ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(const)' = 0;$

степенные функции

2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$

2a. $(x)' = 1;$

2b. $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u';$

2c. $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$

2e. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot u';$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$

3a. $(e^u)' = e^u \cdot u';$

логарифмические функции

4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$

4a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

$(\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b; \quad \ln a^n = n \ln a)$

тригонометрические функции

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

7. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$

8. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$

обратные тригонометрические функции

9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

12. $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

гиперболические функции

13. $(sh\, u)' = ch\, u \cdot u';$

14. $(ch\, u)' = sh\, u \cdot u';$

15. $(th\, u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u';$

16. $(cth\, u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u';$

показательно – степенные функции

17. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$

модуль функции

18. $|u|' = \operatorname{sgn} u \cdot u'$, $(|u| = \operatorname{sgn} u \cdot u)$,

где $\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, u > 0 \\ -1, u < 0; \\ 0, u = 0. \end{cases}$ – функция знак u

(сигнум u).

Правила дифференцирования

1. $(cu)' = c \cdot u';$

1a. $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u';$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v';$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$

4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2};$

5. сложная функция

$(F(u(x)))' = F'_u \cdot u'_x;$

6. параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};\; y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t};$$

7. ***неявно заданная функция*** $y = y(x)$ уравнением $F(x, y) = 0; \Rightarrow$ чтобы найти производную неявно заданной функции, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0$, считая y функцией от x и применяя правило 5 дифференцирования сложной функции;

8. ***логарифмическое дифференцирование***

$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x);$

$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'.$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ $(u = u(x))$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0\,du = c;$

степенные функции

2. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c;$

4a. $\int e^u du = e^u + c;$

дробные рациональные и иррациональные функции

5. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + c;$

6. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c;$

7. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + c;$

8. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c;$

тригонометрические функции

9. $\int \sin u\, du = -\cos u + c;$

10. $\int \cos u\, du = \sin u + c;$

11. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + c;$

12. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + c;$

гиперболические функции

13. $\int sh\, u\, du = ch\, u + c;$

14. $\int ch\, u\, du = sh\, u + c;$

15. $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = th\, u + c;$

16. $\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + c;$

Непосредственное интегрирование

$$du = u'_x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u'};$$

$$u = ax + b \Rightarrow dx = \frac{d(ax+b)}{a};$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^m} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{1-m}}{1-m} + c;$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c;$$

$$u = (ax^3 + b) \Rightarrow dx = \frac{d(ax^3+b)}{3ax^2}$$

$$\int x^2 cos(ax^3 + b)\, dx = \frac{1}{3a} \sin(ax^3 + b) + c;$$

$$u = mx \Rightarrow dx = \frac{d(mx)}{m}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (mx)^2}} = \frac{1}{m} \arcsin \frac{mx}{a} + c;$$

основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx;$

2. $\int \alpha udx = \alpha \int udx;$

3. $d \int u(x)dx = u(x)dx;$

4. $\int du = u + c;$

замена переменной

$$u = u(t) \Leftrightarrow du = u'_t dt;$$

$$\int f(u)du = \int f(u(t))u'_t dt;$$

интегрирование по частям

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Метод непосредственного интегрирования

$$\boxed{du = u'_x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u'_x}}$$

$$u = ax + b \Rightarrow dx = \frac{d(ax+b)}{a} \Rightarrow \quad \underline{\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \int \frac{d(ax+b)}{a\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\cdot\sqrt{ax+b} + c;}$$

$$u = (-ax^2 + b) \Rightarrow dx = \frac{d(-ax^2+b)}{-2ax} \Rightarrow \underline{\int e^{-ax^2+b} x\, dx = \int \frac{e^{-ax^2+b} x d(-ax^2+b)}{-2ax} = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2+b} + c;}$$

$$u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{d(\sin x)}{\cos x} \Rightarrow \underline{\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - a^2} = \int \frac{\cos x\, d(\sin x)}{(\sin^2 x - a^2)\cos x} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\sin x - a}{\sin x + a}\right| + c;}$$

$$u = mx \Rightarrow dx = \frac{d(mx)}{m} \Rightarrow \underline{\int \sin mx dx = \int \frac{\sin mx\, d(mx)}{m} = -\frac{1}{m}\cos mx + c;}$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du;$$

