ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Координаты вектора $\overline{AB}$ находят, вычитая из координат точки $B(b_x, b_y, b_z)$, являющейся концом вектора, соответствующие координаты точки $A(a_x, a_y, a_z)$, являющейся началом вектора.

$$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z) = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}.$$

Косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению длин этих векторов: $\cos\left(\overline{AB}, \hat{\ } \overline{CD}\right) = \dfrac{\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{CD}\right|}$.

Скалярное произведение двух векторов в ортонормированном (декартовом) базисе равно сумме произведений одноименных координат этих векторов: если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $(a,b) = (b,a) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Длина вектора $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$ в ортонормированном базисе равна корню квадратному из суммы квадратов координат этого вектора. Например, если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. $np_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{(\overline{a}, \overline{b})}{\left|\overline{b}\right|}$ – **проекция вектора** $\overline{a}$ **на вектор** $\overline{b}$**.**

В ортонормированном базисе векторное произведение находят, раскладывая определитель, в первой строке которого – орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат, во второй строке – координаты левого из перемножаемых векторов, а в третьей строке – координаты правого из перемножаемых векторов.

Например, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда векторное произведение этих векторов в декартовой системе координат можно найти так:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойства векторного произведения

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = -\left[\overline{b}, \overline{a}\right]; \quad \mathrm{mod}\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin(\overline{a}\,\hat{\ }\,\overline{b});$$

$$\textit{тройка } \overline{a}, \overline{b}, \left[\overline{a}, \overline{b}\right] - \textit{правая.}$$

Геометрический смысл векторного произведения.	**Модуль** векторного произведения численно равен **площади параллелограмма,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах. Обычно векторы приводят к общему началу. **Половина модуля** векторного произведения численно равна **площади треугольника,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах этого треугольника. Обычно векторы приводят к общему началу.
Определение и условие компланарности векторов.	Векторы, лежащие **в одной или параллельных плоскостях**, называются компланарными. **Смешанное** произведение ненулевых **компланарных** векторов равно **нулю**.

Смешанное произведение трех векторов получают**,** умножая векторное произведение двух векторов на третий вектор скалярно.

В ортонормированном базисе смешанное произведение равно определителю, строками или столбцами которого являются координаты перемножаемых векторов. Обычно первой строкой определителя записывают координаты первого вектора, второй строкой – координаты второго вектора, а третьей строкой – координаты третьего вектора, если считать векторы слева направо.

Полезно помнить такие **свойства** смешанного произведения: 1) **при перестановке** двух любых **соседних** векторов смешанное произведение **меняет знак** на противоположный; 2) **при циклической** перестановке (последний вектор ставится впереди первого) смешанное произведение **не изменяется**, поскольку при этом два раза переставляются соседние векторы.

Геометрический смысл смешанного произведения.	**Модуль** смешанного произведения трех векторов равен **объему параллелепипеда**, построенного на этих векторах как на ребрах. Обычно векторы приводят к общему началу. **Объём пирамиды**, построенной на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, равен одной шестой объёма параллелепипеда, построенного на этих же векторах как на ребрах
Деление отрезка в отношении λ.	$\lambda = \pm\dfrac{\left\lvert\overline{AK}\right\rvert}{\left\lvert\overline{KB}\right\rvert}$**:** $x_K = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; y_K = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; z_K = \dfrac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$**.**

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Точка $A(x_A, y_A, z_A)$, **точка** $B(x_B, y_B, z_B)$

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Вектор $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Условие **ортогональности** векторов $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$ $(\bar{a} \perp \bar{b}) : (\bar{a}, \bar{b}) = 0$

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$ **– ЧИСЛО** $(\bar{a}, \bar{b})$**:**

1. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;

2. $(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}, \bar{c}) = \alpha(\bar{a}, \bar{c}) + \beta(\bar{b}, \bar{c})$;

3. $(\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$;

4. $(\bar{a}, \bar{b}) = 0, (\bar{a} = \bar{0} \cup \bar{b} = \bar{0})$.

1. Длина вектора $\bar{a}$ **:** $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$;

2. Проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ **:**

$$np_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|};$$

3. Угол между векторами $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$ **:**

$$\cos(\bar{a}, \hat{\ } \bar{b}) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

В ортонормированном базисе (**ДСК**):

$(\bar{a}, \bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,

если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

Условие **коллинеарности** векторов $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$ $(\bar{a} \,||\, \bar{b}, \quad \bar{a} = \lambda\bar{b})$**:**

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$$

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$ **– ВЕКТОР** $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$**:**

1. $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$;

2. $|[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a}, \hat{\ } \bar{b})$;

3. Тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **– правая.**

Свойства:

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$;

2. $[\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}, \bar{c}] = \alpha[\bar{a}, \bar{c}] + \beta[\bar{b}, \bar{c}]$.

В ортонормированном базисе (**ДСК**):

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$.

Условие **компланарности** векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} : (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$

Смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **– ЧИСЛО** $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$**:**

$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) =$

$= ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])$

Свойства:

1. Циклическая перестановка векторов $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a})$;

2. Перестановка двух любых соседних векторов $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c})$.

