Интервальная оценка числовых характеристик

	Оцениваемый параметр	Статистика	Плотность распределения	Интегральное уравнение	Решение интегрального уравнения	Доверительный интервал
1	Математическое ожидание a (дисперсия σ^2 известна)	$G(X,a)=$ $=\dfrac{\bar{x}-a}{\sigma}\sqrt{n},$ $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$	Стандартное нормальное *N(0,1)* $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$	$\Phi(t_\gamma)=$ $=\int\limits_0^{t_\gamma}\rho(t)dt=\dfrac{\gamma}{2}$	Таблица значений функции Лапласа $t_\gamma=\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$ γ – доверительная вероятность 2ε – длина доверительного интервала	$\left(\bar{x}-\dfrac{\sigma t_\gamma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\dfrac{\sigma t_\gamma}{\sqrt{n}}\right)$
2	Математическое ожидание a (дисперсия σ^2 неизвестна)	$G(X,a)=$ $=\dfrac{\bar{x}-a}{\tilde{S}}\sqrt{n},$ $\tilde{S}^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$	Распределение Стьюдента с k=n-1 степенями свободы $S(t,n)=$ $=B_n(1+\dfrac{t^2}{n-1})^{\frac{-n}{2}},$ $B_n=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ $\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$	$\int\limits_0^{t_\gamma}S(t,n)dt=\dfrac{\gamma}{2}$	Таблица квантилей распределения Стьюдента $t_\gamma(n,\gamma)=\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\tilde{S}}$	$\left(\bar{x}-\dfrac{\tilde{S}t_\gamma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\dfrac{\tilde{S}t_\gamma}{\sqrt{n}}\right)$
3	Дисперсия σ^2	$G(X,\sigma^2)=$ $=\dfrac{n-1}{\sigma^2}\tilde{S}^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ с $k=n$–1 степенями свободы	Распределение *хи*-квадрат $P_k(x)=\dfrac{x^{\frac{k-2}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$ с k степенями свободы	$q=\dfrac{1-\gamma}{2}$ $\int\limits_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}}P_k(x)dx=\gamma$	$\left.\begin{matrix}k=n-1\\ q=\dfrac{1-\gamma}{2}\end{matrix}\right\}x_2^2(\gamma)$ $\left.\begin{matrix}k=n-1\\ 1-q\end{matrix}\right\}x_1^2(\gamma)$	σ² $\left(\dfrac{(n-1)\tilde{S}^2}{x_2^2(\gamma)};\dfrac{(n-1)\tilde{S}^2}{x_1^2(\gamma)}\right)$ σ $\left(\dfrac{\sqrt{n-1}}{x_2(\gamma)}\tilde{S};\dfrac{\sqrt{n-1}}{x_1(\gamma)}\tilde{S}\right)$
					$x_2^2(\gamma)=\dfrac{n-1}{\max^2(0;1-q_\gamma)}$ $x_1^2(\gamma)=\dfrac{n-1}{(1+q_\gamma)^2}$	σ² $\max^2(0;1-q_\gamma)\tilde{S}^2<\sigma^2<$ $<(1+q_\gamma)^2\tilde{S}^2$

Гипотеза проверки однородности двух выборок

Критерий Смирнова	
n, m – объёмы выборок	Эмпирические функции распределения: $F_{1,n}$, и $F_{2,m}$
Статистика критерия	$D_{nm} = \max\limits_{-\infty<x<\infty} \lvert F_{1,n}(x) - F_{2,m}(x) \rvert$
Наблюдаемое значение критерия $\lambda_{набл}$	$\lambda_{набл.} = \sqrt{\dfrac{nm}{n+m}} D_{nm}$
Критическая точка $\lambda_{кр.}$ распределения Колмогорова $K(\lambda)$, α – уровень значимости	$P\left(\sqrt{\dfrac{nm}{n+m}} D_{nm} < \lambda_{кр.}\right) = K(\lambda_{кр.}) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2\lambda_{кр}^2} = 1-\alpha$
Гипотезы Смирнова $H_0: F_1(x) = F_2(x)$; $H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$	$\lambda_{набл.} < \lambda_{кр.}$ – H_0 *принимают* $\lambda_{набл.} \geq \lambda_{кр.}$ – H_0 *отвергают*

