

П. Е. ДАНКО, А. Г. ПОПОВ, Т. Я. КОЖЕВНИКОВА

# Высшая математика

в упражнениях  
и задачах

---

---

В двух частях

Часть

1

*6-е издание*

Москва  
«ОНИКС 21 век»  
«Мир и Образование»  
2003

УДК 516+517  
ББК 22.1я73  
Д17

*Все права защищены. Перепечатка отдельных глав и произведения в целом без письменного разрешения владельцев прав запрещена.*

**Данко П. Е.**

Д17 Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 6-е изд. — М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003. — 304 с.: ил.

ISBN 5-329-00326-1 (ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»)  
ISBN 5-94666-008-X (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Содержание первой части охватывает следующие разделы программы: аналитическую геометрию, основы линейной алгебры, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, интегральное исчисление функций одной переменной, элементы линейного программирования.

В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения. Типовые задачи даются с подробными решениями. Имеется большое количество задач для самостоятельной работы.

УДК 516+517  
ББК 22.1я73

*Учебное издание*

Данко Павел Ефимович, Попов Александр Георгиевич,  
Кожевникова Татьяна Яковлевна

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА  
В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ**

В двух частях  
Часть I

Редактор *А. М. Суходский*

Подписано в печать с готовых диапозитивов 31.03.2003. Формат 60 × 90<sup>1/16</sup>.  
Гарнитура «Литературная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,0.  
Доп. тираж 30 000 экз. Заказ № 78.

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2: 953005 — учебная литература

ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век».

Изд. лиц. ИД № 02795 от 11.09.2000. 105066, Москва, ул. Доброслободская, 5а.  
Отдел реализации: тел. (095) 310-75-25, 150-52-11. Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».

Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001. 109193, Москва, 5-я Кожуховская ул., д. 13, стр. 1.  
Тел./факс (095) 928-78-26. E-mail: mir-obrazovanie@rambler.ru

Издание осуществлено при участии  
ООО «Издательство АСТ»

ОАО «Санкт-Петербургская типография № 6». 191144, Санкт-Петербург, ул. Моисеенко, 10.  
Телефон отдела маркетинга 271-35-42.

ISBN 5-329-00326-1 (ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»)  
ISBN 5-94666-008-X (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

© Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., 2003  
© ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век».  
Оформление обложки. 2003

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава I. Аналитическая геометрия на плоскости</b>	
§ 1. Прямоугольные и полярные координаты . . . . .	6
§ 2. Прямая. . . . .	15
§ 3. Кривые второго порядка . . . . .	25
§ 4. Преобразование координат и упрощение уравнений кривых второго порядка . . . . .	32
§ 5. Определители второго и третьего порядков и системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными . . . . .	39
<b>Глава II. Элементы векторной алгебры</b>	
§ 1. Прямоугольные координаты в пространстве . . . . .	44
§ 2. Векторы и простейшие действия над ними. . . . .	45
§ 3. Скалярное и векторное произведения. Смешанное произведение . . . . .	48
<b>Глава III. Аналитическая геометрия в пространстве</b>	
§ 1. Плоскость и прямая . . . . .	53
§ 2. Поверхности второго порядка. . . . .	63
<b>Глава IV. Определители и матрицы</b>	
§ 1. Понятие об определителе $n$ -го порядка. . . . .	70
§ 2. Линейные преобразования и матрицы. . . . .	74
§ 3. Приведение к каноническому виду общих уравнений кривых и поверхностей второго порядка . . . . .	81
§ 4. Ранг матрицы. Эквивалентные матрицы . . . . .	86
§ 5. Исследование системы $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными . . . . .	88
§ 6. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса . . . . .	91
§ 7. Применение метода Жордана—Гаусса к решению систем линейных уравнений . . . . .	94
<b>Глава V. Основы линейной алгебры</b>	
§ 1. Линейные пространства . . . . .	103
§ 2. Преобразование координат при переходе к новому базису . . . . .	109
§ 3. Подпространства . . . . .	111
§ 4. Линейные преобразования . . . . .	115
§ 5. Евклидово пространство . . . . .	124
§ 6. Ортогональный базис и ортогональные преобразования . . . . .	128
§ 7. Квадратичные формы . . . . .	131
<b>Глава VI. Введение в анализ</b>	
§ 1. Абсолютная и относительная погрешности . . . . .	136
§ 2. Функция одной независимой переменной . . . . .	137
§ 3. Построение графиков функций. . . . .	140
§ 4. Пределы. . . . .	142
§ 5. Сравнение бесконечно малых. . . . .	147
§ 6. Непрерывность функции . . . . .	149

## Глава VII. Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной

§ 1. Производная и дифференциал . . . . .	151
§ 2. Исследование функций . . . . .	167
§ 3. Кривизна плоской линии . . . . .	183
§ 4. Порядок касания плоских кривых . . . . .	185
§ 5. Вектор-функция скалярного аргумента и ее производная . . . . .	185
§ 6. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой. Кривизна и кручение . . . . .	188

## Глава VIII. Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных

§ 1. Область определения функции. Линии и поверхности уровня . . . . .	192
§ 2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных . . . . .	193
§ 3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности . . . . .	203
§ 4. Экстремум функции двух независимых переменных . . . . .	204

## Глава IX. Неопределенный интеграл

§ 1. Непосредственное интегрирование. Замена переменной и интегрирование по частям . . . . .	208
§ 2. Интегрирование рациональных дробей . . . . .	218
§ 3. Интегрирование простейших иррациональных функций . . . . .	229
§ 4. Интегрирование тригонометрических функций . . . . .	234
§ 5. Интегрирование разных функций . . . . .	242

## Глава X. Определенный интеграл

§ 1. Вычисление определенного интеграла. . . . .	243
§ 2. Несобственные интегралы . . . . .	247
§ 3. Вычисление площади плоской фигуры . . . . .	251
§ 4. Вычисление длины дуги плоской кривой . . . . .	254
§ 5. Вычисление объема тела. . . . .	255
§ 6. Вычисление площади поверхности вращения . . . . .	257
§ 7. Статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур . . . . .	258
§ 8. Нахождение координат центра тяжести. Теоремы Гульдена . . . . .	260
§ 9. Вычисление работы и давления . . . . .	262
§ 10. Некоторые сведения о гиперболических функциях . . . . .	266

## Глава XI. Элементы линейного программирования

§ 1. Линейные неравенства и область решений системы линейных неравенств . . . . .	271
§ 2. Основная задача линейного программирования . . . . .	274
§ 3. Симплекс-метод . . . . .	276
§ 4. Двойственные задачи . . . . .	287
§ 5. Транспортная задача . . . . .	288

Ответы . . . . .	294
------------------	-----

## ПРЕДИСЛОВИЕ

При написании книги «Высшая математика в упражнениях и задачах» авторы стремились раскрыть содержание основных понятий и теорем курса на специально подобранных упражнениях и задачах.

В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения, состоящие из определений и основных математических понятий данного раздела. При этом наиболее трудные вопросы теории для лучшего усвоения сопровождаются раскрытием этих понятий (без доказательств).

В пособие включены типовые задачи, для наглядности сопровождаемые иллюстрациями, и подробно рассматриваются методы их решения. На все задачи для самостоятельной работы даны ответы. В приложении приводятся таблицы, необходимые при решении некоторых задач.

В книге используются следующие обозначения: начало и конец решения задачи отмечаются соответственно знаками  $\Delta$  и  $\blacktriangle$ , а вместо слова «Указание» употребляется знак  $\bullet$ .

При создании настоящего пособия авторы использовали некоторые методические приемы и задачи из книг: Фихтенгольц Г. М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. I—III; Курант Р. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. I, II; Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. «Сборник задач по высшей математике», т. I—III; Демидович Б. П. и др. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу»; Фролов С. В., Шостак Р. Я. «Курс высшей математики».

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю признательность студентам и преподавателям высших учебных заведений, рецензентам всех изданий книги, чьи поправки, критические замечания и предложения способствовали улучшению данного пособия.

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

## § 1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ И ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

1. Координаты на прямой. Деление отрезка в данном отношении. Точку  $M$  координатной оси  $Ox$ , имеющую абсциссу  $x$ , принято обозначать через  $M(x)$ .

Расстояние  $d$  между точками  $M_1(x_1)$  и  $M_2(x_2)$  оси при любом расположении точек на оси определяется формулой

$$d = |x_2 - x_1|. \quad (1)$$

Пусть на произвольной прямой задан отрезок  $AB$  ( $A$  — начало отрезка,  $B$  — его конец); тогда всякая третья точка  $C$  этой прямой делит отрезок  $AB$  в некотором отношении  $\lambda$ , где  $\lambda = \pm |AC| : |CB|$ . Если отрезки  $AC$  и  $CB$  направлены в одну сторону, то  $\lambda$  приписывают знак «+»; если же отрезки  $AC$  и  $CB$  направлены в противоположные стороны, то  $\lambda$  приписывают знак «-». Иными словами,  $\lambda$  положительно, если точка  $C$  лежит между точками  $A$  и  $B$  и отрицательно, если точка  $C$  лежит на прямой вне отрезка  $AB$ .

Если точки  $A$  и  $B$  лежат на оси  $Ox$ , то координата точки  $C(\bar{x})$ , делящей отрезок между точками  $A(x_1)$  и  $B(x_2)$  в отношении  $\lambda$ , определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (2)$$

В частности, при  $\lambda = 1$  получается формула для координаты середины отрезка:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (3)$$

1. Построить на прямой точки  $A(3)$ ,  $B(-2)$ ,  $C(0)$ ,  $D(\sqrt{2})$ ,  $E(-3,5)$ .

2. Отрезок  $AB$  четырьмя точками разделен на пять равных частей. Определить координату ближайшей к  $A$  точки деления, если  $A(-3)$ ,  $B(7)$ .

△ Пусть  $C(\bar{x})$  — искомая точка; тогда  $\lambda = |AC| : |CB| = 1/4$ . Следовательно, по формуле (2) находим

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-3 + (1/4)7}{1 + 1/4} = -1, \text{ т. е. } C(-1). \blacktriangle$$

3. Известны точки  $A(1)$ ,  $B(5)$  — концы отрезка  $AB$ ; вне этого отрезка расположена точка  $C$ , причем ее расстояние от точки  $A$  в три раза больше расстояния от точки  $B$ . Определить координату точки  $C$ .

△ Нетрудно видеть, что  $\lambda = -|AC| : |BC| = -3$  (рекомендуем сделать чертеж). Таким образом,

$$\bar{x} = \frac{1 - 3 \cdot 5}{1 - 3} = 7, \text{ т. е. } C(7). \blacktriangle$$

4. Определить расстояние между точками: 1)  $M(3)$  и  $N(-5)$ ; 2)  $P(-11/2)$  и  $Q(-5/2)$ .

5. Найти координаты середины отрезка, если известны его концы: 1)  $A(-6)$  и  $B(7)$ ; 2)  $C(-5)$  и  $D(1/2)$ .

6. Найти точку  $M$ , симметричную точке  $N(-3)$  относительно точки  $P(2)$ .

7. Отрезок  $AB$  двумя точками разделен на три равные части. Определить координаты точек деления, если  $A(-1)$ ,  $B(5)$ .

8. Даны точки  $A(-7)$ ,  $B(-3)$ . Вне отрезка  $AB$  расположены точки  $C$  и  $D$ , причем  $|CA| = |BD| = 0,5|AB|$ . Определить координаты точек  $C$  и  $D$ .

**2. Прямоугольные координаты на плоскости. Простейшие задачи.** Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат  $xOy$ , то точку  $M$  этой плоскости, имеющую координаты  $x$  и  $y$ , обозначают  $M(x; y)$ .

Расстояние  $d$  между точками  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

В частности, расстояние  $d$  точки  $M(x; y)$  от начала координат определяется по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Координаты точки  $C(\bar{x}; \bar{y})$ , делящей отрезок между точками  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  в заданном отношении  $\lambda$  (см. п. 1), определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

В частности, при  $\lambda = 1$  получаются формулы для координат середины отрезка:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (4)$$

Площадь треугольника с вершинами  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \\ &= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулу для площади треугольника можно записать в виде

$$S = \frac{1}{2} |\Delta|, \quad (6)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

(понятие об определителе третьего порядка дано в § 5 этой главы).

