>
</table>

Интервальная оценка числовых характеристик

	Оцениваемый параметр	Статистика	Плотность распределения	Интегральное уравнение	Решение интегрального уравнения	Доверительный интервал
1	Математическое ожидание a (дисперсия σ^2 известна)	$G(X,a) =$ $= \dfrac{\bar{x}-a}{\sigma}\sqrt{n},$ $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	Стандартное нормальное *N(0,1)* $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$	$\Phi(t_\gamma) =$ $= \int_0^{t_\gamma} \rho(t)dt = \dfrac{\gamma}{2}$	Таблица значений функции Лапласа $t_\gamma = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$ γ – доверительная вероятность 2ε – длина доверительного интервала	$\left(\bar{x} - \dfrac{\sigma t_\gamma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \dfrac{\sigma t_\gamma}{\sqrt{n}}\right)$
2	Математическое ожидание a (дисперсия σ^2 неизвестна)	$G(X,a) =$ $= \dfrac{\bar{x}-a}{\widetilde{S}}\sqrt{n},$ $\widetilde{S}^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$	Распределение Стьюдента с k=n-1 степенями свободы $S(t,n) =$ $= B_n (1 + \dfrac{t^2}{n-1})^{\frac{-n}{2}},$ $B_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$	$\int_0^{t_\gamma} S(t,n)dt = \dfrac{\gamma}{2}$	Таблица квантилей распределения Стьюдента $t_\gamma(n,\gamma) = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\widetilde{S}}$	$\left(\bar{x} - \dfrac{\widetilde{S} t_\gamma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \dfrac{\widetilde{S} t_\gamma}{\sqrt{n}}\right)$
3	Дисперсия σ^2	$G(X,\sigma^2) =$ $= \dfrac{n-1}{\sigma^2}\widetilde{S}^2 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ с k = n–1 степенями свободы	Распределение *хи*-квадрат $P_k(x) = \dfrac{x^{\frac{k-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$ с k степенями свободы	$q = \dfrac{1-\gamma}{2}$ $\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} P_k(x)dx = \gamma$	$\left.\begin{aligned} k &= n-1 \\ q &= \dfrac{1-\gamma}{2} \end{aligned}\right\} x_2^2(\gamma)$ $\left.\begin{aligned} k &= n-1 \\ 1&-q \end{aligned}\right\} x_1^2(\gamma)$	σ² $\left(\dfrac{(n-1)\widetilde{S}^2}{x_2^2(\gamma)}; \dfrac{(n-1)\widetilde{S}^2}{x_1^2(\gamma)}\right)$ σ $\left(\dfrac{\sqrt{n-1}}{x_2(\gamma)}\widetilde{S}; \dfrac{\sqrt{n-1}}{x_1(\gamma)}\widetilde{S}\right)$
					$x_2^2(\gamma) = \dfrac{n-1}{\max^2(0;1-q_\gamma)}$ $x_1^2(\gamma) = \dfrac{n-1}{(1+q_\gamma)^2}$	σ² $\max^2(0;1-q_\gamma)\widetilde{S}^2 < \sigma^2 <$ $< (1+q_\gamma)^2\widetilde{S}^2$