№ п/п	Интеграл	Разбиение подынтегральн ого выражения на части	du	v	Результат применения метода
1	$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx,$ $\int P_n(x) a^{\alpha x} dx,$ $\int P_n(x)\sin mx dx,$ $\int P_n(x)\cos mx dx.$	$u = P_n(x)$ $dv = \begin{Bmatrix} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix} dx$	$P_{n-1}(x)dx$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha},\ \frac{a^{\alpha x}}{\alpha \ln a},$ $-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют ***n* раз**, пока степень многочлена не понизится до нулевой
2	$\int P_n(x)\ln x dx,$ $\int P_n(x)\arcsin x dx, \int P_n(x)\arccos x dx,$ $\int P_n(x) arctgx dx, \int P_n(x) arcctgx dx.$	$u = \begin{Bmatrix} \ln x \\ \ldots \\ arcctgx \end{Bmatrix},$ $dv = P_n(x)dx$	$\frac{dx}{x},$ .... $-\frac{dx}{1+x^2}$	$P_{n+1}(x)$	Получают интеграл от функций степеней x
3	Циклические интегралы: $\int e^{\alpha x}\sin mx dx, \int e^{\alpha x}\cos mx dx$	$u = e^{\alpha x},$ $dv = \begin{Bmatrix} \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix} dx$ $\left(\begin{array}{l} \text{или } u = \begin{Bmatrix} \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix}, \\ dv = e^{\alpha x} dx \end{array} \right)$	$\alpha e^{\alpha x} dx$	$-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют **2 раза**, получая уравнение относительно искомого интеграла

План интегрирования рациональных дробей

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx\,.$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n,$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots\ldots + b_m.$$

I. $n \ge m$ – дробь неправильная; $n < m$ – дробь правильная (степень $P_n(x)$ меньше)

$\Downarrow$ (степень n $P_n(x)$ больше или равна степени m $Q_m(x)$)

$$\begin{array}{l|l} P_n(x) & Q_m(x) \\ \cline{2-2} \ldots\ldots & \text{целая часть} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \textit{целая часть} + \frac{\textit{остаток}}{Q_m(x)}$$

$r_s(x)$ – остаток ($s<m$)

$\Downarrow$

$\dfrac{r_s(x)}{Q_m(x)}$ – прав. дробь.

II. Знаменатель $Q_m(x)$ разложить на множители линейные – $(x-a)$ и квадратичные – (x^2+px+q). Правильную дробь разложить на сумму простых дробей в зависимости от множителей знаменателя.

Вид множителя в знаменателе дроби	Сколько дробей	Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби
$(x-a)^k$	k	$\dfrac{A_1}{(x-a)^k} + \dfrac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \dfrac{A_k}{x-a}$
$(x^2+px+q)^w$	w	$\dfrac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^w} + \dfrac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}} + \ldots + \dfrac{M_wx+N_w}{x^2+px+q}$

III. Найти неопределенные коэффициенты *A, M, N,* приведя сумму дробей к общему знаменателю и **приравняв числители исходной** правильной дроби и **суммы** дробей.

IV. Проинтегрировать простые дроби:

а) дроби первого типа $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = \int \frac{A}{x-a}d(x-a) = A\ln|x-a| + c;$

б) дроби второго типа $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c;\ (k>1)$

в) дроби третьего типа

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x+\frac{p}{2} = t;\quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2 \pm a^2}dt = M\int \frac{td(t^2 \pm a^2)}{(t^2 \pm a^2)2t} + (N - M\frac{p}{2})\int \frac{dt}{t^2 \pm a^2} = \ldots.$$

г) дроби четвертого типа

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^w}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x+\frac{p}{2} = t;\quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| = \ldots$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right)$$ – рекуррентная формула

Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Подынтегральная функция</th><th>Подстановка</th><th>Вспомогательные преобразования</th><th>Итог</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x$, $\cos x$</td><td>Универсальная $t = tg\frac{x}{2}$</td><td>$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$</td><td rowspan="5">Подынтегральная функция рациональная относительно x</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$R(\sin x, -\cos x) =$
$= -R(\sin x, \cos x)$
Нечётная относительно $\cos x$</td><td>$t = \sin x$</td><td>$dt = \cos x\,dx$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$R(-\sin x, \cos x) =$
$= -R(\sin x, \cos x)$
Нечётная относительно $\sin x$</td><td>$t = \cos x$</td><td>$dt = -\sin x\,dx$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">$R(-\sin x, -\cos x) =$
$= R(\sin x, \cos x)$
Чётная относительно $\cos x$ и $\sin x$</td><td>$t = tgx$</td><td>$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$</td></tr>
<tr><td>$t = ctgx$</td><td>$\sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $dx = -\frac{dt}{1+t^2}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x$
Степени чётные неотрицательные</td><td colspan="2">$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$</td><td>Понижение степени</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\sin mx \cos nx$

$\cos mx \cos nx$

$\sin mx \sin nx$</td><td colspan="2">$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$
$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$
$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$</td><td>Сумма функций</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="4">$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $thx = \frac{shx}{chx}$; $cthx = \frac{chx}{shx}$; $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$; $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$;
$ch^2 x - sh^2 x = 1$; $shxchx = \frac{1}{2}sh2x$; $sh^2 x = \frac{ch2x - 1}{2}$; $ch^2 x = \frac{ch2x + 1}{2}$
Интегрирование гиперболических функций аналогично интегрированию тригонометрических функций</td></tr>
</table>

Интегрирование иррациональностей

	Подынтегральная функция	Подстановка	Итог
1	$R(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}},(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}},...)$ R – рациональная функция, $p_1,p_2,q_1,q_2,...$ – целые числа	$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей показателей: $k=НОК(q_1,q_2,...)$	Рациональная функция t
2	$R(x,\sqrt{a^2-x^2})$	$x=a\sin t$ *или* $x=a\cos t$ $dx=a\cos tdt$ *или* $dx=-a\sin tdt$ $(a^2-x^2=a^2\cos^2 t$ *или* $a^2-x^2=a^2\sin^2 t)$	Рациональная функция $\sin t$, $\cos t$
	$R(x,\sqrt{a^2+x^2})$	$x=atgt$ *или* $x=actgt$ $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$ *или* $dx=\frac{-adt}{\sin^2 t}$ $(a^2+x^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}$ *или* $a^2+x^2=\frac{a^2}{\sin^2 t})$	
	$R(x,\sqrt{x^2-a^2})$	$x=\frac{a}{\cos t}$ *или* $x=\frac{a}{\sin t}$ $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ *или* $dx=\frac{-a\cos t}{\sin^2 t}dt$ $(x^2-a^2=a^2tg^2t$ *или* $x^2-a^2=a^2ctg^2t)$	
3	Дифференциальный бином $x^m(a+bx^n)^p$ по теореме Пафнутия Львовича Чебышева интегрируется в элементарных функциях только в трёх случаях: p — целое число, m,n — дроби	$x=t^k$, $k=НОК(знаменателей\ m,n)$ $dx=kt^{k-1}dt$	Рациональная функция t
	$\frac{m+1}{n}$ – *целое*	$a+bx^n=t^k$, k – *знаменатель дроби* p $bnx^{n-1}dx=kt^{k-1}dt$, $x^m(a+bx^n)^p dx=x^m t^{kp}\frac{kt^{k-1}dt}{bnx^{n-1}}$	
	$\frac{m+1}{n}+p-$ –*целое*	$a+bx^n=t^kx^n$, k – *знаменатель дроби* p $ax^{-n}+b=t^k$, $-anx^{-n-1}dx=kt^{k-1}dt$, $x^m(a+bx^n)^p dx=x^m(t^kx^n)^p\frac{kt^{k-1}dt}{-anx^{-n-1}}$, *где* $x^{-n}=\frac{t^k-b}{a}$	
4	$\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t=\frac{1}{mx+n}$	См. пункт 5
5	$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t=x+\frac{b}{2a}$, $ax^2+bx+c=at^2-\frac{b^2}{4a}+c$	Два табл-х инт-ла

При нахождении первообразной функции можно пользоваться следующим **алгоритмом**:

1. Попытаться найти первообразную непосредственным интегрированием или подведением подходящей функции под знак дифференциала. Если это не удается, то

2. Определить класс подынтегральной функции (рац. дробь, тригонометрическая, иррациональная) и применить соответствующие подстановки, а если функция смешанных классов – интегрирование по частям.