9. Построить на координатной плоскости точки  $A(4; 3)$ ,  $B(-2; 5)$ ,  $C(5; -2)$ ,  $D(-4; -3)$ ,  $E(-6; 0)$ ,  $F(0; 4)$ .

10. Определить расстояние между точками  $A(3; 8)$  и  $B(-5; 14)$ .

△ Воспользовавшись формулой (1), получим

$$d = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (14 - 8)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10. \quad \blacktriangle$$

11. Показать, что треугольник с вершинами  $A(-3; -3)$ ,  $B(-1; 3)$ ,  $C(1; -1)$  — прямоугольный.

△ Найдем длины сторон треугольника:

$$|AB| = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$

$$|BC| = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$

$$|AC| = \sqrt{(1+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Так как  $|AB|^2 = 40$ ,  $|BC|^2 = 160$ ,  $|AC|^2 = 200$ , то  $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ . Таким образом, сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Отсюда заключаем, что треугольник  $ABC$  прямоугольный и сторона  $AC$  является его гипотенузой. ▲

12. Известны точки  $A(-2; 5)$ ,  $B(4; 17)$  — концы отрезка  $AB$ . На этом отрезке находится точка  $C$ , расстояние которой от  $A$  в два раза больше расстояния от  $B$ . Определить координаты точки  $C$ .

△ Так как  $|AC| = 2|CB|$ , то  $\lambda = |AC| : |CB| = 2$ . Здесь  $x_1 = -2$ ,  $y_1 = 5$ ,  $x_2 = 4$ ,  $y_2 = 17$ ; следовательно,

$$\bar{x} = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 2, \quad \bar{y} = \frac{5 + 2 \cdot 17}{1 + 2} = 13, \text{ т. е. } C(2; 13). \quad \blacktriangle$$

13. Точка  $C(2; 3)$  служит серединой отрезка  $AB$ . Определить координаты точки  $A$ , если  $B(7; 5)$ .

△ Здесь  $\bar{x} = 2$ ,  $\bar{y} = 3$ ,  $x_2 = 7$ ,  $y_2 = 5$ , откуда  $2 = (x_1 + 7)/2$ ,  $3 = (y_1 + 5)/2$ . Следовательно,  $x_1 = -3$ ,  $y_1 = 1$ , т. е.  $A(-3; 1)$ . ▲

14. Даны вершины треугольника  $ABC: A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$ . Определить координаты точки пересечения медиан треугольника.

△ Находим координаты точки  $D$  — середины отрезка  $AB$ ; имеем  $x_D = (x_1 + x_2)/2$ ,  $y_D = (y_1 + y_2)/2$ . Точка  $M$ , в которой пересекаются медианы, делит отрезок  $CD$  в отношении  $2:1$ , считая от точки  $C$ . Следовательно, координаты точки  $M$  определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2x_D}{1 + 2}, \quad \bar{y} = \frac{y_3 + 2y_D}{1 + 2},$$

т. е.

$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2(x_1 + x_2)/2}{3}, \quad \bar{y} = \frac{y_3 + 2(y_1 + y_2)/2}{3}.$$

Окончательно получаем

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \quad \blacktriangle$$

15. Определить площадь треугольника с вершинами  $A(-2; -4)$ ,  $B(2; 8)$  и  $C(10; 2)$ .

△ Используя формулу (5), получаем

$$S = \frac{1}{2} |(2+2)(2+4) - (10+2)(8+4)| = \frac{1}{2} |24 - 144| = 60 \text{ кв. ед.} \quad \blacktriangle$$

16. Определить расстояние между точками: 1)  $A(2; 3)$  и  $B(-10; -2)$ ; 2)  $C(\sqrt{2}; -\sqrt{7})$  и  $D(2\sqrt{2}; 0)$ .

17. Показать, что треугольник с вершинами  $A(4; 3)$ ,  $B(7; 6)$  и  $C(2; 11)$  — прямоугольный.

18. Показать, что треугольник с вершинами  $A(2; -1)$ ,  $B(4; 2)$  и  $C(5; 1)$  — равнобедренный.

19. Даны вершины треугольника:  $A(-1; -1)$ ,  $B(0; -6)$  и  $C(-10; -2)$ . Найти длину медианы, проведенной из вершины  $A$ .

20. Даны концы отрезка  $AB: A(-3; 7)$  и  $B(5; 11)$ . Этот отрезок тремя точками разделен на четыре равные части. Определить координаты точек деления.

21. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(1; 5)$ ,  $B(2; 7)$ ,  $C(4; 11)$ .

22. Даны три последовательные вершины параллелограмма:  $A(11; 4)$ ,  $B(-1; -1)$ ,  $C(5; 7)$ . Определить координаты четвертой вершины.

23. Даны две вершины треугольника  $A(3; 8)$  и  $B(10; 2)$  и точка пересечения медиан  $M(1; 1)$ . Найти координаты третьей вершины треугольника.

24. Даны вершины треугольника:  $A(7; 2)$ ,  $B(1; 9)$  и  $C(-8; -11)$ . Найти расстояния точки пересечения медиан от вершин треугольника.

25. Точки  $L(0; 0)$ ,  $M(3; 0)$  и  $N(0; 4)$  являются серединами сторон треугольника. Вычислить площадь треугольника.

**3. Полярные координаты.** В полярной системе координат положение точки  $M$  на плоскости определяется ее расстоянием  $|OM| = \rho$  от полюса  $O$  ( $\rho$  — полярный радиус-вектор точки) и углом  $\theta$ , образованным отрезком  $OM$  с полярной осью  $Ox$  ( $\theta$  — полярный угол точки). Угол  $\theta$  считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки.

Если точка  $M$  имеет полярные координаты  $\rho > 0$  и  $0 \leq \theta < 2\pi$ , то ей же отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат  $(\rho; \theta + 2k\pi)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а ось  $Ox$  направить по полярной оси, то прямоугольные координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  и ее полярные координаты  $\rho$  и  $\theta$  связаны следующими формулами:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta; \quad (1)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = y/x. \quad (2)$$

26. Построить точки, заданные полярными координатами:  $A(4; \pi/4)$ ,  $B(2; 4\pi/3)$ ,  $C(3; -\pi/6)$ ,  $D(-3; \pi/3)$ ,  $E(0; \alpha)$ ,  $F(-1; -3\pi/4)$ .

27. Найти полярные координаты точки  $M(1; -\sqrt{3})$ , если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось — с положительным направлением оси абсцисс.

$\Delta$  На основании равенств (2) находим  $\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ ;  $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$ . Очевидно, что точка  $M$  лежит в IV четверти и, следовательно,  $\theta = 5\pi/3$ . Итак,  $M(2; 5\pi/3)$ .  $\blacktriangle$

28. Найти прямоугольные координаты точки  $A(2\sqrt{2}; 3\pi/4)$ , если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось направлена по оси абсцисс.

△ Используя формулы (1), имеем  $x = 2\sqrt{2} \cos(3\pi/4) = -2$ ,  $y = 2\sqrt{2} \sin(3\pi/4) = 2$ . Итак,  $A(-2; 2)$ . ▲

29. Найти полярные координаты точек:  $A(2\sqrt{3}; 2)$ ,  $B(0; -3)$ ,  $C(-4; 4)$ ,  $D(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $E(-\sqrt{2}; -\sqrt{6})$ ,  $F(-7; 0)$ .

30. Найти прямоугольные координаты точек:  $A(10; \pi/2)$ ,  $B(2; 5\pi/4)$ ,  $C(0; \pi/10)$ ,  $D(1; -\pi/4)$ ,  $E(-1; \pi/4)$ ,  $F(-1; -\pi/4)$ .

31. Определить расстояние между точками  $M_1(\rho_1; \theta_1)$  и  $M_2(\rho_2; \theta_2)$ .

● Применить к треугольнику  $OM_1M_2$  теорему косинусов.

32. Определить расстояние между точками  $M(3; \pi/4)$  и  $N(4; 3\pi/4)$ .

33. Найти полярные координаты точки, симметричной точке  $M(\rho; \theta)$  относительно полярной оси.

34. Найти полярные координаты точки, симметричной точке  $M(\rho; \theta)$  относительно полюса.

35. Найти полярные координаты точек, симметричных точкам  $(3; \pi/6)$ ,  $(5; 2\pi/3)$  и  $(2; -\pi/6)$ : 1) относительно полюса; 2) относительно полярной оси.

36. Найти полярные координаты точки, симметричной точке  $M(\rho; \theta)$  относительно прямой, проходящей через полюс перпендикулярно полярной оси.

4. **Уравнение линии.** Пусть некоторой линии на плоскости  $xOy$ , рассматриваемой как множество точек, соответствует уравнение, связывающее координаты любой точки  $M(x; y)$  («текущей точки»), лежащей на этой линии. Такое уравнение называется *уравнением данной линии*.

Если в уравнение данной линии подставить координаты любой точки, лежащей на этой линии, то уравнение обращается в тождество. Если же в уравнение линии подставить координаты любой точки, не принадлежащей этой линии, то уравнение не удовлетворится.

37. Один конец отрезка перемещается по оси абсцисс, а другой — по оси ординат. Найти уравнение линии, описываемой серединой этого отрезка, если длина отрезка равна  $c$ .

△ Пусть  $M(x; y)$  — середина отрезка. Длина отрезка  $OM$  (длина медианы) равна половине гипотенузы, т. е.  $|OM| = c/2$ . С другой стороны,  $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$  (расстояние точки  $M$  от начала координат).

Таким образом, приходим к уравнению

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c/2, \text{ или } x^2 + y^2 = c^2/4.$$

Это и есть уравнение искомой линии. Геометрически очевидно, что этой линией является окружность радиуса  $c/2$  с центром в начале координат. ▲

38. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки  $F(0; 1/4)$  равно расстоянию этой же точки от прямой  $y = -1/4$ .

△ Возьмем на искомой линии произвольную точку  $M(x; y)$ . Расстояние точки  $M$  от точки  $F$  определится по формуле расстояния между двумя точками:

$$|MF| = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}.$$

Расстояние точки  $M$  от прямой  $y = -1/4$  найдется из простых геометрических соображений (рис. 1):

$$|MN| = |MK| + |KN| = y + \frac{1}{4}.$$

Так как по условию равенство  $|MF| = |MN|$  выполняется для любой точки  $M$ , лежащей на искомой линии, то уравнение этой линии можно записать в виде

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = y + \frac{1}{4},$$

или

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16},$$

т. е.  $y = x^2$ .

Линия, определяемая уравнением  $y = x^2$ , называется *параболой*. ▲

**39.** Составить уравнение множества точек, произведение расстояний которых от точек  $F_1(a; 0)$  и  $F_2(-a; 0)$  есть постоянная величина, равная  $a^2$ .

△ Возьмем на искомой кривой произвольную точку  $M(x; y)$ . Ее расстояния от точек  $F_1(a; 0)$  и  $F_2(-a; 0)$  составляют  $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ . Из условия задачи следует, что  $r_1 r_2 = a^2$ . Таким образом, искомая кривая имеет уравнение

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2.$$

Приведем это уравнение к рациональному виду;

$$(x^2 + a^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + a^2 + y^2 + 2ax) = a^4,$$

т. е.

$$(x^2 + a^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4,$$

или, наконец,

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

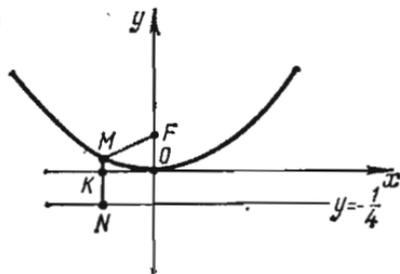


Рис. 1

Найденная кривая называется *лемнискатой*. ▲

**40.** Составить уравнение лемнискаты в полярных координатах и построить кривую.

△ В уравнении  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  (см. предыдущую задачу) переходим к полярным координатам по формулам  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ . Тогда получим

$$(\rho^3 \cos^2 \theta + \rho^3 \sin^2 \theta)^2 = 2a^2(\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta), \text{ или } \rho^3 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Это — уравнение лемнискаты в полярных координатах.

