Памятка содержит основные сведения, необходимые абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам в ВУЗ.

Приведены краткие определения, наиболее употребимые формулы, приемы решения типовых задач.

Содержание

Подписано в печать 17.04.91. Тираж 385 000 экз. (300 001—385 000 экз.). Цена 95 коп. Заказ 1077.

Отпечатано в типографии ордена Трудового Красного Знамени издательско-полиграфического объединения ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия». Адрес ИПО: 103030, Москва, Сущевская, 21.

СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. $a \in A$ — a принадлежит A.
2. $a \notin A$ — a не принадлежит A.
3. $A \subset B$ — A-подмножество B.
4. $\varnothing$ — пустое множество.
5. $A \cup B$ — объединение множеств.
6. $A \cap B$ — пересечение множеств.
7. $\exists$ — существует.
8. $\nexists$ — не существует.
9. $\forall a \in A$ — для всякого a из A.
10. ∞ — "бесконечность".
11. $A \Rightarrow B$ — из A следует B.
12. $A \Leftrightarrow B$ — A эквивалентно B.
13. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
14. $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n$.
15. $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828\ldots$ основание натурального логарифма.
16. Факториал $\begin{cases} n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod\limits_{k=1}^{n} K \ (n \in N). \\ 0! = 1 \end{cases}$

ЧИСЛА

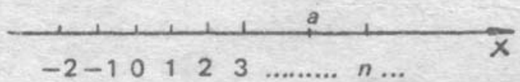
N — множество натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

Z — множество целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$.

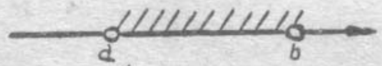
Q — множество рациональных чисел (вида p/q, $p, q \in Z$, $q \neq 0$).

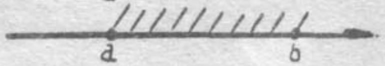
I — множество иррациональных чисел $\ldots, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}, e, \pi, \ldots$.

R — множество действительных (вещественных) чисел, $R = Q \cup I$.

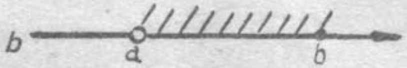
Числовая ось $\Rightarrow$  $a \in R$

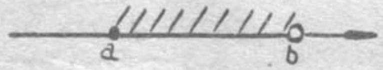
ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ

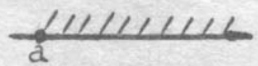
Интервал: $a < x < b$  $x \in \,]a, b[$.

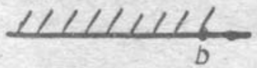
Отрезок: $a \leqslant x \leqslant b$  $x \in [a, b]$.

Полуинтервал: $\begin{cases} a < x \leqslant b \\ a \leqslant x < b \end{cases}$

 $x \in \,]a, b]$.

 $x \in [a, b[$.

Луч: $a \leqslant x < +\infty$  $x \in [a, +\infty[$; $(x \geqslant a)$

$-\infty < x \leqslant b$  $x \in \,]-\infty, b]$. $(x \leqslant b)$

ДРОБИ

$\frac{a}{b} = a : b$ – обыкновенная дробь $(a, b \in Z, b \neq 0)$.

$\frac{a}{10^n} = a \cdot 10^{-n}$ – десятичная дробь $(n \in N)$. $0{,}01 = 1\ \%$ – процент

$A\frac{a}{b} = A + \frac{a}{b}$ – смешанная дробь $(a, A, b \in N)$.

Основное свойство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ $(c \in R, c \neq 0)$. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, если $ad = bc$

1. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$. 2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. 3. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

4. $\frac{a}{b} \cdot m = m \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b}$. 5. $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b \cdot m}$, $(m \neq 0)$.

6. $m : \frac{a}{b} = \frac{m \cdot b}{a}$. 7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. 8. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$ $(ab > 0)$.

СТЕПЕНИ

Для $a \in R, a > 0, n \in N$:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$, $\quad a^0 = 1$, $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

a – основание, n – показатель степени.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. 2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. 3. $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$.

4. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

$(a > 0;\ b > 0;\ c > 0;\ m, n \in R;\ a, b, c \in R)$.

КОРНИ

X – арифметический корень n-ой степени из числа a $(x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n},\ a \geqslant 0,\ a \in R,\ n \in N)$, если $X^n = a$ и $x \geqslant 0$.

Для $a < 0$ $\sqrt[n]{a}$ определен только для нечетных $n > 0$ $(3, 5, \ldots 2k-1 \ldots)$

1. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. 2. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$. 3. $\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. $\sqrt[n]{a^{n \cdot m}} = a^m$. 5. $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$. 6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

7. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a} = a^{\frac{1}{n \cdot k}}$. 8. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

$(a, b, c \in R,\ a \geqslant 0,\ b > 0,\ c \geqslant 0,\ n, k \in N,\ n > 1,\ m \in Z)$.

ЛОГАРИФМЫ

X – логарифм $(x = \log_a b)$ числа $b > 0$ по основанию $a > 0$ $(a \neq 1)$, если $a^x = b$.

$$a^{\log_a b} = b$$

1. $\log_a 1 = 0$. 2. $\log_a a = 1$. 3. $\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|$, $(bc > 0)$.

4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$, $(bc > 0)$. 5. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

6. $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$. 7. $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$. 8. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$. 9. $\log_a b = \log_{a^n} b^n$. 10. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. 11. $\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c$. 12. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. 13. $\log_{10} b = \lg b$.

14. $\log_e b = \ln b$.

МОДУЛЬ (АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА)

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0, \end{cases} \quad (a \in R).$$

1. $|a| \geqslant 0$. 2. $|a| = |-a|$. 3. $|ab| = |a||b|$. 4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.
5. $|a|^2 = a^2 = |a^2|$. 6. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. 7. $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$. 8. $|a - b| \leqslant |a| + |b|$. 9. $||a| - |b|| \leqslant |a + b|$.
10. $|a| \leqslant A$ и $|b| \leqslant B \Rightarrow |a + b| \leqslant A + B$, $|ab| \leqslant AB$.

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$. 3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

4. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. 5. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

6. $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=a^3+3a^2b+3a^2b+3ab^2+b^3$.

7. $(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

8. $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b$. 2. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b$.

3. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$. 4. $(a-b\sqrt{c})(a+b\sqrt{c})=a^2-b^2c$.

5. $\sqrt{a\pm b\sqrt{c}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2c}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2c}}{2}}$.

6. $\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$. 7. $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}}=\dfrac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$. 8. $\dfrac{a}{1\pm\sqrt{b}}=$

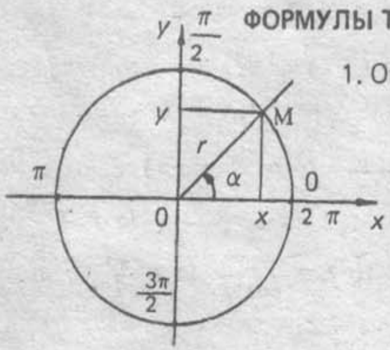
$=\dfrac{a(1\mp\sqrt{b})}{1-b}$. 9. $\dfrac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}=\dfrac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c}$. 10. $\dfrac{a}{\sqrt{b+\sqrt{c}}}=$

$=\dfrac{a\sqrt{(b^2-c)(b-\sqrt{c})}}{b^2-c}$. 11. $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=$

$=a\pm b$. 12. $\dfrac{a}{1\pm\sqrt[3]{b}}=\dfrac{a(1\mp\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{1\pm b}$. 13. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}}=$

$=\dfrac{a(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}{b\pm c}$. 14. $a\sqrt{b}=\begin{cases}-\sqrt{a^2b}, \text{ если } a<0,\\ \sqrt{a^2b}, \text{ если } a\geqslant 0.\end{cases}$

ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ



1. Определения $\sin\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}\ (x\neq 0)$,

$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}\ (y\neq 0)$.

2. Знаки тригонометрических функций

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	+	−	−	−
$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	−	−	+	+
$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$	−	+	−	−

3. Значения тригонометрических функций для некоторых углов.

Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Градусы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	−	0	−	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	−	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	−	0	−

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$. 2. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$. 3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=$

$=\mp\operatorname{ctg}\alpha$. 4. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha$. 5. $\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$.

6. $\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$. 7. $\operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha$. 8. $\operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha$.

9. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha$. 10. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha$.

11. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha$. 12. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha$.

ОСНОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. 2. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. 3. $\operatorname{ctg}\alpha=$

$=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\alpha\neq\pi n)$. 4. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$. 5. $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.

6. $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}\ (\alpha\neq\pi n)$. 7. $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.

8. $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\ (\alpha\neq\pi n)$. $(n\in Z)$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СУММЫ И РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$. 2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$. 3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$. 4. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$.

Области определения правых и левых частей могут не совпадать.

ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

1. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$. 2. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.

3. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

4. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Знак "+" или "–" выбирается в зависимости от "расположения" угла $\dfrac{\alpha}{2}$; области определения правых и левых частей могут не совпадать.

ФОРМУЛЫ КРАТНЫХ АРГУМЕНТОВ

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. 2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. 3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$. 4. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2}$.

5. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. 6. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

7. $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$. 8. $\operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$.

Области определения правых и левых частей могут не совпадать.

СТЕПЕНИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$. 2. $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

3. $\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$. 4. $\cos^3\alpha = \dfrac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$.

ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. 2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. 3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \times \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. 4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

5. $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} \mp \alpha\right)$.

6. $A \cdot \cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2} \cdot \sin(\alpha+\beta)$, $A^2 + B^2 \neq 0$, $\sin\beta = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 7. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$. 8. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$. 9. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$. 10. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$.

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$. 2. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$. 3. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$. 4. $\cos\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$.

5. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$. 6. $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$.

7. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$. 8. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$.

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

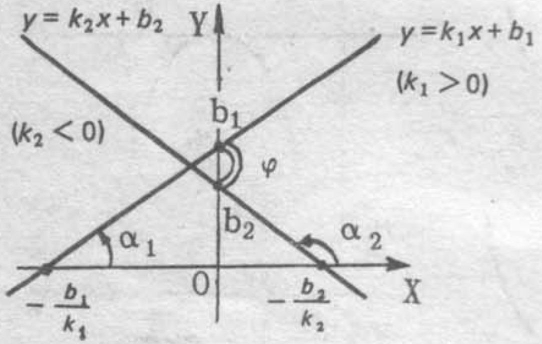
$y = f(x)$ — функция, определенная на множестве $D(y)$, если каждому $x \in D(y)$ ставится в соответствие единственное значение $y \in E(y)$ (x — аргумент, $D(y)$ — область определения, $E(y)$ — область значений функции).

$f(x)$ — четная, если $\forall x \in D(y)$, $-x \in D(y)$, $f(x) = f(-x)$

$f(x)$ — нечетная, если $\forall x \in D(y)$, $-x \in D(y)$, $f(-x) = -f(x)$

$f(x)$ — периодическая с периодом T ($T \neq 0$), если $\forall x \in D(y)$ $f(x \pm T) = f(x)$.

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ $y = kx + b$



1. $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$.

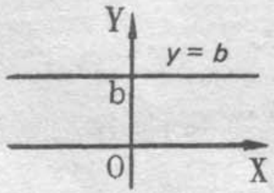
2. $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$.

3. $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| \quad (k_1 \cdot k_2 \neq -1)$.

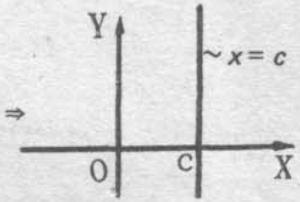
4. $k_1 \cdot k_2 = -1$ — условие перпендикулярности прямых.

5. $D(y) =]-\infty, +\infty[$. 6. $E(y) =]-\infty, +\infty[$.

$y = b \Rightarrow$



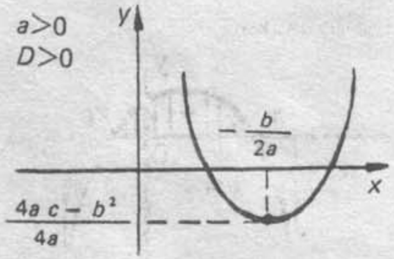
$x = c \Rightarrow$

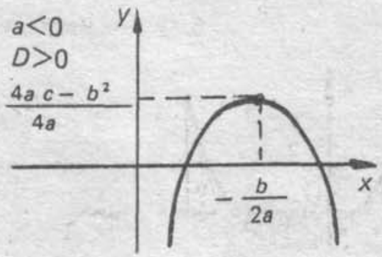


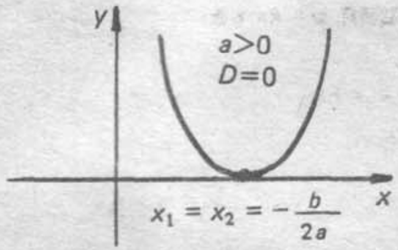
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ $y = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$.

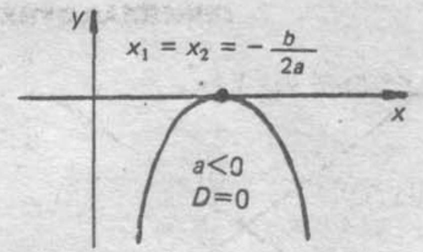
Дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Корни $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

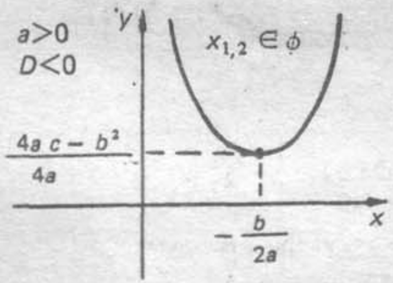
Если $D > 0$, то $x_1 < x_2$ при $a > 0$ и $x_1 > x_2$ при $a < 0$.
Если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -b/2a$. Если $D < 0$, то $x_{1,2} \in \phi$.

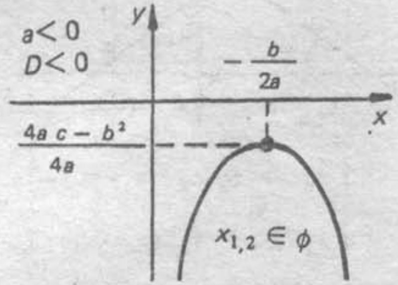












1. $D(y) =]-\infty, +\infty[$

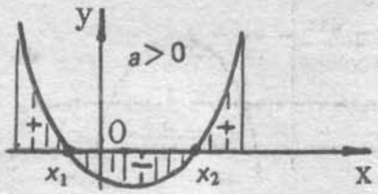
$$E(y) = \begin{cases} \left[-\dfrac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right[, & \text{если } a > 0, \\ \left]-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right], & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$ — теорема Виета.

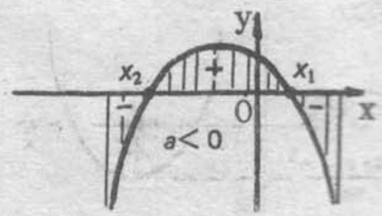
3. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

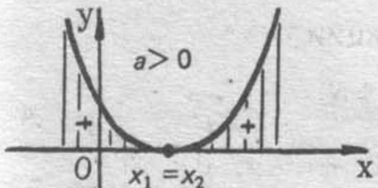
4. $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