Критерий Вилкоксона ($n_1 \leq n_2$)			
Расположить выборки в виде одного вариационного ряда (n_1 – объём первой выборки, n_2 – объём второй выборки); $\omega_{набл.}$ – сумма порядковых номеров первой выборки в образованном вариационном ряду			
Альтернативные гипотезы	Основная гипотеза $H_0: F_1(x) = F_2(x)$		
	$n_1 \leq n_2 \leq 25$	$n_1 > 25 \cup n_2 > 25$	Кр.Вилкоксона
$H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$ - –двусторонняя критическая область	$\omega_{н.кр.т.}\left(Q = \dfrac{\alpha}{2}, n_1, n_2\right)$ – из таблицы критических точек критерия Вилкоксона $\varpi_{в.кр.т.} = (n_1+n_2+1)n_1 - \omega_{н.кр.т}$	$\omega_{н.кр.т.} = \left[\dfrac{(n_1+n_2+1)n_1-1}{2} - z_{кр.}\sqrt{\dfrac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}\right]$; $\Phi(z_{кр.}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$ – *функция Лапласа*; $\omega_{в.кр.т} = (n_1+n_2+1)n_1 - \omega_{н.кр.т}$	H_0 принимают, если $\omega_{н.кр.т.} < \omega_{набл.} < \omega_{в.кр.т.}$
$H_1: F_1(x) > F_2(x)$ - –левосторонняя критическая область	$\omega_{н.кр.т.}(Q = \alpha, n_1, n_2)$ – из таблицы критических точек критерия Вилкоксона	$\omega_{н.кр.т.} = \left[\dfrac{(n_1+n_2+1)n_1-1}{2} - z_{кр.}\sqrt{\dfrac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}\right]$; $\Phi(z_{кр.}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$ – *функция Лапласа*;	H_0 принимают, если $\omega_{набл.} > \omega_{н.кр.т.}$
$H_1: F_1(x) < F_2(x)$ –правосторонняя критическая область	$\omega_{н.кр.т.}(Q = \alpha, n_1, n_2)$ – из таблицы критических точек критерия Вилкоксона $\varpi_{в.кр.т.} = (n_1+n_2+1)n_1 - \omega_{н.кр.т}$	$\omega_{н.кр.т.} = \left[\dfrac{(n_1+n_2+1)n_1-1}{2} - z_{кр.}\sqrt{\dfrac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}\right]$; $\Phi(z_{кр.}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$ – *функция Лапласа*; $\omega_{в.кр.т} = (n_1+n_2+1)n_1 - \omega_{н.кр.т}$	H_0 принимают, если $\omega_{набл.} < \omega_{в.кр.т.}$

Гипотеза о независимости 2-х признаков

Критерий Кендалла

A	1	2	…	*n*
B	y_1	y_2	…	y_n

	R_k – число рангов, больших y_k
Статистика критерия	$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}$
Выборочный коэфф. ранговой корреляции Кендалла $\tau_в$	$\tau_в = \dfrac{4R}{n(n-1)} - 1$
Критическая точка $T_{кр}$	$T_{кр} = z_{кр}\sqrt{\dfrac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}$ $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$
Гипотезы Кендалла $H_0: \tau_в = 0$; $H_1: \tau_в \neq 0$	$\lvert\tau_в\rvert < T_{кр}$ – H_0 принимают, связь признаков незначимая