Гипотеза проверки однородности двух выборок

Критерий Смирнова		Критерий Вилкоксона ($n_1 \le n_2$)			
n, m – объёмы выборок	Эмпирические функции распределения: $F_{1,n}$ и $F_{2,m}$	Расположить выборки в виде одного вариационного ряда (n_1 – объём первой выборки, n_2 – объём второй выборки); $\omega_{набл.}$ – сумма порядковых номеров первой выборки в образованном вариационном ряду			
Статистика критерия	$D_{nm} = \max\limits_{-\infty<x<\infty} \left\|F_{1,n}(x) - F_{2,m}(x)\right\|$	Альтернативные гипотезы	Основная гипотеза $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$		
			$n_1 \le n_2 \le 25$	$n_1 > 25 \cup n_2 > 25$	Кр.Вилкоксона
Наблюдаемое значение критерия $\lambda_{набл}$	$\lambda_{набл.} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm}$	$H_1 : F_1(x) \ne F_2(x)$ - –двусторонняя критическая область	$\omega_{н.кр.т.}(Q = \frac{\alpha}{2}, n_1, n_2)$ – из таблицы критических точек критерия Вилкоксона $\varpi_{в.кр.т.} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - \omega_{н.кр.т}$	$\omega_{н.кр.т.} = \left[\frac{(n_1+n_2+1)n_1 - 1}{2} - z_{кр.}\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}}\right]$; $\Phi(z_{кр.}) = \frac{1-\alpha}{2}$ – *функция Лапласа*; $\omega_{в.кр.т} = (n_1+n_2+1)n_1 - \omega_{н.кр.т}$	H_0 принимают, если $\omega_{н.кр.т.} < \omega_{набл.} < \omega_{в.кр.т.}$
Критическая точка $\lambda_{кр.}$распределения Колмогорова $K(\lambda)$, α – уровень значимости	$P(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} < \lambda_{кр.}) = K(\lambda_{кр.}) = 1 + 2\sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^j e^{-2j^2\lambda_{кр}^2} = 1 - \alpha$	$H_1 : F_1(x) > F_2(x)$ - –левосторонняя критическая область	$\omega_{н.кр.т.}(Q = \alpha, n_1, n_2)$ – из таблицы критических точек критерия Вилкоксона	$\omega_{н.кр.т.} = \left[\frac{(n_1+n_2+1)n_1 - 1}{2} - z_{кр.}\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}}\right]$; $\Phi(z_{кр.}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ – *функция Лапласа*;	H_0 принимают, если $\omega_{набл.} > \omega_{н.кр.т.}$
Гипотезы Смирнова $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$ $H_1 : F_1(x) \ne F_2(x)$	$\lambda_{набл.} < \lambda_{кр.}$ – H_0 *принимают* $\lambda_{набл.} \ge \lambda_{кр.}$ – H_0 *отвергают*	$H_1 : F_1(x) < F_2(x)$ – правосторонняя критическая область	$\omega_{н.кр.т.}(Q = \alpha, n_1, n_2)$ – из таблицы критических точек критерия Вилкоксона $\varpi_{в.кр.т.} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - \omega_{н.кр.т}$	$\omega_{н.кр.т.} = \left[\frac{(n_1+n_2+1)n_1 - 1}{2} - z_{кр.}\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}}\right]$; $\Phi(z_{кр.}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ – *функция Лапласа*; $\omega_{в.кр.т} = (n_1+n_2+1)n_1 - \omega_{н.кр.т}$	H_0 принимают, если $\omega_{набл.} < \omega_{в.кр.т.}$