5. Знаки квадратичной функции

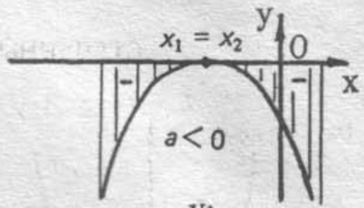


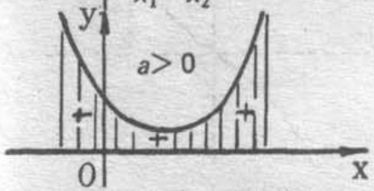
$D>0$



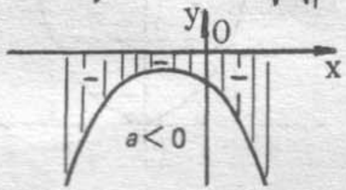


D=0





D< 0

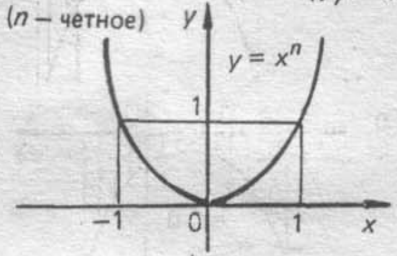


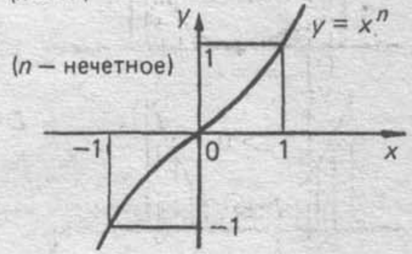
6. Решения типовых задач

	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$ax^2+bx+c=0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c>0$
$a>0$ $D<0$	$x\in\phi$	$x\in\phi$	$x\in\phi$	$x\in]-\infty, +\infty[$	$x\in]-\infty, +\infty[$
$a>0$ $D=0$	$x\in\phi$	$x=-\frac{b}{2a}$	$x=-\frac{b}{2a}$	$x\in]-\infty, +\infty[$	$x\in]-\infty, -\frac{b}{2a}[\cup]-\frac{b}{2a}, +\infty[$
$a>0$ $D>0$	$x\in]x_1, x_2[$	$x\in[x_1, x_2]$	$x=x_1\cup x=x_2$	$x\in]-\infty, x_1]\cup[x_2, +\infty[$	$x\in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$
$a<0$ $D<0$	$x\in]-\infty, +\infty[$	$x\in]-\infty, +\infty[$	$x\in\phi$	$x\in\phi$	$x\in\phi$
$a<0$ $D=0$	$x\in]-\infty, -\frac{b}{2a}[\cup]-\frac{b}{2a}, +\infty[$	$x\in]-\infty, +\infty[$	$x=-\frac{b}{2a}$	$x=-\frac{b}{2a}$	$x\in\phi$
$a<0$ $D>0$	$x\in]-\infty, x_2[\cup]x_1, +\infty[$	$x\in]-\infty, x_2]\cup[x_1, +\infty[$	$x=x_1\cup x=x_2$	$x\in[x_2, x_1]$	$x\in]x_2, x_1[$

СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ $y = x^\alpha$

1. $y = x^n$ $(n\in N)$

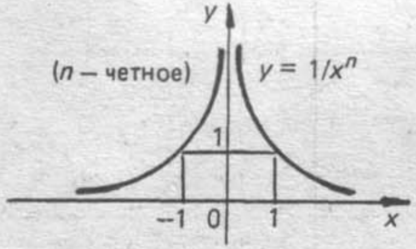


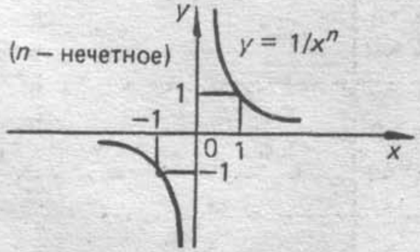


$D(y) =]-\infty, +\infty[$,
$E(y) = [0, +\infty[$,
$f(-x) = f(x)$.

$D(y) =]-\infty, +\infty[$,
$E(y) =]-\infty, +\infty[$,
$f(-x) = -f(x)$.

2. $y = x^{-n} = 1/x^n$ $(n\in N)$

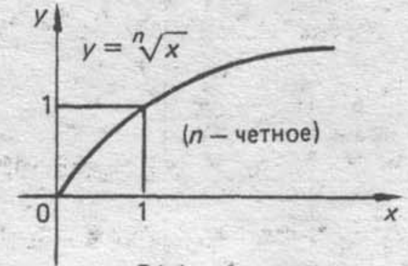


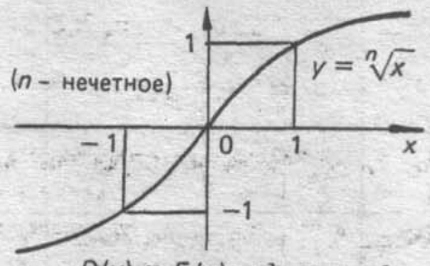


$D(y) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$,
$E(y) =]0, +\infty[$,
$f(-x) = f(x)$.

$D(y) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$,
$E(y) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$,
$f(-x) = -f(x)$.

3. $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ $(n\in N)$

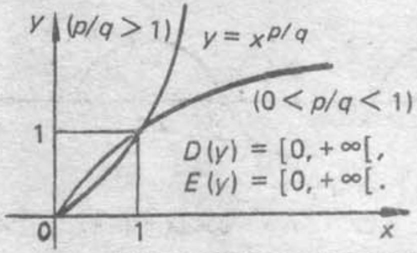


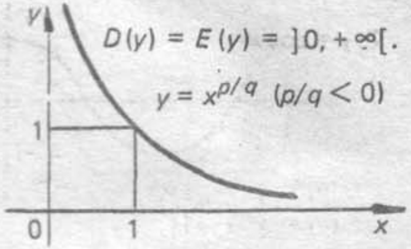


$D(y) = [0, +\infty[$,
$E(y) = [0, +\infty[$.

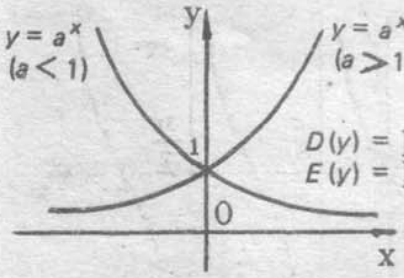
$D(y) = E(y) =]-\infty, +\infty[$,
$f(-x) = -f(x)$.

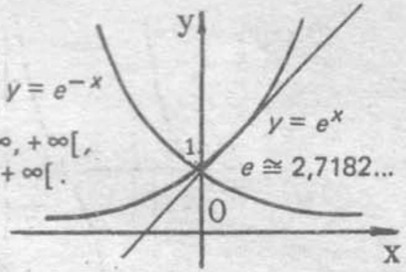
4. $y = x^{p/q}$ $(p, q \in Z, q \neq 0)$



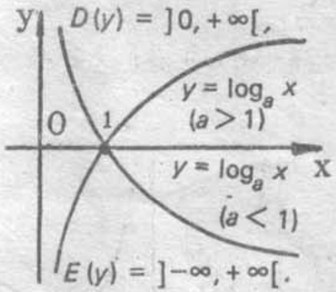


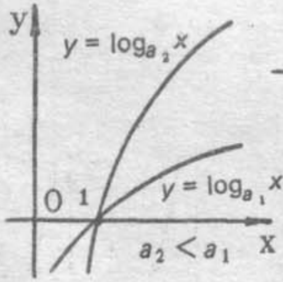
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

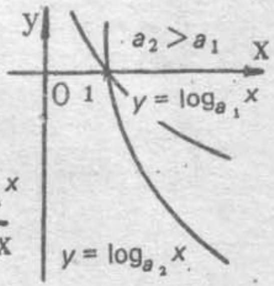




ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

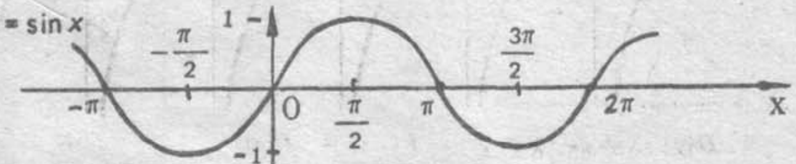






ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

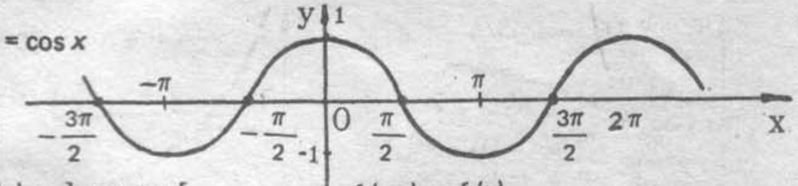
1. $y = \sin x$



$D(y) =]-\infty, +\infty[$, $f(-x) = -f(x)$,

$E(y) = [-1, +1]$, $T = 2\pi \Rightarrow \sin x = \sin(x + 2\pi k)$, $k \in Z$.