Критерий Спирмена

A	R_1	R_2	…	R_n
B	S_1	S_2	…	S_n

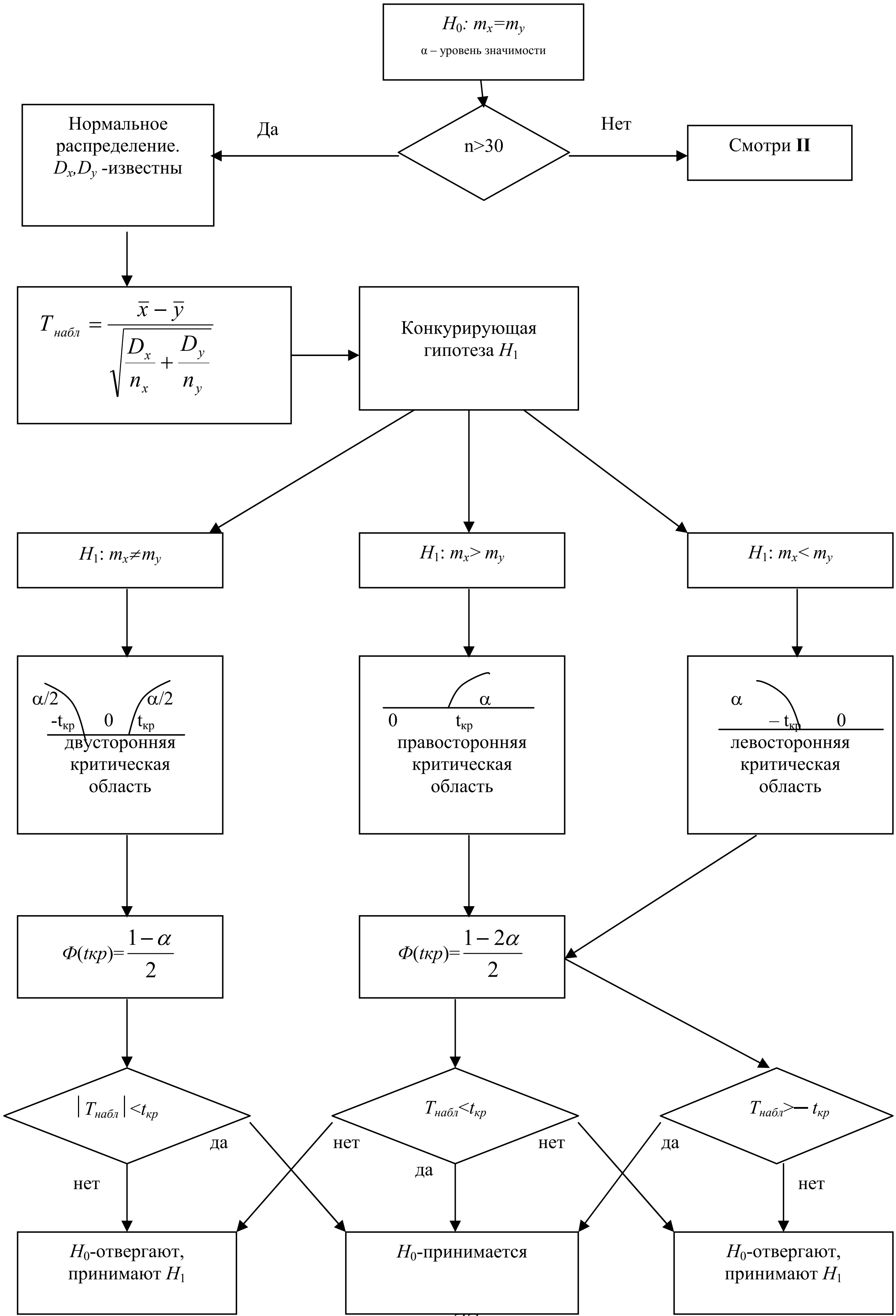
A	1	2	…	*n*
B	T_1	T_2	…	T_n

	R, S – ранги выборки по признакам A и B		T – ранги выборки по признаку B
Статистика критерия	$DR_i = R_i - \overline{R}$; $DS_i = S_i - \overline{S}$	Статистика критерия	$d_i = i - T_i$
Выборочный коэфф. ранговой корреляции Спирмена $r_в$ $T_{набл} = r_в\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r_в^2}}$	$r_в = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} DR_i DS_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} DR_i^2 \sum_{i=1}^{n} DS_i^2}}$	Выборочный коэфф. ранговой корреляции Спирмена $\rho_в$	$\rho_в = 1 - \dfrac{6}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n} d_i^2$
Критическая точка $t_{кр}(\alpha, n-2)$	$t_{кр}(\alpha, n-2)$ – из таблицы распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область)	Критическая точка $T_{кр} = t_{кр}(\alpha, n-2)\sqrt{\dfrac{1-\rho_в^2}{n-2}}$	$t_{кр}(\alpha, n-2)$ – из таблицы распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область)
Гипотезы Спирмена $H_0: r_в = 0$; $H_1: r_в \neq 0$	$\lvert T_{набл}\rvert < t_{кр}$ – H_0 принимают, связь признаков незначимая	Гипотезы Спирмена $H_0: \rho_в = 0$; $H_1: \rho_в \neq 0$	$\lvert\rho_в\rvert < T_{кр}$ – H_0 принимают, связь признаков незначимая

Сравнение двух средних генеральных совокупностей.

(независимые выборки)