Построим кривую. Разрешив уравнение относительно  $\rho$ , находим  $\rho = \pm a\sqrt{2 \cos 2\theta}$ . Из того, что в правой части равенства стоит двойной знак «±», а также из того, что уравнение не меняется при замене  $\theta$  на  $-\theta$ , заключаем, что лемниската расположена симметрично относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ . Исследуем форму лемнискаты для I четверти, т. е. для случая  $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi/2$ . Для этих значений  $\rho$  и  $\theta$  имеем  $\rho = a\sqrt{2 \cos 2\theta}$ . Нетрудно видеть, что  $\theta$  может изменяться только в промежутке от 0 до  $\pi/4$ . Таким образом, соответствующая часть кривой заключена между полярной осью и лучом  $\theta = \pi/4$ . Если  $\theta = 0$ , то  $\rho = a\sqrt{2}$ . С возрастанием  $\theta$  от 0 до  $\pi/4$  величина  $\rho$  убывает до значения  $\rho = 0$ .

Приняв во внимание соображения симметрии, мы можем построить лемнискату (рис. 2). ▲

41. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек  $A(1; 1)$  и  $B(3; 3)$ .

$\Delta$  Пусть точка  $M$  принадлежит искомому множеству; тогда  $|MA| = |MB|$ . По формуле расстояния между двумя точками находим

$$|MA| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \quad |MB| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

и уравнение линии может быть записано в виде

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9,$$

откуда после приведения подобных членов окончательно приходим к уравнению  $x + y - 4 = 0$ . Итак, искомым множеством является прямая, которая, как известно, служит серединным перпендикуляром к отрезку  $AB$ .  $\blacktriangle$

42. Точка  $M$  равномерно перемещается по лучу, вращающемуся равномерно около полюса. Составить уравнение линии, описанной

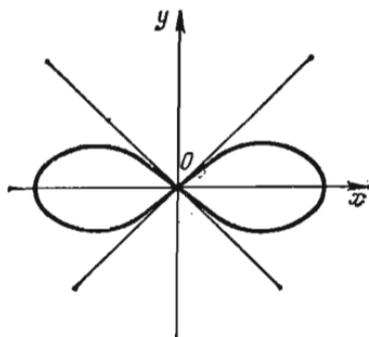


Рис. 2

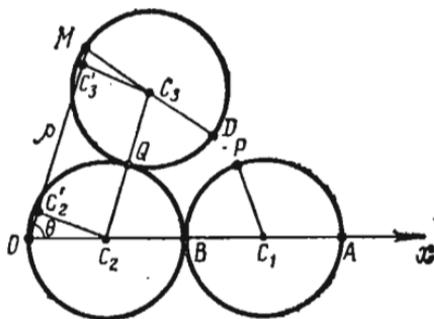


Рис. 3

точкой  $M$ , если в начальный момент вращающийся луч совпадает с полярной осью, а точка  $M$  — с полюсом; при повороте же луча на угол  $\theta = 1$  (один радиан) точка  $M$  удалилась от полюса на расстояние  $a$ .

$\Delta$  Поскольку в начальный момент величины  $\rho$  и  $\theta$  равны нулю, а затем обе возрастают пропорционально времени, нетрудно установить, что они связаны прямой пропорциональной зависимостью:  $\rho/\theta = \text{const}$ . Но  $\rho = a$  при  $\theta = 1$ ; следовательно,  $\rho/\theta = a/1$ , т. е.  $\rho = a\theta$ . Кривая  $\rho = a\theta$  называется *спиралью Архимеда*.  $\blacktriangle$

43. Окружность диаметра  $a$  катится без скольжения по внешней стороне другой окружности такого же диаметра. Составить в полярных координатах уравнение линии, описанной некоторой фиксированной точкой катящейся окружности.

$\Delta$  На рис. 3:  $C_1$  — первоначальное положение центра катящейся окружности;  $A$  — первоначальное положение точки, описывающей искомую линию (точка  $A$  диаметрально противоположна точке  $B$ , где в начальный момент соприкасаются окружности);  $C_2$  — центр неподвижной окружности;  $C_3$  — центр катящейся окружности в новом положении;  $M$  — новое положение точки  $A$ , описывающей искомую линию. (После перемещения окружности  $C_1$  в положение  $C_3$  точка  $P$  займет по-

ложение  $Q$ . Точка  $B$  займет положение  $D$ , причём, поскольку качение происходит без скольжения,  $\widehat{BQ} = \widehat{DQ}$ ,  $\widehat{QC_2B} = \widehat{QC_2D}$ .

На чертеже показано положение полюса  $O$  и полярной оси  $Ox$ . Требуется составить уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки  $M(\rho; \theta)$  искомой линии.

Легко установить, что  $\widehat{MC_3Q} = \widehat{OC_2Q}$ , в силу чего четырёхугольник  $OC_2C_3M$  является равнобедренной трапецией с меньшим основанием  $|C_2C_3| = a$ ;  $C_2C_2'$  и  $C_3C_3'$  — перпендикуляры, опущенные из точек  $C_2$  и  $C_3$  на прямую  $OM$ . Итак,

$$\rho = |OC_2'| + |C_2'C_3'| + |C_3'M| = \frac{a}{2} \cos \theta + a + \frac{a}{2} \cos \theta = a(1 + \cos \theta).$$

Таким образом, уравнение искомой линии в полярных координатах имеет вид  $\rho = a(1 + \cos \theta)$ ; эта кривая называется *кардиоидой*.

Поскольку при замене  $\theta$  на  $-\theta$  уравнение кардиоиды не меняется, кардиоида расположена симметрично относительно полярной оси. Если  $\theta$  изменяется от 0 до  $\pi$ , то  $\rho$  убывает от  $2a$  до 0. ▲

**44.** Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек  $A(2; 0)$  и  $B(0; 1)$ .

**45.** Какая линия определяется уравнением  $x = y^2$ ?

**46.** Какая линия определяется уравнением  $x = -y^2$ ?

**47.** Составить уравнение множества точек, сумма квадратов расстояний которых от точек  $A(2; 0)$  и  $B(0; 2)$  равна квадрату расстояния между точками  $A$  и  $B$ .

**48.** Составить уравнение множества точек, сумма расстояний которых от точек  $A(1; 0)$  и  $B(0; 1)$  равна 2.

**49.** В полярной системе координат составить уравнение окружности с центром в полюсе.

**50.** В полярной системе координат составить уравнение полупрямой, проходящей через полюс и образующей с полярной осью угол  $\alpha$ .

**51.** В полярной системе координат составить уравнение окружности диаметра  $a$ , если полюс лежит на окружности, а полярная ось проходит через центр окружности.

**5. Параметрические уравнения линии.** При отыскании уравнения множества точек иногда оказывается более удобным выразить координаты  $x$  и  $y$  произвольной точки этого множества через некоторую вспомогательную величину  $t$  (ее называют *параметром*), т. е. рассматривать систему уравнений  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ . Такое представление искомой линии называется *параметрическим*, а уравнения системы — *параметрическими уравнениями данной линии*.

Исключение параметра  $t$  из системы (если оно возможно) приводит к уравнению, связывающему  $x$  и  $y$ , т. е. к обычному уравнению линии вида  $f(x, y) = 0$ .

**52.** Составить параметрические уравнения окружности.

△ Рассмотрим окружность радиуса  $a$  с центром в начале координат (рис. 4). Возьмем на ней произвольную точку  $M(x; y)$ . Примем за параметр  $t$  угол, образованный с осью абсцисс радиусом  $OM$ . Из треугольника  $OMN$  следует, что  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ . Таким образом, уравнения

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t$$

являются параметрическими уравнениями окружности.

Исключив из этих уравнений параметр  $t$ , получим обычное уравнение окружности. В данном случае для исключения параметра достаточно каждое из уравнений возвести в квадрат и полученные уравнения сложить:  $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t +$

$+a^2 \sin^2 t$ , т. е.  $x^2 + y^2 = a^2$ . Последнее уравнение является уравнением окружности радиуса  $a$  с центром в начале координат. ▲

53. Составить параметрические уравнения кривой, описанной фиксированной точкой окружности, катящейся без скольжения по неподвижной прямой.

△ Пусть окружность радиуса  $a$  катится без скольжения вправо по горизонтальной прямой (рис. 5). Примем эту прямую за ось  $Ox$ , поместив начало координат в некоторой точке  $O$  оси. За фиксированную точку окружности (перемещением которой образуется искомая кривая) примем ту ее точку, которая совпадает с точкой  $O$  при соответствующем положении окружности. За параметр  $t$  примем угол поворота радиуса окружности, проходящего через фиксированную точку.

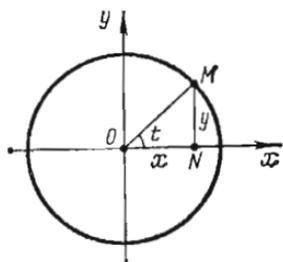


Рис. 4

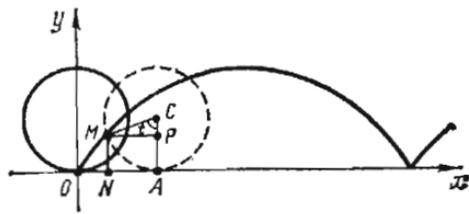


Рис. 5

Пусть в некоторый момент времени окружность касается оси в точке  $A$ . Фиксированная точка окружности займет положение  $M(x, y)$ , соответствующее углу  $t$  поворота радиуса  $CM$  ( $t = \widehat{ACM}$ ). Так как качение происходит без скольжения, то  $|OA| = \widehat{MA} = at$ . Используя это, выразим координаты точки  $M$  через  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= |ON| = |OA| - |NA| = \widehat{MA} - |NA| = at - a \sin t = a(t - \sin t), \\ y &= |NM| = |AP| = |AC| - |PC| = a - a \cos t = a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Таким образом, параметрические уравнения искомой линии имеют вид

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Эта линия называется *циклоидой*; она изображена на рис. 5. ▲

54. Какая линия определяется параметрическими уравнениями  $x = t^2$ ,  $y = t^2$ ?

△ Исключая параметр  $t$ , приходим к уравнению  $y = x$ . В силу параметрических уравнений  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Следовательно, данные параметрические уравнения определяют луч — биссектрису I координатного угла. ▲

55. Какая линия определяется параметрическими уравнениями  $x = \cos t$ ,  $y = \cos^2 t$ ?

△ Подставив  $x$  вместо  $\cos t$  во второе уравнение, получаем уравнение параболы  $y = x^2$ . Из параметрических уравнений следует  $|x| \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Таким образом, параметрические уравнения определяют дугу  $AOB$  параболы  $y = x^2$ , где  $A(-1; 1)$ ;  $B(1; 1)$ . ▲

56. Какая линия определяется уравнениями  $x = \sin t$ ,  $y = \operatorname{cosec} t$ ?

△ Так как  $y = 1/\sin t$ , то, исключив  $t$ , получаем уравнение  $y = 1/x$ , выражающее обратную пропорциональную зависимость величин  $x$  и  $y$ . Учитывая, что

$|x| \leq 1, |y| \geq 1$ , заключаем, что линия, заданная параметрическими уравнениями  $x = \sin t, y = \operatorname{cosec} t$ , имеет вид, изображенный на рис. 6. ▲

57. Какая линия определяется уравнениями  $x = 2t, y = 4t^2$ ?

58. Кривая задана параметрическими уравнениями  $x = a \cos t, y = b \sin t$ . Найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

● Разделить первое уравнение на  $a$ , второе — на  $b$ , а затем исключить  $t$ .

59. Кривая задана параметрическими уравнениями  $x = a \sec t, y = b \operatorname{tg} t$ . Найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

60. Какая линия определяется уравнениями  $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t$ ?

61. Кривая, определяемая параметрическими уравнениями  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ , называется *астроидой*. Исключив  $t$ , найти уравнение астроиды в прямоугольной системе координат.

62. На круг, описанный из центра  $O$  радиусом  $a$ , накручена по часовой стрелке нить; пусть конец нити находится в точке  $A(a; 0)$ . Станем разворачивать нить (против часовой стрелки), сматывая ее с круга и все время натягивая за конец. Составить параметрические уравнения кривой, описываемой концом нити, если за параметр  $t$  взять угол между радиусом  $OA$  и радиусом  $OB$ , проведенным в точку касания окружности с натянутой нитью в произвольном положении последней.