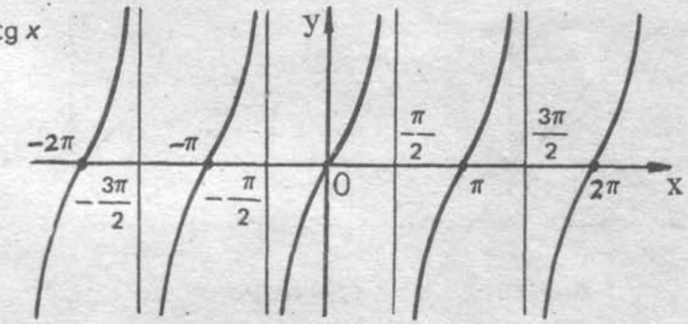
2. $y = \cos x$



$D(y) =]-\infty, +\infty[$, $f(-x) = f(x)$,

$E(y) = [-1, +1]$, $T = 2\pi \Rightarrow \cos x = \cos(x + 2\pi k)$, $k \in Z$.

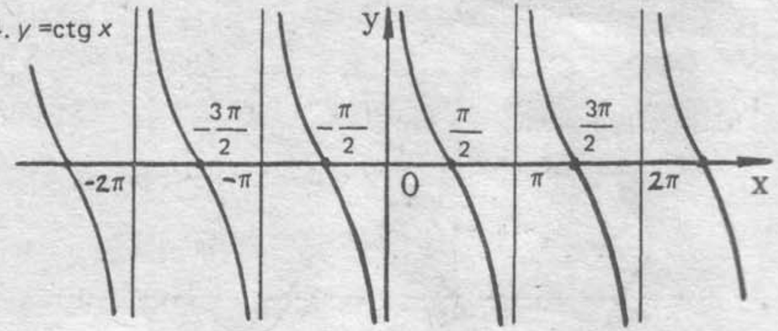
3. $y = \operatorname{tg} x$



$D(y): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $f(-x) = -f(x)$,

$E(y) =]-\infty, +\infty[$, $T = \pi \Rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi k)$, $k \in Z$.

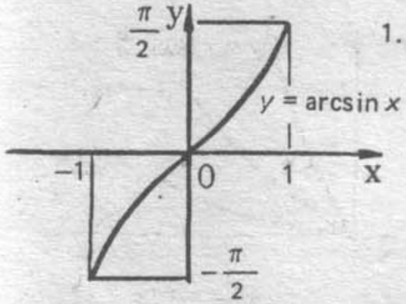
4. $y = \operatorname{ctg} x$



$D(y): x \neq \pi k$, $k \in Z$, $f(-x) = -f(x)$,

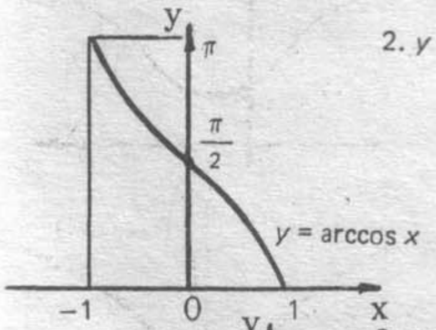
$E(y) =]-\infty, +\infty[$, $T = \pi \Rightarrow \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi k)$, $k \in Z$.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ



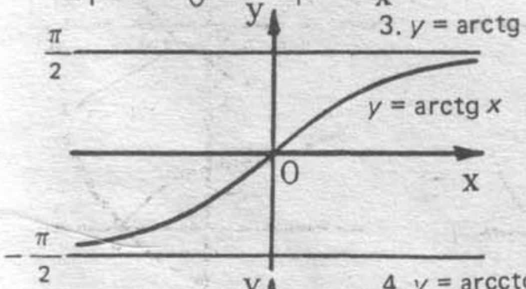
1. $y = \arcsin x$

$D(y) = [-1, +1]$,
$E(y) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
$f(-x) = -f(x)$,
$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$,
$(y \in E(y))$.



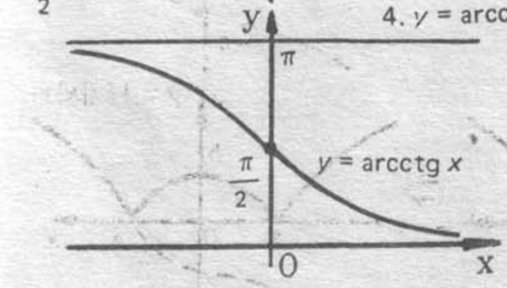
2. $y = \arccos x$

$D(y) = [-1, +1]$,
$E(y) = [0, \pi]$,
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,
$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$
$(y \in E(y))$.



3. $y = \operatorname{arctg} x$

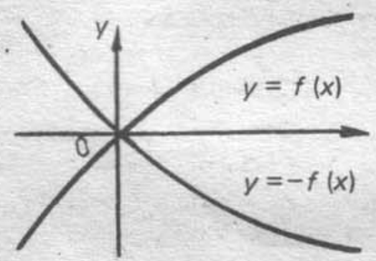
$D(y) =]-\infty, +\infty[$,
$E(y) =]-\pi/2, \pi/2[$,
$f(-x) = -f(x)$
$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$
$(y \in E(y))$.

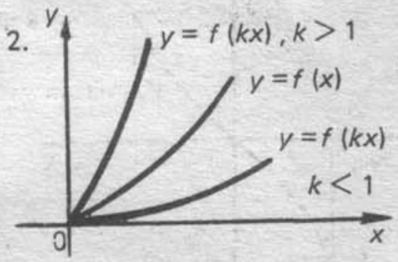


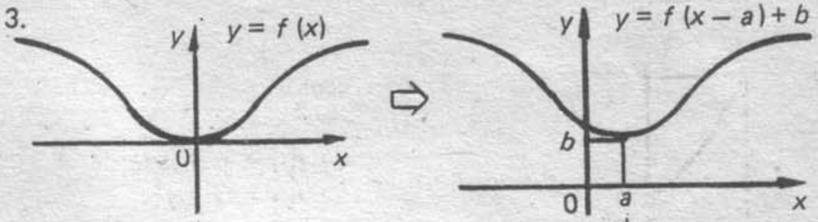
4. $y = \operatorname{arcctg} x$

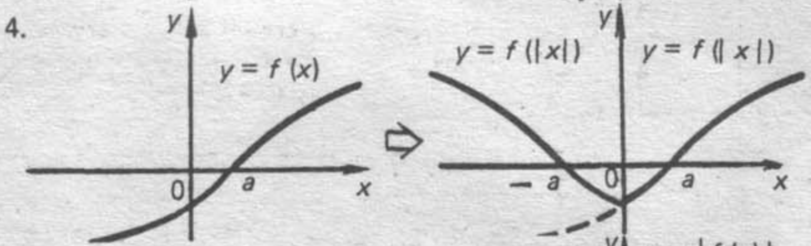
$D(y) =]-\infty, +\infty[$,
$E(y) =]0, \pi[$,
$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$,
$y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y$
$(y \in E(y))$.

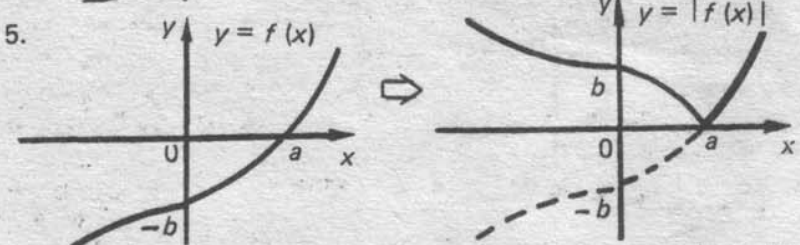
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

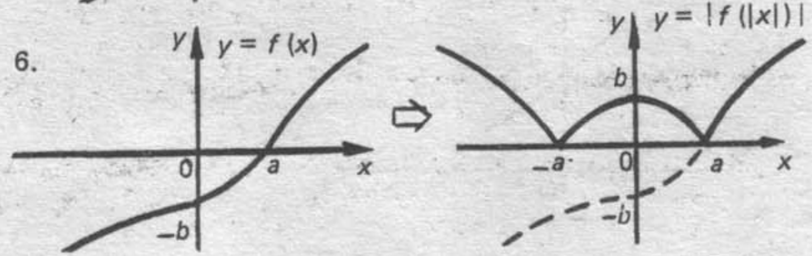
1.