В ортонормированном базисе (**ДСК**):

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ТАБЛИЦАХ

ТАБЛИЦА 1

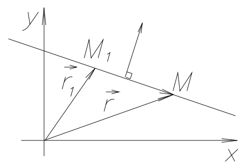
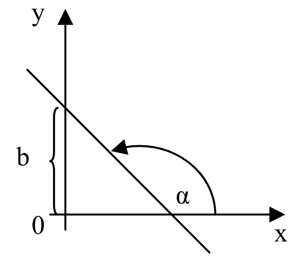
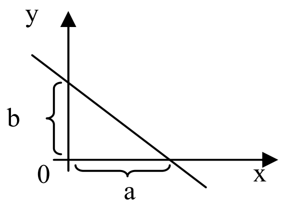
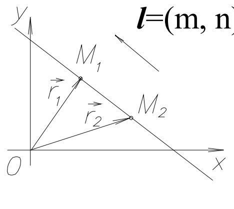
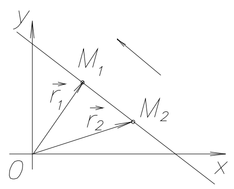
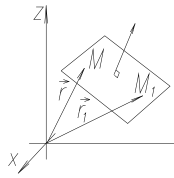
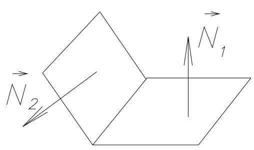
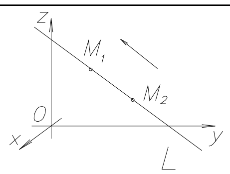
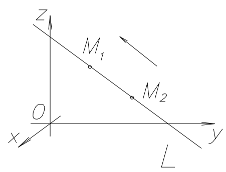
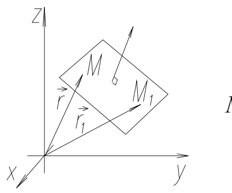
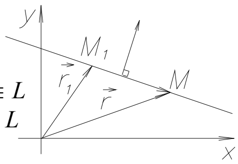
№	**Уравнения прямой L на плоскости (в R_2)**	**Рисунки, пояснения**
1	$\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1) = 0}$ Уравнение прямой L, **проходящей через точку $M_1(x_1,y_1) \in L$, перпендикулярно вектору $N = (A,B)$**	$\mathbf{N} = (A,B)$ $\mathbf{r} = (x, y)$ $\mathbf{r_1} = (x_1, y_1)$ $M_1(x_1, y_1) \in L$ $\forall M(x, y) \in L$ 
2	$\underline{Ax + By + D = 0}$ **Общее** уравнение прямой L	$D = -Ax_1 - By_1$; $M_1(x_1, y_1) \in L$; $\mathbf{N}=(A,B)\perp L$
3	$\underline{y = kx+b}$ Уравнение прямой L **с угловым коэффициентом**	$k = y' = -\frac{A}{B} = \text{tg}\,б$, $б = \left(\widehat{\bar{l},\bar{i}}\right)$ $b = -\frac{D}{B}$ $\alpha \geq 0$ 
4	$\underline{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$ Уравнение прямой L **в отрезках**	$y=0 \Rightarrow x=a$ $x=0 \Rightarrow y=b$ $a = -\frac{D}{A}$; $b = -\frac{D}{B}$ 
5	$\underline{\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n}}$ Уравнение прямой L **каноническое**	$\mathbf{l}$=(m, n) $\mathbf{l}=(m, n) \mid\mid L$ $M_1(x_1, y_1) \in L$ $\forall M(x, y) \in L$ 
6	$\underline{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$ Уравнение прямой L, **проходящей через две данные точки M_1 и M_2**	$\mathbf{l}=(m, n) \mid\mid L$ $M_1(x_1, y_1) \in L$ $M_2(x_2, y_2) \in L$ $\forall M(x, y) \in L$  $m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$
7	$\underline{\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt. \end{cases}}$ Уравнение прямой L **параметрическое**	$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = t$, $\forall t \in R_1$ – параметр

ТАБЛИЦА 2

№	Уравнения плоскости *P*	Рисунки, пояснения
1	$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ Уравнение плоскости *P*, **проходящей через данную точку M_1, перпендикулярно данному вектору $N=(A,B,C)$**	 $\mathbf{r}=(x, y, z)$ $\mathbf{r_1}=(x_1, y_1, z_1)$ $M_1(x_1, y_1, z_1)\in P$ $\forall M(x, y, z)\in P$
2	$Ax + By + Cz + D = 0$ **Общее** уравнение плоскости *P*	$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$
3	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ Уравнение плоскости *P* **в отрезках**	$y=0,\ z=0 \Rightarrow x=a$ $x=0,\ z=0 \Rightarrow y=b$ $x=0,\ y=0 \Rightarrow z=c$
4	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ Уравнение плоскости *P*, **проходящей через три данные точки**	$M_1(x_1, y_1, z_1)\in P$, $\mathbf{M_1M}\in P$ $M_2(x_2, y_2, z_2)\in P$, $\mathbf{M_2M_1}\in P$ $M_3(x_3, y_3, z_3)\in P$, $\mathbf{M_3M_1}\in P$ $\forall M(x, y, z)\in P$
	Уравнения прямой *L* в трехмерном пространстве (R_3)	**Рисунки, пояснения**
1	$\begin{cases} \mathbf{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0} \\ \mathbf{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.} \end{cases}$ **Общее** уравнение прямой *L*	$\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$ $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ $\mathbf{N_1} \nparallel \mathbf{N_2}$ $L=\{P_1\cap P_2\}$ $\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)=[\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}]$ 
2	$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ Уравнения прямой *L* **канонические**	$\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)$ $M_1(x_1, y_1, z_1)\in L$ $\forall M(x, y, z)\in L$ 
3	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ Уравнения прямой *L*, **проходящей через две данные точки M_1 и M_2**	$\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)$, $\mathbf{l}t=\mathbf{M_1M_2}$ $m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$, $p=z_2-z_1$ $M_1(x_1, y_1, z_1)\in L$ $M_2(x_2, y_2, z_2)\in L$ $\forall M(x, y, z)\in L$ 
4	$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt \end{cases}$ **Параметрические уравнения** прямой *L*	$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=t,$ $\forall t\in R_1$

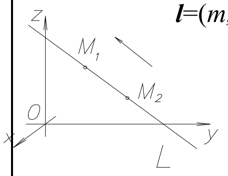
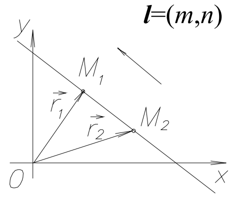
Уравнения плоскости *P* в трехмерном пространстве R_3 и уравнения прямой *L* в двухмерном пространстве R_2

