ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(const)' = 0;$

степенные функции

2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$

2a. $(x)' = 1;$

2b. $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u';$

2c. $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$

2e. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot u';$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$

3a. $(e^u)' = e^u \cdot u';$

логарифмические функции

4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$

4a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

$(\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b; \quad \ln a^n = n \ln a)$

тригонометрические функции

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

7. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$

8. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$

обратные тригонометрические функции

9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

12. $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

гиперболические функции

13. $(sh\, u)' = ch\, u \cdot u';$

14. $(ch\, u)' = sh\, u \cdot u';$

15. $(th\, u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u';$

16. $(cth\, u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u';$

показательно – степенные функции

17. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$

модуль функции

18. $|u|' = \operatorname{sgn} u \cdot u'$, $(|u| = \operatorname{sgn} u \cdot u)$,

где $\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, u > 0 \\ -1, u < 0; \\ 0, u = 0. \end{cases}$ – функция знак u

(сигнум u).

Правила дифференцирования

1. $(cu)' = c \cdot u';$

1a. $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u';$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v';$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$

4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2};$

5. сложная функция

$(F(u(x)))' = F'_u \cdot u'_x;$

6. параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \; y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t};$$

7. ***неявно заданная функция*** $y = y(x)$ уравнением $F(x, y) = 0; \Rightarrow$ чтобы найти производную неявно заданной функции, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0,$ считая y функцией от x и применяя правило 5 дифференцирования сложной функции;

8. ***логарифмическое дифференцирование***

$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x);$

$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'.$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ $(u = u(x))$

1. $\int 0\, du = c;$

степенные функции

2. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$\left(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}}\right)$

показательные функции

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c;$

4а. $\int e^u du = e^u + c;$

дробные рациональные и иррациональные функции

5. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + c;$

6. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c;$

7. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + c;$

8. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c;$

тригонометрические функции

9. $\int \sin u\, du = -\cos u + c;$

10. $\int \cos u\, du = \sin u + c;$

11. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + c;$

12. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + c;$

гиперболические функции

13. $\int sh\, u\, du = ch\, u + c;$

14. $\int ch\, u\, du = sh\, u + c;$

15. $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = th\, u + c;$

16. $\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + c;$

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)}$$

Непосредственное интегрирование

$du = u'_x dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{u'};$

$u = ax + b \Rightarrow dx = \dfrac{d(ax+b)}{a};$

$\int \dfrac{1}{(ax+b)^m} dx = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ax+b)^{1-m}}{1-m} + c;$

$\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c;$

$u = (ax^3 + b) \Rightarrow dx = \dfrac{d(ax^3+b)}{3ax^2}$

$\int x^2 cos(ax^3 + b)\, dx = \dfrac{1}{3a} \sin(ax^3 + b) + c;$

$u = mx \Rightarrow dx = \dfrac{d(mx)}{m}$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - (mx)^2}} = \dfrac{1}{m} \arcsin \dfrac{mx}{a} + c;$

основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx;$

2. $\int \alpha udx = \alpha \int udx;$

3. $d\int u(x)dx = u(x)dx;$

4. $\int du = u + c;$

замена переменной

$u = u(t) \Leftrightarrow du = u'_t dt;$

$\int f(u)du = \int f(u(t))u'_t dt;$

интегрирование по частям

$\int udv = uv - \int vdu.$

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Теоремы Роля, Лагранжа, Коши

Теорема	Если	то
Ролля	$f(x)$: 1. *непрерывна на отрезке* $[a, b]$; 2. *дифференцируема на интервале* (a, b); 3. *принимает равные значения на концах отрезка, то есть* $f(a) = f(b)$,	существует хотя бы одна точка ξ, $a < \xi < b$, что $f'(\xi) = 0$
Лагранжа	$f(x)$: 1. *непрерывна на отрезке* $[a, b]$; 2. *дифференцируема на интервале* (a, b),	существует хотя бы одна точка ξ, $a < \xi < b$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$
Коши	$f(x)$ *и* $g(x)$: 1. *непрерывны на отрезке* $[a, b]$; 2. *дифференцируемы на интервале* (a, b); 3. $g'(x) \neq 0$ *во всех точках интервала* (a, b),	существует хотя бы одна точка ξ, $a < \xi < b$, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