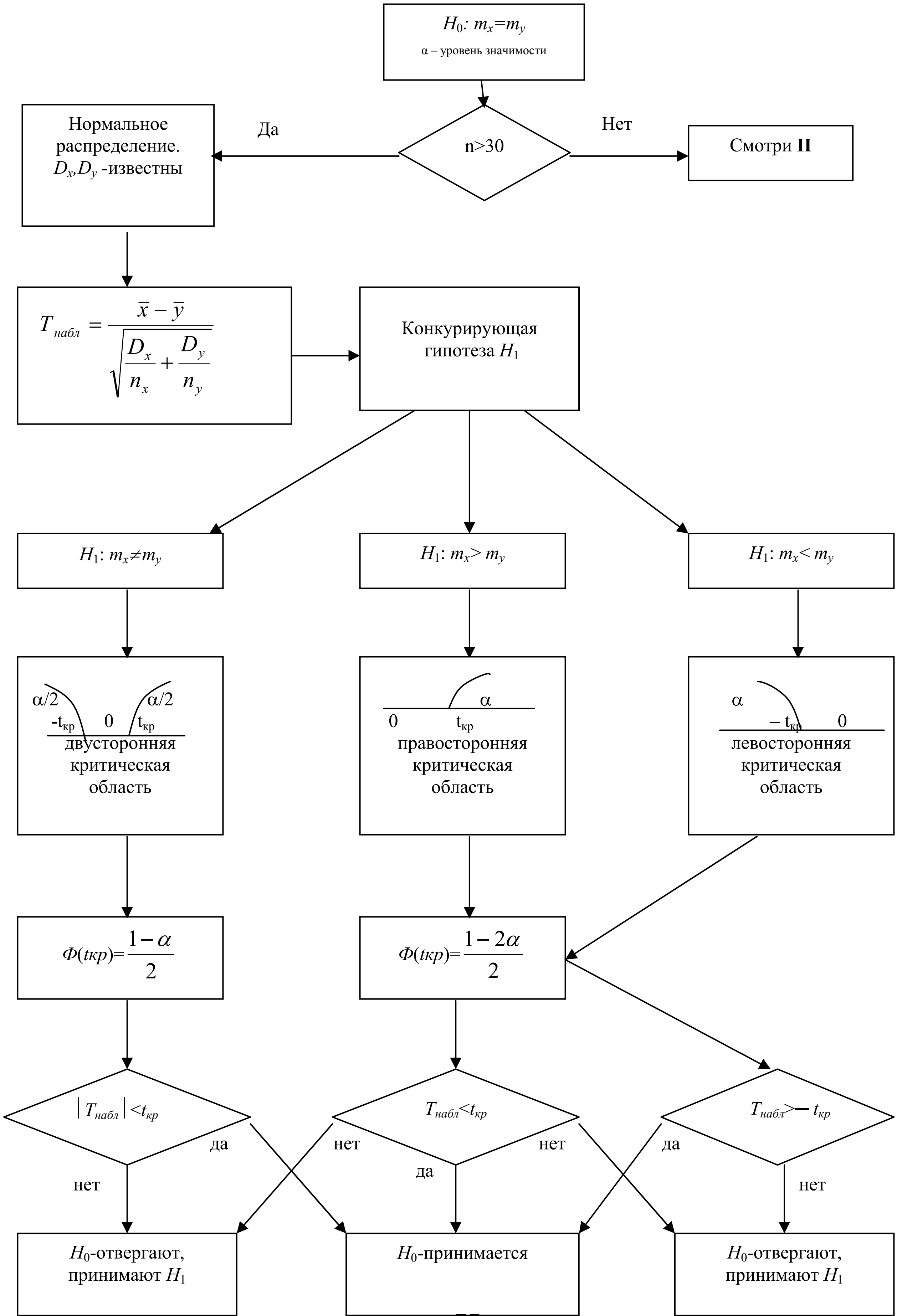
Гипотеза о независимости 2-х признаков

Критерий Кендалла		Критерий Спирмена			
A: 1, 2, …, *n* *B*: y_1, y_2, …, y_n	R_k – число рангов, больших y_k	*A*: R_1, R_2, …, R_n *B*: S_1, S_2, …, S_n	*R*, *S* – ранги выборки по признакам *A* и *B*	*A*: 1, 2, …, *n* *B*: T_1, T_2, …, T_n	*T* – ранги выборки по признаку *B*
Статистика критерия	$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}$	Статистика критерия	$DR_i = R_i - \overline{R}$; $DS_i = S_i - \overline{S}$	Статистика критерия	$d_i = i - T_i$
Выборочный коэфф. ранговой корреляции Кендалла $\tau_в$	$\tau_в = \frac{4R}{n(n-1)} - 1$	Выборочный коэфф. ранговой корреляции Спирмена $r_в$ $T_{набл} = r_в\sqrt{\frac{n-2}{1-r_в^2}}$	$r_в = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} DR_i DS_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} DR_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} DS_i^2}}$	Выборочный коэфф. ранговой корреляции Спирмена $\rho_в$	$\rho_в = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2$