Несобственные интегралы (н.и.)

		I рода (по бесконечному промежутку)	II рода (от неограниченной на промежутке интегрирования функции)
Определение н.и.	1	$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$	$\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$
	2	$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$
	3	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Определение сходимости н.и.		Несобственный интеграл ***сходится***, если существуют **конечные пределы** в правых частях равенств, определяющих эти интегралы. Если эти **пределы бесконечны или не существуют**, то несобственный интеграл ***расходится***. $\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} A - \textit{конечное число} \Rightarrow \textit{интеграл сходится;} \\ \left.\begin{matrix}\infty \\ \bar{\exists}\end{matrix}\right\} - \textit{интеграл расходится.}\end{cases}$	
Признаки сходимости н.и.	1	$\varphi(x), f(x)$ *непрерывны* $\forall x\in[a,+\infty)$	$\varphi(x), f(x)$ *непрерывны* $\forall x\in[a,b)$ $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$
		$0\le\varphi(x)\le f(x)$	
		Сходимость $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$ Расходимость	Сходимость $\int_a^{b}\varphi(x)dx \quad \int_a^{b} f(x)dx$ Расходимость
	2	$\varphi(x)>0, f(x)>0, \forall x\in[a,+\infty)$	$\varphi(x), f(x)$ *непрерывны* $\forall x\in[a,b)$ $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$
		$\exists\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A\ne 0, \quad A<\infty$	$\exists\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A\ne 0, \quad A<\infty$
		Несобственные интегралы от функций $\varphi(x)$ *и* $f(x)$ ведут себя одинаково: или оба сходятся, или оба расходятся	
	3	$\int_a^{+\infty}\lvert f(x)\rvert dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится* $\Rightarrow$ *сходится абсолютно* *расходится* $\Rightarrow \begin{cases}\textit{сходится условно;}\\ \textit{расходится.}\end{cases}$	$\int_a^{b}\lvert f(x)\rvert dx \Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx$ *сходится* $\Rightarrow$ *сходится абсолютно* *расходится* $\Rightarrow \begin{cases}\textit{сходится условно;}\\ \textit{расходится.}\end{cases}$
Эталонные н.и.		$\int\limits_{a>0}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^k} = \begin{cases}\dfrac{a^{-k+1}}{k-1} - \textit{сходится, если } k>1,\\ +\infty - \textit{расходится, если } k\le 1.\end{cases}$	$\int\limits_a^b\dfrac{dx}{(b-x)^k} = \begin{cases}\dfrac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \textit{сходится, если } k<1,\\ \infty - \textit{расходится, если } k\ge 1.\end{cases}$ $\int\limits_a^b\dfrac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases}\dfrac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \textit{сходится, если } k<1,\\ \infty - \textit{расходится, если } k\ge 1.\end{cases}$

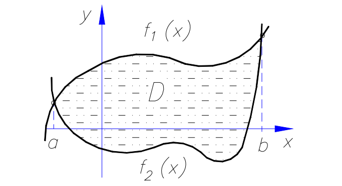
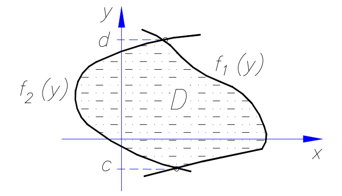
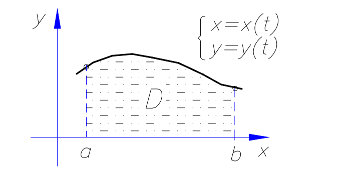
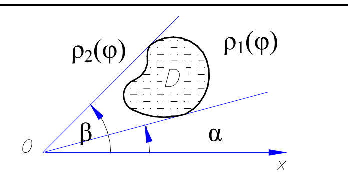
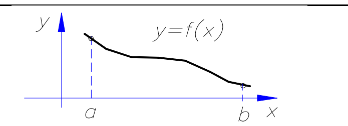
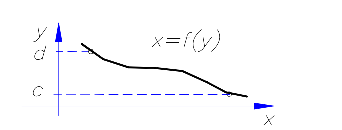
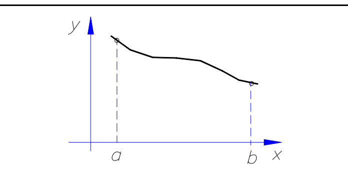
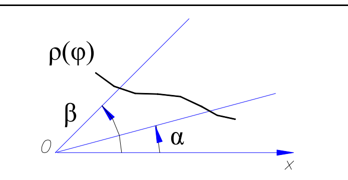
ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема. Если величина Q обладает на $[a,b]$