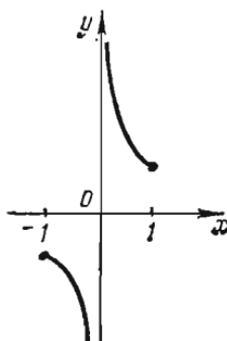


Рис. 6

## § 2. ПРЯМАЯ

1. **Общее уравнение прямой.** Всякое уравнение первой степени относительно  $x$  и  $y$ , т. е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

(где  $A, B$  и  $C$  — постоянные коэффициенты, причем  $A^2 + B^2 \neq 0$ ) определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Частные случаи. 1.  $C = 0; A \neq 0; B \neq 0$ . Прямая, определяемая уравнением  $Ax + By = 0$ , проходит через начало координат.

2.  $A = 0; B \neq 0; C \neq 0$ . Прямая, определяемая уравнением  $By + C = 0$  (или  $y = b$ , где  $b = -C/B$ ), параллельна оси  $Ox$ .

3.  $B = 0; A \neq 0; C \neq 0$ . Прямая, определяемая уравнением  $Ax + C = 0$  (или  $x = a$ , где  $a = -C/A$ ), параллельна оси  $Oy$ .

4.  $B = C = 0; A \neq 0$ . Прямая, определяемая уравнением  $Ax = 0$  (или  $x = 0$ , поскольку  $A \neq 0$ ), совпадает с осью  $Oy$ .

5.  $A = C = 0; B \neq 0$ . Прямая, определяемая уравнением  $By = 0$  (или  $y = 0$ , поскольку  $B \neq 0$ ), совпадает с осью  $Ox$ .

2. **Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** Если в общем уравнении прямой  $B \neq 0$ , то, разрешив его относительно  $y$ , получим уравнение вида

$$y = kx + b \quad (2)$$

(здесь  $k = -A/B, b = -C/B$ ). Его называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, поскольку  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол, образованный прямой с положительным направлением оси  $Ox$ . Свободный член уравнения  $b$  равен ординате точки пересечения прямой с осью  $Oy$ .

3. Уравнение прямой в отрезках. Если в общем уравнении прямой  $C \neq 0$ , то, разделив все его члены на  $-C$ , получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (3)$$

(здесь  $a = -C/A$ ,  $b = -C/B$ ). Его называют *уравнением прямой в отрезках*; в нем  $a$  является абсциссой точки пересечения прямой с осью  $Ox$ , а  $b$  — ординатой точки пересечения прямой с осью  $Oy$ . Поэтому  $a$  и  $b$  называют отрезками прямой на осях координат.

4. **Нормальное уравнение прямой.** Если обе части общего уравнения прямой  $Ax + By + C = 0$  умножить на число  $\mu = 1/(\pm\sqrt{A^2 + B^2})$  (которое называется *нормирующим множителем*), причем знак перед радикалом выбрать так, чтобы выполнялось условие  $\mu C < 0$ , то получится уравнение

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0. \quad (4)$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением прямой*. Здесь  $p$  — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а  $\varphi$  — угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси  $Ox$ .

63. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок  $b = -3$  и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол  $\alpha = \pi/6$ .

△ Находим угловой коэффициент:  $k = \operatorname{tg}(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$ . Воспользовавшись уравнением (2) прямой с угловым коэффициентом, получаем  $y = (1/\sqrt{3})x - 3$ ; освобождаясь от знаменателя и перенося все члены в левую часть, получаем общее уравнение прямой  $x - \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$ . ▲

64. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки  $a = 2/5$ ,  $b = -1/10$ .

△ Воспользовавшись уравнением (3) прямой в отрезках, имеем

$$\frac{x}{2/5} + \frac{y}{(-1/10)} = 1.$$

Это уравнение можно переписать в виде  $(5/2)x - 10y = 1$ , или  $5x - 20y - 2 = 0$  (общее уравнение прямой). ▲

65. Дано общее уравнение прямой  $12x - 5y - 65 = 0$ . Написать: 1) уравнение с угловым коэффициентом; 2) уравнение в отрезках; 3) нормальное уравнение.

△ 1) Разрешим уравнение относительно  $y$ , получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = (12/5)x - 13.$$

Здесь  $k = 12/5$ ,  $b = -13$ .

2) Перенесем свободный член общего уравнения в правую часть и разделим обе части на 65; имеем  $(12/65)x - (5/65)y = 1$ . Переписав последнее уравнение в виде

$$\frac{x}{65/12} + \frac{y}{(-65/5)} = 1,$$

получим уравнение данной прямой в отрезках. Здесь  $a = 65/12$ ,  $b = -65/5 = -13$ .

3) Находим нормирующий множитель  $\mu = 1/\sqrt{12^2 + (-5)^2} = 1/13$ . Умножив обе части общего уравнения на этот множитель, получаем нормальное уравнение прямой

$$(12/13)x - (5/13)y - 5 = 0.$$

Здесь  $\cos \varphi = 12/13$ ,  $\sin \varphi = -5/13$ ,  $p = 5$ . ▲

66. Построить прямые: 1)  $x - 2y + 5 = 0$ ; 2)  $2x + 3y = 0$ ; 3)  $5x - 2 = 0$ ; 4)  $2y + 7 = 0$ .

△ 1) Полагая в уравнении  $x = 0$ , получаем  $y = 5/2$ . Следовательно, прямая пересекается с осью ординат в точке  $B(0; 5/2)$ . Полагая  $y = 0$ , получаем  $x = -5$ , т. е. прямая пересекается с осью абсцисс в точке  $A(-5; 0)$ . Остается провести прямую через точки  $A$  и  $B$  (рис. 7).

2) Прямая  $2x + 3y = 0$  проходит через начало координат, так как в ее уравнении отсутствует свободный член. Дадим  $x$  в уравнении прямой какое-нибудь значение. Пусть, например,  $x = 3$ , тогда  $6 + 3y = 0$ , т. е.  $y = -2$ ; получим точку  $M(3; -2)$ . Остается через начало координат и точку  $M$  провести прямую.

3) Разрешив уравнение прямой относительно  $x$ , получим  $x = 2/5$ . Эта прямая параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный  $2/5$ .

4) Аналогично получаем уравнение  $y = -7/2$ ; эта прямая параллельна оси абсцисс. ▲

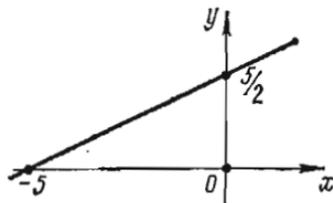


Рис. 7

67. Уравнение прямой задано в виде  $(x + 2\sqrt{5})/4 + (y - 2\sqrt{5})/2 = 0$ . Написать:

1) общее уравнение этой прямой; 2) уравнение с угловым коэффициентом; 3) уравнение в отрезках; 4) нормальное уравнение.

68. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая  $2x + 2y - 5 = 0$ ?

69. Определить площадь треугольника, образованного прямой  $4x + 3y - 36 = 0$  с осями координат.

70. Можно ли уравнение прямой  $20x + 21y = 0$  записать в отрезках?

71. Построить прямые: 1)  $4x - 5y + 15 = 0$ ; 2)  $2x - y = 0$ ; 3)  $7x - 10 = 0$ ; 4)  $2y + 3 = 0$ .

72. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок  $b = 1$  и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол  $\alpha = 2\pi/3$ .

73. Прямая отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв. ед.

74. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку  $A(-2; -3)$ .

75. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(2; 5)$  и отсекающей на оси ординат отрезок  $b = 7$ .

76. Составить уравнения прямых, проходящих через точку  $M(-3; -4)$  и параллельных осям координат.

77. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат равные отрезки, если длина отрезка прямой, заключенного между осями координат, равна  $5\sqrt{2}$ .

5. Угол между прямыми. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Острый угол между прямыми  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (1)$$

Условие параллельности прямых имеет вид  $k_1 = k_2$ .

Условие перпендикулярности прямых имеет вид  $k_1 = -1/k_2$ .

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент  $k$  и проходящей через точку  $M(x_1; y_1)$ , записывается в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (2)$$

Уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ , записывается в виде

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (3)$$

и угловой коэффициент этой прямой находится по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (4)$$

Если  $x_1 = x_2$ , то уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1$  и  $M_2$ , имеет вид  $x = x_1$ .

Если  $y_1 = y_2$ , то уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1$  и  $M_2$ , имеет вид  $y = y_1$ .

**6. Пересечение прямых. Расстояние от точки до прямой. Пучок прямых.** Если  $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$ , то координаты точки пересечения прямых  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  находятся путем совместного решения уравнений этих прямых.

Расстояние от точки  $M(x_0; y_0)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$  находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1)$$

Биссектрисы углов между прямыми  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  имеют уравнения

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0. \quad (2)$$

Если пересекающиеся прямые заданы уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ , то уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — числовой множитель, определяет прямую линию, проходящую через точку пересечения заданных прямых. Давая в последнем уравнении  $\lambda$  различные значения, будем получать различные прямые, принадлежащие пучку прямых, центр которого есть точка пересечения заданных прямых.

**78.** Определить острый угол между прямыми  $y = -3x + 7$  и  $y = 2x + 1$ .

△ Полагая  $k_1 = -3$ ,  $k_2 = 2$  в формуле (1) п. 5, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3) \cdot 2} \right| = 1, \quad \text{т. е. } \varphi = \frac{\pi}{4}. \quad \blacktriangle$$

**79.** Показать, что прямые  $4x - 6y + 7 = 0$  и  $20x - 30y - 11 = 0$  параллельны.

△ Приведя уравнение каждой прямой к виду с угловым коэффициентом, получаем

$$y = (2/3)x + 7/6 \quad \text{и} \quad y = (2/3)x - 11/30.$$

Угловые коэффициенты этих прямых равны:  $k_1 = k_2 = 2/3$ , т. е. прямые параллельны. ▲

**80.** Показать, что прямые  $3x - 5y + 7 = 0$  и  $10x + 6y - 3 = 0$  перпендикулярны.

△ После приведения уравнений к виду с угловым коэффициентом получаем

$$y = (3/5)x + 7/5 \quad \text{и} \quad y = (-5/3)x + 1/2.$$

Здесь  $k_1 = 3/5$ ,  $k_2 = -5/3$ . Так как  $k_1 = -1/k_2$ , то прямые перпендикулярны. ▲

81. Составить уравнение прямой, проходящей через точки  $M(-1; 3)$  и  $N(2; 5)$ .

△ Полагая  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$ ,  $y_2 = 5$  в уравнении (3) п. 5, получаем

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x+1}{2+1}, \quad \text{или} \quad \frac{y-3}{2} = \frac{x+1}{3}.$$

Итак, искомое уравнение имеет вид  $2x - 3y + 11 = 0$ .

Полезно проверить, что уравнение составлено верно. Для этого достаточно показать, что координаты точек  $M$  и  $N$  удовлетворяют уравнению прямой. Действительно, равенства  $2(-1) - 3 \cdot 3 + 11 = 0$ ,  $2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 11 = 0$  выполняются тождественно. ▲

82. Составить уравнение прямой, проходящей через точки  $A(-2; 4)$  и  $B(-2; -1)$ .

△ Так как  $x_1 = x_2 = -2$ , то прямая имеет уравнение  $x = -2$  (параллельна оси ординат). ▲

83. Показать, что прямые  $3x - 2y + 1 = 0$  и  $2x + 5y - 12 = 0$  пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

△ Так как  $3/2 \neq (-2)/5$ , то прямые пересекаются. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0, \\ 2x + 5y - 12 = 0, \end{cases}$$

находим  $x = 1$ ,  $y = 2$ , т. е. прямые пересекаются в точке  $(1; 2)$ . ▲

84. Определить расстояние от точки  $M(x_0; y_0)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$ , не пользуясь нормальным уравнением прямой.

△ Задача сводится к определению расстояния между точками  $M(x_0; y_0)$  и  $N$ , где  $N$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на данную прямую. Составим уравнение прямой  $MN$ . Так как угловой коэффициент заданной прямой равен  $-A/B$ , то угловой коэффициент прямой  $MN$  равен  $B/A$  (из условия перпендикулярности) и уравнение последней имеет вид  $y - y_0 = (B/A)(x - x_0)$ . Это уравнение может быть переписано в виде  $(x - x_0)/A = (y - y_0)/B$ .