Критическая точка $T_{кр}$	$T_{кр} = z_{кр}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}$ $\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$	Критическая точка $t_{кр}(\alpha, n-2)$	$t_{кр}(\alpha, n-2)$ – из таблицы распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область)	Критическая точка $T_{кр} = t_{кр}(\alpha, n-2)\sqrt{\frac{1-\rho_в^2}{n-2}}$	$t_{кр}(\alpha, n-2)$ – из таблицы распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область)
Гипотезы Кендалла $H_0 : \tau_в = 0$; $H_1 : \tau_в \ne 0$	$\|\tau_в\| < T_{кр}$ – H_0 принимают, связь признаков незначимая	Гипотезы Спирмена $H_0 : r_в = 0$; $H_1 : r_в \ne 0$	$\|T_{набл}\| < t_{кр}$ – H_0 принимают, связь признаков незначимая	Гипотезы Спирмена $H_0 : \rho_в = 0$; $H_1 : \rho_в \ne 0$	$\|\rho_в\| < T_{кр}$ – H_0 принимают, связь признаков незначимая

I **I**

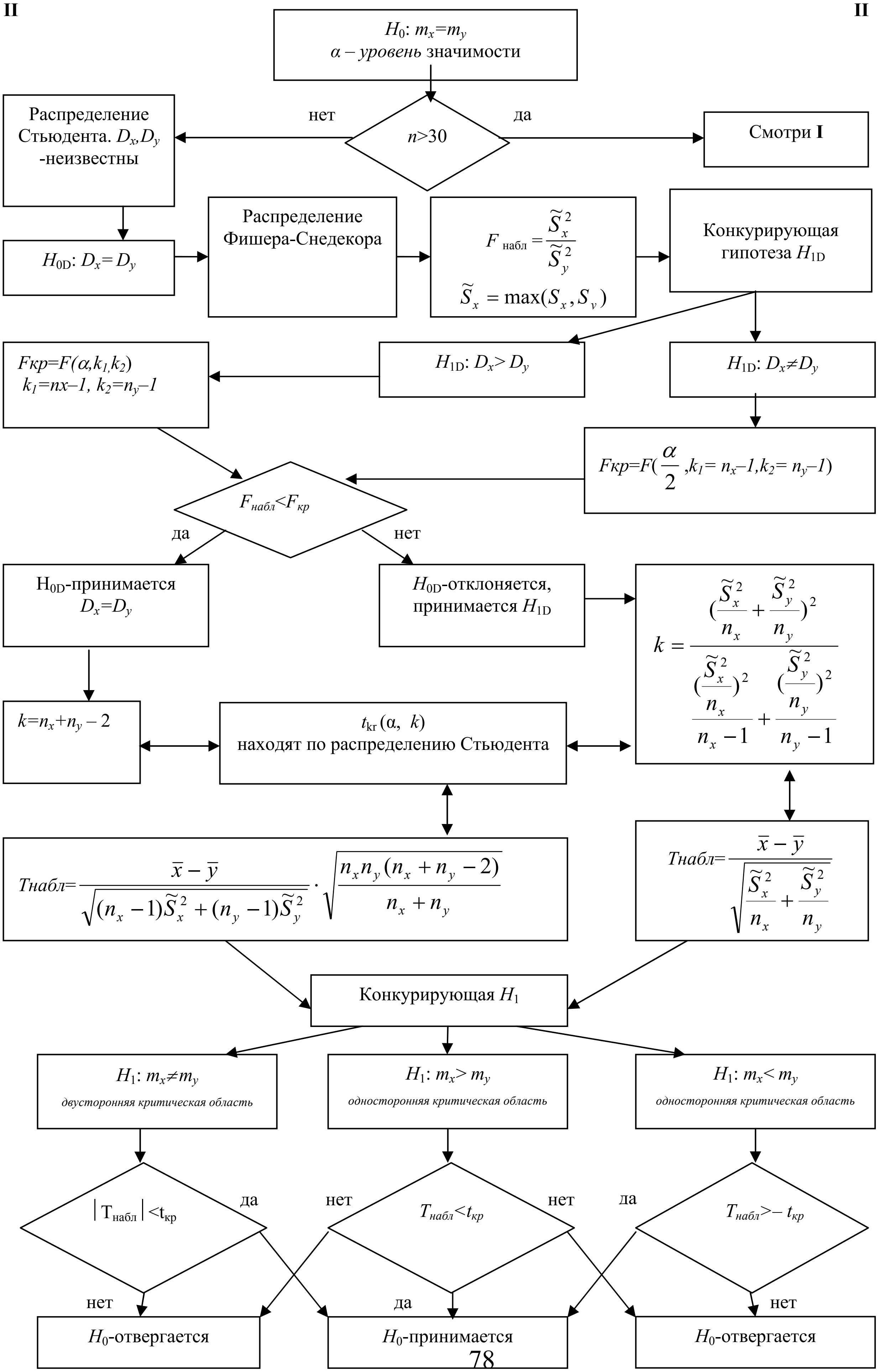
Сравнение двух средних генеральных совокупностей.