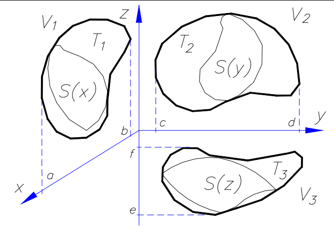
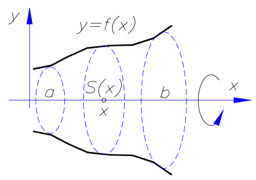
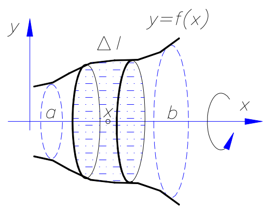
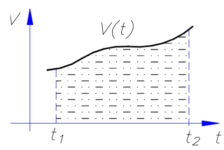
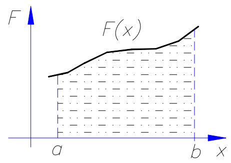
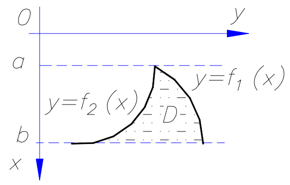
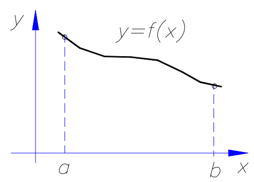
1. свойством аддитивности, а именно, если $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$,
то $Q=\Delta Q_1+\Delta Q_2+\ldots+\Delta Q_n$, где ΔQ_i – значение Q на $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots n$;
2. свойством линейности Q в малом: $\Delta Q \approx f(x)\Delta x$, где $f(x)$ – интегрируемая на $[a,b]$ функция,

то величину Q можно найти интегралом от её элемента $dQ = f(x)dx$ по промежутку $[a,b]$:

$$Q = \int_a^b f(x)dx$$

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
S, площадь плоской фигуры D	1		Д. С. К. $D = \left\{ \begin{matrix} a \le x \le b \\ f_2(x) \le y \le f_1(x) \end{matrix} \right\}$ Одна кривая границы области D не выше другой.	$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$	S, площадь плоской фигуры D
	2		Д. С. К. $D = \left\{ \begin{matrix} c \le y \le d \\ f_2(y) \le x \le f_1(y) \end{matrix} \right\}$ Одна кривая границы области D не левее другой.	$S = \int_c^d (f_1(y) - f_2(y))dy$	
	3		Д. С. К. $\alpha \le t \le \beta$ $x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b$ $(\ y(t)\ge 0,\ \forall t \in [\alpha,\beta]\ )$ Верхняя граница области задана параметрически	$S = \int_\alpha^\beta y(t)x_t^{/}dt$	
	4		П. С. К. $D = \left\{ \begin{matrix} \alpha \le \varphi \le \beta \\ \rho_2(\varphi) \le \rho \le \rho_1(\varphi) \end{matrix} \right\}$	$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho_1^2(\varphi) - \rho_2^2(\varphi))d\varphi$	
l, длина кривой L	1		Д. С. К. $L = \left\{ \begin{matrix} a \le x \le b \\ y = f(x) \end{matrix} \right\}$	$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y_x^{/})^2}dx$	l, длина кривой L
	2		Д. С. К. $L = \left\{ \begin{matrix} c \le y \le d \\ x = f(y) \end{matrix} \right\}$	$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x_t^{/})^2}dy$	
	3		Д. С. К. $L = \left\{ \begin{matrix} \alpha \le t \le \beta \\ x = x(t),\ y = y(t) \\ x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b \end{matrix} \right\}$ Линия L задана параметрически	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t^{/})^2 + (y_t^{/})^2}dt$	
	4		П. С. К. $L = \left\{ \begin{matrix} \alpha \le \varphi \le \beta \\ \rho = \rho(\varphi) \end{matrix} \right\}$	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho^{/})^2}d\varphi$	