2.


3.


4.


5.


6.


УРАВНЕНИЯ

1. Равенство $f_1(x) = f_2(x)$ — уравнение с одной переменной x.
2. $x = x_i$ — корни (решения) уравнения, если $f_1(x_i) = f_2(x_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. 3. $D = D(f_1) \cap D(f_2)$ — область допустимых значений (ОДЗ) переменной. 4. Уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ и $g_1(x) = g_2(x)$ эквивалентны ($\Leftrightarrow$), если множества их корней совпадают.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ

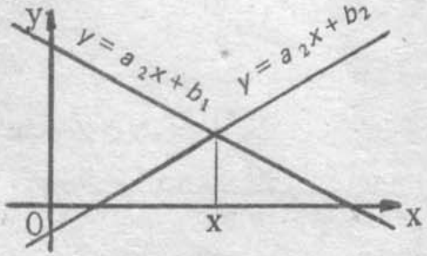
1. $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) + f_3(x) = f_2(x) + f_3(x)$, если $D(f_1) \cap D(f_2) \in D(f_3)$. 2. $f_1(x) = f_2(x) + f_3(x) \Leftrightarrow f_1(x) - f_2(x) = f_3(x) \Leftrightarrow f_1(x) - f_3(x) = f_2(x)$. 3. $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow a \cdot f_1(x) = a \cdot f_2(x)$, $a \in R$, $a \neq 0$. 4. $f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) = 0 \; \forall x \in$ ОДЗ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x) = 0. \end{array}\right.$ 5. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

6. $f(x) g(x) = f(x) \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) [g(x) - \varphi(x)] = 0$. 7. $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow f_1^{2n}(x) = f_2^{2n}(x)$. 8. $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow f_1^{2n-1}(x) = f_2^{2n-1}(x)$.
9. $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow f_1(x) g(x) = f_2(x) g(x)$, если $D(f_1) \cap D(f_2) \in D(g)$.
10. $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) g(x) = f_2(x) g(x)$, если $\forall x \in D(f_1) \cap D(f_2)$ $g(x) \neq 0$. 11. $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f_1(x)}{g(x)} = \dfrac{f_2(x)}{g(x)}$, если $\forall x \in D(f_1) \cap D(f_2)$ $g(x) \neq 0$.

1. Линейное уравнение

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2$$

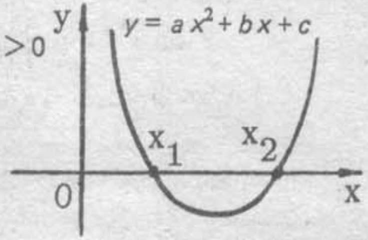
$$\begin{cases} x = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}, a_1 \neq a_2, \\ x \in \phi, \; a_1 = a_2, \; b_1 \neq b_2, \\ x \in R, \; a_1 = a_2, \; b_1 = b_2. \end{cases}$$



2. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \; b^2 - 4ac > 0 \\ x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}, \; b^2 - 4ac = 0, \\ x_{1,2} \in \phi, \; b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$



3. Биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{c}{a}.$$

4. Иррациональные уравнения $(n \in N)$

$$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ (\varphi(x) \geqslant 0) \\ f(x) = \varphi(x). \end{cases} \quad \sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) = \varphi(x)^{2n}. \end{cases}$$

$$\sqrt[2n-1]{f(x)} = \sqrt[2n-1]{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x).$$

$$\sqrt[2n-1]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x)^{2n-1}.$$

5. Показательные уравнения

1) $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x)$. $(a > 0, a \neq 1)$

2) $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \log_a b, \; b > 0, a \neq 1, \\ x \in \phi, \; b \leqslant 0, \\ x \in \phi, \; a = 1, b \neq 1, \\ x \in D(f), \; a = b = 1. \end{cases}$ $(a > 0)$

6. Логарифмические уравнения

1) $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$ $(a > 0, a \neq 1)$ 2) $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0, \\ (\varphi(x) > 0) \end{cases}$ $(a > 0, a \neq 1)$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1 \Rightarrow x \in \phi, \\ |a| \leqslant 1 \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \end{cases}$

где $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

2. $\cos x = a \Rightarrow \begin{cases} |a| > 1 \Rightarrow x \in \phi, \\ |a| \leqslant 1 \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, \end{cases}$

$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$, $k \in Z$.

3. $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $\operatorname{arctg} a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $k \in Z$, $a \in R$.

4. $\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $\operatorname{arcctg} a \in]0, \pi[$, $k \in Z$, $a \in R$.

5.

a	$\sin x = a$	$\cos x = a$
0	$x=\pi k$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$
1	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$x=2\pi k$
-1	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$x=\pi+2\pi k$
$\frac{1}{2}$	$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$	$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$
$-\frac{1}{2}$	$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$	$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$	$x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k$	$x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$	$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$	$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$

6.

a	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
0	$x=\pi k$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$
1	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k$
-1	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$
$\sqrt{3}$	$x=\frac{\pi}{3}+\pi k$	$x=\frac{\pi}{6}+\pi k$
$-\sqrt{3}$	$x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$	$x=\frac{5\pi}{6}+\pi k$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x=\frac{\pi}{3}+\pi k$	$x=\frac{\pi}{6}+\pi k$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$	$x=\frac{2\pi}{3}+\pi k$

7. $a\sin x+b\cos x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-\frac{b}{a} \Rightarrow x=\pi k+\operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right),\ k\in Z.$

8. $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0 \Leftrightarrow a\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg} x+c=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pi k+\operatorname{arctg}\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ b^2-4ac\geqslant 0,\ a,b,c\neq 0.\\ x\in\phi,\ b^2-4ac<0.\end{cases}$$

9. $a\sin x+b\cos x=c \Rightarrow 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\cos^2\frac{x}{2}-b\sin^2\frac{x}{2}-$

$-c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)=0 \Rightarrow (b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+(c-b)=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x=2\pi k+2\operatorname{arctg}\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c},\ a^2+b^2>c^2,\ b\neq -c,\\ x=2\pi k+2\operatorname{arctg}\frac{a}{b+c},\ a^2+b^2=c^2,\ b\neq -c,\\ x=2\pi k+2\operatorname{arctg}\frac{c-b}{2a},\ x=\pi+2\pi k,\ b=-c,\ a\neq 0,\\ x\in\phi,\ a^2+b^2<c^2.\end{cases}$$

10. $P(\sin x\pm\cos x, \sin x\cos x)=0 \Rightarrow P(t, t^2)=0 \Rightarrow t_{1,2}$,
где $P(u, v)$ — многочлен, $t=\sin x\pm\cos x$, $t^2=1\pm 2\sin x\cos x$.

НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$. 2. $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

3. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1+\cos^2 2x}{2}=1-\frac{\sin^2 2x}{2}=\frac{3+\cos 4x}{4}$.

4. $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{1}{8}(5+3\cos 4x)=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2x)$.

5. $\cos^6 x-\sin^6 x=\frac{1}{16}(15\cos 2x+\cos 6x)$.

6. $\cos^8 x-\sin^8 x=\frac{1}{4}\cos 2x(3+\cos 4x)$.

7. $\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$. 8. $\sin x\pm\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x\pm\frac{\pi}{3}\right)$.

9. $\sqrt{3}\sin x\pm\cos x=2\sin\left(x\pm\frac{\pi}{6}\right)$.