Для определения координат точки  $N$  решим систему уравнений

$$Ax + By + C = 0, \quad (x - x_0)/A = (y - y_0)/B.$$

Введем вспомогательную неизвестную  $t$ :

$$(x - x_0)/A = (y - y_0)/B = t.$$

Тогда  $x = x_0 + At$ ,  $y = y_0 + Bt$ . Подставив эти выражения в уравнение данной прямой, получим  $A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C = 0$ , откуда

$$t = -(Ax_0 + By_0 + C)/(A^2 + B^2).$$

Подставив теперь значение  $t$  в уравнения  $x = x_0 + At$  и  $y = y_0 + Bt$ , определим координаты точки  $N$ :

$$x = x_0 - A \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}, \quad y = y_0 - B \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

Остается определить расстояние между точками  $M$  и  $N$ :

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \\ = \sqrt{\left(A \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(B \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \blacktriangle$$

85. Определить расстояние от точки  $M(1; 2)$  до прямой  $20x - 21y - 58 = 0$ .

$$\Delta \quad d = \frac{|20 \cdot 1 - 21 \cdot 2 - 58|}{\sqrt{400 + 441}} = \frac{|20 - 42 - 58|}{29} = \frac{|-80|}{29} = 2 \frac{22}{29}. \blacktriangle$$

86. Дана прямая  $l: 4x - 3y - 7 = 0$ . Какие из точек  $A(5/2; 1)$ ,  $B(3; 2)$ ,  $C(1; -1)$ ,  $D(0; -2)$ ,  $E(4; 3)$ ,  $F(5; 2)$  лежат на этой прямой?

$\Delta$  Если точка лежит на прямой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой. Имеем:  $A \in l$ , так как  $4(5/2) - 3 \cdot 1 - 7 = 0$ ;  $B \notin l$ , так как  $4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 7 \neq 0$ ;  $C \in l$ , так как  $4 \cdot 1 - 3(-1) - 7 = 0$ ;  $D \notin l$ , так как  $4 \cdot 0 - 3(-2) - 7 \neq 0$ ;  $E \in l$ , так как  $4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 7 = 0$ ;  $F \notin l$ , так как  $4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 7 \neq 0$ .  $\blacktriangle$

87. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-2; -5)$  и параллельной прямой  $3x + 4y + 2 = 0$ .

$\Delta$  Разрешив последнее уравнение относительно  $y$ , получим  $y = -(3/4)x - 1/2$ . Следовательно, в силу условия параллельности угловой коэффициент искомой прямой равен  $-3/4$ . Воспользовавшись уравнением (2) п. 5, получаем

$$y - (-5) = (-3/4)[x - (-2)], \text{ т. е. } 3x + 4y + 26 = 0. \blacktriangle$$

88. Даны вершины треугольника:  $A(2; 2)$ ,  $B(-2; -8)$  и  $C(-6; -2)$ . Составить уравнения медиан треугольника.

$\Delta$  Находим координаты середин сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ :

$$x' = (-2 - 6)/2 = -4, \quad y' = (-8 - 2)/2 = -5; \quad A_1(-4; -5); \\ x'' = (2 - 6)/2 = -2, \quad y'' = (2 - 2)/2 = 0; \quad B_1(-2; 0); \\ x''' = (2 - 2)/2 = 0; \quad y''' = (2 - 8)/2 = -3; \quad C_1(0; -3).$$

Уравнения медиан находим с помощью уравнения прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение медианы  $AA_1$ :

$$(y - 2)/(-5 - 2) = (x - 2)/(-4 - 2), \text{ или } (y - 2)/7 = (x - 2)/6, \text{ т. е. } 7x - 6y - 2 = 0.$$

Находим уравнение медианы  $BB_1$ ; поскольку точки  $B(-2; -8)$  и  $B_1(-2; 0)$  имеют одинаковые абсциссы, медиана  $BB_1$  параллельна оси ординат. Ее уравнение  $x + 2 = 0$ .

Уравнение медианы  $CC_1$ :  $(y + 2)/(-3 + 2) = (x + 6)/(0 + 6)$ , или  $x + 6y + 18 = 0$ .  $\blacktriangle$

89. Даны вершины треугольника:  $A(0; 1)$ ;  $B(6; 5)$  и  $C(12; -1)$ . Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины  $C$ .

$\Delta$  По формуле (4) п. 5 найдем угловой коэффициент стороны  $AB$ ; имеем  $k = (5 - 1)/(6 - 0) = 4/6 = 2/3$ . В силу условия перпендикулярности угловой коэффициент высоты, проведенной из вершины  $C$ , равен  $-3/2$ . Уравнение этой высоты имеет вид

$$y + 1 = (-3/2)(x - 12), \text{ или } 3x + 2y - 34 = 0. \blacktriangle$$

90. Даны стороны треугольника:  $x + 3y - 7 = 0$  ( $AB$ ),  $4x - y - 2 = 0$  ( $BC$ ),  $6x + 8y - 35 = 0$  ( $AC$ ). Найти длину высоты, проведенной из вершины  $B$ .

△ Определите координаты точки  $B$ . Решая систему уравнений  $x+3y-7=0$  и  $4x-y-2=0$ , получим  $x=1, y=2$ , т. е.  $B(1; 2)$ . Находим длину высоты  $BB_1$  как расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC$ :

$$|BB_1| = \frac{|6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 35|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 1,3. \blacktriangle$$

91. Определить расстояние между параллельными прямыми  $3x + y - 3\sqrt{10} = 0$  и  $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$ .

△ Задача сводится к определению расстояния от произвольной точки одной прямой до другой прямой. Полагая, например, в уравнении первой прямой  $x=0$ , получаем  $y=3\sqrt{10}$ . Таким образом,  $M(0; 3\sqrt{10})$  — точка, лежащая на первой прямой. Определим расстояние точки  $M$  до второй прямой:

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 2 \cdot 3\sqrt{10} + 5\sqrt{10}|}{\sqrt{36 + 4}} = \frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = 5,5. \blacktriangle$$

92. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми  $x+y-5=0$  и  $7x-y-19=0$  (рис. 8).

△ Решим сначала эту задачу в общем виде. Биссектрисы углов, образованных двумя прямыми, являются, как известно, множеством точек, равноудаленных от этих прямых. Если уравнения заданных прямых  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  ( $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$ , т. е. прямые не параллельны), то для всякой точки  $M(\bar{x}; \bar{y})$ , лежащей на одной из биссектрис, имеем (используя формулу для определения расстояния от точки до прямой):

$$\frac{|A_1\bar{x} + B_1\bar{y} + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2\bar{x} + B_2\bar{y} + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Поскольку  $M(\bar{x}; \bar{y})$  — произвольная точка биссектрисы, ее можно обозначать просто через  $M(x, y)$ . Учитывая, что выражения, стоящие в последнем равенстве под знаком абсолютной величины, могут иметь разные знаки, получаем для одной из биссектрис уравнение

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

а для другой — уравнение

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Таким образом, уравнения обеих биссектрис можно записать в виде

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

Теперь решим поставленную конкретную задачу. Заменяя  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  их значениями из уравнений заданных прямых, получим

$$\frac{x+y-5}{\sqrt{1+1}} \pm \frac{7x-y-19}{\sqrt{49+1}} = 0, \text{ т. е. } 5(x+y-5) \pm (7x-y-19) = 0.$$

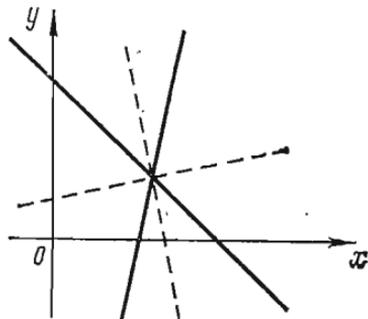


Рис. 8

Уравнение одной из биссектрис записывается в виде

$$5(x+y-5) + (7x-y-19) = 0, \text{ т. е. } 3x+y-11=0,$$

а уравнение другой — в виде

$$5(x+y-5) - (7x-y-19) = 0, \text{ т. е. } x-3y+3=0. \blacktriangle$$

93. Даны вершины треугольника:  $A(1; 1)$ ,  $B(10; 13)$ ,  $C(13; 6)$ . Составить уравнение биссектрисы угла  $A$ .

$\Delta$  Воспользуемся другим (по сравнению с решением предыдущей задачи) способом составления уравнения биссектрисы.

Пусть  $D$  — точка пересечения биссектрисы со стороной  $BC$ . Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что  $|BD| : |DC| = |AB| : |AC|$ .

Но  $|AB| = \sqrt{(10-1)^2 + (13-1)^2} = 15$ ,  $|AC| = \sqrt{(13-1)^2 + (6-1)^2} = 13$ . Следовательно,  $\lambda = |BD| : |DC| = 15/13$ . Так как известно отношение, в котором точка  $D$  делит отрезок  $BC$ , то координаты точки  $D$  определяются по формулам

$$x = \frac{10 + (15/13) \cdot 13}{1 + 15/13}, \quad y = \frac{13 + (15/13) \cdot 6}{1 + 15/13},$$

или  $x = 325/28$ ,  $y = 259/28$ , т. е.  $D(325/28; 259/28)$ . Задача сводится к составлению уравнения прямой, проходящей через точки  $A$  и  $D$ :

$$\frac{y-1}{259/28-1} = \frac{x-1}{325/28-1}, \text{ т. е. } 7x-9y+2=0. \blacktriangle$$

94. Даны уравнения высот треугольника  $ABC$ :  $x+y-2=0$ ,  $9x-3y-4=0$  и координаты вершины  $A(2; 2)$ . Составить уравнения сторон треугольника.

$\Delta$  Легко убедиться в том, что вершина  $A$  не лежит ни на одной из заданных высот: ее координаты не удовлетворяют уравнениям этих высот.

Пусть  $9x-3y-4=0$  — уравнение высоты  $BB_1$  и  $x+y-2=0$  — уравнение высоты  $CC_1$ . Составим уравнение стороны  $AC$ , рассматривая ее как прямую, проходящую через точку  $A$  и перпендикулярную высоте  $BB_1$ . Так как угловой коэффициент высоты  $BB_1$  равен 3, то угловой коэффициент стороны  $AC$  равен  $-1/3$ , т. е.  $k_{AC} = -1/3$ . Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через данную точку и имеющей данный угловой коэффициент, получим уравнение стороны  $AC$ :

$$y-2 = (-1/3)(x-2), \text{ или } x+3y-8=0.$$

Аналогично получаем  $k_{CC_1} = -1$ ,  $k_{AB} = 1$ , и уравнение стороны  $AB$  имеет вид

$$y-2 = x-2, \text{ т. е. } y=x.$$

Решив совместно уравнения прямых  $AB$  и  $BB_1$ , а также прямых  $AC$  и  $CC_1$ , найдем координаты вершин треугольника:  $B(2/3; 2/3)$  и  $C(-1; 3)$ . Остается составить уравнение стороны  $BC$ :

$$\frac{y-2/3}{3-2/3} = \frac{x-2/3}{-1-2/3}, \text{ т. е. } 7x+5y-8=0. \blacktriangle$$

95. Составить уравнения прямых, проходящих через точку  $M(5; 1)$  и образующих с прямой  $2x+y-4=0$  угол  $\pi/4$  (рис. 9).

