

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т.В. Тарбокова

**СБОРНИК СПРАВОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ
ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

*Рекомендовано
Сибирским региональным учебно-методическим
центром высшего профессионального образования
для межвузовского использования
в качестве учебного пособия для студентов
всех специальностей*

2-е издание

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 51(035) (075.8)

ББК 22.1я73

T194

Тарбокова Т.В.

T194 Сборник справочных материалов по курсу высшей математики: учебное пособие / Т.В. Тарбокова. – 2-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 96 с.

Сборник справочных материалов содержит сведения по всем разделам курса высшей математики, изучаемого в вузе, и способствует развитию творческих способностей, математического мышления студентов, активизации их познавательной деятельности и самостоятельной работы. Включает теоретические сведения, оформленные в виде структурно-логических схем, таблиц, алгоритмов решения задач, – крупноблочного представления материала. Для студентов всех специальностей вузов.

УДК 51(035) (075.8)

ББК 22.1я73

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой математики ТУСУР
Л.И. Магазинников

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа ТГУ
Л.С. Копанева

© Тарбокова Т.В., 2009

© Томский политехнический университет, 2009

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2009

МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы

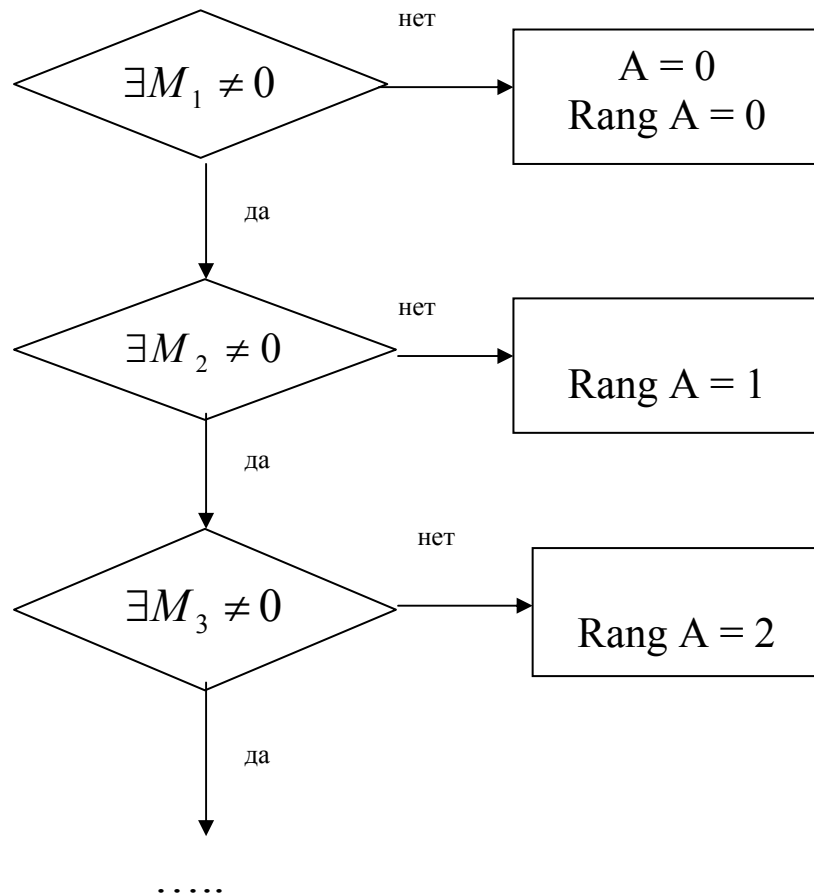
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Определение минора.

Минором M_k **порядка** k матрицы A называется любой определитель k -го порядка этой матрицы, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых её « k » столбцов и любых её « k » строк

$$M_1 = a_{ij}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{sj} & a_{sk} \end{vmatrix}, \quad \text{и т. д.}$$

$$i, s = 1, \dots, m, \quad j, k = 1, \dots, n$$



Определение ранга матрицы.

Рангом r матрицы A называется **наибольший порядок** r минора этой матрицы, отличного от нуля:

$$\exists M_r \neq 0, \forall M_k = 0 \text{ или } \bar{\exists} M_k, \quad k = r + 1, r + 2, \dots$$

(существует минор порядка r , не равный нулю, а все миноры более высоких порядков равны нулю или не существуют).

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями

Условимся называть **рабочей** строку, которая не изменяется на проводимом этапе элементарных преобразований (перестановке строк; умножении строки на число и сложении с соответствующими элементами другой строки; вычеркиванием всех пропорциональных строк, кроме одной из них).

