УДК 519.2

Статистическое моделирование: Метод. указания по выполнению лабораторных работ и индивидуального задания по математической статистике для студентов дневного и заочного отделений всех специальностей. — Томск: Изд. ТПУ, 2000.- 36 с.

Составитель доц., к.ф.-м.н. Ю.И. Галанов

Рецензент доц., канд.ф.-м.н А.А Лучинин.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики

«20» января 2000 г.

Зав. кафедрой

проф. проф., д-р ф.-м.н. К.П. Арефьев

3. Приложение

3.1 Индивидуальное задание к теме «Моделирование случайных величин»

Исходные данные.

Даны случайные величины с известными распределениями:

- случайная величина ξ распределена нормально с параметрами a, σ;
- случайная величина η имеет показательное распределение с параметром λ;
- случайная величина ζ имеет биномиальное распределение с параметрами n, p;
- случайная величина ψ распределена по закону Пуассона с параметром λ;
- случайная величина ρ имеет распределение Релея с параметром σ;
- случайная величина κ имеет распределение Коши с параметрами a, b;
- случайная величина ϕ имеет распределение арксинуса с параметрами a, b;
- ω — изотропный вектор с координатами $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Задание.

1. Смоделировать необходимые выборки согласно индивидуальным заданиям.
2. Оценить среднее значение функции и сравнить его с функцией от средних значений.
3. Найти 95-ти процентный доверительный интервал для функции $F\{\xi,\eta,\zeta,\psi,\omega\}$.
4. Построить 95-ти процентный доверительный интервал для среднего значения функции. Подогнать его так, чтобы он укладывался в 5-ти процентную относительную ошибку.
5. Сопоставить выборочные законы распределения случайных величин $\xi,\eta,\zeta,\psi,\omega$ и функции $F\{\xi,\eta,\zeta,\psi,\omega\}$.

Образец выполнения индивидуального задания

Дано:

- **случайная величина *V* - распределена нормально с параметрами *N(2, 0.8)*;**
- **случайная величина *B* имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5, p = 0.35$;**
- ***X,Y, Z* - координаты изотропного вектора.**

- **Принять относительную погрешность вычисления значения функции равной 2.5%.**

Создаем выборку из нормального распределения:

$$k := 0 \ldots N-1$$
$$V_k := 2 + 0.8\cdot\left(\sin(2\cdot\pi\cdot rnd(1))\cdot\sqrt{-2\cdot\ln(rnd(1))}\right)$$

Создаем выборку из биномиального распределения

$$n := 5 \quad i := 0 \quad p := 0.35 \quad B_k := \sum_i \Phi(p - rnd(1))$$

Моделируем изотропный вектор

$$Z_k := 2\cdot rnd(1) - 1 \quad Fi_k := rnd(2\cdot\pi)$$

$$X_k := \sqrt{1 - Z_k^2}\cdot\cos(Fi_k) \quad Y_k := \sqrt{1 - Z_k^2}\cdot\sin(Fi_k)$$

Создаем массив значений функции.

$$Fun := \overrightarrow{F(V,B,X,Y,Z)}$$

Оцениваем значения функции и ее дисперсии:

$$MF := mean(Fun) \quad MF := 3.3757$$
$$DF := var(Fun) \quad DF := 7.8320$$

Значение функции от средних:

$$F(mean(V), mean(B), mean(X), mean(Y), mean(Z)) := 121.4548$$

При построении 95-ти процентного доверительного интервала используем статистику STAT, полагая при этом, что ее распределение близко к стандартному :

$$STAT := \frac{Fun - MF}{\sqrt{\frac{DF}{N}}} \quad |STAT| < 1.96$$

Рассчитаем границы доверительного интервала и относительную погрешность значения функции:

$$DI := \begin{bmatrix} MF - \sqrt{\frac{DF}{N}}\cdot 1.96 \\ MF + \sqrt{\frac{DF}{N}}\cdot 1.96 \end{bmatrix} \quad DI = \begin{bmatrix} 3.20228 \\ 3.54919 \end{bmatrix}$$

$$N \equiv 1000 \quad \delta := \frac{(DI_1 - DI_0)}{2\cdot MF} \quad \delta = 0.04921$$

Пока данная величина не станет меньше, чем заданная погрешность, будем увеличивать число элементов выборки N.

N	50	200	500	2000	100	250	1000	4000
δ	0.218	0.102	0.068	0.032	0.171	0.099	0.048	0.024

Получены результаты, из которых видно, что требуемая точность вычислений достигается при N= 4000.

