Матрицы

Примеры решения задач

---

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) $A + B$; б) $2B$; в) B^T; г) AB^T; д) $B^T A$.

Решение.

а) По определению суммы матриц

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 & 2-1 \\ -2+3 & 1+1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

б) По определению произведения матрицы на число

$$2B = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

в) По определению транспонированной матрицы

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

г) По определению произведения матриц

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ (-2)\cdot 0 + 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) & (-2)\cdot 3 + 1\cdot 1 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

д) Аналогично пункту г) находим

$$B^T A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 5 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

---

2. Дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь:

a_{ij}, b_i ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$) − известные числа;

x_i ($i = 1, \ldots, n$) − неизвестные.

Записать эту систему в матричном виде.

Решение.

Введем $m \times n$-матрицу A с элементами a_{ij} и столбцы B с элементами $b_1,\ldots, b_m$ и X с элементами $x_1,\ldots, x_n$. Тогда данную систему можно записать в виде $AX = B$.■

---

3. Доказать равенство $(AB)^T = A^TB^T$.

Решение.

Пусть $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times k}$ − Согласно определению произведения матриц элементы c_{ij} матрицы $C = AB$ вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

Элементы матриц A^T, B^T, C^T и $D = B^TA^T$ обозначим соответственно через $a_{ij}{}^T$, $b_{ij}{}^T$, $c_{ij}{}^T$ и d_{ij}. Тогда в соответствии с равенством (1) имеем

$$a_{ij}{}^T = a_{ji},\ b_{ij}{}^T = b_{ji},\ c_{ij}{}^T = c_{ji}. \qquad (3)$$

а элементы d_{ij} матрицы $D = B^TA^T$ вычисляются по формуле

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il}^T a_{lj}^T, \quad i = 1, \ldots, k; \quad j = 1, \ldots, m$$

Отсюда, учитывая равенства (2) и (3), получаем

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{li}a_{jl} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{li} = c_{ji} = c_{ij}^T, \quad i = 1, \ldots, k; \quad j = 1, \ldots, m$$

Таким образом, элементы матриц D и C^T соответственно равны, поэтому $C^T = D$, т. е. $(AB)^T = B^TA^T$, что и требовалось доказать.

---

4. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ найти обратную.

Решение.

Положим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

По определению обратной матрицы $A^{-1}A = E$, т. е.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы в левой части равенства и приравнивая элементы полученной матрицы соответствующим элементам матрицы в правой части равенства, приходим к системе уравнений

$$a + 2b = 1,\ a + 3b = 0,\ c + 4d = 0,\ c + 3d = 1,$$

откуда находим $a = 3$, $b = -1$, $c = -2$, $d = 1$. Итак, матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию $A^{-1}A = E$.

Нетрудно проверить, что равенство $AA^{-1} = E$ также выполняется.

Таким образом, найденная матрица A^{-1} обратная по отношению к матрице A.

Определители

Примеры решения задач

---

1. Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$

Решение.

I способ. По правилу треугольников $D = 1 \cdot 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 7 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot 0 - 0 \cdot 5 \cdot (-3) - (-2) \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \cdot 7 = 5$.

II способ. Разложим определитель D по элементам первого столбца, а для нахождения алгебраических дополнений воспользуемся формулой $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Получим

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 7 + 2(2 \cdot (-1) - 7 \cdot (-3)) = 5.$$

---

2. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & -3 & 2 \\ 4 & 8 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Преобразуем определитель D, не меняя его значения, таким образом, чтобы все элементы первого столбца, кроме $a_{21} = 1$, стали равными нулю. С этой целью из первой строки вычтем вторую, умноженную на 2, к третьей строке прибавим вторую, а из четвертой строки вычтем вторую, умноженную на 4 (при этом значение определителя не изменится). Получим

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 13 & -6 \\ 1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 6 & -10 & 7 \\ 0 & 8 & 22 & -19 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель D по элементам первого столбца:

$$D = 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 13 & -6 \\ 6 & -10 & 7 \\ 8 & 22 & -19 \end{vmatrix}.$$

Чтобы вычислить полученный определитель третьего порядка, снова воспользуемся разложением по элементам первого столбца:

$$D = -1 \cdot \left(3 \begin{vmatrix} -10 & 7 \\ 22 & -19 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 13 & -6 \\ 22 & -19 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 13 & -6 \\ -10 & 7 \end{vmatrix} \right) =$$
$$= -1(3 \cdot 36 - 6 \cdot (-115) + 8 \cdot 151) = -2006.$$