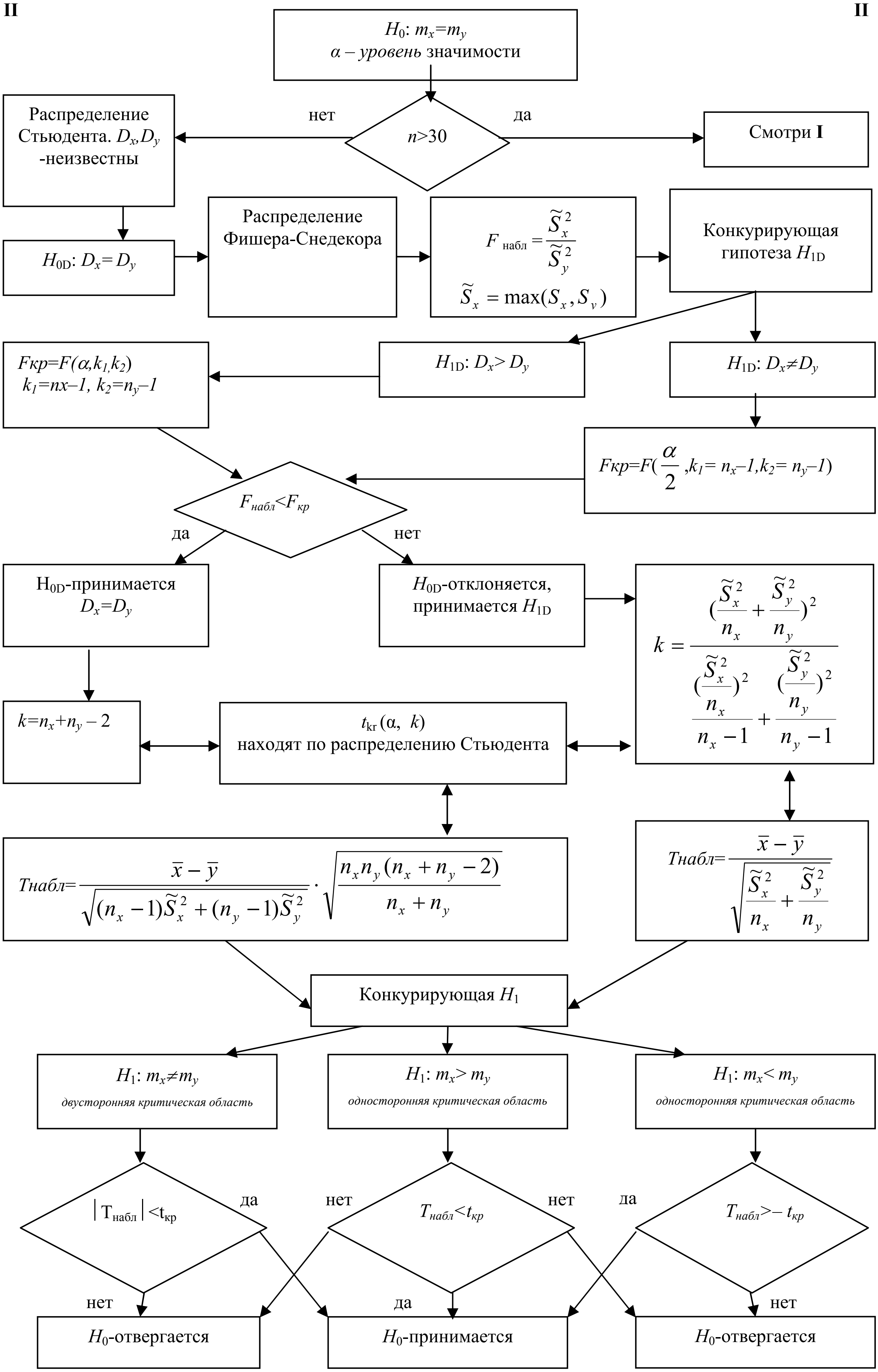
I **I**



Сравнение двух средних генеральных совокупностей.

(независимые выборки)

II II



Проверка гипотезы о равенстве вероятностей событий в испытаниях по схеме Бернулли

Нулевая гипотеза $H_0 : p_1 = p_2$**;** $\quad w_1 = \frac{m_1}{n_1}; \quad w_2 = \frac{m_2}{n_2}; \quad w = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2};$

$w_1 \to N(p_1; \frac{p_1 q_1}{n_1}) \qquad w_2 \to N(p_2; \frac{p_2 q_2}{n_2}) \qquad$ **(n_1, n_2 $\geq$100)**

Очевидно, что если испытания независимы в пределах каждой выборки и между выборками, то величины m_1 и m_2 независимы, тогда w_1 и w_2 также независимы. Поэтому

$$w_1 - w_2 \to N(p_1 - p_2; \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}) \Longrightarrow \frac{(w_1 - w_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \to N(0; 1)$$

Следовательно, проверка нулевой гипотезы осуществляется при помощи критерия

$$w_1 = \frac{m_1}{n_1}; \quad w_2 = \frac{m_2}{n_2}; \quad w = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}; \quad u_{набл.} = \frac{w_1 - w_2}{\sqrt{w(1-w)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

	Альтернативная гипотеза	Критические точки	Правило принятия решения: H_0 отклоняется, если
