ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

$f(x)=\left\{\frac{0}{0}\right\},\ x\to a,\ \lvert a\rvert<\infty$			$c=\mathrm{const}\neq 0$, $b=\mathrm{const}\neq 0$
№ n/n	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
1	$f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=$ $=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_m}.$ $P_n(a)=Q_m(a)=0$	Разделить многочлены $P_\mathrm{n}(x)$ и $Q_\mathrm{m}(x)$ на разность $(x-a)$, сократить $f(x)$ на эту разность $(x-a)$ и подставить вместо x значение $x=a$.	$\left\{\frac{0}{c}\right\}=0;\left\{\frac{\infty}{c}\right\}=\infty;$ $\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty;\left\{\frac{c}{\infty}\right\}=0;$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\dfrac{d}{b},$ $d=const;$ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – повторить прием
2	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt{u_1(x)}-\sqrt{u_2(x)}$	Умножить и разделить функцию $f(x)$ на сопряженное иррациональное выражение $(\sqrt{u_1(x)}+\sqrt{u_2(x)})$, использовать формулу сокращенного умножения $(A–B)(A+B)=A^2–B^2$ и сократить $f(x)$ на разность $(x-a)$.	------ // ------
3	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt[3]{u_1(x)}-\sqrt[3]{u_2(x)}$ или $\sqrt[3]{u_1(x)}+\sqrt[3]{u_2(x)}$	Умножить и разделить разность кубических корней на неполный квадрат суммы, а сумму кубических корней – на неполный квадрат разности, воспользоваться формулами сокращенного умножения: $(A–B)(A^2+AB+B^2)=A^3–B^3$; $(A+B)(A^2–AB+B^2)=A^3+B^3$ и сократить функцию $f(x)$ на разность $(x-a)$.	$\left\{\frac{0}{c}\right\}=0;\left\{\frac{\infty}{c}\right\}=\infty;$ $\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty;\left\{\frac{c}{\infty}\right\}=0;$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\dfrac{d}{b},$ $d=const;$ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – повторить прием

Замечание.

При делении многочлена $P_n(x)$ или $Q_m(x)$ на разность $(x - a)$ опираются на **теорему Безу**: если число $x = a$ является корнем многочлена (при $x = a$ многочлен равен нулю), то этот многочлен делится на разность $(x - a)$ без остатка.

Деление многочлена на разность $(x - a)$ осуществляется по тем же правилам, по которым делятся столбиком числа:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\, a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n & x - a \\ \hline
\quad \underline{a_0x^n - aa_0x^{n-1}} & a_0x^{n-1} + (a_1 + aa_0)x^{n-2} + \ldots = P_{n-1}(x) \\
\_\, (a_1 + aa_0)x^{n-1} + a_2x^{n-2} & \\
\quad \underline{(a_1 + aa_0)x^{n-1} - a(a_1 + aa_0)x^{n-2}} & \\
\_\, (a_2 + a(a_1 + aa_0))x^{n-2} + a_3x^{n-3} & \\
\underline{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \\
\underline{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Обратите внимание на то, что индекс в обозначении многочлена соответствует старшей степени x этого многочлена.

В результате деления получим представление многочлена $P_n(x)$ в виде произведения многочлена $P_{n-1}(x)$ на разность $(x–a)$:

$$P_n(x) = (x - a)\, P_{n-1}(x).$$

Предел дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m}, \qquad x \to \infty$$

1) $m > n \geq 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$;

2) $n = m \geq 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{a_0}{b_0}$;

3) $n > m \geq 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Более того, если функция $f(x)$ представляет собой отношение линейных комбинаций степенных функций, показатели которых неотрицательны (то есть m и n не обязательно целые, но обязательно неотрицательные), то при $x \to \infty$ можно оставить в числителе и в знаменателе только **слагаемые наибольших степеней x,** а остальными пренебречь. Предел функции при $x \to \infty$ из-за отбрасывания слагаемых, содержащих меньшие степени x (в том числе и $x^0 = 1$), не изменяется, то есть

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n_1} + \ldots + a_kx^0}{b_0x^m + b_1x^{m_1} + \ldots + b_lx^0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m},$$

где $n > n_1 > n_2 > \ldots \geq 0, \quad m > m_1 > m_2 > \ldots \geq 0$ (слагаемые записываются в порядке убывания степеней x).

Предел функции $f(x) = \dfrac{a_0x^n}{b_0x^m}$ при $x \to \infty$

1) $n > m \geq 0 \;\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n}{b_0x^m} = \infty$;

2) $n = m \geq 0 \;\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n}{b_0x^m} = \dfrac{a_0}{b_0}$;

3) $m > n \geq 0 \;\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n}{b_0x^m} = 0$.

Пусть $f(x) = q^x$, $q = \text{const}$.

Предел этой функции, если

1) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x = 0$;

2) $q = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x = 1$;

3) $1 < q < \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x = \infty$;

4) $-\infty < q \le -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x -$ не существует.