$\Delta$  Пусть угловой коэффициент одной из искомых прямых равен  $k$ . Угловой коэффициент заданной прямой равен  $-2$ . Так как угол между этими пря-

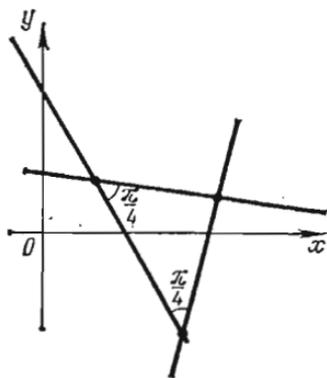


Рис. 9

мыми равен  $\pi/4$ , то

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \left| \frac{k+2}{1-2k} \right|, \text{ т. е. } 1 = \left| \frac{k+2}{1-2k} \right|,$$

откуда

$$\frac{k+2}{1-2k} = 1 \text{ и } \frac{k+2}{1-2k} = -1.$$

Решая каждое из полученных уравнений, находим  $k = -1/3$  и  $k = 3$ . Итак, уравнение одной из искоемых прямых запишется в виде  $y-1 = (-1/3)(x-5)$ , т. е.  $x+3y-8=0$ , а уравнение другой прямой в виде  $y-1 = 3(x-5)$ , т. е.  $3x-y-14=0$ . ▲

**96.** Найти прямую, принадлежащую пучку  $2x+3y+5+\lambda(x+8y+6)=0$  и проходящую через точку  $M(1; 1)$ .

△ Координаты точки  $M$  должны удовлетворять уравнению искомой прямой, поэтому для определения  $\lambda$  получаем уравнение

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 + \lambda(1 + 8 \cdot 1 + 6) = 0, \text{ или } 10 + 15\lambda = 0,$$

т. е.  $\lambda = -2/3$ . Подставив значение  $\lambda$  в уравнение пучка, получим уравнение искомой прямой:

$$2x + 3y + 5 - (2/3)(x + 8y + 6) = 0, \text{ или } 4x - 7y + 3 = 0. \blacktriangle$$

**97.** Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых  $3x-4y+7=0$  и  $5x+2y+3=0$  и параллельную оси ординат.

△ Прямая принадлежит пучку

$$3x - 4y + 7 + \lambda(5x + 2y + 3) = 0, \text{ т. е. } (3 + 5\lambda)x + (-4 + 2\lambda)y + (7 + 3\lambda) = 0.$$

Так как искомая параллельна оси ординат, то коэффициент при  $y$  должен быть равен нулю:  $-4 + 2\lambda = 0$ , т. е.  $\lambda = 2$ . Остается подставить найденное значение  $\lambda$  в уравнение пучка, откуда получаем искомое уравнение  $x+1=0$ . ▲

**98.** Даны стороны треугольника:  $x+2y+5=0$  ( $AB$ ),  $3x+y+1=0$  ( $BC$ ) и  $x+y+7=0$  ( $AC$ ). Составить уравнение высоты треугольника, опущенной на сторону  $AC$ .

△ Высота принадлежит пучку

$$x + 2y + 5 + \lambda(3x + y + 1) = 0, \text{ т. е. } (1 + 3\lambda)x + (2 + \lambda)y + (5 + \lambda) = 0.$$

Угловой коэффициент прямой пучка равен  $-(1+3\lambda)/(2+\lambda)$ ; так как угловой коэффициент прямой  $AC$  равен  $-1$ , то угловой коэффициент искомой высоты равен  $1$  и для определения  $\lambda$  получаем уравнение  $-(1+3\lambda)/(2+\lambda) = 1$ . Отсюда  $1+3\lambda+2+\lambda=0$ , т. е.  $\lambda = -3/4$ . Подставив найденное значение  $\lambda$  в уравнение пучка, получим искомое уравнение высоты:

$$\left(1 - \frac{9}{4}\right)x + \left(2 - \frac{3}{4}\right)y + \left(5 - \frac{3}{4}\right) = 0, \text{ т. е. } 5x - 5y - 17 = 0. \blacktriangle$$

**99.** Даны вершины треугольника  $ABC$ :  $A(0; 2)$ ,  $B(7; 3)$  и  $C(1; 6)$ .

Определить  $\widehat{BAC} = \alpha$ .

**100.** Даны стороны треугольника:  $x+y-6=0$ ,  $3x-5y+14=0$  и  $5x-3y-14=0$ . Составить уравнения его высот.

**101.** Составить уравнения биссектрис углов между прямыми  $3x+4y-20=0$  и  $8x+6y-5=0$ .

**102.** Даны вершины треугольника:  $A(0; 0)$ ,  $B(-1; -3)$  и  $C(-5; -1)$ . Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам.

103. Составить уравнения прямых, проходящих через точку  $M(2; 7)$  и образующих с прямой  $AB$ , где  $A(-1; 7)$  и  $B(8; -2)$ , углы  $45^\circ$ .
104. Определить расстояние от точки  $M(2; -1)$  до прямой, отсекающей на осях координат отрезки  $a=8$ ,  $b=6$ .
105. В треугольнике с вершинами  $A(3/2; 1)$ ,  $B(1; 5/3)$ ,  $C(3; 3)$  найти длину высоты, проведенной из вершины  $C$ .
106. При каком значении  $m$  прямые  $7x-2y-5=0$ ,  $x+7y-8=0$  и  $mx+my-8=0$  пересекаются в одной точке?
107. Даны середины сторон треугольника:  $A_1(-1; -1)$ ,  $B_1(1; 9)$  и  $C_1(9; 1)$ . Составить уравнения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
108. Найти острый угол, образованный с осью ординат прямой, проходящей через точки  $A(2; \sqrt{3})$  и  $B(3; 2\sqrt{3})$ .
109. Точки  $A(1; 2)$  и  $C(3; 6)$  являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты двух других вершин квадрата.
110. На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от прямой  $8x+15y+10=0$  равно 1.
111. Даны вершины треугольника:  $A(1; 1)$ ,  $B(4; 5)$  и  $C(13; -4)$ . Составить уравнения медианы, проведенной из вершины  $B$ , и высоты, опущенной из вершины  $C$ . Вычислить площадь треугольника.
112. Найти прямые, принадлежащие пучку  $2x+3y+6+\lambda(x-5y-6)=0$  и перпендикулярные основным прямым пучка.
113. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых  $x+6y+5=0$ ,  $3x-2y+1$  и через точку  $M(-4/5; 1)$ .
114. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых  $x+2y+3=0$ ,  $2x+3y+4=0$  и параллельную прямой  $5x+8y=0$ .
115. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых  $3x-y-1=0$ ,  $x+3y+1=0$  и параллельную оси абсцисс.
116. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых  $5x+3y+10=0$ ,  $x+y-15=0$  и через начало координат.
117. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых  $x+2y+1=0$ ,  $2x+y+2=0$  и образующую угол  $135^\circ$  с осью абсцисс.
118. Составить уравнения прямых, проходящих через точку  $M(a; b)$  и образующих с прямой  $x+y+c=0$  угол  $45^\circ$ .
119. Даны стороны треугольника:  $x-y=0$  ( $AB$ ),  $x+y-2=0$  ( $BC$ ),  $y=0$  ( $AC$ ). Составить уравнения медианы, проходящей через вершину  $B$ , и высоты, проходящей через вершину  $A$ .
120. Показать, что треугольник со сторонами  $x+y\sqrt{3}+1=0$ ,  $x\sqrt{3}+y+1=0$  и  $x-y-10=0$  равнобедренный. Найти угол при его вершине.
121. Даны последовательные вершины параллелограмма:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 3)$ ,  $C(7; 1)$ . Найти угол между его диагоналями и показать, что этот параллелограмм является прямоугольником.
122. Даны стороны треугольника:  $x-y+2=0$  ( $AB$ ),  $x=2$  ( $BC$ ),

$x + y - 2 = 0$  (AC). Составить уравнение прямой, проходящей через вершину  $B$  и через точку на стороне  $AC$ , делящую ее (считая от вершины  $A$ ) в отношении 1:3.

123. Показать, что треугольник с вершинами  $A(1; 1)$ ,  $B(2; 1 + \sqrt{3})$ ,  $C(3; 1)$  равносторонний, и вычислить его площадь.

124. Показать, что треугольник, стороны которого заданы уравнениями с целыми коэффициентами, не может быть равносторонним.

125. Дана вершина треугольника  $A(3; 9)$  и уравнения медиан:  $y - 6 = 0$  и  $3x - 4y + 9 = 0$ . Найти координаты двух других вершин.

126. Составить уравнение гипотенузы прямоугольного треугольника, проходящей через точку  $M(2; 3)$ , если катеты треугольника расположены на осях координат, а площадь треугольника равна 12 кв. ед.

127. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой  $4x + 3y - 12 = 0$ , концы которого лежат на осях координат.

### § 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**1. Окружность.** Окружность — это множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Если  $r$  — радиус окружности, а точка  $C(a; b)$  — ее центр, то уравнение окружности имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (1)$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то последнее уравнение примет вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Если в левой части уравнения (1) раскрыть скобки, то получится уравнение вида

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0, \quad (2)$$

где  $l = -2a$ ,  $m = -2b$ ,  $n = a^2 + b^2 - r^2$ .

В общем случае уравнение (2) определяет окружность, если  $l^2 + m^2 - 4n > 0$ .

Если  $l^2 + m^2 - 4n = 0$ , то указанное уравнение определяет точку  $(-l/2; -m/2)$ , а если  $l^2 + m^2 - 4n < 0$ , то оно не имеет геометрического смысла. В этом случае говорят, что уравнение определяет мнимую окружность.

Полезно помнить, что уравнение окружности содержит старшие члены  $x^2$  и  $y^2$  с равными коэффициентами и в нем отсутствует член с произведением  $x$  на  $y$ .

Взаимное расположение точки  $M(x_1; y_1)$  и окружности  $x^2 + y^2 = r^2$  определяется такими условиями: если  $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ , то точка  $M$  лежит на окружности; если  $x_1^2 + y_1^2 > r^2$ , то точка  $M$  лежит вне окружности, и если  $x_1^2 + y_1^2 < r^2$ , то точка  $M$  лежит внутри окружности.

128. Найти координаты центра и радиус окружности  $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$ .

△ Разделив уравнение на 2 и сгруппировав члены уравнения, получим  $x^2 - 4x + y^2 + (5/2)y = 2$ . Дополним выражения  $x^2 - 4x$  и  $y^2 + (5/2)y$  до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 4 и ко второму  $(5/4)^2$  (одновременно к правой части прибавляется сумма этих чисел):

$$(x^2 - 4x + 4) + \left( y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16} \right) = 2 + 4 + \frac{25}{16},$$

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}.$$

Таким образом, координаты центра окружности  $a=2$ ,  $b=-5/4$ , а радиус окружности  $r=11/4$ . ▲

**129.** Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданы уравнениями  $9x - 2y - 41 = 0$ ,  $7x + 4y + 7 = 0$ ,  $x - 3y + 1 = 0$ .

△ Найдем координаты вершин треугольника, решив совместно три системы уравнений:

$$\begin{cases} 9x - 2y - 41 = 0, \\ 7x + 4y + 7 = 0; \end{cases} \begin{cases} 9x - 2y - 41 = 0, \\ x - 3y + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} 7x + 4y + 7 = 0, \\ x - 3y + 1 = 0. \end{cases}$$

В результате получим  $A(3; -7)$ ,  $B(5; 2)$ ,  $C(-1; 0)$ .

Пусть искомое уравнение окружности имеет вид  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ . Для нахождения  $a$ ,  $b$  и  $r$  напишем три равенства, подставив в искомое уравнение вместо текущих координат координаты точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$(3-a)^2 + (-7-b)^2 = r^2; \quad (5-a)^2 + (2-b)^2 = r^2; \quad (-1-a)^2 + b^2 = r^2.$$

Исключая  $r^2$ , приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} (3-a)^2 + (-7-b)^2 = (5-a)^2 + (2-b)^2, \\ (3-a)^2 + (-7-b)^2 = (-1-a)^2 + b^2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4a + 18b = -29, \\ 8a - 14b = 57. \end{cases}$$

Отсюда  $a=3,1$ ,  $b=-2,3$ . Значение  $r^2$  находим из уравнения  $(-1-a)^2 + b^2 = r^2$ , т. е.  $r^2=22,1$ . Итак, искомое уравнение записывается в виде  $(x-3,1)^2 + (y+2,3)^2 = 22,1$ . ▲

**130.** Составить уравнение окружности, проходящей через точки  $A(5; 0)$  и  $B(1; 4)$ , если ее центр лежит на прямой  $x + y - 3 = 0$ .

△ Найдем координаты точки  $M$  — середины хорды  $AB$ ; имеем  $x_M = (5+1)/2 = 3$ ,  $y_M = (4+0)/2 = 2$ , т. е.  $M(3; 2)$ . Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AB$ . Уравнение прямой  $AB$  имеет вид

$$(y-0)/(4-0) = (x-5)/(1-5), \text{ т. е. } x + y - 5 = 0.$$

Так как угловой коэффициент этой прямой есть  $-1$ , то угловой коэффициент перпендикуляра к ней равен  $1$ , а уравнение этого перпендикуляра  $y-2=1 \times (x-3)$ , т. е.  $x-y-1=0$ .