ТАБЛИЦА 3

Уравнения плоскости *P* в R_3 в координатной форме	Векторная форма уравнений *P*, *L* в R_3 и R_2	Уравнения прямой *L* в R_2 в координатной форме
I R_3	**Уравнения *P* и *L*, проходящих через данную точку M_1 перпендикулярно данному вектору *N***	R_2 I
$\boldsymbol{N}=(A,B,C)$  $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ $\boldsymbol{r_1}=(x_1,y_1,z_1)$ $M_1(x_1,y_1,z_1)\in P$ $\forall M(x,y,z)\in P$ $\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$	$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_1}=\boldsymbol{M_1M}$ $\boldsymbol{M_1M}\perp \boldsymbol{N}(P)$ $\boldsymbol{M_1M}\perp \boldsymbol{N}(L)$ $\underline{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{N})=0}$ $\underline{(\boldsymbol{M_1M},\boldsymbol{N})=0}$ Условие ортогональности векторов	$\boldsymbol{N}=(A,B)$  $\boldsymbol{r}=(x,y)$ $\boldsymbol{r_1}=(x_1,y_1)$ $M_1(x_1,y_1)\in L$ $\forall M(x,y)\in L$ $\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)=0}$
II R_3	**Общие уравнения**	R_2 II
$\underline{Ax+By+Cz+D=0}$ $D=-Ax_1-By_1-Cz_1$	$\underline{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{N})+D=0}$ $D=-(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{N})$	$\underline{Ax+By+D=0}$ $D=-Ax_1-By_1$
III R_3	**Через *n* фиксированных точек *M***	R_2 III
n = 3 $M_1(x_1,y_1,z_1)\in P,\ \boldsymbol{M_1M}\in P$ $M_2(x_2,y_2,z_2)\in P,\ \boldsymbol{M_2M_1}\in P$ $M_3(x_3,y_3,z_3)\in P,\ \boldsymbol{M_3M_1}\in P$ $\forall M(x,y,z)\in P$ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	$M_1\in P, L$ $M_2\in P, L$ $\forall M\in P, L$ $M_3\in P$	n = 2 $M_1(x_1,y_1)\in L,$ $M_2(x_2,y_2)\in L$ $\forall M(x,y)\in L$ $\boldsymbol{M_1M}\,\|\,\boldsymbol{M_2M_1}$ $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix}=\bar{0}$
$A=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$ $B=-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$ $C=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$ (1. I.)	$(\boldsymbol{M_1M},\boldsymbol{M_1M_2},\boldsymbol{M_1M_3})=0$ Условие компланарности векторов $[\boldsymbol{M_1M},\boldsymbol{M_1M_2}]=\boldsymbol{0}$ Условие коллинеарности векторов	$A=y_2-y_1;\ B=-(x_2-x_1),$ $\Leftrightarrow$ $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ (1. I.)
IV R_3	**Уравнения в отрезках**	R_2 IV
$\underline{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1}$ $y=0,\ z=0\Rightarrow x=a$ $x=0,\ z=0\Rightarrow y=b$ $x=0,\ y=0\Rightarrow z=c$	$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{i}/a+\boldsymbol{j}/b+\boldsymbol{k}/c$ $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\tau})=1$ $\boldsymbol{\tau}=(1/a,\ 1/b,\ 1/c)$ $\lvert\boldsymbol{r}\rvert\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\tau})=1/\lvert\boldsymbol{\tau}\rvert$	$\underline{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$ $y=0\Rightarrow x=a$ $x=0\Rightarrow y=b$

Уравнения прямой L в трехмерном пространстве R_3 и в двухмерном пространстве R_2

ТАБЛИЦА 4

Уравнения прямой L в R_3 в координатной форме	Векторная форма уравнений прямой L в R_2 и R_3	Уравнения прямой L в R_2 в координатной форме
I	**Канонические уравнения прямой L**	I
$\mathbf{l}=(m,n,p)$  $\mathbf{l}=(m,n,p)\,\|\|\,L$ $M_1(x_1,y_1,z_1)\in L$ $M_2(x_2,y_2,z_2)\in L$ $\forall M(x,y,z)\in L$ $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$	$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\mathbf{M_1M}\,\|\|\,\mathbf{l}$ $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\mathbf{M_1M_2}\,\|\|\,\mathbf{l}$ $[\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{l}]=0$ $[\mathbf{M_1M},\ \mathbf{l}]=0$	$\mathbf{l}=(m,n)$  $\mathbf{l}=(m,n)\,\|\|\,L$ $M_1(x_1,y_1)\in L$ $M_2(x_2,y_2)\in L$ $\forall M(x,y)\in L$ $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$
II	**Параметрические уравнения прямой L**	II
$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=t,\quad \forall t\in R_1$ $\begin{cases} x=x_1+mt,\\ y=y_1+nt,\\ z=z_1+pt\end{cases}$	$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\,\|\|\,\mathbf{l},\ \forall t\in R_1$ $\mathbf{M_1M}\,\|\|\,\mathbf{l}$ $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\mathbf{M_1M}=t\mathbf{l}$ $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{l}$ $[\mathbf{M_1M},\ t\mathbf{l}]=0$	$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=t,\quad \forall t\in R_1$ $\begin{cases} x=x_1+mt,\\ y=y_1+nt.\end{cases}$
III	**Уравнения прямой L, проходящей через две данные точки M_1 и M_2**	III
$\mathbf{l}\,\|\|\,L,\ \mathbf{l}=(m,n,p),\ t\mathbf{l}=\mathbf{M_1M_2}$ $m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1,\ p=z_2-z_1$ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	$\mathbf{M_1M}\,\|\|\,\mathbf{M_1M_2}\,\|\|\,\mathbf{l}$ $M_1\in L,\ M_2\in L,\ \forall M\in L$ $[\mathbf{M_1M},\mathbf{M_1M_2}]=0$	$\mathbf{l}\,\|\|\,L,\ \mathbf{l}=(m,n),\ t\mathbf{l}=\mathbf{M_1M_2}$ $m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1$ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