Рабочая строка первая. Получим нули в первом столбце на местах всех элементов первого столбца за исключением элемента в первой строке a_{11} . Для этого **умножим все элементы первой строки** на такие числа, чтобы при сложении с элементами первого столбца остальных строк получить нули в первом столбце, за исключением элемента первой строки a_{11} .

Если в системе, которую Вы решаете, коэффициент при x_1 в первом уравнении не равен единице, поменяйте местами строки, записав первой ту, в которой коэффициент при неизвестном x_1 равен единице.

Если при неизвестном x_1 во всех уравнениях коэффициенты отличны от единицы, можно:

- 1) умножить первую строку расширенной матрицы системы на число, противоположное тому, на месте которого Вы хотите получить ноль; а строку, в которой хотите получить ноль, умножьте на коэффициент при x_1 в первой строке;
- 2) сложите соответствующие элементы умноженной первой строки и умноженной другой строки.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 6 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{(-5)(-7)} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -14 & 13 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right] \sim$$

Далее нужно получить нули во втором столбце ниже главной диагонали.

Рабочая строка вторая. Получаем нули во втором столбце ниже элемента a_{22} .

Умножим третью строку на (-14) и сложим с соответствующими элементами второй строки. (Или можно было поменять местами вторую и третью строки, чтобы на главной диагонали оказалась единица (см. (*))).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -14 & 13 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{+(-14)} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -14 & 13 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -57 & -57 & -57 \end{array} \right];$$

$$\left(\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ \sim 0 & -1 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & -14 & 13 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{(-14)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -57 & -57 & -57 \end{array} \right] \end{array} \right) (*) \text{ Rang } A = 3$$

Замечание. Полученная в скобках матрица (*) также эквивалентна исходной матрице A , то есть имеет тот же ранг, а системы уравнений, соответствующие этим матрицам, имеют одинаковые решения.

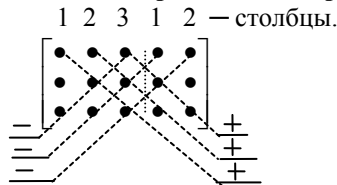
Вычисление определителей

Правило треугольников для вычисления определителей третьего порядка:



+ – произведения элементов берутся с тем же знаком,
– – произведения элементов берутся с противоположным знаком.

Таблица Саррюса для вычисления определителей третьего порядка:



Правило разложения определителя по элементам какой-либо его строки или столбца с использованием понятия минора и алгебраического дополнения

Определение минора M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием элементов i -й строки и j -го столбца.

Определение

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента,

алгебраического
дополнения A_{ij}
элемента a_{ij}
определителя n -го
порядка.

умноженный на $(-1)^{(i+j)}$:
 $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$

В соответствии со свойствами определитель порядка n может быть представлен в виде разложения этого определителя по элементам i -й строки:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = a_{i1} (-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2} (-1)^{i+2} M_{i2} + \dots + a_{in} (-1)^{i+n} M_{in}.$$

То есть **определитель квадратной матрицы A порядка n равен сумме произведений элементов какой-либо i -й его строки на алгебраические дополнения этих элементов.**

Аналогичным образом можно разложить этот же определитель по элементам любого его столбца.

Так для определителя третьего порядка формула разложения определителя по элементам второго столбца получится следующей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{22} (a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}) - a_{32} (a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}).$$

Определители второго порядка получаются, если вычеркнуть в определителе третьего порядка второй столбец и, соответственно, первую, потом вторую, потом третью строки.

Действия над матрицами

**Определение
суммы двух
матриц.**

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ с одинаковым количеством m строк и n столбцов называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).
Обозначение: $C = A + B$.

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, то $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & -1+4 \\ -2-5 & -3+0 \\ 5+1 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$

**Определение
произведения
матрицы на
число.**

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица, у которой **каждый** элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ :

$$\lambda A = \lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij}), \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, n. \end{pmatrix}$$

Например. $\lambda A = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 & -1 \cdot 0 & -1 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 3 & -1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

**Определение
произведения
матрицы-
строки
на матрицу-
столбец.**

Произведением матрицы-строки, имеющей n столбцов, на матрицу-столбец, имеющий столько же строк, **называется матрица, состоящая из одного элемента**, который равен сумме произведений соответствующих элементов перемножаемых матриц: $A_{1 \times n} \cdot B_{n \times 1} = C_{1 \times 1}$,

или $(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}).$

Например, $C = (-1 \ 2 \ 0 \ 4) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 3) = (16).$

Условие существования произведения двух матриц.

Произведение матриц $A \cdot B$ существует только в тех случаях, **когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B** , то есть $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$. При этом матрица-произведение имеет число строк матрицы A и число столбцов матрицы B .