Построение гистограммы функции:

$$SF := sort(Fun) \quad R := \frac{N}{20} \quad r := 0..R-1 \quad h := \frac{SF_{N-1} - SF_0}{R}$$

$$d_r := SF_0 + r \cdot h \quad H := \frac{hist(d, SF)}{N \cdot h} \quad H_{last(H)+1} := 0$$

Выведем результаты на график:

$$x := -1, -0.8 .. 10 \quad m := 0..5$$

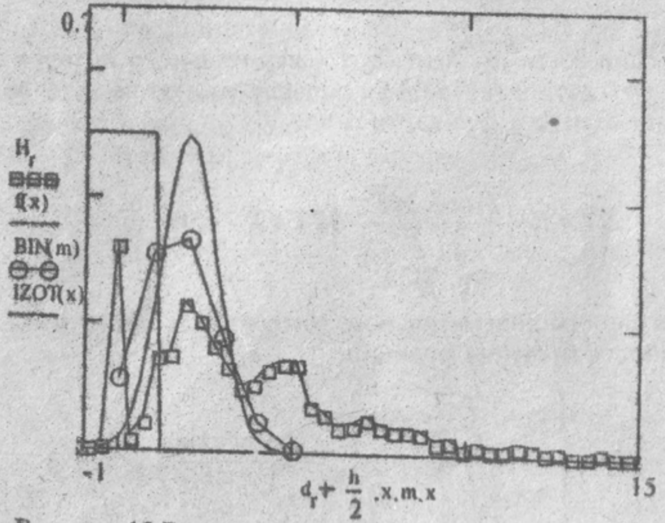

Рисунок 13 Распределения исходных случайных величин и функции от них.

Модельные распределения задаются следующими выражениями:

$$BIN(m) \equiv \frac{5!}{m! \cdot (5-m)!} \cdot 0.35^m \cdot 0.65^{5-m}$$

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 0.8}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{2 \cdot 0.64}\right) \quad IZOT(x) := if(x < -1, 0, if(x < 1, 0.5, 0))$$

Как видно из рисунка, плотность распределения функции имеет несколько максимумов в отличие от распределений аргументов. Это приводит к тому, что значения функции от *средних значений аргументов* значительно отличаются от оценки *среднего значения функции*.

Таблица 2 Варианты заданий.

№	a; b	σ	λ	n	P	F{ξ,η,ζ,ψ,ω}
1.	1	0.5	2	-	-	$(\xi^2 + \eta^2)/(1+\eta)$
2.	0.1	1.1	-	-	-	$\sin(2 \cdot \omega_1) \cdot \exp(\omega_2) \cdot \xi$
3.	π/4	π/16	2	-	-	$\arctan(\xi) \cdot (1+\psi^2)^{-1}$
4.	0.2	0.1	-	-	-	$\ln(1+\xi) \cdot [\omega_1^2 + \omega_2^2]^{-1}$
5.	π/2	0.5	1	-	-	$(\cos(\xi)+\eta) \cdot [\omega_1^2 + \omega_2^2]^{-1}$
6.	1	0.1	-	10	0.2	$\xi^2 \cdot \exp(\zeta^{-2})$
7.	2	0.5	-	-	-	$(\xi + \exp(\omega_1)) \cdot (1+\exp(2 \cdot \omega_2^2))^{-2}$
8.	π/4	π/32	-	-	-	$\arctan(\xi^2) \cdot (1+\arctan(\omega_1^2))^{-1}$
9.	0	1	1.2	10	0.1	$\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2$
10.	0.5	1	0.8	10	0.2	$(\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2) \cdot (2 + \tan(\zeta^2))^2$
11.	0.4	0.2	3	10	0.5	$(\cos(\xi)+\eta) \cdot (2+\tan(\zeta^{-2}))^2$
12.	0.1	1	3	15	0.45	$\exp[(\cos(\xi)+\eta) \cdot (1+\zeta)^{-1}]$
13.	-	3	4	-	-	$\cos(\psi) \cdot \exp(-\omega_1^2) \cdot \rho$
14.	0.1	2	-	20	0.3	$(\omega_1 + \xi) \cdot \arctan(1+\zeta)^{-1}$
15.	1;2	3	0.8	-	-	$\sin(\kappa^3) \cdot (\omega_1 + \xi) \cdot \arctan(1+\eta)^{-1}$
16.	2; 3	-	1	-	-	$\sin(\phi + \cos(\sqrt{1+\eta}))^3$
17.	1	0.8	2.5	-	-	$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \omega_1^2}$
18.	0.5	1.2	0.7	9	0.4	$\sqrt{\xi^2 + \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}$
19.	0.1	0.7	3.5	-	-	$\sin\left(\xi + \sqrt{\eta^2 + \omega_1^2}\right)^3$
20.	-1	1	0.5	-	-	$\sin((\cos(\xi^2)+\eta^2))$