---

3. Вывести формулу для вычисления определителя n-го порядка

$$D_n = \begin{vmatrix} p & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & p & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & p & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & p \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложим определитель D_n по элементам первого столбца:

$$D_n = pD_{n-1} - c\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & p & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & p \end{vmatrix}.$$

Определитель во втором слагаемом справа разложим по элементам первой строки. В результате получим рекуррентную формулу

$$D_n = pD_{n-1} - c^2 D_{n-1}. \qquad (2)$$

Учитывая, что $D_1 = p,\ D_2 = \begin{vmatrix} p & c \\ c & p \end{vmatrix} = p^2 - c^2$, по рекуррентной формуле можно последовательно найти D_3, D_4, ... Например,

$$D_3 = pD_2 - c^2 D_1 = p(p^2 - c^2) - c^2p = p^3 - 2c^2p$$

Выведем формулу для непосредственного вычисления D_n. С этой целью разобьем число p на сумму двух слагаемых (пока неизвестных), $p = a + b$, и запишем рекуррентную формулу (2) в двух видах:

$$D_n - aD_{n-1} = b\left(D_{n-1} - \frac{c^2}{b}D_{n-2}\right),$$
$$D_n - bD_{n-1} = a\left(D_{n-1} - \frac{c^2}{a}D_{n-2}\right).$$

Выберем теперь числа a и b так, что $ab = c^2$ (для этого нужно взять a и b равными корням квадратного уравнения $x^2 - px + c^2 = 0$, тогда a и $b = p$ и $ab = c^2$). Рекуррентные формулы перепишем в виде

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}),\ D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}).$$

Мы видим, что при указанном выборе чисел a и b величины $D_n - aD_{n-1}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем b, а величины $D_n - bD_{n-1}$ — геометрическую прогрессию со знаменателем a. По формуле общего члена геометрической прогрессии получаем

$$D_n - aD_{n-1} = b^{n-2}(D_2 - aD_1),\ D_n - bD_{n-1} = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

Если $a \neq b$, то из этой системы уравнений находим формулу для вычисления D_n:

$$D_n = xa^n + yb^n,$$

где

$$x = \frac{D_2 - bD_1}{a(a-b)}, \quad y = \frac{D_2 - aD_1}{b(b-a)}.$$

В случае $a = b$ получите формулу для вычисления D_n самостоятельно.

---

4. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Так как $\det A = 2 \neq 0$, то матрица A невырожденная и, следовательно, имеет обратную.

Элементы b_{ij} обратной матрицы находим по формуле $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$, где A_{ji} − алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A. В свою очередь для вычисления A_{ji} пользуемся формулой $A_{ji} = (-1)^{i+j}M_{ji}$. Имеем

$$b_{11} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad b_{12} = \frac{1}{2}(-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad b_{13} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3{,}5;$$
$$b_{21} = \frac{1}{2}(-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad b_{22} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad b_{23} = \frac{1}{2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$
$$b_{31} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad b_{32} = \frac{1}{2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad b_{33} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5.$$

Итак

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е. Удобный практический подход к вычислению матрицы A^{-1} состоит в следующем. Сначала записываем транспонированную матрицу для данной матрицы A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Затем составляем матрицу A^*, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A^T (матрица A^* называется *присоединенной* по отношению к матрице A):

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

И наконец, умножив матрицу A^* на число $\frac{1}{\det A}$, получаем искомую обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

5. Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Введем обозначения $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда данное уравнение можно записать в виде

$$AX = B.$$

Так как $\det A = 1$, то матрица A имеет обратную. Умножим обе части уравнения на матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Так как $A^{-1}A = E$ (единичная матрица) и $EX = X$, то $X = A^{-1}B$.

Итак, для нахождения матрицы X нужно найти матрицу A^{-1} и умножить на матрицу B. Имеем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Неоднородные системы линейных уравнений

Примеры решения задач

1. Доказать, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases} \tag{3}$$

совместна и найти ее общее решение.

Решение.

I способ. Столбец свободных членов, умноженный на 6, равен разности пятого и четвертого столбцов основной матрицы данной системы уравнений. Поэтому ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы, и, следовательно, система совместна.