Очевидно, что центр окружности  $C$  есть точка пересечения прямой  $AB$  с указанным перпендикуляром, т. е. координаты центра определяются путем решения системы уравнений  $x+y-5=0$ ,  $x-y-1=0$ . Следовательно,  $x=2$ ,  $y=1$ , т. е.  $C(2; 1)$ . Радиус окружности равен длине отрезка  $CA$ , т. е.  $r = \sqrt{(5-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$ . Итак, искомое уравнение имеет вид  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$ . ▲

**131.** Составить уравнение хорды окружности  $x^2 + y^2 = 49$ , делящейся в точке  $A(1; 2)$  пополам.

△ Составим уравнение диаметра окружности, проходящего через точку  $A(1; 2)$ . Это уравнение имеет вид  $y=2x$ . Искомая хорда перпендикулярна диаметру и проходит через точку  $A$ , т. е. ее уравнение  $y-2 = (-1/2)(x-1)$ , или  $x+2y-5=0$ . ▲

**132.** Найти уравнение окружности, симметричной с окружностью  $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$  относительно прямой  $x - y - 3 = 0$ .

△ Приведем уравнение данной окружности к каноническому виду  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ ; центр окружности находится в точке  $C(1; 2)$  и ее радиус равен  $1$ .

Найдем координаты центра  $C_1(x_1; y_1)$  симметричной окружности, для чего через точку  $C(1; 2)$  проведем прямую, перпендикулярную прямой  $x - y - 3 = 0$ ; ее уравнение  $y - 2 = k(x - 1)$ , где  $k = -1/1 = -1$ , откуда  $y - 2 = -x + 1$ , или  $x + y - 3 = 0$ .

Решая совместно уравнения  $x - y - 3 = 0$  и  $x + y - 3 = 0$ , получим  $x = 3, y = 0$ , т. е. проекция точки  $C(1; 2)$  на данную прямую — точка  $P(3; 0)$ . Координаты же симметричной точки получим по формулам координат середины отрезка:  $3 = (1 + x_1)/2, 0 = (2 + y_1)/2$ ; таким образом,  $x_1 = 5, y_1 = -2$ . Значит, точка  $C_1(5; -2)$  — центр симметричной окружности, а уравнение этой окружности имеет вид  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$ . ▲

**133.** Найти множество середин хорд окружности  $x^2 + y^2 = 4(y + 1)$ , проведенных через начало координат.

△ Уравнение множества хорд имеет вид  $y = kx$ . Выразим координаты точки пересечения хорд с окружностью через  $k$ , для чего решим систему уравнений  $y = kx$  и  $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$ . Получим квадратное уравнение  $x^2(k^2 + 1) - 4kx - 4 = 0$ . Здесь  $x_1 + x_2 = 4k/(1 + k^2)$ . Но полусумма этих абсцисс дает абсциссу середины хорды, т. е.  $x = 2k/(1 + k^2)$ , а ордината середины хорды  $y = 2k^2/(1 + k^2)$ . Последние два равенства являются параметрическими уравнениями искомого множества точек.

Исключив из этих равенств  $k$  (для чего достаточно в соотношении  $x = 2k/(1 + k^2)$  положить  $k = y/x$ ), получим  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ . Таким образом, искомым множеством также является окружность. ▲

**134.** Определить координаты центров и радиусы окружностей: 1)  $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ ; 2)  $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$ ; 3)  $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 54 = 0$ .

**135.** Найти угол между радиусами окружности  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ , проведенными в точки ее пересечения с осью  $Oy$ .

**136.** Составить уравнение окружности, проходящей через точки  $A(1; 2), B(0; -1)$  и  $C(-3; 0)$ .

**137.** Составить уравнение окружности, проходящей через точки  $A(7; 7)$  и  $B(-2; 4)$ , если ее центр лежит на прямой  $2x - y - 2 = 0$ .

**138.** Составить уравнение общей хорды окружностей  $x^2 + y^2 = 16$  и  $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ .

**139.** Составить уравнения касательных к окружности  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ , проведенных в точках пересечения окружности с прямой  $x - y + 2 = 0$ .

**140.** Дана окружность  $x^2 + y^2 = 4$ . Из точки  $A(-2; 0)$  проведена хорда  $AB$ , которая продолжена на расстояние  $|BM| = |AB|$ . Найти множество точек  $M$ .

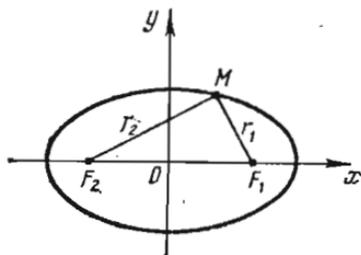


Рис. 10

**2. Эллипс.** Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через  $2a$ ), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Если оси координат расположены по отношению к эллипсу так, как на рис. 10, а фокусы эллипса находятся на оси  $Ox$  на равных расстояниях от начала координат в точках  $F_1(c; 0)$  и  $F_2(-c; 0)$ , то получится *простейшее (каноническое) уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Здесь,  $a$  — большая,  $b$  — малая полуось эллипса, причем  $a$ ,  $b$  и  $c$  ( $c$  — половина расстояния между фокусами) связаны соотношением  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом*  $e = c/a$  (так как  $c < a$ , то  $e < 1$ ).

Расстояния некоторой точки эллипса  $M$  от его фокусов называются *фокальными радиусами-векторами* этой точки. Их обычно обозначают  $r_1$  и  $r_2$  (в силу определения эллипса для любой его точки  $r_1 + r_2 = 2a$ ).

В частном случае, когда  $a = b$  ( $c = 0$ ,  $e = 0$ , фокусы сливаются в одной точке — центре), эллипс превращается в окружность (с уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ ).

Взаимное расположение точки  $M(x_1; y_1)$  и эллипса  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  определяется условиями: если  $x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 = 1$ , то точка  $M$  лежит на эллипсе; если  $x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 > 1$ , то точка  $M$  лежит вне эллипса; если  $x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 < 1$ , то точка  $M$  лежит внутри эллипса.

Фокальные радиусы-векторы выражаются через абсциссу точки эллипса по формулам  $r_1 = a - ex$  (правый фокальный радиус-вектор) и  $r_2 = a + ex$  (левый фокальный радиус-вектор).

**141.** Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки  $M(5/2; \sqrt{6}/4)$  и  $N(-2; \sqrt{15}/5)$ .

△ Пусть  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  — искомое уравнение эллипса. Этому уравнению должны удовлетворять координаты данных точек. Следовательно,

$$\frac{25}{4a^2} + \frac{3}{8b^2} = 1, \quad \frac{4}{a^2} + \frac{3}{5b^2} = 1.$$

Отсюда находим  $a^2 = 10$ ,  $b^2 = 1$ . Итак, уравнение эллипса имеет вид  $x^2/10 + y^2 = 1$ . ▲

**142.** На эллипсе  $x^2/25 + y^2/9 = 1$  найти точку, разность фокальных радиусов-векторов которой равна 6,4.

**143.** Найти длину перпендикуляра, восстановленного из фокуса эллипса  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  к большой оси до пересечения с эллипсом.

**144.** Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса  $x^2/25 + y^2/16 = 1$ .

**145.** Эллипс, отнесенный к осям, проходит через точку  $M(1; 1)$  и имеет эксцентриситет  $e = 3/5$ . Составить уравнение эллипса.

**146.** Как расположены относительно эллипса  $x^2/50 + y^2/32 = 1$  точки  $M(7; 1)$ ,  $N(-5; -4)$ ,  $P(4; 5)$ ?

**147.** Найти эксцентриситет эллипса, если фокальный отрезок виден из верхней вершины под углом  $\alpha$ .

**148.** На прямой  $x + 5 = 0$  найти точку, одинаково удаленную от левого фокуса и верхней вершины эллипса  $x^2/20 + y^2/4 = 1$ .

**149.** Пользуясь определением эллипса, составить его уравнение, если известно, что точки  $F_1(0; 0)$  и  $F_2(1; 1)$  являются фокусами эллипса, а длина большой оси равна 2.

**150.** Составить уравнение множества точек, расстояния которых от точки  $A(0; 1)$  в два раза меньше расстояния до прямой  $y - 4 = 0$ .

**151.** Концы отрезка  $AB$  постоянной длины  $a$  скользят по сторонам прямого угла. Найти уравнение кривой, описываемой точкой  $M$ , делящей этот отрезок в отношении 1:2.

**3. Гипербола.** Гиперболой называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через  $2a$ ), причем эта постоян-

ная меньше расстояния между фокусами. Если поместить фокусы гиперболы в точках  $F_1(c; 0)$  и  $F_2(-c; 0)$ , то получится каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

где  $b^2 = c^2 - a^2$ . Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат. Точки  $A_1(a; 0)$  и  $A_2(-a; 0)$  называются *вершинами* гиперболы. Отрезок  $A_1A_2$  такой, что  $|A_1A_2| = 2a$ , называется *действительной осью* гиперболы, а отрезок  $B_1B_2$  такой, что  $|B_1B_2| = 2b$ , — *мнимой осью* (рис. 11).

Прямая называется *асимптотой* гиперболы, если расстояние точки  $M(x; y)$  гиперболы от этой прямой стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ . Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых  $y = \pm (b/a)x$ .

Для построения асимптот гиперболы строят осевой прямоугольник гиперболы со сторонами  $x = a$ ,  $x = -a$ ,  $y = b$ ,  $y = -b$ . Прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы. На рис. 11 указано взаимное расположение гиперболы и ее асимптот. Отношение  $e = c/a > 1$  называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Фокальные радиусы-векторы правой ветви гиперболы:  $r_1 = ex - a$  (правый фокальный радиус-вектор),  $r_2 = ex + a$  (левый фокальный радиус-вектор).

Фокальные радиусы-векторы левой ветви гиперболы:  $r_1 = -ex + a$  (правый фокальный радиус-вектор),  $r_2 = -ex - a$  (левый фокальный радиус-вектор).

Если  $a = b$ , то уравнение гиперболы принимает вид

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Такая гипербола называется *равнобочной*. Ее асимптоты образуют прямой угол. Если за оси координат принять асимптоты равнобочной гиперболы, то ее уравнение примет вид  $xy = m$  ( $m = \pm a^2/2$ ; при  $m > 0$  гипербола расположена в I и III четвертях, при  $m < 0$  — во II и IV четвертях). Так как уравнение  $xy = m$  можно переписать в виде  $y = m/x$ , то равнобочная гипербола является графиком обратной пропорциональной зависимости между величинами  $x$  и  $y$ .

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \left( \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \right) \quad (2)$$

также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок оси  $Oy$  длины  $2b$ .

Две гиперболы  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  и  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$  имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот. Такие две гиперболы называют *сопряженными*.

**152.** На правой ветви гиперболы  $x^2/16 - y^2/9 = 1$  найти точку, расстояние которой от правого фокуса в два раза меньше ее расстояния от левого фокуса.

$\Delta$  Для правой ветви гиперболы фокальные радиусы-векторы определяются по формулам  $r_1 = ex - a$  и  $r_2 = ex + a$ . Следовательно, имеем уравнение  $ex + a = 2(ex - a)$ , откуда  $x = 3a/e$ ; здесь  $a = 4$ ,  $e = c/a = \sqrt{a^2 + b^2}/a = \sqrt{16 + 9}/4 = 5/4$ , т. е.  $x = 9,6$ .

Ординату находим из уравнения гиперболы:

$$y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{x^2 - 16} = \pm \frac{3}{4} \sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 - 16} = \pm \frac{3}{5} \sqrt{119}.$$

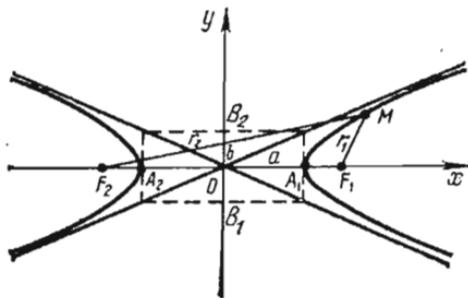


Рис. 11

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две точки:  $M_1(9,6; 0,6\sqrt{119})$  и  $M_2(9,6; -0,6\sqrt{119})$ . ▲

153. Даны точки  $A(-1; 0)$  и  $B(2; 0)$ . Точка  $M$  движется так, что в треугольнике  $AMB$  угол  $\hat{B}$  остается вдвое больше угла  $\hat{A}$ . Найти уравнение кривой, которую опишет точка  $M$ .