НЕРАВЕНСТВА

1. Соотношения вида $f(x)>g(x)$, $f(x)<g(x)$, $f(x)\geqslant g(x)$, $f(x)\leqslant g(x)$ — неравенства с переменной.
2. Множество $F\subset D(f)\cap D(g)$ — решение неравенства $f(x)<g(x)$, если $\forall\ x_k\in F\ \ f(x_k)<g(x_k)$ — верное числовое неравенство.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ

1. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) < 0.$
2. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow a f(x) > a g(x)$, если $a > 0$.
3. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow -f(x) < -g(x)$.
4. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow a f(x) < a g(x)$, если $a < 0$.
5. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)$, если $D(f) \cap D(g) = D(\varphi)$.
6. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{g(x)}$, если $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.
7. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x)$, если $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ $\varphi(x) > 0$.
8. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^{2n}_{(x)} > g^{2n}_{(x)}, n \in N$, если $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ $f(x) > 0, g(x) > 0$.
9. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}_{(x)} > g^{2n+1}_{(x)}$, $n \in N$.
10. $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$
11. $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$
12. $f(x) g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$
13. $f(x) g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x)^{2n}. \end{cases}$ $(n \in N)$

2. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g(x)^{2n}. \end{cases}$ $(n \in N)$.

3. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)^{2n+1}$. $(n \in N)$

4. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)^{2n+1}$. $(n \in N)$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \text{ при } a > 1, \\ f(x) < g(x) \text{ при } 0 < a < 1. \end{array} \right.$

2. $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > \log_a b,\ a > 1, b > 0, \\ f(x) < \log_a b, 0 < a < 1, b > 0, \\ x \in D(f),\ a > 0, b \leqslant 0. \end{array} \right.$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $0 < a < 1$ $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

2. $a > 1$ $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

СХЕМЫ РЕШЕНИЙ ТИПОВЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

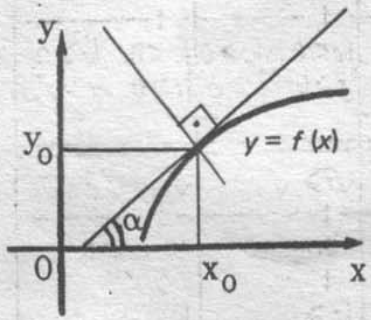
$\lvert f\rvert < \varphi$	$\lvert f\rvert \leqslant \varphi$	$\lvert f\rvert = \varphi$	$\lvert f\rvert \geqslant \varphi$	$\lvert f\rvert > \varphi$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$-\varphi < f < \varphi$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} -\varphi < f, \\ f < \varphi. \end{cases}$	$-\varphi \leqslant f \leqslant \varphi$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} -\varphi \leqslant f, \\ f \leqslant \varphi. \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi \geqslant 0, \\ f = -\varphi \cup f = \varphi. \end{cases}$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} f < 0, \\ f = -\varphi. \end{cases} \cup \begin{cases} f \geqslant 0, \\ f = \varphi \end{cases}$	$f \leqslant -\varphi \cup f \geqslant \varphi$	$f < -\varphi \cup f > \varphi$
$\lvert f\rvert < \lvert\varphi\rvert$	$\lvert f\rvert \leqslant \lvert\varphi\rvert$	$\lvert f\rvert = \lvert\varphi\rvert$	$\lvert f\rvert \geqslant \lvert\varphi\rvert$	$\lvert f\rvert > \lvert\varphi\rvert$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$f^2 < \varphi^2$ $\Updownarrow$ $(f - \varphi) \times$ $\times (f + \varphi) < 0$	$f^2 \leqslant \varphi^2$ $\Updownarrow$ $(f - \varphi) \times$ $\times (f + \varphi) \leqslant 0$	$f = \varphi \cup f = -\varphi$	$f^2 \geqslant \varphi^2$ $\Updownarrow$ $(f - \varphi) \times$ $\times (f + \varphi) \geqslant 0$	$f^2 > \varphi^2$ $\Updownarrow$ $(f - \varphi) \times$ $\times (f + \varphi) > 0$

$\sqrt{f}<\varphi \Updownarrow \begin{cases}\varphi>0,\\ f\geqslant 0,\\ f<\varphi^2.\end{cases}$	$\sqrt{f}\leqslant\varphi \Updownarrow \begin{cases}\varphi\geqslant 0,\\ f\geqslant 0,\\ f\leqslant\varphi^2.\end{cases}$	$\sqrt{f}=\varphi \Updownarrow \begin{cases}\varphi\geqslant 0,\\ f=\varphi^2.\end{cases}$	$\sqrt{f}\geqslant\varphi \Updownarrow \begin{cases}\varphi<0,\\ f\geqslant 0.\end{cases} \cup \begin{cases}\varphi\geqslant 0\\ f\geqslant\varphi^2.\end{cases}$	$\sqrt{f}>\varphi \Updownarrow \begin{cases}\varphi<0,\\ f\geqslant 0.\end{cases} \cup \begin{cases}\varphi\geqslant 0,\\ f>\varphi^2.\end{cases}$
$\sqrt{f}<\sqrt{\varphi} \Updownarrow 0\leqslant f<\varphi \Updownarrow \begin{cases}f\geqslant 0,\\ f<\varphi.\end{cases}$	$\sqrt{f}\leqslant\sqrt{\varphi} \Updownarrow 0\leqslant f\leqslant\varphi \Updownarrow \begin{cases}f\geqslant 0,\\ f\leqslant\varphi.\end{cases}$	$\sqrt{f}=\sqrt{\varphi} \Updownarrow \begin{cases}f=\varphi,\\ f\geqslant 0\end{cases}$ (или $\varphi\geqslant 0$)	$\sqrt{f}\geqslant\sqrt{\varphi} \Updownarrow f\geqslant\varphi\geqslant 0 \Updownarrow \begin{cases}f\geqslant\varphi,\\ \varphi\geqslant 0.\end{cases}$	$\sqrt{f}>\sqrt{\varphi} \Updownarrow f>\varphi\geqslant 0 \Updownarrow \begin{cases}f>\varphi,\\ \varphi\geqslant 0.\end{cases}$
$\log_\varphi f<0 \Updownarrow \begin{cases}(f-1)\times\\ \times(\varphi-1)<0,\\ f>0,\\ \varphi>0.\end{cases}$	$\log_\varphi f\leqslant 0 \Updownarrow \begin{cases}(f-1)\times\\ \times(\varphi-1)\leqslant 0,\\ f>0,\\ \varphi>0,\\ \varphi\neq 1.\end{cases}$	$\log_\varphi f=0 \Updownarrow \begin{cases}f=1,\\ \varphi>0,\\ \varphi\neq 1.\end{cases}$	$\log_\varphi f\geqslant 0 \Updownarrow \begin{cases}(f-1)\times\\ \times(\varphi-1)\geqslant 0,\\ f>0,\\ \varphi>0,\\ \varphi\neq 1.\end{cases}$	$\log_\varphi f>0 \Updownarrow \begin{cases}(f-1)\times\\ \times(\varphi-1)>0,\\ f>0,\\ \varphi>0.\end{cases}$
$\log_\varphi f_1< <\log_\varphi f_2 \Updownarrow \begin{cases}(f_1-f_2)\times\\ \times(\varphi-1)<0,\\ f_1>0,\\ f_2>0,\\ \varphi>0.\end{cases}$	$\log_\varphi f_1\leqslant \leqslant\log_\varphi f_2 \Updownarrow \begin{cases}(f_1-f_2)\times\\ \times(\varphi-1)\leqslant 0,\\ f_1>0,\\ f_2>0,\\ \varphi>0,\\ \varphi\neq 1.\end{cases}$	$\log_\varphi f_1= =\log_\varphi f_2 \Updownarrow \begin{cases}f_1=f_2,\\ f_1>0 \text{ (или}\\ f_2>0),\\ \varphi>0,\\ \varphi\neq 1.\end{cases}$	$\log_\varphi f_1\geqslant \geqslant\log_\varphi f_2 \Updownarrow \begin{cases}(f_1-f_2)\times\\ \times(\varphi-1)\geqslant 0,\\ f_1>0,\\ f_2>0,\\ \varphi>0,\\ \varphi\neq 1.\end{cases}$	$\log_\varphi f_1> >\log_\varphi f_2 \Updownarrow \begin{cases}(f_1-f_2)\times\\ \times(\varphi-1)>0,\\ f_1>0,\\ f_2>0,\\ \varphi>0,\end{cases}$

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Производная функции $y=f(x)$ в точке x – $y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Геометрический смысл: $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$.