Общее решение однородной системы уравнений, соответствующей (3), было найдено в примере 1 (с. 68). Чтобы найти частное решение системы (3), выделим в основной матрице A базисный минор, стоящий на пересечении первых двух строк со вторым и третьим столбцами (т. е. тот же минор, что и в упомянутом примере), отбросив последнее уравнение системы (3), а первые два запишем в виде

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 1 - 2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -2x_2 + 5x_3 = 1 - 4x_1 - \ \ x_4 - 7x_5. \end{cases}$$

Эта система равносильна исходной системе (3). Положим в ней "свободные" неизвестные равными нулю, т. е. $x_1 = x_4 = x_5 = 0$. В результате придем к системе уравнений

$$\begin{cases} - \ \ x_2 + 3x_3 = 1, \\ - 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. Таким образом, найдено частное решение системы (3): $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Общее решение системы (3) запишем по формуле (2):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

или, в координатах,

$x_1 = c_1$, $x_2 = 2 + 2c_1 + 13c_2 + c_3$,

$$x_3 = 1 + 5c_2 - c_3,\ x_4 = c_2,\ x_5 = c_3. \quad (4)$$

II способ. Применяя к строкам расширенной матрицы элементарные операции, не изменяющие ее ранга, преобразуем расширенную матрицу A^* к виду

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить матрицу A_1, ко второй строке матрицы A^* была прибавлена первая строка, умноженная на −2, а к третьей строке прибавлена первая, умноженная на −1. В матрице A_1 третья строка равна второй, умноженной на 2. Теперь очевидно, что $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^* = 2$ и $n - r = 3$.

Произведем такие же действия с уравнениями системы (3). Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ - x_3 + 5x_4 - x_5 = -1, \end{cases}$$

равносильную исходной. Второе уравнение запишем так:

$$x_3 = 5x_4 - x_5 + 1,$$

и, подставляя x_3 в первое уравнение, выразим x_2 через остальные неизвестные: $x_2 = 2 + 2x_1 + 13x_5$. Итак, имеем

$$\begin{cases} x_2 = 2 + 2x_1 + 13x_4 + x_5, \\ x_3 = 1 + 5x_4 - x_5, \end{cases}$$

где x_1, x_4, x_5 могут принимать любые значения. Положив $x_1 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, получим решение задачи в виде (4).

Однородные системы линейных уравнений

Примеры решения задач

1. Найти ФСР и общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Её ранг равен 2. Поэтому размерность пространства решений данной системы равна $n - r = 5 - 2 = 3$ и ее ФСР состоит из трех решений. В матрице A возьмем в качестве базисного минора выделенный рамкой минор второго порядка. Третья строка матрицы A является линейной комбинацией базисных строк, поэтому последнее уравнение системы является следствием первых двух уравнений и его можно отбросить. В первых двух уравнениях члены, соответствующие базисному минору, оставляем в левой части, а неизвестные x_1, x_4, x_5 считаем "свободными" и переносим члены с этими неизвестными в правые части уравнений. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4x_1 - x_4 - 7x_5, \end{cases} \tag{3}$$

равносильной исходной системе, т. е. множество решений системы (3) совпадает с множеством решений исходной системы уравнений.

Найдем первое базисное решение X_1. Для этого положим $x_1 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$.Система (3) примет вид

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Определителем матрицы полученной системы является базисный минор, отличный от нуля. Следовательно, эта система имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера: $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. Таким образом, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Полагая в системе (3) $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, аналогично находим $x_2 = 13$, $x_3 = 5$, т. е. вторым базисным решением является столбец $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Наконец, полагая $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, находим $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Следовательно, третье базисное решение есть $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Итак, ФСР, состоящая из решений X_1, X_2, X_3, построена. Отметим, что построенная таким образом ФСР называется *нормальной* ФСР. Подчеркнем, что столбцы X_1, X_2, X_3, образующие нормальную ФСР, линейно независимы, поскольку "свободные" неизвестные x_1, x_4, x_5 были выбраны так, что выделенный рамками минор третьего порядка в матрице из этих столбцов

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \\ 2 \quad 13 \quad 1 \\ 0 \quad 5 \quad -1 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля, и поэтому ранг этой матрицы равен 3, т. е. равен числу столбцов матрицы.