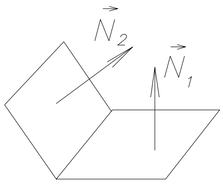
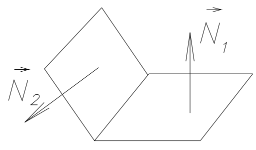
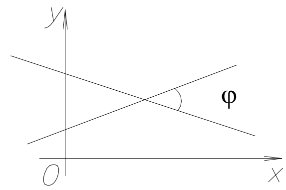
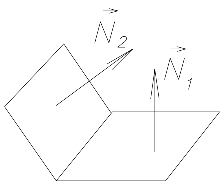
IV **Общие уравнения прямой L в R_3** $(P_1\cap P_2)$	**Уравнение прямой L с угловым коэффициентом k в R_2** V
$\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$ $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)\quad \mathbf{N_1}\not\parallel\mathbf{N_2}$ $L=\{P_1\cap P_2\}$ $\begin{cases}\mathbf{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,}\\ \mathbf{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.}\end{cases}$ $\mathbf{N_1}\not\parallel\mathbf{N_2}\Leftrightarrow P_1\cap P_2\Leftrightarrow\quad Rang\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{bmatrix}=2.$	$Ax+By+D=0,\ B\neq 0$ $\Downarrow$ $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{D}{B}$ $\mathbf{y=kx+b}\qquad k=y'=-\dfrac{A}{B}=\text{tg}б\ ,\ б=\left(\widehat{\bar{l},\bar{i}}\right)$ $b=-\dfrac{D}{B}\qquad \alpha\geq 0$

ТАБЛИЦА 4*а* (продолжение таблицы 4)

Связь между уравнениями прямой *L* в R_3	**Связь между уравнениями прямой *L* в R_2**
Общие (2.IV) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ $\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow z_0=0$ $\begin{cases}A_1x+B_1y+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+D_2=0\end{cases} \Rightarrow M_0(x_0,y_0,0)\in L$ или $\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow M_1(x_1,0,z_1)\in L$ или $\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow x_2=0 \Rightarrow M_2(0,y_2,z_2)\in L$ $\left.\begin{array}{l}\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1),\\ \mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{l}=[\mathbf{N_1},\mathbf{N_2}]=(m,n,p)$ $t=\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{0-z_0}{p}$ – **канонические** (2.I) $\begin{cases}x-x_0+mt,\\ y-y_0+nt,\\ z=0+pt\end{cases}$ – **параметрические** (2.II) $\Downarrow$ $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{0-z_0}{z_1-z_0}$ – **через две точки** $M_0\in L$, $M_1\in L$ (2.III) $\begin{cases}(x-x_0)(y_1-y_0)=(y-y_0)(x_1-x_0),\\ (y-y_0)(z_1-z_0)=(0-z_0)(y_1-y_0)\end{cases}$ – **общие** (2.IV)	**С угловым коэффициентом**: (2.V) $y=kx+b$ $\vec{N}=(k,-1)$, $\Downarrow$ $\begin{cases}x=x_1,\ y=kx_1+b=y_1 \Rightarrow M_1(x_1,y_1)\in L,\\ x=x_2,\ y=kx_2+b=y_2 \Rightarrow M_2(x_2,y_2)\in L.\end{cases}$ $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ **через точки** $M_1\in L$ **и** $M_2\in L$ (1.III) (2.III) $\begin{cases}x_2-x_1=m,\\ y_2-y_1=n\end{cases} \Rightarrow \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$ – **канонические** (2.I) $\Downarrow$ $\begin{cases}n(x-x_1)=m(y-y_1)\\ n(x-x_1)-m(y-y_1)=0,\\ n=A;\ -m=B;\end{cases}$ $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ $M_1(x_1,y_1)\in L$ $\mathbf{N}=(A,B)\perp L$ (1.I) $\Downarrow$ $-Ax_1-By_1=D$ $Ax+By+D=0$ – **общее** (1.II)

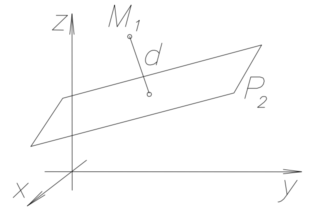
Взаимное расположение плоскостей *P* в трёхмерном пространстве R_3
и прямых *L* в двухмерном пространстве R_2

