



Элементы линейной алгебры



Кафедра высшей
математики
ТПУ
Лектор:
доцент
Тарбокова Татьяна
Васильевна

§ Матрицы и действия над ними

Определение матрицы	Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов некоторого множества (например, чисел или функций), имеющая m строк и n столбцов. Элементы, из которых составлена матрица, называются <i>элементами матрицы</i>.
----------------------------	---

Матрицы могут обозначаться так:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{A} &= (a_{ij}), (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}) \\ \mathbf{A} &= (a_{ij}), (i, j = \overline{1, n}) \end{aligned}$$

Определение видов матриц	- Если $m = n$, то матрицу называют <i>квадратной, порядка n</i>. - Если $m \neq n$, то матрицу называют <i>прямоугольной</i>. - Матрицу, все элементы которой равны нулю, называют <i>нулевой</i>. - Элементы a_{11}, a_{22}, a_{kk} (где $k = \min\{m, n\}$) будем называть <i>элементами главной диагонали матрицы</i>. Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется <i>диагональной</i>: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется <i>единичной</i>: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ Обозначают: $\mathbf{E}$ или $\mathbf{E}_n$. - Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n. Элементы $a_{1n}, a_{2, n-1}, a_{3, n-2}, \dots, a_{n1}$ будем называть <i>элементами побочной диагонали матрицы</i>. Квадратные матрицы, у которых все элементы ниже (выше) главной или побочной диагонали равны нулю, называются <i>треугольными</i>: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1, n-2} & b_{1, n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2, n-2} & b_{2, n-1} & 0 \\ b_{31} & \dots & b_{3, n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & d_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & d_{2, n-1} & d_{2n} \\ 0 & \dots & d_{3, n-2} & d_{3, n-1} & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{n, n-2} & d_{n, n-1} & d_{nn} \end{pmatrix}$
---------------------------------	---

Определение видов матриц	7. Прямоугольную матрицу размера $m \times n$ будем называть <i>трапецевидной</i>, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю, т.е. если она имеет вид: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
---------------------------------	--

Определение равных матриц	Две матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ считаются <i>равными</i>, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на одинаковых местах, равны между собой, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.
----------------------------------	--

Определение суммы двух матриц	Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ с одинаковым количеством m строк и n столбцов называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Обозначение: $C = A + B$.
--------------------------------------	--

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, то

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & -1+4 \\ -2-5 & -3+0 \\ 5+1 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение произведения матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица, у которой **каждый** элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ :

$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}), \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, n. \end{pmatrix}$$

Например. $\lambda A = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 & -1 \cdot 0 & -1 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 3 & -1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Свойства линейных операций над матрицами	1. $A + B = B + A$; 2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; 3. $A + O = A$; 4. $A + (-A) = O$; 5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$; 6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; 7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; 8. $1 \cdot A = A$.
---	---

Определение произведения матрицы-строки на матрицу-столбец

Произведением матрицы-строки, имеющей n столбцов, на матрицу-столбец, имеющий столько же строк, **называется матрица, состоящая из одного элемента**, который равен сумме произведений соответствующих элементов перемножаемых матриц: $A_{1 \times n} \cdot B_{n \times 1} = C_{1 \times 1}$,

$$\text{или } (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}).$$

$$\text{Например, } C = (-1 \ 2 \ 0 \ 4) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 3) = (16).$$

Условие существования произведения двух матриц

Произведение матриц $A \cdot B$ существует только в тех случаях, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B , то есть $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$. При этом матрица-произведение имеет число строк матрицы A и число столбцов матрицы B .

Определение перестановочных матриц

Квадратные матрицы (размера $n \times n$), **произведение которых коммутативно:** $AB = BA$, называются перестановочными.

Определение произведения матриц

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$, имеющей m строк и n столбцов, на матрицу $B = (b_{ij})$, имеющую n строк и p столбцов, называется матрица $C = (c_{ij})$, имеющая m строк и p столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B ,

$$\text{то есть } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, p. \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц обозначается $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$.

Замечание. Правило умножения матриц можно легко запомнить, если сформулировать его в следующем виде:

элемент c_{ij} матрицы C , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца,

есть скалярное произведение i -й вектор – строки матрицы A

и j -го вектор – столбца матрицы B .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 & 0 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 12 & 0 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 15 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 & 4 \cdot 10 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 12 & 4 \cdot 13 + 5 \cdot 14 + 6 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 58 & 73 \\ 122 & 167 & 212 \end{pmatrix}.$$

**Свойства
операции
умножения
матриц**

1. $AE = EA = A, \quad AO = OA = O$;
2. $(AB)C = A(BC)$;
3. $(A + B)C = AC + BC$;
4. $C(A + B) = CA + CB$.

**Определение
транспониро-
ванной
матрицы**

Пусть A – матрица размера $m \times n$. Матрица размера $n \times m$, полученная из A заменой каждой её строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной к A и обозначается A^T .
Операция нахождения матрицы A^T называется транспонированием матрицы A .

**Свойства
операции
транспониро-
вания матриц**

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
4. $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.