Напишем теперь общее решение исходной системы уравнений:

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3,$$

или, в координатах,

$$x_1 = c_1,\ x_2 = 2c_1 + 13c_2 + c_3,\ x_3 = 5c_2 - c_3,\ x_4 = c_2,\ x_5 = c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.■

---

2. Известно, что столбцы $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют ФСР некоторой однородной системы линейных уравнений.

Из скольких уравнений может состоять эта система? Привести пример такой системы, состоящей из трех уравнений.

Решение.

Ответим вначале на первый вопрос задачи. Так как столбцы X_1 и X_2 имеют по четыре элемента, то число n неизвестных системы равно 4. Число решений в ФСР по условию равно 2, т. е. $n - r = 2$. Поэтому ранг матрицы системы уравнений равен 2. Следовательно, однородная система линейных уравнений с данной ФСР может содержать любое число, но не менее двух уравнений.

Систем линейных уравнений, имеющих ФСР, состоящую из X_1 и X_2 бесконечно много. Построим одну из таких систем, содержащую три уравнения. Будем искать первые два уравнения в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Нужно так подобрать коэффициенты a_{ij}, чтобы X_1 и X_2 были решениями системы (4). Подставив X_1 и X_2 в эту систему, получим

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} = 0, \\ a_{21} - a_{22} = 0, \\ -a_{12} + 2a_{13} + a_{14} = 0, \\ -a_{22} + 2a_{23} + a_{24} = 0. \end{cases}$$

Одним из решений последней системы является следующий набор чисел a_{ij}:

$$a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = a_{14} = 1,\ a_{13} = a_{24},\quad a_{23} = \frac{1}{2}.$$

При таких значениях a_{ij} система (4) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 0{,}5\,x_3 = 0. \end{cases}$$

Решения X_1 и X_2 образует ее ФСР. В качестве третьего уравнения системы можно взять произвольную линейную комбинацию найденных двух уравнений, например их сумму. Итак, одним из возможных ответов является система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \qquad\qquad\quad + x_4 = 0, \\ x_1 + \ \ x_2 + 0,5\, x_3 \qquad\ \ = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 0,5\, x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Понятие вектора

Пример решения задачи

Даны векторы ***a*** =(1; 2; 3), ***b*** =(−1; 0; 3), ***c*** =(2; 1; −1) и *d*=(3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы ***a, b*** и ***c*** образуют базис и найти координаты вектора ***d*** в этом базисе.

Решение.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если система

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0, \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение. Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 .$$

Чтобы разложить вектор ***d*** по базису ***a, b, c***, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2, \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3. \end{cases}$$

Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера:

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad \alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = -\frac{1}{4};$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, \qquad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{7}{4};$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10, \qquad \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Итак, координаты вектора ***d*** в базисе ***a, b, c*** равны ***d*** $=\{-1/4, 7/4, 5/2\}$.

Понятие скалярного и векторного произведений

Примеры решения задач

---

1. Найти $(5\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$, если $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

Решение.

$10\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + 6\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 10|\boldsymbol{a}|^2 - 3|\boldsymbol{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$

так как $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2 = 4$, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|^2 = 9$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

---

2. Найти угол между векторами ***a*** и ***b***, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

Решение.

Так как $\boldsymbol{a} = (1; 2; 3)$, $\boldsymbol{b} = (6; 4; -2)$, имеем $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 6 + 8 - 6 = 8$,
$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \quad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

---

3. Найти скалярное произведение $(3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) \cdot (5\boldsymbol{a} - 6\boldsymbol{a})$, если $|\boldsymbol{a}| = 4$, $|\boldsymbol{b}| = 6$, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \pi/3$.

Решение.

Имеем:

$$15a \cdot \boldsymbol{a} - 18\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - 10\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + 12\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} =$$

$$= 15\,|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ 12 \cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

---

4. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Решение.

Поскольку $\boldsymbol{a} = (3; 4; 5)$, $\boldsymbol{b} = (4; 5; -3)$, имеем

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 12 + 20 - 15 = 17:$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}.$$

$$\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}; \quad \varphi = \arccos\frac{17}{50}.$$

---

5. Найти векторное произведение векторов $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Решение.

Так как $\boldsymbol{a} = (2; 5; 1)$; $\boldsymbol{b} = (1; 2; -3)$, имеем

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$$

.