№ п/п	Вид неопределенности	Преобразования	Результат преобразований (c, d – const $\neq 0$)
1	$\{0 \cdot \infty\}$	$f(x) \cdot h(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{h(x)}} = \dfrac{h(x)}{\frac{1}{f(x)}}$	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ – применить правило Лопиталя
2	$\{\infty - \infty\}$	2.1. Дроби привести к общему знаменателю; 2.2. Умножить и разделить разность функций на сопряженное выражение, если это разность квадратных корней; 2.3. Умножить и разделить разность функций на неполный квадрат суммы этих функций, если это разность корней кубических; 2.4. $f(x) - h(x) = \dfrac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot h(x)}}$	$\left\{\frac{c}{0}\right\} = \infty$; $\left\{\frac{c}{\infty}\right\} = 0$; $\left\{\frac{0}{c}\right\} = 0$; $\left\{\frac{\infty}{c}\right\} = \infty$; $\left\{\frac{c}{d}\right\} = A$ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ – применить правило Лопиталя
3	$\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$.	3.1. $y = u^v \Rightarrow \ln y = v \ln u$; $\lim\limits_{x\to a} \ln y = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} y = e^A$. 3.2. $y = u^v = e^{v \cdot \ln u}$	См. выше

Исследования функции без применения производных

№ п/п	Цель исследования	Действия	Вывод
1	Найти область определения функции	Найти точки, в которых функция не определена или не задана (точки разрыва графика функции)	Исключить найденные точки из области определения функции
2	Найти вертикальные асимптоты	Вычислить односторонние пределы функции в точках разрыва и в точках, «подозрительных» на разрыв для кусочно-аналитической функции	Если хотя бы один из односторонних пределов в исследуемой точке равен бесконечности, то график функции имеет вертикальную асимптоту: $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty \Rightarrow x=a$ – вертикальная асимптота
3	Исследовать функцию на четность и нечетность	Если $f(-x)=f(x)$, то функция четная. Если $f(-x)=-f(x)$, то функция нечетная	Ограничиться исследованием функции на интервале $(0,\infty)$. График четной функции симметричен относительно оси *OY*, график нечетной функции симметричен относительно начала координат
4	Исследовать функцию на периодичность	*T* – период функции – (наименьшее из всех возможных значений, удовлетворяющих уравнению: $f(x+T)=f(x)$	Ограничиться исследованием на интервале, по длине равном периоду *T*, за пределы интервала продолжить график функции периодическим образом
5	Найти точки пересечения с осями координат	Решив уравнение $y=f(x)=0$, найти $x_0 : f(x_0)=0$. Найти $y(0)=y_0$	Точка пересечения графика с осью *OX*: $(x_0,0)$. Точка пересечения графика с осью *OY*: $(0,y_0)$
6	Найти наклонные, в частности, горизонтальные асимптоты	Вычислить пределы $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$	Если *k* и *b* – конечные числа, то уравнение наклонных асимптот $y=kx+b$, причем, при $\kappa=0$ асимптота горизонтальная $y=b$

Исследования функции с применением производных

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Цель исследования</th><th colspan="4">Действия и вывод</th></tr>
<tr><td rowspan="10">1</td><td rowspan="10">Найти интервалы монотонности и точки локальных экстремумов функции</td><td colspan="4">1.1.1. Найти критические точки первого порядка $x_i, i = 1,2,...,n$:
$y'(x_i) = 0$ или $y'(x_i) = \infty$, или $y'(x_i)$ – не существует
(необходимое условие существования экстремума функции в точке);

1.2.1. Применить первое достаточное условие существования экстремума функции в критической точке:</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x < x_1$</td><td>x_1</td><td>$x > x_x$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>—</td><td>Критическая точка первого порядка</td><td>+</td></tr>
<tr><td>у</td><td>Функция убывает</td><td>$(x_1, y(x_1))$ – точка минимума</td><td>Функция возрастает</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x < x_2$</td><td>x_2</td><td>$x > x_2$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>+</td><td>Критическая точка первого порядка</td><td>—</td></tr>
<tr><td>y</td><td>Функция возрастает</td><td>$(x_2, y(x_2))$ – точка максимума</td><td>Функция убывает</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">1.2.2. Если x_3 и x_4 – стационарные точки (все производные до (2к–1) порядка равны нулю), можно применить второе достаточное условие существования экстремума функции в точке:
$y^{(2k)}(x_3) > 0 \Rightarrow (x_3, y(x_3))$ – точка локального минимума;
$y^{(2k)}(x_4) < 0 \Rightarrow (x_4, y(x_4))$ – точка локального максимума;
$y^{(2k)}(x_5) = 0,\ y^{(2k+1)} \neq 0$ – в точке $(x_5, y(x_5))$ экстремума нет.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба</td><td colspan="4">2.1. Найти критические точки второго порядка $x_j, j = 1,2,...,m$:
$y''(x_j) = 0$ или $y''(x_j) = \infty$, или $y''(x_j)$ – не существует
(необходимое условие существования точки перегиба графика);
2.2. Применить достаточные условия выпуклости и вогнутости графика и существования точек перегиба:</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x < x_6$</td><td>x_6</td><td>$x > x_6$</td></tr>
<tr><td>y''</td><td>+</td><td>Критическая точка второго порядка, точка непрерывности</td><td>—</td></tr>
<tr><td>y</td><td>График функции вогнутый</td><td>$(x_6, y(x_6))$ – точка перегиба</td><td>График функции выпуклый</td></tr>
</table>