ТАБЛИЦА 5

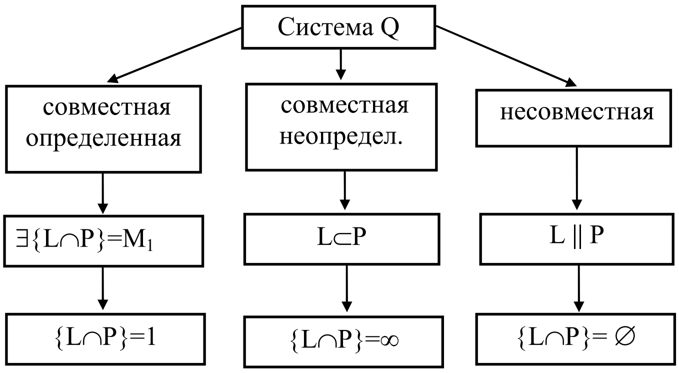
I Обозначения, принятые в таблице 2, {P1,P2} в R_3	I	Обозначения, принятые в таблице 2, {L1,L2} в R_2 I
$\begin{rcases} P1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ P2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{rcases}\Psi$ $\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$; $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ $\text{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}=\text{RangA}(\psi)$ $\text{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix}=\text{RangB}(\psi)$ 	R_3 $\quad cos\,\varphi=\dfrac{(\vec{N}_1,\vec{N}_2)}{\lvert\vec{N}_1\rvert\lvert\vec{N}_2\rvert}$  $\mathbf{N_1}=(A_1, B_1, C_1)$; $\mathbf{N_2}=(A_2, B_2, C_2)$ R_2  $\mathbf{N_1}=(A_1,B_1)$ $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2)$	а) $\begin{rcases} L1: A_1x+B_1y+D_1=0, \\ L2: A_2x+B_2y+D_2=0 \end{rcases}\chi$ $\mathbf{N_1}=(A_1,B_1)$; $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2)$ $\text{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}=\text{RangA}(\chi)$ $\text{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{bmatrix}=\text{RangB}(\chi)$ б) $L1: y=k_1x+b_1$ $L2: y=k_2x+b_2$ $tg\varphi=\left\lvert\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\rvert$ $\Downarrow$ $k_1=tg\,\alpha_1$; $k_2=tg\,\alpha_2$ $tg\varphi=\text{tg}\,(\alpha_2-\alpha_1)=\dfrac{\text{tg}\alpha_2-\text{tg}\alpha_1}{1+\text{tg}\alpha_1\text{tg}\alpha_2}$,
II **Признаки взаимного расположения плоскостей {P1, P2} и прямых {L1, L2}** II		
Плоскости {*P*1, *P*2} в R_n; $n=3$	Как расположены *P* и *L*	Прямые {*L*1, *L*2} в R_n; $n=2$
$P1\cap P2$ **(пересекаются)** $cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\neq\pm1$ $P1\perp P2 \Leftrightarrow \mathbf{N_1}\perp\mathbf{N_2} \Leftrightarrow cos\varphi=0$ $\{P1\cap P2\}=L,\ L\in P1,\ L\in P2$ *Rang A*(ψ)= = *Rang B*(ψ)= 2 < 3=*n* совместная неопределенная система (ψ)	$\underbrace{P1\cap P2, L1\cap L2}$ $\mathbf{N_1} \not\parallel \mathbf{N_2}$ $\varphi\neq\pi k$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ $cos\ \varphi\neq\pm1$ 	$L1\cap L2$ **(пересекаются)** а) $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\neq\pm1$ $L1\perp L2\Leftrightarrow N_1\perp N_2\Leftrightarrow cos\varphi=0$ б) $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\neq0$ $1+k_1k_2\neq0$ $L1\perp L2 \Leftrightarrow 1+k_1k_2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k_2=-1/k_1$ $\{L1\cap L2\}=M,\ M\in L1,\ M\in L2$ *Rang A*(χ)= = *Rang B*(χ)= 2=*n* совместная определенная система (χ)
$P1\,\vert\vert\,P2$ **(параллельны)** $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ $cos\varphi=\pm1$	$\underbrace{P1\Vert P2, L1\Vert L2}$ $\mathbf{N_1}=\lambda\mathbf{N_2}$; $D_1\neq\lambda D_2$ $\lambda\in R_1$ 1=*Rang A*(ψ,χ) < < *Rang B*(ψ,χ) = 2 системы (ψ),(χ) несовместны	$L1\,\vert\vert\,L2$ **(параллельны)** *а)* $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ $cos\varphi=\pm1$ *б)* $k_1=k_2$; $b_1\neq b_2$ $tg\varphi=0$
$P1\equiv P2$ **(совпадают)** $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=\lambda\in R_1$ $cos\varphi=\pm1$	$\underbrace{P1\equiv P2, L1\equiv L2}$ $\mathbf{N_1}=\lambda\mathbf{N_2}$; $D_1=\lambda D_2$; $\lambda\in R_1$ *Rang A*(ψ,χ)= = *Rang B*(ψ,χ)= 1 совместные неопределенные системы (ψ), (χ)	$L1\equiv L2$ **(совпадают)** *а)* $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=\lambda\in R_1$ $cos\varphi=\pm1$ *б)* $k_1=k_2$, $b_1=b_2$ $tg\varphi=0$

Расстояния $d(P1,P2)$ между плоскостями $P1$ и $P2$ и $d(L1,L2)$ между прямыми $L1$ и $L2$ в R_3, пересечение $\{P\cap L\}$ плоскости P и прямой L в R_3

ТАБЛИЦА 6

I **$P1 \parallel P2, L1 \parallel L2$ в R_3 координатная форма**	**$P1 \parallel P2, L1 \parallel L2, \bar N_1 \parallel \bar N_2, \bar l_1 \parallel \bar l_2$ векторная форма**	**$L1 \parallel L2$ в R_2 координатная форма** II
$P1:\ Ax+By+Cz+D_1=0$ $P2:\ \underbrace{Ax+By+Cz+D_2=0}$, $D_1 \neq D_2$ $\bar N_1=\bar N_2=\bar N=(A,B,C)\perp P1,P2$ $\Leftarrow$ $d(P1,P2)=d(M_1,P2)=d(M_2,P1)=$ $=\dfrac{\lvert A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ $M_1(x_1,y_1,z_1)\in P1, M_2(x_2,y_2,z_2)\in P2$	$\bar N=(A,B,C)\quad \bar l=(m,n,p)$ $d(P1,P2)=d(M_1,P2)=$ $d(M_2,P1)=d(L1,L2)=$ $=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$ $=\lvert пр_{\bar N}\overrightarrow{M_1M_2}\rvert=\dfrac{\lvert(\overrightarrow{M_1M_2},\bar N)\rvert}{\lvert\bar N\rvert}$	$L1:\ Ax+By+D_1=0$ $L2:\ \underbrace{Ax+By+D_2=0}$ $\bar N_1=\bar N_2=\bar N=(A,B)\perp L1,L2$ $\Rightarrow$ $d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$ $=\dfrac{\lvert A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $M_1(x_1,y_1)\in L1, M_2(x_2,y_2)\in L2$
$L1:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}\quad \bar l_1=\bar l_2=\bar l=(m,n,p)$ $M_1(x_1,y_1,z_1)\in L1$ $L2:\dfrac{x-x_2}{m}=\dfrac{y-y_2}{n}=\dfrac{z-z_2}{p}\quad M_2(x_2,y_2,x_2)\in L2$ $d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$ $=\dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m & n & p\end{vmatrix}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\quad \Leftarrow$	 $d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)$ $=h_{\Delta\overrightarrow{M_1M_2},\bar l}=\dfrac{\lvert[\overrightarrow{M_1M_2},\bar l]\rvert}{\lvert\bar l\rvert}$ h – высота треугольника	$L1:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$ $L2:\dfrac{x-x_2}{m}=\dfrac{y-y_2}{n}$ $\bar l_1=\bar l_2=\bar l=(m,n,0)$ $M_1(x_1,y_1)\in L1$ $M_2(x_2,y_2)\in L2$ $\Rightarrow$ $d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$ $=\dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ m & n & 0\end{vmatrix}}{\sqrt{m^2+n^2}}$