---

6. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4; 0; 3)$, $C(0; 1; 0)$.

Решение.

Векторы, образующие стороны треугольника, суть

$$\boldsymbol{AC} = (0 - 2;\ 1 - 2;\ 0 - 2;) = (-2; -1; -2),\ \boldsymbol{AB} = (4 - 2;\ 0 - 2;\ 3 - 2;) = (2; -2; -1).$$

Векторное произведение этих векторов

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(-1-4)-\vec{j}(-2+4)+\vec{k}(4+2)=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65},\quad S_{\Delta}=\frac{\sqrt{65}}{2}\ (\text{ед}^2).$$

Смешанное произведение векторов

Примеры решения задач

---

1. Доказать, что точки $A(5;\ 7;\ 2)$, $B(3;\ 1;\ -1)$, $C(9;\ 4;\ -4)$, $D(1;\ 5;\ 0)$ лежат в одной плоскости.

Решение.

Найдем координаты векторов

$$\boldsymbol{AB}=(-2;\ -6;\ 1),\ \boldsymbol{AC}=(4;\ -3;\ -2),\ \boldsymbol{AD}=(-4;\ -2;\ 2).$$

Смешанное произведение полученных векторов равно

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

---

2. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 3)$, $D(3;\ 7;\ 2)$.

Решение.

Найдем координаты векторов

$$\boldsymbol{BA}=(-2;\ -3;\ -4),\ \boldsymbol{BD}=(1;\ 4;\ -3),\ \boldsymbol{BC}=(4;\ -1;\ -2).$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(22+30+68) = 20$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания *BCD*:

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{510}.$$

Поэтому площадь основания пирамиды равна

$$S_{осн} = \sqrt{510}/2.$$

Теперь находим высоту пирамиды:

$$V = \frac{S_{осн} \cdot h}{3}; \; h = \frac{3V}{S_{осн}} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17}.$$

Уравнение прямой на плоскости

Примеры решения задач

---

1. Найти общее уравнение прямой l, содержащей точки $P(1; 2)$ и $Q(4; 9)$.

Решение.

Возьмем в качестве начальной точки прямой l точку P. В качестве направляющего вектора выберем вектор $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{PQ} = (3; 7)$. Каноническое уравнение прямой l запишется следующим образом:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{7}.$$

Умножив последнее уравнение на 21, получим общее уравнение

$$7x - 3y - 1 = 0.$$

---

2. Для прямой $l_1 = \{3x + 4y - 5 = 0\}$ найти общее уравнение прямой l, содержащей точку $M(1; 2)$, такой, что либо а) $l \parallel l_1$, либо б) $l \perp l_1$.

Решение.

а) Пусть $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_1$ − векторы нормали прямых l, l_1, соответственно. Если коэффициенты общего уравнения прямой l выбрать так, что $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1$, то $l = l_1$, либо $l \perp l_1$. Поэтому будем искать общее уравнение прямой l в виде

$$3x + 4y + C = 0.$$

Из условия $M \in l$ находим $C = -11$.

б) Если $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_1$, то и $l \perp l_1$. Поэтому ищем уравнение l вида

$$4x - 3y + C = 0.$$

Из условия $M \in l$ находим $C = 2$.

3. Найти расстояние от точки $M(4;\ 1)$ до прямой l, заданной уравнением с угловым коэффициентом $y = 2x + 3$.

Решение.

Записываем общее уравнение $2x - y + 3 = 0$. Отсюда

$$\rho(M, l) = \frac{|2 \cdot 4 - 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Плоскость в пространстве

Примеры решения задач

---

1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;\ 2;\ 3)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = (2;\ -1;\ 3)$.

Решение.

Уравнение плоскости имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

т.е.

$$2(x - 1) - (y - 2) + 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z - 9 = 0.$$

---

2. Найти расстояние от точки $A(2;\ 3;\ 1)$ до плоскости $x + y + z = 1$.

Решение.

Имеем:

$$d = \frac{|2+3+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Эллипс на плоскости

Примеры решения задач

---

1. Составить каноническое уравнение эллипса γ, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, причем его большая полуось равна 9, а эксцентриситет равен 7/9.

Решение.

Поскольку $a = 9$, $\varepsilon = \frac{7}{9}$ из определения эксцентриситета следует: $c = \varepsilon \cdot a = 7$, и $a^2 = 81$, $b^2 = a^2 - c^2 = 81 - 49 = 32$.