а	$H_1 : p_1 \neq p_2$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-\alpha}{2}$	$\lvert u_{набл} \rvert \geq u^{двустор}_{крит; \frac{\alpha}{2}}$
б	$H_1 : p_1 > p_2$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-2\alpha}{2}$	$u_{набл} \geq u^{правостор}_{крит; \alpha}$
в	$H_1 : p_1 < p_2$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-2\alpha}{2}$	$u_{набл} \leq -u^{левостор}_{крит; \alpha}$

Следствие. Проверка гипотезы о численном значении вероятности события в испытаниях по схеме Бернулли

Нулевая гипотеза $H_0 : p = p_0$

$$w = \frac{m}{n}; \quad u_{набл.} = \frac{w - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)\frac{1}{n}}}$$

	Альтернативная гипотеза	Критические точки	Правило принятия решения: H_0 отклоняется, если
а	$H_1 : p_1 \neq p_0$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-\alpha}{2}$	$\lvert u_{набл} \rvert \geq u^{двустор}_{крит; \frac{\alpha}{2}}$
б	$H_1 : p_1 > p_0$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-2\alpha}{2}$	$u_{набл} \geq u^{правостор}_{крит; \alpha}$
в	$H_1 : p_1 < p_0$	$\Phi(u_{крит}) = \frac{1-2\alpha}{2}$	$u_{набл} \leq -u^{левостор}_{крит; \alpha}$