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции (б. м. ф.) при $x \to a$, то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$, тогда:

1) $\alpha(x)$ – б. м. ф. **более высокого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ – б. м. ф. при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = o\ (\beta(x));$$

2) $\alpha(x)$ – б. м. ф. **более низкого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ – б. м. ф. при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty \Leftrightarrow \beta(x) = o\ (\alpha(x));$$

3) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б. м. ф. **одинакового порядка** малости при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \ne 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = c\ (\beta(x));$$

4) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б. м. ф., **эквивалентные** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Leftrightarrow \alpha(x)\sim\beta(x);$$

5) $\alpha(x)$ – б. м. ф. ***k*-го порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ – б. м. ф. при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = c \ne 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = c\ (\beta^k(x)).$$

Теорема о первом замечательном пределе.

Предел функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ существует и равен единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Теорема о втором замечательном пределе.

Предел функции $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, если $x \to 0$, и функции $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, если $x \to \infty$, существует и равен числу $e \approx 2,718281828459045\ldots$:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

Применение первого и второго замечательных пределов позволяет доказать справедливость формул в **таблице эквивалентных** бесконечно малых функций при $x \to a$.

$\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$			
1	$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
2	$tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6a	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
3	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$
4	$arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7a	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
5	$1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1+\alpha(x))^{\mu} - 1 \sim \mu\alpha(x)$

Замечание. В случаях, когда аргумент $\alpha(x)$ функции в вычисляемом пределе стремится не к нулю, а к отличному от нуля числу, например, $\alpha(x) \to a$, $a \neq 0$, вводят новую переменную $t = \alpha(x) - a$.

Тогда, если $\alpha(x) \to a$, то $t \to 0$ (функция $t(x)$ должна быть непрерывной функцией в окрестности точки $t = 0$).

Новая переменная $t \to 0$ (при $\alpha(x) \to a$), и для нее легко можно использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

Например, вычислим предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln(\operatorname{tg} x)} = \left\{ \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\ln 1} \right\} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left| x - \frac{\pi}{4} = t \Leftrightarrow x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \to 0 \right| =$$ Предварительно

сделаем следующие преобразования:

$$\cos x = \cos(t + \frac{\pi}{4}) = \cos t \cos\frac{\pi}{4} - \sin t \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t);$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} t \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} t + 1}{1 - \operatorname{tg} t} = \frac{1 - \operatorname{tg} t + 2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t} = 1 + \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t};$$

$$\frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0$$

и воспользуемся результатами преобразований:

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)}{\ln(1 + \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t})} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}\sin t}{2\frac{\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}\, t}{2\frac{t}{1 - t}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бесконечно большие функции (б. б. ф.), так же как и бесконечно малые, можно сравнивать между собой. Если предел отношения двух бесконечно больших функций равен:

1. Бесконечности, тогда в числителе – б. б. ф. более высокого порядка роста;
2. Нулю, тогда в числителе – б. б. ф. более низкого порядка роста;
3. Постоянному числу, не равному нулю или единице, тогда эти бесконечно большие функции одинакового порядка роста;
4. Единице, тогда бесконечно большие функции эквивалентны.

Полезно иметь в виду, что при вычислении пределов отношений конечного числа б. б. ф. складываемых функций слагаемые более низкого порядка роста можно отбрасывать, а сумму заменять слагаемым **самого высокого порядка роста**.

При $x \to \infty$ **самый высокий** порядок **роста** имеет **показательная** функция $f(x) = a^x$; степенная функция $f(x) = x^n$ имеет порядок роста, более низкий по сравнению с показательной функцией, но более высокий по сравнению с логарифмической; логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ имеет самый низкий порядок роста по сравнению и с показательной функцией, и со степенной. Это обозначают так:

$$\log_a x << x^n << a^x, \quad \text{при } x \to \infty.$$

Очень эффективным при вычислении пределов оказывается применение следующих **правил**:

1. Предел отношения б. м. ф. (б. б. ф.) не изменится, если заменить эти функции эквивалентными.

2. Разность эквивалентных б. м. ф. (б. б. ф.) есть б. м. ф. (б. б. ф.) более высокого порядка малости (роста) по сравнению с уменьшаемой и вычитаемой б. м. ф. (б. б. ф.).

3. Сумма конечного числа б. м. (б. б.) слагаемых разного порядка малости (роста) эквивалентна слагаемому самого низкого (высокого) порядка малости (роста).

4. Если б. м. ф. $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ при $x \to a$, A=const $\neq 0$, то $A + \alpha(x) \sim A + \alpha_1(x)$ при $x \to a$.

Например. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + x - x^2}{2x^2 + 3x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{2x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Чтобы вычислить **предел** $\lim\limits_{x \to a} u^v$,

можно воспользоваться основным логарифмическим тождеством

$$u^v = e^{v \ln u}.$$

Например. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+5x} = \lim\limits_{x\to 0} (1+5x)^{\frac{1}{x}} \left\{1^\infty\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}} = e^5$.

Если же $u \to 1, v \to \infty$, то есть в случае неопределенность вида $\left\{1^\infty\right\}$,

можно применить следующую последовательность тождественных преобразований:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a} (1 + (u-1))^v = \lim_{x\to a} (1 + (u-1))^{\frac{1}{u-1}\cdot(u-1)\cdot v} = e^{\lim\limits_{x\to a}(u-1)\cdot v}.$$

Например. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x = \left\{1^\infty\right\} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \left(\dfrac{x+3}{x-2} - 1\right)\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5}{x-2}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x}} = e^5$.