Итак, каноническое уравнение эллипса $\gamma: \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} = 1$.

---

2. Дан эллипс γ: $36x^2 + 121y^2 - 4356 = 0$. Найти его полуоси, фокусы и эксцентриситет. Составить уравнения директрис эллипса.

Решение. Приведем уравнение эллипса γ к каноническому виду.

Для этого перенесем свободный член в правую часть и разделим обе части полученного уравнения на 4356: $\gamma: \frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Тогда $a^2 = 121$, $b^2 = 36$, и, следовательно, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{85}$. Значит, полуоси эллипса

$a = 11$, $b = 6$; фокусы имеют координаты: $F_1(-\sqrt{85}; 0)$ и $F_2(\sqrt{85}; 0)$. По определению эксцентриситета $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{85}}{11}$. Находим $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{121}{\sqrt{85}}$ и запишем общие уравнения (6) директрис эллипса: $x \pm \frac{121}{\sqrt{85}} = 0$. Итак,

$$d_1: \sqrt{85}x + 121 = 0,\ d_2: \sqrt{85}x - 121 = 0.$$

---

3. Дан эллипс $\gamma: \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$. Составить канонические уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки $M(4; -\sqrt{3})$ эллипса.
Решение. Поскольку $c^2 = a^2 - b^2 = 20 - 15 = 5$, фокусы эллипса имеют координаты:

$F_1(-\sqrt{5}; 0)$ и $F_2(\sqrt{5}; 0)$. Теперь составим уравнения прямых F_1M и F_2M. Полагая

$F_1(-\sqrt{5}; 0)$ начальной точкой и $\mathbf{F_1M} = (4+\sqrt{5}; -\sqrt{3})$ − направляющим вектором, запишем каноническое уравнение первой прямой

$$F_1M: \frac{x+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} = \frac{y}{-\sqrt{3}},$$

и аналогично – уравнение второй прямой

$$F_2M: \frac{x-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} = \frac{y}{-\sqrt{3}}.$$

Гипербола на плоскости

Примеры решения задач

---

1. Составить каноническое уравнение гиперболы γ, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, причем расстояние между фокусами равно $2\sqrt{73}$, а асимптоты заданы уравнениями $y=\pm\dfrac{8}{3}x$.

Решение.

Поскольку $c = \sqrt{73}$, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{8}{3}$ то $b^2=\dfrac{64}{9}a^2$ и, в силу соотношения $a^2 + b^2 = c^2$, получаем: $a^2+\dfrac{64}{9}a^2=73$. Из последнего уравнения последовательно находим, что $a^2 = 9$, $b^2 = 64$. Итак, каноническое уравнение гиперболы

$$\gamma: \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=1.$$

---

2. Составить каноническое уравнение гиперболы γ, проходящей через точку $A(6; 3)$ и имеющей асимптоты $y = \pm x$.

Решение.

Из уравнения асимптот следует, что гипербола равно-сторонняя: $a = b$ (см. замечание 2), и ее уравнение можно записать в виде $\gamma: x^2 - y^2 = a^2$. Поскольку точка $A(6; 3)$ лежит на гиперболе γ, то ее координаты удовлетворяют записанному уравнению: $6^2 - 3^2 = a^2$, откуда $a^2 = 27$. Итак, каноническое уравнение гиперболы

$$\gamma: \frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{27} = 1.$$

---

3. Дана гипербола $\gamma: 64x^2 - 4y^2 - 256 = 0$. Найти ее полуоси, фокусы и эксцентриситет. Составить уравнения асимптот и директрис гиперболы.

Решение.

Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду. Для этого перенесем свободный член в правую часть и разделим обе части полученного уравнения на 256:

$$\gamma: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Тогда $a^2 = 4$, $b^2 = 64$ и следовательно, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{68}$. Значит, полуоси эллипса $a = 2$, $b = 8$; фокусы имеют координаты: $F_1(-2\sqrt{17}; 0)$ и $F_2(2\sqrt{17}; 0)$. По определению эксцентриситета $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{17}$, и, согласно уравнениям (4), асимптоты гиперболы:

$$l_1: y = 4x,\ l_2: y = -4x.$$

Находим $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{17}}$ и запишем общие уравнения (6) директрис гиперболы: $x \pm \frac{2}{\sqrt{17}} = 0$. Итак,

$$d_1: \sqrt{17}x + 2 = 0,\ d_2: \sqrt{17}x - 2 = 0.$$

Парабола на плоскости

Примеры решения задач

---

1. Составить каноническое уравнение параболы γ с вершиной в начале координат и директрисой $d: y - 7 = 0$.