$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ – уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке (x_0, y_0).

$y-y_0=\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ – уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке (x_0, y_0).

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $c'=0$ $(c=\text{const})$. 2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1} \Leftrightarrow x'=1$, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 3. $(a^x)'=a^x\ln a$. 4. $(e^x)'=e^x$.

5. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$. 6. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. 7. $(\sin x)'=\cos x$.

8. $(\cos x)'=-\sin x$. 9. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$. 10. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

11. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 12. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$. 14. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, $c=\text{const}$, то

1. $(cu)'=cu'$. 2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$. 3. $(uv)'=u'v+v'u$.

4. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$.

5. $y=f(u)$, $u=u(x) \Rightarrow y'_x=f'_u u'_x$.

ПРОГРЕССИИ

Арифметическая

Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ — числовая последовательность $a_1,\ a_2, ..., a_n, ..., n \in N$, такая, что $\forall n > 1$ $a_n = a_{n-1} + d$ (d — разность)

1. $a_{n+1} = a_n + d$.
2. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ $(n > 1)$.
3. $a_n = a_1 + (n-1)d$.
4. $a_n = a_k + d(n-k)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
5. $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
6. $a_n + a_m = a_k + a_p$, если $n + m = k + p$.
7. $a_1 = a_n - d(n-1)$.
8. $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ $(n > 1)$.
9. $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$.
10. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
11. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.
12. $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$
13. $S_n - S_{k-1} = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n = \frac{a_k + a_n}{2}(n - k + 1)$, $1 < k \leqslant n$. $(n, k, m, p \in N)$

Геометрическая

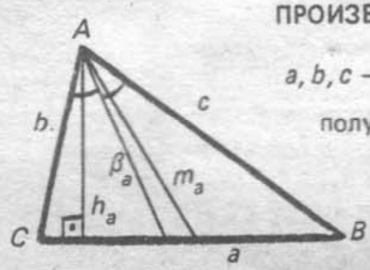
Геометрическая прогрессия $\{b_n\}$ — числовая последовательность $b_1, b_2, ..., b_n, ..., n \in N$, такая, что $b_1 \neq 0$ и $\forall n > 1$ $b_n = b_{n-1} q$ (q — знаменатель).

1. $b_{n+1} = b_n q$.
2. $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ $(n > 1)$.
3. $b_n = b_1 q^{n-1}$.
4. $b_n = b_k q^{n-k}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
5. $b_n = b_{n-k} q^k$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
6. $b_{n+k} = b_n q^k$.
7. $b_n^2 = b_{n-m} b_{n+m}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$.
8. $b_n b_m = b_k b_p$, если $n + m = k + p$.
9. $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.
10. $$S_n = \begin{cases} b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ b_1 n, & q = 1. \end{cases}$$
11. $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$, $q \neq 1$.
12. $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$, если $0 < |q| < 1$.

$(n, k, m, p \in N)$

ПЛАНИМЕТРИЯ

ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



a, b, c — длины сторон ΔABC; $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; S — площадь; R и r — радиусы вписанной и описанной окружностей; h_a, β_a, m_a — длины высоты, медианы и биссектрисы, проведенной к стороне a.

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Теорема косинусов

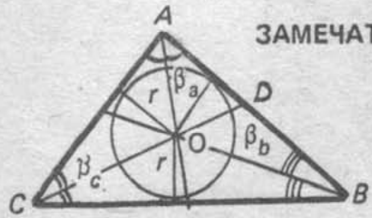
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$S = {}^1/_2 a h_a$; $S = {}^1/_2 a b \sin C$; $S = pr$; $S = abc/4R$

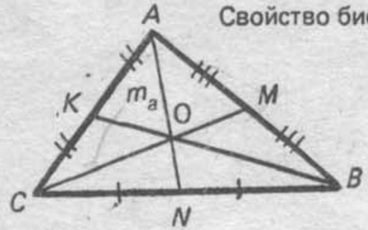
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ И ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ



БИССЕКТРИСЫ

O — центр вписанной окружности $r = S/p$

Свойство биссектрисы угла треугольника $AD/DB = AC/BC$

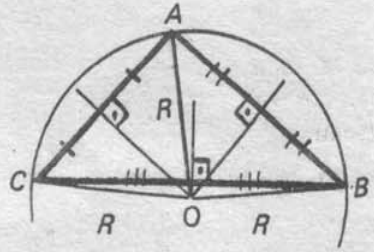


МЕДИАНЫ

O — центр тяжести треугольника

$OK/OB = OM/OC = ON/OA = {}^1/_2$

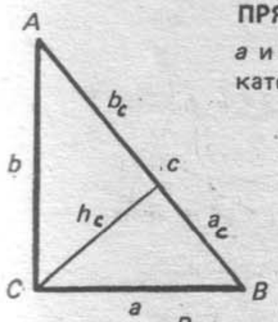
$m_a = {}^1/_2 \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$



ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ, ПРОВЕДЕННЫЕ ЧЕРЕЗ СЕРЕДИНЫ СТОРОН

O — центр описанной окружности $R = \frac{abc}{4S}$

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



a и b — катеты; c — гипотенуза; a_c и b_c — проекции катетов на гипотенузу

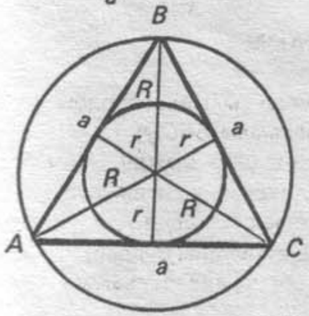
$a^2+b^2=c^2$ — теорема Пифагора

$S = {}^1/_2\,ab \quad S = {}^1/_2\,ch_c \quad r = \dfrac{a+b-c}{2}$

$R = c/2 \quad h_c^2 = a_c b_c \quad a^2 = c\,a_c \quad b^2 = c\,b_c$

$a = c\sin A = c\cos B = b\,\mathrm{tg}\,A = b\,\mathrm{ctg}\,B$

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

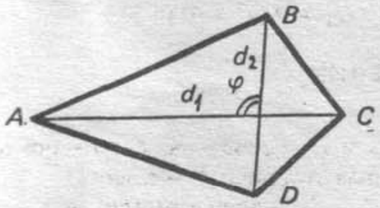


$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad a = R\sqrt{3}$

$a = 2r\sqrt{3} \qquad r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

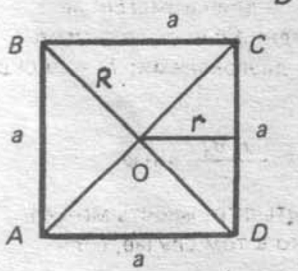
ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ВЫПУКЛЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК



d_1 и d_2 — длины диагоналей;
φ — угол между ними;
S — площадь

$S = {}^1/_2\,d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$

КВАДРАТ

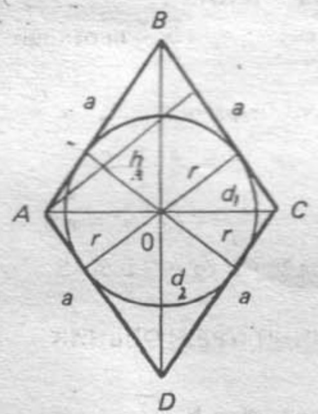


$|d_1| = |d_2| = d, \quad d_1 \perp d_2$

$S = a^2 = \dfrac{d^2}{2} \quad r = \dfrac{a}{2} \quad R = \dfrac{d}{2}$

описанной многоугольника $S = pr$
правильный многоугольник
$a_3 = R\sqrt{3}$; $a_4 = R\sqrt{2}$; $a_6 = R$; $S = \dfrac{n a_n r}{2}$

