ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ Первообразная функция и неопределённый интеграл

Определение первообразной	Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на промежутке X, если $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in X$.

Лемма	Функция, производная которой на некотором промежутке X равна нулю, постоянна на этом промежутке.

Теорема (о множестве первообразных)	Если $F(x)$ − одна из первообразных для $f(x)$ на промежутке X, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке X имеет вид: $\Phi(x) = F(x) + C$, где C − некоторая постоянная.

Определение неопределённого интеграла	Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на промежутке X и обозначается $\int f(x)dx$. В силу теоремы о множестве первообразных $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ − одна из первообразных для $f(x)$, C − произвольная постоянная.

Замечание. Иногда символом $\int f(x)dx$ обозначается не вся совокупность первообразных, а какая-либо одна из них.

Теорема (существования первообразной)	Всякая непрерывная на промежутке X функция имеет первообразную на этом промежутке.

Примеры «неберущихся» интегралов	$\int \frac{e^x}{x}dx$; $\int \frac{\sin x}{x}dx$; $\int \frac{\cos x}{x}dx$; $\int \frac{dx}{\ln x}$; $\int \exp(-x^2)dx$; $\int \sin(x^2)dx$; $\int \cos(x^2)dx$; $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $i^2 = -1$

§ Основные свойства неопределённого интеграла

Свойство 1 (о дифференциале интеграла)	Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $(\int f(x)dx)' = f(x)$. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению: $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
Свойство 2 (об интеграле от дифференциала)	Неопределённыё интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и постоянного слагаемого: $\int dF(x) = F(x) + C$.

Вывод из свойств 1 и 2: знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются.

Свойство 3 (линейности)	Если существуют первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, а α и β − любые вещественные числа, то существует первообразная функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$, причем $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$.

§ Таблица интегралов

1. $\int 0\, du = c;$

степенные функции

2. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$
3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}};\quad \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c;$

4a. $\int e^u du = e^u + c;$

дробные рациональные и иррациональные функции

5. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + c;$
6. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c;$
7. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + c;$

8. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c;$

тригонометрические функции

9. $\int \sin u\, du = -\cos u + c;$

10. $\int \cos u\, du = \sin u + c;$

11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + c;$

12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + c;$

гиперболические функции

13. $\int sh\, u\, du = ch\, u + c;$

14. $\int ch\, u\, du = sh\, u + c;$

15. $\int \frac{du}{ch^2 u} = th\, u + c;$

16. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + c;$

§ Метод замены переменных (подстановки) в неопределённом интеграле

Теорема (о замене переменных)	Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке T, а промежуток X − множество её значений. Пусть функция $f(x)$ определена на X и имеет на этом промежутке первообразную $F(x)$. Тогда на промежутке T функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. То есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Следствие (алгоритм замены переменных в неопределённом интеграле)	$\int f(x)dx = \left\| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right\| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$; $\int f(x)dx = \left\| \begin{matrix} t = \varphi^{-1}(x) \\ dt = (\varphi^{-1}(x))'dx \end{matrix} \right\| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t$.

Замечание. Частным случаем замены переменной является приём подведения некоторой функции под знак дифференциала, когда замена переменной делается устно.

§ Метод интегрирования по частям в неопределённом интеграле

Теорема (об интегрировании по частям в неопределённом интеграле)	Пусть на промежутке X функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и функция $v(x)u'(x)$ имеет первообразную на X. Тогда $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на X, и справедлива формула интегрирования по частям: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$, или $\int udv = uv - \int vdu.$

Рекомендации по применению метода интегрирования по частям (ОК с. 3)

№	Интеграл	Разбиение подынтегрального выражения на части	du	v	Результат применения метода
1	$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx,$ $\int P_n(x)a^{\alpha x}dx,$ $\int P_n(x)\sin mxdx,$ $\int P_n(x)\cos mxdx.$	$u = P_n(x)$ $dv = \left\{\begin{matrix} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{matrix}\right\}dx$	$P_{n-1}(x)dx$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}, \frac{a^{\alpha x}}{\alpha \ln a},$ $-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют ***n*** **раз**, пока степень многочлена не понизится до нулевой
2	$\int P_n(x)\ln xdx,$ $\int P_n(x)\arcsin xdx, \int P_n(x)\arccos xdx,$ $\int P_n(x)arctgxdx, \int P_n(x)arcctgxdx.$	$u = \left\{\begin{matrix} \ln x \\ \dots \\ arcctgx \end{matrix}\right\},$ $dv = P_n(x)dx$	$\frac{dx}{x},$ .... $-\frac{dx}{1+x^2}$	$P_{n+1}(x)$	Получают интеграл от функций степеней x
3	Циклические интегралы: $\int e^{\alpha x}\sin mxdx, \int e^{\alpha x}\cos mxdx$	$u = e^{\alpha x},$ $dv = \left\{\begin{matrix} \sin mx \\ \cos mx \end{matrix}\right\}dx$ $\left(\begin{matrix} \text{или } u = \left\{\begin{matrix} \sin mx \\ \cos mx \end{matrix}\right\}, \\ dv = e^{\alpha x}dx \end{matrix}\right)$	$\alpha e^{\alpha x}dx$	$-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют **2 раза**, получая уравнение относительно искомого интеграла