(независимые выборки)



Сравнение двух средних генеральных совокупностей.

(независимые выборки)



Проверка гипотезы о равенстве вероятностей событий в испытаниях по схеме Бернулли

Нулевая гипотеза $H_0 : p_1 = p_2$**;** $w_1 = \frac{m_1}{n_1}$; $w_2 = \frac{m_2}{n_2}$; $w = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$;

$w_1 \to N(p_1; \frac{p_1 q_1}{n_1})$ $w_2 \to N(p_2; \frac{p_2 q_2}{n_2})$ **(n_1, n_2 $\geq$100)**

Очевидно, что если испытания независимы в пределах каждой выборки и между выборками, то величины m_1 и m_2 независимы, тогда w_1 и w_2 также независимы. Поэтому

$$w_1 - w_2 \to N(p_1 - p_2; \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}) \Longrightarrow \frac{(w_1 - w_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \to N(0; 1)$$

Следовательно, проверка нулевой гипотезы осуществляется при помощи критерия

$$w_1 = \frac{m_1}{n_1}; \quad w_2 = \frac{m_2}{n_2}; \quad w = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}; \quad u_{набл.} = \frac{w_1 - w_2}{\sqrt{w(1-w)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

	Альтернативная гипотеза	Критические точки	Правило принятия решения: H_0 отклоняется, если
а	$H_1 : p_1 \neq p_2$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-\alpha}{2}$	$\lvert u_{набл} \rvert \geq u^{двустор}_{крит; \frac{\alpha}{2}}$
б	$H_1 : p_1 > p_2$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-2\alpha}{2}$	$u_{набл} \geq u^{правостор}_{крит; \alpha}$
в	$H_1 : p_1 < p_2$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-2\alpha}{2}$	$u_{набл} \leq -u^{левостор}_{крит; \alpha}$

Следствие. Проверка гипотезы о численном значении вероятности события в испытаниях по схеме Бернулли

Нулевая гипотеза $H_0 : p = p_0$

$$w = \frac{m}{n}; \quad u_{набл.} = \frac{w - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)\frac{1}{n}}}$$

	Альтернативная гипотеза	Критические точки	Правило принятия решения: H_0 отклоняется, если
а	$H_1 : p_1 \neq p_0$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-\alpha}{2}$	$\lvert u_{набл} \rvert \geq u^{двустор}_{крит; \frac{\alpha}{2}}$
б	$H_1 : p_1 > p_0$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-2\alpha}{2}$	$u_{набл} \geq u^{правостор}_{крит; \alpha}$
в	$H_1 : p_1 < p_0$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-2\alpha}{2}$	$u_{набл} \leq -u^{левостор}_{крит; \alpha}$