РОМБ



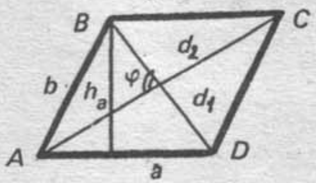
$d_1 \perp d_2 \qquad S = a \cdot h_a$

$S = a^2 \sin A \qquad S = {}^1/_2\,d_1 d_2$

$r = h_a/2 \qquad d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

O — центр вписанной окружности

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

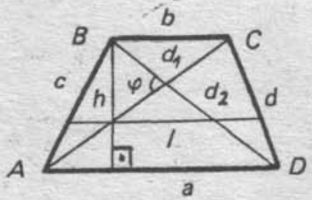


a и b — длины смежных сторон параллелограмма $ABCD$;
A — величина угла между этими сторонами; h_a — высота, опущенная на сторону a;
$d_1 - d_2$ — длины диагоналей;
S — площадь параллелограмма

$h_a = b \cdot \sin A \qquad S = a \cdot h_a \qquad S = ab\sin A \qquad S = {}^1/_2\,d_1 d_2 \sin\varphi$

$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos A \qquad d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2+b^2)$

ТРАПЕЦИЯ



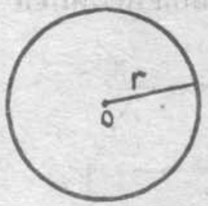
a и b — основания; c и d — боковые стороны; h — высота;
d_1 и d_2 — длины диагоналей;
l — средняя линия; φ — угол между диагоналями; S — площадь

$l = \dfrac{a+b}{2} \qquad S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h \qquad S = \dfrac{d_1 d_2}{2} \cdot \sin\varphi$

Если $a+b=c+d$, то в трапецию можно вписать окружность

Описать окружность можно только в том случае, если $c = d$

ОКРУЖНОСТЬ, КРУГ

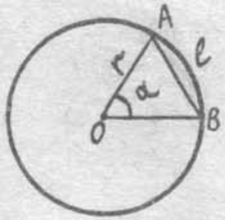


r – радиус окружности;
C – длина окружности;
S – площадь круга

$C = 2\pi r$

$S = \pi r^2$

СЕКТОР, СЕГМЕНТ



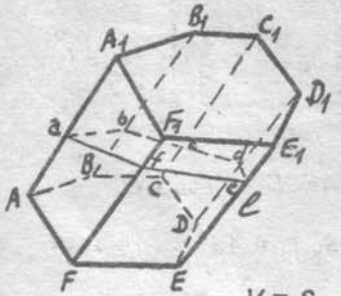
r – радиус окружности;
l – длина дуги, ограничивающей сектор; S – площадь сектора;
n^0 – градусная мера центрального угла; α – радианная мера центрального угла

$l = \dfrac{\pi r\, n^0}{180^0} = r \cdot \alpha \qquad S = \dfrac{\pi r^2 n^0}{360^0} = {}^1/_2\, r^2\alpha$

$S_{сегм} = S_{AlB} = S_{AOBl} - S_{AOB}$

СТЕРЕОМЕТРИЯ

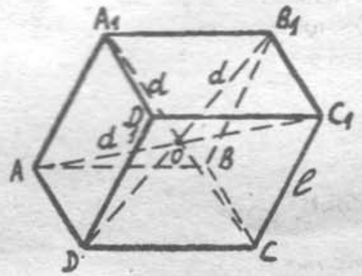
ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРИЗМА



l – боковое ребро; P – периметр основания; S – площадь основания; H – высота;
$P_{сеч}$ – периметр перпендикулярного сечения; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности;
V – объем; $S_{сеч}$ – площадь перпендикулярного сечения

$V = S_{сеч} \cdot l \qquad V = S \cdot H \qquad S_{бок} = P_{сеч} \cdot l$

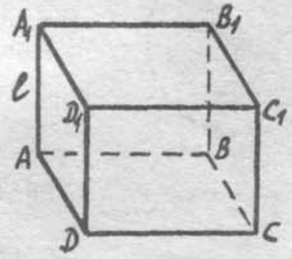
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



$S_{бок} = P_{сеч}\, l$

$V = S \cdot H$

ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

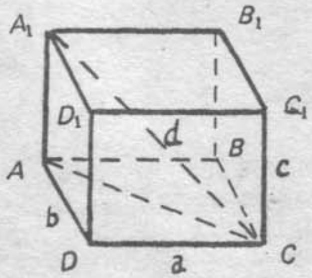


$ABCD$ – параллелограмм

$S_{бок} = P \cdot l$

$V = S \cdot l$

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

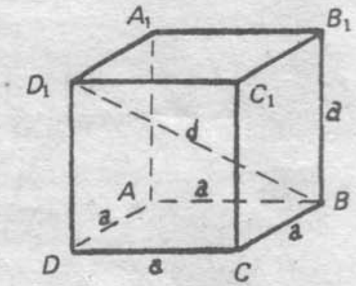


$ABCD$ – прямоугольник

$S_{бок} = 2(a + b) \cdot c$

$V = abc \qquad d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

КУБ

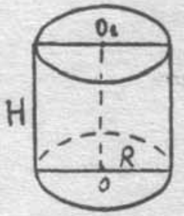


$ABCD$ – квадрат

$S_{бок} = 4a^2 \qquad V = a^3$

$d = a\sqrt{3}$

ЦИЛИНДР



R – радиус основания;
$S_{бок}$ – площадь боковой поверхности;
$S_п$ – площадь полной поверхности;
V – объем

$S_{бок} = 2\pi RH \qquad S_п = 2\pi R\,(R+H)$

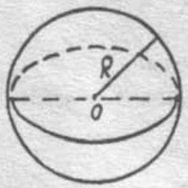
$V = \pi R^2 H$

КОНУС

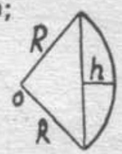
$S_{бок} = \pi Rl \qquad S_п = \pi R\,(R+l)$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

ШАР, ШАРОВОЙ СЕКТОР



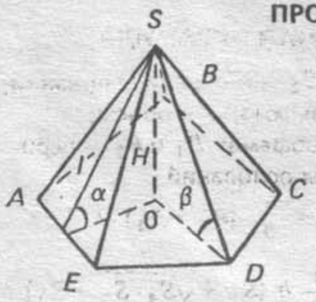
S – площадь поверхности шара;
R – радиус шара;
h – высота сегмента;
V – объем



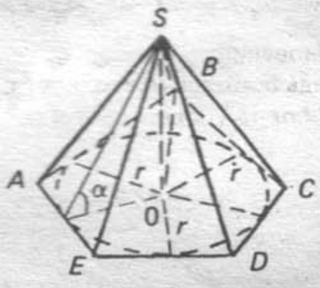
$S = 4\pi R^2$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПИРАМИДА



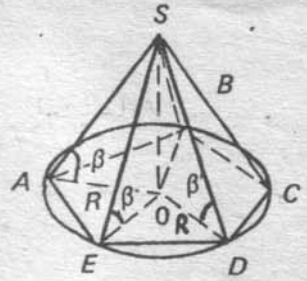
S – площадь основания;
H – высота; V – объем;
$S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; α – угол между боковой гранью и плоскостью основания; β – угол между боковым ребром и плоскостью основания; l – апофема;
P – периметр основания



0 – центр вписанной окружности

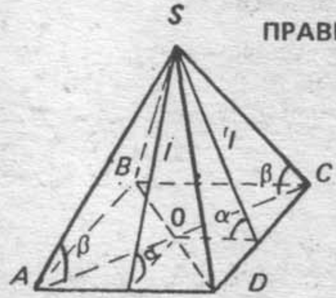
$S = S_{бок} \cdot \cos\alpha$

$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot l$



0 – центр описанной окружности

ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА



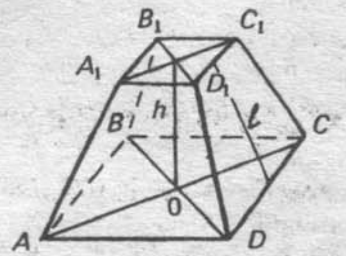
$ABCD$ – правильный многоугольник

$S = S_{бок} \cdot \cos\alpha$

$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot l$

$V = \frac{1}{3} S \cdot H$

ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА



S_1 и S_2 – площади оснований;
h – высота; v – объем;
l – апофема; P_1 и P_2 – периметры оснований

$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot l$

$v = \frac{1}{3} h\,(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$