Какими методами можно найти следующие интегралы:

1.	$\int x^2 \exp(x^3)dx$	2.	$\int x^3 \exp(x^2)dx$
3.	$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$	4.	$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$
5.	$\int x\sin x^2 dx$	6.	$\int x^2 \sin xdx$
7.	$\int 5^x \cos xdx$	8.	$\int 5^{\sin x} \cos xdx$

9.	$\int \sqrt{x}\exp(\sqrt{x})dx$	10.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(\sqrt{x})dx$
11.	$\int \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	12.	$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

§ Интегрирование дробных рациональных функций

А. Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение рациональной дроби	**Рациональной дробью** называется отношение двух многочленов: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + ... + b_m}$

Определение правильной и неправильной рациональной дроби	Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется **правильной**, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n < m$). Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется не**правильной**, если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \geq m$).

Теорема	Интегрирование неправильной рациональной дроби можно свести к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Б. Основная теорема алгебры

Теорема (основная алгебры)	Любой многочлен степени n имеет ровно n корней и может быть представлен в виде произведения n сомножителей.

Теорема (о разложении многочлена на множители)	Любой многочлен степени m можно разложить на линейные и квадратичные множители: $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m =$ $= b_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$ в соответствии с его вещественными ($x_1, x_2, ...x_r$) и комплексными сопряжёнными корнями с учётом кратности $k_1, k_2, ..., k_r$ его вещественных и $l_1, l_2, ..., l_s$ комплексных корней, причём $k_1 + k_2 + ... + k_r + 2l_1 + 2l_2 + ... + 2l_s = m$.

В. Разложение правильной дроби на сумму простых дробей

Теорема (о сумме простых дробей)	Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами единственным образом, руководствуясь следующим правилом:

Вид множителя в знаменателе дроби	Число дробей	Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби
$(x-a)^k$	k	$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-a}$
$(x^2+px+q)^w$	w	$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^w}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}}+\ldots+\frac{M_wx+N_w}{x^2+px+q}$

Г. Методы нахождения неопределённых коэффициентов

Метод задания частных значений	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение подставляют вещественные корни знаменателя или другие любые значения.

Метод неопределённых коэффициентов	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. Из полученного уравнения получают систему линейных уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x в правой и левой частях уравнения.

Метод комбинированный	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение последовательно подставляют все вещественные корни знаменателя, остальные коэффициенты находят методом неопределённых коэффициентов.

Д. Интегрирование простых дробей

а) дроби первого типа $\int \frac{A}{x-a}dx = \int \frac{A}{x-a}d(x-a) = A\ln|x-a| + c;$

б) дроби второго типа $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c; (k>1)$

в) дроби третьего типа

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q= \\ =(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q \\ x+\frac{p}{2}=t; \quad dx=dt \\ x^2+px+q=t^2\pm a^2 \end{array} \right| = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2\pm a^2}dt = M\int \frac{td(t^2\pm a^2)}{(t^2\pm a^2)2t} + (N-M\frac{p}{2})\int \frac{dt}{t^2\pm a^2} = ...$$

г) дроби четвертого типа

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q \\ x+\frac{p}{2}=t; \quad dx=dt \\ x^2+px+q=t^2\pm a^2 \end{array} \right| = ...$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right) -$$

рекуррентная формула.

План интегрирования рациональных дробей (ОК с. 4)

Пример 1. Найти $\int \frac{x^5+x^4+x^3+14x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2}dx$.

Пример 2 . Найти $\int \frac{x^7}{x^4-1}dx$.

Пример 3. $\int \frac{7x^3-14x^2+15x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$.

§ Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Определение рациональной функции двух переменных	**Рациональной** функцией двух переменных $R(u,v)$ называется функция, полученная путём применения к аргументам u,v конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в **целую** степень.

Рекомендации для интегрирования тригонометрических функций (ОК с. 5)

Примеры.

1. $\int \frac{dx}{\sin x}$. **2.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$. **3.** $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$.

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$.

§ Интегрирование некоторых иррациональных функций

Определение иррациональной функции	Функция называется алгебраической **иррациональной**, если она получена путём применения к аргументу x конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в **рациональную** степень.

Рекомендации для интегрирования иррациональных функций
(ОК с. 6)

Примеры: 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. **2.** $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$. **3.** $\int \sqrt[3]{x^3+1}\,dx$. **4.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

5. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$. **6.** $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

При нахождении первообразной функции можно пользоваться следующим **алгоритмом**:

1. Попытаться применить непосредственное интегрирование и подведение функции под знак дифференциала;

2. Если это не приводит к успеху, определить класс подынтегральной функции (дробная рациональная, тригонометрическая, иррациональная функция) и применить соответствующие подстановки,

3. а если функция смешанных классов – интегрирование по частям.