III **Прямые $L1$ и $L2$ скрещиваются в R_3 $P1 \parallel P2$ $(L1\subset P1, L2\subset P2)$**	**Прямая L и плоскость P пересекаются в R_3 $\{P\cap L\}=M_1$** IV
$L1:\ \underbrace{\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}}$ $L1\parallel \bar l_1=(m_1,n_1,p_1), M_1(x_1,y_1,z_1)\in L1$ $L2:\ \underbrace{\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}}$ $L2\parallel \bar l_2=(m_2,n_2,p_2), M_2(x_2,y_2,z_2)\in L2$ $d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=h_{П(\overrightarrow{M_1M_2},\bar l_1\bar l_2)}=$ $=\dfrac{V_{П(\overrightarrow{M_1M_2},\bar l_1\bar l_2)}}{S_{Д\,\bar l_1,\bar l_2}}=\dfrac{\lvert(M_1M_2,\bar l_1,\bar l_2)\rvert}{\lvert[\bar l_1,\bar l_2]\rvert}=$ $=\dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}\neq 0$ $(d(L1,L2)=0\Leftrightarrow L1\cap L2)$; $П(\boldsymbol{M_1M_2},\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_2})$ –параллелепипед, построенный на векторах $\boldsymbol{M_1M_2}$, $\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_2}$, h – его высота	$P:\ \underbrace{Ax+Bx+Cz+D=0}$ $P\perp\bar N=(A,B,C)\perp P$ $L:\ \underbrace{\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}}$ $L\parallel\bar l=(m,n,p)$ $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$ $\cos(\bar N,\bar l)=\cos(\dfrac{p}{2}-\varphi)=\sin\varphi$ $\sin\varphi=\cos(\bar N,\bar l)=\dfrac{(\bar N,\bar l)}{\lvert\bar N\rvert\lvert\bar l\rvert}=$ $=\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\neq\pm1$ $\left.\begin{matrix}\sin\varphi=\pm1\\ \cos\varphi=0\\ (\bar N,\bar l)=0\end{matrix}\right\}(P\parallel L)\cup(L\subset P)$ $\sin\varphi=0\Leftrightarrow L\perp P, \boldsymbol{l}\parallel\boldsymbol{N}$

VI **Векторная запись условий ортогональности (*P*⊥*L*), коллинеарности (*P*‖*L*) плоскости *P* и прямой *L* в *R*₃, пересечения *P* и *L* (*P*∩*L*).**	**{*P*∩*L*}=*M*₁(*x*₁,*y*₁,*z*₁) – координаты точки пересечения плоскости *P* и прямой *L* в *R*₃** V
$1. L\perp P\Leftrightarrow[\bar{l},\bar{N}]=\vec{0}$ $2. L\parallel P\Leftrightarrow(\bar{l},\bar{N})=0$ $3. L\cap P\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}L:\bar{r}=r_0+t\bar{l}\,(2.II)\\ P:(\bar{r},\bar{N})+D=0(1.II)\end{array}\right\}\Rightarrow$ $\Rightarrow(\bar{r}_0+t\bar{l},\bar{N})+D=0,$ $t=-\frac{(\bar{r}_0,\bar{N})+D}{(\bar{l},\bar{N})}=t_1\Leftrightarrow M_1(t_1)=\{L\cap P\}$	$\left.\begin{array}{l}P:Ax+By+Cz+D=0\\ L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t\end{array}\right\}Q;\quad\begin{array}{l}P\perp\bar{N}=(A,B,C)\\ M_0(x_0,y_0,z_0)\in L\\ L\parallel\bar{l}=(m,n,p)\end{array}$ $A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0\Rightarrow t=t_1$ (2.II) $\Rightarrow$ $\begin{cases}x_1=x_0+t_1m\\ y_1=y_0+t_1n\\ z_1=z_0+t_1p\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}M_1(x_1,y_1,z_1)\in L,\\ M_1(x_1,y_1,z_1)\in P\end{array}$ 

κ-мерная плоскость P_κ в точечно-векторном евклидовом n-мерном пространстве R_n

ТАБЛИЦА 7

$\kappa = n - r$, $Rang\ A = r$	
$AX=B$ $B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \cdot\\b_m\end{bmatrix};A=\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\\a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\\a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}\end{bmatrix};X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\x_n\end{bmatrix}$	$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}=b_2,\\ \ldots\\a_{m1}x_1+a_{2m}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$ $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,\ldots,\ m$