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
V, объем тела T	1		Д. С. К. $T_1=\begin{Bmatrix} a\le x\le b\\ S(x)\perp 0X\end{Bmatrix}$ $T_2=\begin{Bmatrix} c\le y\le d\\ S(y)\perp 0Y\end{Bmatrix}$ $T_3=\begin{Bmatrix} e\le z\le f\\ S(z)\perp 0Z\end{Bmatrix}$	$V_1=\int_a^b S(x)dx$ $V_2=\int_a^b S(y)dy$ $V_3=\int_e^f S(z)dz$	V, объем тела T
	2		Д. С. К. $T=\begin{Bmatrix} a\le x\le b,\ y=f(x)\\ \pi y^2=S(x)\perp 0X\end{Bmatrix}$ Тело T образовано вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$	$V=\pi\int_a^b y^2(x)dx$	
σ, площадь поверхн. ω	1		Д. С. К. $\omega_x=\begin{Bmatrix} a\le x\le b\\ y=f(x)\\ \Delta\sigma=2\pi\, y(x)\Delta l\end{Bmatrix}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$	$\sigma_x=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx$	σ, площадь поверхн. ω
			Д. С. К. $\omega_x=\begin{Bmatrix} \alpha\le t\le\beta\\ y=y(t),\ x=x(t)\\ \Delta\sigma=2\pi\, y(t)\Delta l\end{Bmatrix}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x(t))$, заданной параметрически, вокруг оси $0X$	$\sigma_x=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x_t^{/})^2+(y_x^{/})^2}\,dt$	
S, путь	1		Д. С. К. $V=\begin{Bmatrix} t_1\le t\le t_2\\ V=V(t)\end{Bmatrix}$ V – скорость прямолинейного движения тела на промежутке времени $[t_1,t_2]$	$s=\int_{t_1}^{t_2}V(t)dt$	S, путь
A, работа	1		Д. С. К. $F=\begin{Bmatrix} a\le x\le b\\ F=F(x)\end{Bmatrix}$ Сила F направлена параллельно оси $0X$ на промежутке $[a,b]$	$A=\int_a^b F(x)dx$	A, работа
P, давл	1		Д. С. К. $D=\begin{Bmatrix} a\le x\le b\\ f_2(x)\le y\le f_1(x)\\ \Delta P=gx\mu(x)(f_1(x)-f_2(x))\end{Bmatrix}$ μ – плотность жидкости, давящей на пластину D	$P=g\int_a^b x\mu(x)(f_1(x)-f_2(x))dx$	P, давл.
m, масса	1		Д. С. К. $L=\begin{Bmatrix} a\le x\le b,\ y=f(x)\\ \Delta m=\mu(x)\Delta l\end{Bmatrix}$ μ – линейная плотность кривой L	$m=\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx$	m, масса

Статические моменты относительно координатных осей S_x, S_y, моменты инерции M_x, M_y, координаты центра тяжести x_c, y_c плоской кривой

$$y=f(x),\ a\le x\le b,\ dl=\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx=\sqrt{(x_t^{/})^2+(y_t^{/})^2}\,dt=\sqrt{\rho^2+(\rho_\varphi^{/})^2}\,d\varphi$$

$$S_x=\int_a^b \mu(x)y\,dl \quad S_y=\int \mu(x)x\,dl \quad M_x=\int_a^b \mu(x)y^2 dl \quad M_y=\int_a^b \mu(x)x^2 dl \quad x_c=\frac{S_y}{m} \quad y_c=\frac{S_x}{m}$$