Определение перестановочных матриц.

Квадратные матрицы, **произведение которых коммутативно: $AB = BA$** , называются перестановочными.

Определение произведения матриц.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$, имеющей m строк и n столбцов, на матрицу $B = (b_{ij})$, имеющую n строк и p столбцов, называется матрица $C = (c_{ij})$, имеющая m строк и p столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B ,

то есть $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, p. \end{pmatrix}$

Произведение матриц обозначается $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$.

Замечание. Правило умножения матриц можно легко запомнить, если сформулировать его в следующем виде: элемент c_{ij} матрицы C , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, есть скалярное произведение i -й вектор – строки матрицы A и j -го вектор – столбца матрицы B .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 & 0 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 12 & 0 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 15 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 & 4 \cdot 10 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 12 & 4 \cdot 13 + 5 \cdot 14 + 6 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 58 & 73 \\ 122 & 167 & 212 \end{pmatrix}.$$

Определение единичной матрицы.

Квадратная матрица, **на главной диагонали которой все элементы равны единице, а все остальные элементы нули**, называется единичной матрицей и обозначается буквой E .

Определение обратной матрицы.

Обратной для матрицы A называется такая матрица A^{-1} , что их произведение равно единичной матрице: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Теорема существования обратной матрицы.

Для любой квадратной матрицы A , определитель которой не равен нулю ($\det A \neq 0$), существует единственная обратная матрица A^{-1} .

Определение невырожденной и вырожденной матриц.

Матрица, определитель которой **не равен нулю**, называется **невырожденной**. Матрица, определитель которой **равен нулю**, называется **вырожденной**.

Чтобы найти обратную для A матрицу A^{-1} , можно действовать следующим образом:

1. Вычислить определитель матрицы A ($\det A \neq 0$).
- Если $\det A = 0$, то матрица A не имеет обратной A^{-1} .
2. Составить союзную матрицу из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A : (A_{ij}) .
3. Транспонировать союзную матрицу, то есть заменить строки на столбцы с такими же номерами: $(A_{ij})^T$.
4. Разделить транспонированную союзную матрицу на определитель матрицы A :

$$A^{-1} = \frac{(A_{ij})^T}{\det A} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T.$$

Например.

$$1. \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0. \quad 2. (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Вспомните, что } A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

$$3. (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4. A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, правильно ли найдена обратная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Определение линейной зависимости (независимости) системы	Система строк (столбцов, векторов, решений) x_1, x_2, \dots, x_n называется линейно зависимой , если линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$, когда не все коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — нули, и называется линейно независимой , если линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$, когда все коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — нули.
---	---

Исследование и решение произвольной системы линейных уравнений

Определение базисного минора и базисных неизвестных.

Любой, **не равный нулю** минор, имеющий **порядок ранга** основной и расширенной матриц системы, называется **базисным минором**, а неизвестные, коэффициенты при которых **вошли** в базисный минор — **базисными неизвестными**.

Определение свободных неизвестных.

Неизвестные, коэффициенты при которых **не вошли** в базисный минор, называются **свободными**.

Определение СОЛУ.

Система линейных уравнений называется **однородной**, если **свободные члены** во всех уравнениях этой системы равны **нулю**.
 $Ax = 0$ — матричная запись СОЛУ.

Система однородных линейных уравнений всегда совместна, поскольку имеет так называемое тривиальное решение, когда все неизвестные равны нулю: $X = 0, \Rightarrow A \cdot 0 = 0$. Ранги основной и расширенной матриц системы однородных линейных уравнений всегда равны, так как вычеркивание нулевого столбца свободных членов не изменяет ранга матрицы, поэтому **по теореме Кронекера-Капели** СОЛУ всегда совместна.

Определение ФСЧР СОЛУ.

Фундаментальной системой частных решений системы однородных линейных уравнений называется **система линейно независимых частных решений**, число решений в которой равно числу свободных неизвестных системы.

Если n — число неизвестных системы, r — её ранг, то ФСЧР СОЛУ должна содержать $k = n - r$ линейно независимых частных решений.

Фундаментальную систему частных решений получают обычно, последовательно приравнявая свободные неизвестные элементам строк единичной матрицы E порядка $k = n - r$.

Замечание. ФСЧР СОЛУ можно получить также, приравнявая свободные неизвестные элементам строк произвольной квадратной матрицы A порядка $k = n - r$, если $\det A \neq 0$.

Блок-схема исследования и решения произвольной системы линейных уравнений

$R(A)$ – ранг основной матрицы системы;
 $R(B)$ – ранг расширенной матрицы системы;
 M_r – базисный минор;
 n – число неизвестных.