Система m линейных уравнений с n неизвестными					
$r = 1$ гиперплоскость $\kappa = n-1$		$\kappa = 1$ прямая в R_{r+1} $n - r = 1$	к-мерная плоскость $P_{\kappa 0}$ в R_n, проходящая через начало координат B=0 (СОЛУ) – система однородных линейных уравнений		Общее решение произвольной системы линейных уравнений $B\neq 0$ (ОРСЛУ)
матричная форма	координатная форма		матричная форма	координатная форма	
$A=[a_1a_2\ldots a_n]$, $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\x_n\end{bmatrix};B=[b]$ $AX=B$	$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+$ $+a_nx_n=b$	$A=\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}\ldots a_{1r}a_{1r+1}\\a_{21}a_{22}\ldots a_{2r}a_{2r+1}\\ \ldots\\a_{r1}a_{r2}\ldots a_{rr}a_{rr+1}\end{bmatrix};$	$B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, A_{m\times n},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \ldots\\x_n\end{bmatrix}$	$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$	$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n\\ \ldots\ldots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n\end{cases}$
Плоскость в R_3 n=3					
$A=[a_1a_2a_3]$, $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix};$ $B=[b]$ $AX=B$	$a_1x_1+a_2x_2++a_3x_3=b$ $\bar{N}=(a_1,a_2,a_3)$ $\frac{x}{\left(b/a_1\right)}+\frac{y}{\left(b/a_2\right)}+\frac{z}{\left(b/a_3\right)}=1$ Уравнение плоскости в отрезках;	$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\x_r\\x_{r+1}\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \cdot\\ \cdot\\b_r\end{bmatrix}$ $Rang\ A = r = n-1$ $n = r + 1$ $AX=B$	AX=0 *rang A=r*, $x_1,x_2,\ldots,x_r$ – базисные неизвестные. Число базисных неизвестных равно r.	$x_{r+1}, x_{r+2},\ldots,x_n$ – свободные неизвестные Число свободных неизвестных равно $k=n-r$	Отбросить строки, не вошедшие в базисный минор, перенести свободные неизвестные в правые части уравнений, а дальше следует применить метод Гаусса, Крамера или матричный.

Прямая в R_3 $n=3,\ r=2,\ \kappa=1$		Фундаментальная система частных решений СОЛУ (ФСЧР)	Частное решение произвольной СЛУ (ЧРСЛУ)
матричная форма	Общие уравнения координатная форма	Свободным неизвестным придать последовательно значения строк единичной матрицы E	$x_{r+1}=x_{r+2}=\ldots=x_n=0$
$A=\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix};\ AX=B$	$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\end{cases}$ $\overline{N}_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$ $\overline{N}_2=(a_{21},a_{22},a_{23})$ $\overline{l}=[\overline{N}_1,\overline{N}_2],\ l \parallel L$	$X_1=\begin{bmatrix}C_{11}\\ C_{21}\\ \cdot\\ \cdot\\ C_{r1}\\ 1\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix};\ X_2=\begin{bmatrix}C_{12}\\ C_{22}\\ \cdot\\ \cdot\\ C_{r2}\\ 0\\ 1\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix},\ldots,\ X_k=\begin{bmatrix}C_{1k}\\ C_{2k}\\ \cdot\\ \cdot\\ C_{rk}\\ 0\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ 1\end{bmatrix}$ $AX_1=0\quad AX_2=0\quad AX_к=0,\quad k=n-r.$	$C=\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ \cdot\\ \cdot\\ C_r\\ 0\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix}$ $AC=B$

Прямая в R_2 $n=2,\ r=1,\ k=1$		Общее решение системы однородных линейных уравнений $AX_0=0$		О. Р. произвольной системы линейных уравнений (ОРСЛУ) $AX=B$
матричная форма	координатная форма	матричная форма	координатная форма	
$A=[a_1a_2];X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix};\ AX=B$ $B=[b]$	$a_1x_1+a_2x_2=b$ $\overline{N}=(a_1,a_2);\overline{N}\parallel L$ $\dfrac{x_1}{\left(b/a_1\right)}+\dfrac{x_2}{\left(b/a_2\right)}=1$ Уравнение прямых в отрезках	$X_0=\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\\ \cdot\\ x_{n0}\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}C_{11}\\ C_{12}\\ \vdots\\ C_{r1}\\ 1\\ 0\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}C_{12}\\ C_{22}\\ \vdots\\ C_{r2}\\ 0\\ 1\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix}+\ldots+\alpha_k\begin{bmatrix}C_{1k}\\ C_{2k}\\ \vdots\\ C_{rk}\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ 1\end{bmatrix}=$ $=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots+\alpha_kX_k$	$x_{10}=\alpha_1C_{11}+\alpha_2C_{12}+\ldots+\alpha_kC_{1k}$ $x_{20}=\alpha_1C_{21}+\alpha_2C_{22}+\ldots+\alpha_kC_{2k}$ …… $x_{r0}=\alpha_1C_{r1}+\alpha_2C_{r2}+\ldots+\alpha_kC_{rk}$ $x_{r+10}=\alpha_1$ $x_{r+20}=\alpha_2$ $x_{n0}=\alpha_k, n=r+k$	$\leftarrow X_0+C=X$ $AX=A(X_0+C)=$ $=AX_0+AC=O+B=B$

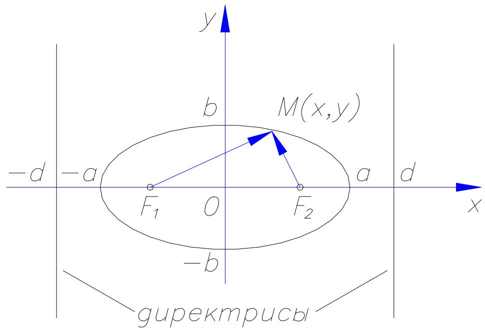
Прямая в $R_n=R_{r+1}$ $\quad n=r+1,\ k=1$

координатная форма	матричная форма
$\left.\begin{aligned}x_1&=\alpha_1C_{11}+C_1\\ x_2&=\alpha_1C_{21}+C_2\\ &\ldots\\ x_n&=\alpha_1C_{n1}+C_n\end{aligned}\right\}$ параметрические уравнения, α_1 – параметр, свободная неизвестная	$X_0=\text{б}_1X_1$ $X=X_0+C=\text{б}_1\begin{bmatrix}C_{11}\\ C_{21}\\ \vdots\\ C_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ \vdots\\ C_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$

$\alpha_1=\dfrac{x_1-C_1}{C_{11}}=\dfrac{x_2-C_2}{C_{21}}=\ldots=\dfrac{x_{r+1}-C_{r+1}}{C_{r+1,1}}$ – канонические уравнения

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение эллипса. **Эллипсом** называется множество всех точек плоскости, для которых ***сумма расстояний*** от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами и равная ***2a.***



a – большая полуось эллипса;
b – малая полуось эллипса;
$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса;
$c^2 = a^2 - b^2$, c – фокусное расстояние эллипса;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$, ε – эксцентриситет эллипса;

$\vec{r_1} = \vec{F_1M}$, $\vec{r_2} = \vec{F_2M}$ – фокальные радиусы-векторы;

по определению $r_1 + r_2 = 2a$.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm d$ называются директрисами эллипса.

Каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Строят эллипс, вписывая его в прямоугольник со сторонами длиной $2a$ и $2b$ и с центром симметрии в начале координат.

Уравнение эллипса со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ центром имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Чтобы привести **общее уравнение эллипса**

$a_{11}x^2 + a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0,$ где коэффициенты a_{11} и a_{22}

должны иметь одинаковые знаки, **к каноническому виду,** нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным x и y.

Например, приведем уравнение кривой

$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$

к каноническому виду:

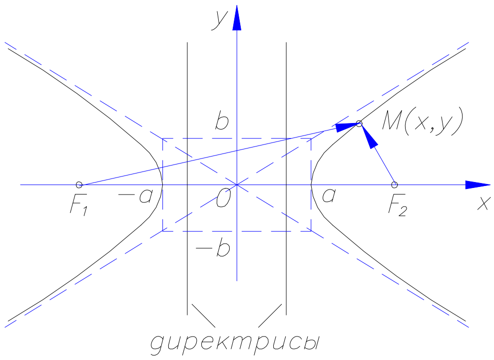
$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.

Полученное уравнение является каноническим уравнением окружности, радиус которой равен 2, а центр находится в точке $M\,(1,-3)$.

Признак уравнения окружности:

1. коэффициенты при квадратах переменных одинаковые;
2. отсутствует произведение переменных.

Определение гиперболы. **Гиперболой** называется множество всех точек плоскости, для которых ***модуль разности расстояний*** от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами и равная ***2a.***



a – действительная полуось гиперболы;
b – мнимая полуось гиперболы;
$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы гиперболы;
$c^2 = a^2 + b^2$, c – фокусное расстояние гиперболы;
$\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$, ε – эксцентриситет гиперболы;
$\vec{r}_1 = \overrightarrow{F_1M}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{F_2M}$ – фокальные радиусы-векторы;

по определению $|r_1 - r_2| = 2a$. Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm d$ называются директрисами гиперболы.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Каноническое уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Строят гиперболу, изобразив предварительно прямоугольник со сторонами длиной *2a* и *2b* и с центром симметрии в начале координат, а затем вписывают ветви гиперболы в углы между асимптотами гиперболы (прямыми, на которых лежат диагонали прямоугольника), помещая вершины гиперболы в точки с координатами *(– a, 0)*, *(a, 0)*.
Уравнение гиперболы со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0,,y_0)$ центром имеет вид

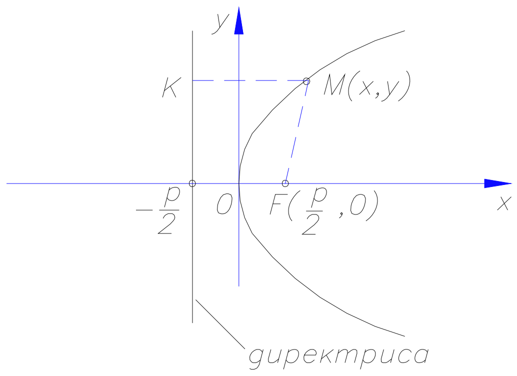
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 .$$

Чтобы привести **общее уравнение гиперболы**
$a_{11}x^2 + a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0,$ где коэффициенты a_{11} и a_{22} должны иметь противоположные знаки, **к каноническому виду**, нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным x и y.

Гипербола, уравнение которой $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, называется **сопряженной** по отношению к гиперболе, имеющей уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Фокусы сопряженной гиперболы расположены на мнимой оси.

Определение параболы.

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на ***одинаковом расстоянии*** от данной ***точки,*** называемой фокусом, и от данной ***прямой***, называемой директрисой и не проходящей через фокус.



Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Строят параболу, откладывая одинаковые отрезки от точек параболы до фокуса с координатами $F(\frac{p}{2},0)$ и до директрисы, уравнение которой $x = -\frac{p}{2}$. Вершина параболы находится в точке $O(0,0)$.

Уравнение параболы со смещенной при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ вершиной имеет вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Чтобы привести **общее** уравнение параболы $a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$ к **каноническому виду**, нужно ***выделить полный квадрат*** по переменной y и удвоенный параметр *p* по переменной *x*.

Парабола, уравнение которой $x^2 = 2py$, называется **сопряженной** по отношению к параболе, имеющей уравнение $y^2 = 2px$. Фокус сопряженной параболы расположен в точке $F(0,\frac{p}{2})$, а ее директриса имеет уравнение $y = -\frac{p}{2}$.

Полярная система координат

Полярная система координат состоит из некоторой точки *O*, называемой **полюсом**, и исходящего из нее луча *OE*, называемого **полярной осью**. Кроме этого задается единица масштаба для измерения длин отрезков.

$\rho -$ это расстояние от точки *M* до полюса *O*,

$\varphi -$ угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом *OM*.

Полярные и декартовы координаты точки связаны соотношениями:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Чтобы получить изображение кривой в полярной системе координат, постройте лучи, выходящие из полюса 0 под углами φ к полярной оси. На каждом луче отложите длину вычисленного Вами полярного радиуса ρ. Если $\rho -$ отрицательное число, то для построения соответствующей точки нужно отложить модуль ρ на луче, повёрнутом на 180° вокруг полярной оси, то есть отложить от полярной оси угол $(\varphi + 180^\circ)$. Соедините построенные Вами точки плавной линией.

Кривые, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $\rho = a\sin k\varphi$, $\rho = a\cos k\varphi$, называют розами. Причем, если k – четное, то лепестков у розы $2k$, а если число k – нечетное, то у розы k лепестков.