Решение.

Директриса параболы $d: y = 7$ перпендикулярна оси Oy и расположена в верхней полуплоскости системы координат. Согласно замечанию 3, парабола γ расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и имеет каноническое уравнение $x^2 = -2py$. Из уравнения директрисы следует, что $\frac{p}{2} = 7$ т.е. $2p = 28$. Следовательно, каноническое уравнение параболы $\gamma: x^2 = -28y$.

2. Дана парабола $\gamma: y^2 + 14x = 0$. Найти фокус и составить уравнение директрисы параболы.

Решение.

Приведем уравнение параболы γ к каноническому виду: $y^2 = -14x$. Знак «−» в уравнении означает, что парабола и ее фокус F расположены в левой полуплоскости системы координат, а директриса параболы − в правой полуплоскости. Поскольку $p = 7$ и абсцисса фокуса отрицательна, находим координаты $F\left(-\frac{7}{2};0\right)$. При этом директриса параболы d: $x - 3{,}5 = 0$.

---

3. На параболе $\gamma: y^2 = 8x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 3.

Решение.

Пусть $M(x; y)$ − искомая точка параболы γ, FM − ее фокальный радиус, d − директриса. По определению параболы $\rho(M; d) = FM$. Это равенство для $p = 4$ и уравнения директрисы d: $x + 2 = 0$ примет вид $\frac{|x+2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 3 \Rightarrow x+2 = \pm 3$. С учетом того, что парабола γ расположена в правой полуплоскости системы координат, т.е. $x > 0$, имеем:

$x = 1$. Подставляем полученное значение абсциссы в уравнение γ, откуда находим две точки: $M_1(1; 2\sqrt{2})$, $M_2(1; -2\sqrt{2})$.

Классификация поверхностей второго порядка

Примеры решения задач

---

1. Составить каноническое уравнение двуполостного гиперболоида Г с действительной осью Oz, вершинами $C_1(0; 0; -6)$, $C_2(0; 0; 6)$ и пересекающий плоскость $x = -2$ по гиперболе $\gamma: \frac{z^2}{45} - \frac{y^2}{10} = 1$;

Решение. Запишем каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, действительной осью которого является Oz, причем $c = 6$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{36} = -1.$$

Находим сечение гиперболоида данной плоскостью:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{36}=-1, \\ x=-2. \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем уравнение гиперболы $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{36}=-1-\dfrac{4}{a^2}$, или $\dfrac{z^2}{36}-\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{4}{a^2}$.

Умножая обе части полученного уравнения на 4/5, имеем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{z^2}{45}-\frac{y^2}{1,25b^2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{a^2+4}{a^2}.$$

В силу равенства соответствующих слагаемых уравнений имеем:

$$\begin{cases} 1{,}25b^2=10, \\ 4a^2+16=5a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=8, \\ a^2=16. \end{cases}$$

Итак, каноническое уравнение двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{36}=-1.$$

---

2. Составить каноническое уравнение поверхности Г, образованной вращением вокруг оси *Oy* эллипса $\gamma: \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, лежащего в плоскости *yOz*.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ − произвольная точка пространства $\mathbf{R}^3$, *P* − ее проекция на ось *Oy*. Значит, *P*(0; *y*; 0). Если вращать точку *M* вокруг оси *Oy*, то в плоскости, параллельной*xOz*, получим окружность δ с центром *P* и радиуса $CP = \sqrt{x^2 + z^2}$. Таким образом, точка N = $\delta \cap yOz$ имеет координаты $(0; y; \pm\sqrt{x^2 + z^2})$.

Поскольку $M \in$ Г тогда и только тогда, когда $N \in \gamma$ то координаты точки *N* удовлетворяет уравнению эллипса γ:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{c^2}=1,$$

которое приводится к каноническому уравнению вида $\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Полученная поверхность второго порядка Г называется *эллипсоидом вращения*. Такой эллипсоид также называют *двуосным*, поскольку *a* = *c*.