△ Взяв точку  $M$  с координатами  $x$  и  $y$ , выразим  $\text{tg } \hat{B}$  и  $\text{tg } \hat{A}$  через координаты точек  $A, B$  и  $M$ :

$$\text{tg } \hat{B} = -\frac{y}{x-2} = \frac{y}{2-x}, \quad \text{tg } \hat{A} = \frac{y}{x+1}.$$

Согласно условию, получаем уравнение  $\text{tg } \hat{B} = \text{tg } 2\hat{A}$ , т. е.  $\text{tg } \hat{B} = 2\text{tg } \hat{A} / (1 - \text{tg}^2 \hat{A})$ . Подставив в это равенство найденные для  $\text{tg } \hat{B}$  и  $\text{tg } \hat{A}$  выражения, приходим к уравнению

$$\frac{y}{2-x} = \frac{2y/(x+1)}{1-y^2/(1+x)^2};$$

после сокращения на  $y$  ( $y \neq 0$ ) и упрощения получаем  $x^2 - y^2/3 = 1$ . Искомая кривая — гипербола. ▲

154. Эксцентриситет гиперболы равен  $\sqrt{2}$ . Составить простейшее уравнение гиперболы, проходящей через точку  $M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$ .

△ Согласно определению эксцентриситета, имеем  $c/a = \sqrt{2}$ , или  $c^2 = 2a^2$ . Но  $c^2 = a^2 + b^2$ ; следовательно,  $a^2 + b^2 = 2a^2$ , или  $a^2 = b^2$ , т. е. гипербола равнобочная.

Другое равенство получим из условия нахождения точки  $M$  на гиперболе, т. е.  $(\sqrt{3})^2/a^2 - (\sqrt{2})^2/b^2 = 1$ , или  $3/a^2 - 2/b^2 = 1$ . Поскольку  $a^2 = b^2$ , получим  $3/a^2 - 2/a^2 = 1$ , т. е.  $a^2 = 1$ .

Таким образом, уравнение искомой гиперболы имеет вид  $x^2 - y^2 = 1$ . ▲

155. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку  $M(9; 8)$ , если асимптоты гиперболы имеют уравнения  $y = \pm(2\sqrt{2}/3)x$ .

156. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса  $x^2/8 + y^2/5 = 1$ .

157. Через точку  $M(0; -1)$  и правую вершину гиперболы  $3x^2 - 4y^2 = 12$  проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

158. Дана гипербола  $x^2 - y^2 = 8$ . Найти софокусный эллипс, проходящий через точку  $M(4; 6)$ .

159. Дан эллипс  $9x^2 + 25y^2 = 1$ . Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

160. Угол между асимптотами гиперболы равен  $60^\circ$ . Вычислить эксцентриситет гиперболы.

161. На левой ветви гиперболы  $x^2/64 - y^2/36 = 1$  найти точку, правый фокальный радиус-вектор которой равен 18.

162. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2 и фокусы совпадают с фокусами эллипса  $x^2/25 + y^2/9 = 1$ .

163. Найти фокальные радиусы-векторы гиперболы  $x^2/16 - y^2/9 = 1$  в точках пересечения ее с окружностью  $x^2 + y^2 = 91$ .

164. Доказать, что длина перпендикуляра, опущенного из фокуса на одну из асимптот гиперболы, равна мнимой полуоси.

165. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы  $x^2 - y^2 = 1$  до ее асимптот есть величина постоянная.

166. Найти уравнение множества точек, равноотстоящих от окружности  $x^2 + 4x + y^2 = 0$  и от точки  $M(2; 0)$ .

4. **Парабола.** *Параболой* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*. Если директрисой параболы является прямая  $x = -p/2$ , а фокусом — точка  $F(p/2; 0)$ , то уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \quad (1)$$

Эта парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс (рис. 12, где  $p > 0$ ).

Уравнение

$$x^2 = 2py \quad (2)$$

является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат. При  $p > 0$  параболы (1) и (2) обращены в положительную сторону соответствующей оси, а при  $p < 0$  — в отрицательную сторону.

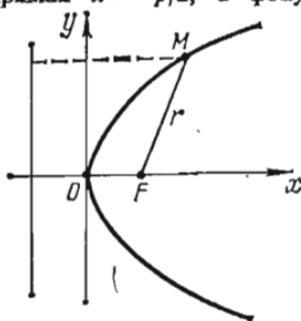


Рис. 12

Длина фокального радиуса-вектора параболы  $y^2 = 2px$  определяется по формуле  $r = x + p/2$  ( $p > 0$ ).

167. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси  $Ox$ , с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси  $Ox$ , равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

△ Так как известны длина хорды и расстояние ее от вершины, то, следовательно, известны координаты конца этой хорды — точки  $M$ , лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид  $y^2 = 2px$ ; полагая в нем  $x = 6$ ,  $y = 8$ , находим  $8^2 = 2p \cdot 6$ , откуда  $2p = 32/3$ . Итак, уравнение искомой параболы  $y^2 = 32x/3$ . ▲

168. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси  $Oy$  и отсекающей на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной  $8\sqrt{2}$ .

△ Искомое уравнение параболы  $x^2 = 2py$ , уравнение биссектрисы  $y = x$ . Таким образом, получаем точки пересечения параболы с биссектрисой:  $O(0; 0)$  и  $M(2p; 2p)$ . Длина хорды определяется как расстояние между двумя точками:  $8\sqrt{2} = \sqrt{4p^2 + 4p^2}$ , откуда  $2p = 8$ . Следовательно, искомое уравнение имеет вид  $x^2 = 8y$ . ▲

169. Составить простейшее уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой  $4x - 3y - 4 = 0$  с осью  $Ox$ .

170. На параболе  $y^2 = 8x$  найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

171. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси  $Ox$  и отсекающей от прямой  $y = x$  хорду длиной  $4\sqrt{2}$ .

172. Парабола  $y^2 = 2x$  отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду, длина которой равна  $3/4$ . Составить уравнение этой прямой.

173. Составить простейшее уравнение параболы, если длина хорды, перпендикулярной оси симметрии и делящей пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1.

174. На параболу  $y^2 = 32x$  найти точку, расстояние которой от прямой  $4x + 3y + 10 = 0$  равно 2.

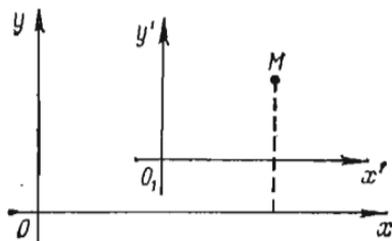


Рис. 13

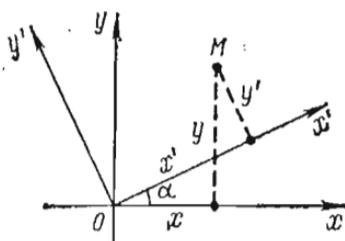


Рис. 14

175. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси  $Ox$  и проходящей через точку  $M(4; 2)$ ; определить угол  $\alpha$  между фокальным радиусом-вектором этой точки и осью  $Ox$ .

#### § 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ И УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Преобразование координат. При переходе от системы координат  $xOy$  к новой системе  $x'O_1y'$  (направление осей координат прежнее, за новое начало координат принята точка  $O_1(a; b)$ ; рис. 13) связь между старыми и новыми координатами некоторой точки  $M$  плоскости определяется следующими формулами:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b; \quad (1)$$

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \quad (2)$$

С помощью формул (1) старые координаты выражаются через новые, а с помощью формул (2) — новые через старые.

При повороте осей координат на угол  $\alpha$  (начало координат прежнее, причем  $\alpha$  отсчитывается против часовой стрелки; рис. 14) зависимость между старыми координатами  $x, y$  и новыми  $x', y'$  определяется следующими формулами:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha; \quad (3)$$

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad (4)$$

176. Сделан параллельный перенос осей координат, причем новое начало расположено в точке  $O_1(3; -4)$ . Известны старые координаты точки  $M(7; 8)$ . Определить новые координаты этой же точки.

△ Здесь  $a = 3, b = -4, x = 7, y = 8$ . По формулам (2) находим  $x' = 7 - 3 = 4, y' = 8 - (-4) = 12$ . ▲

177. На плоскости  $xOy$  дана точка  $M(4; 3)$ . Система координат повернута вокруг начала координат так, что новая ось прошла через точку  $M$ . Определить старые координаты точки  $A$ , если известны ее новые координаты  $x' = 5$ ,  $y' = 5$ .

△ Так как  $|OM| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ , то  $\sin \alpha = 3/5$ ,  $\cos \alpha = 4/5$ ; тогда формулы (3) преобразования координат для данной задачи примут вид  $x = (4/5)x' - (3/5)y'$ ,  $y = (3/5)x' + (4/5)y'$ . Полагая  $x' = y' = 5$ , находим  $x = 1$ ,  $y = 7$ . ▲

178. Система координат повернута на угол  $\alpha = \pi/6$ . Определить новые координаты точки  $M(\sqrt{3}; 3)$ .

△ Используя формулы (4), получим

$$\begin{aligned}x' &= \sqrt{3} \cos(\pi/6) + 3 \sin(\pi/6) = 3/2 + 3/2 = 3, \\y' &= -\sqrt{3} \sin(\pi/6) + 3 \cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2 + 3\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

179. Дана точка  $M(9/2; 11/2)$ . За новые координатные оси приняты прямые  $2x - 1 = 0$  (ось  $O_1y'$ ),  $2y - 5 = 0$  (ось  $O_1x'$ ). Найти координаты точки  $M$  в новой системе координат.

180. Дана точка  $M(4\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$ . За новую ось абсцисс принята прямая  $y = 2x$ , а за новую ось ординат — прямая  $y = -0,5x$ , причем новые оси координат образуют с соответствующими старыми осями острые углы. Найти координаты точки  $M$  в новой системе.

2. Парабола  $y = Ax^2 + Bx + C$  и гипербола  $y = (kx + l)/(px + q)$ . Уравнение вида

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

преобразованием координат при параллельном переносе осей, т. е. по формулам  $x = x' + a$ ,  $y = y' + b$  ( $a$  и  $b$  — координаты нового начала,  $x'$  и  $y'$  — новые координаты), преобразуется к каноническому виду уравнения параболы.

Парабола, определяемая уравнением  $y = Ax^2 + Bx + C$ , имеет ось симметрии, параллельную оси  $Oy$  (аналогично, уравнение  $x = Ay^2 + By + C$  определяет параболу с осью симметрии, параллельной оси  $Ox$ ).

Дробно-линейная функция

$$y = (kx + l)/(px + q)$$

определяет равнобочную гиперболу, если  $kq - pl \neq 0$ ,  $p \neq 0$ ; преобразованием координат при параллельном переносе осей координат это уравнение преобразуется к каноническому виду уравнения равнобочной гиперболы  $xy = m$ , т. е. к уравнению равнобочной гиперболы, у которой оси координат являются асимптотами. При  $m > 0$  ветви гиперболы расположены в I и III четверти, а при  $m < 0$  — во II и IV четверти.

181. Привести к каноническому виду уравнение параболы  $y = 9x^2 - 6x + 2$ .

△ Заменяем  $x$  на  $x' + a$  и  $y$  на  $y' + b$ :

$$y' + b = 9(x' + a)^2 - 6(x' + a) + 2,$$

или

$$y' = 9x'^2 + 6x'(3a - 1) + (9a^2 - 6a + 2 - b).$$

Найдем такие значения  $a$  и  $b$ , при которых коэффициент при  $x'$  и свободный член обратятся в нуль:  $3a - 1 = 0$ ,  $9a^2 - 6a + 2 - b = 0$ , т. е.  $a = 1/3$ ,  $b = 1$ . Следовательно, каноническое уравнение параболы имеет вид  $x'^2 = (1/9)y'$ . Вершина параболы находится в точке  $O_1(1/3; 1)$  и  $p = 1/18$ .

Другой способ решения таких задач заключается в том, что заданное уравнение вида  $y = Ax^2 + Bx + C$  (или  $x = Ay^2 + By + C$ ) приводится к виду  $(x-a)^2 = 2p(y-b)$  [соответственно  $(y-b)^2 = 2p(x-a)$ ]. Тогда точка  $O_1(a; b)$  служит вершиной параболы, а знак параметра  $p$  определит, в какую сторону — положительную или отрицательную соответствующей оси ( $Oy$  или  $Ox$ ) — направлена параболы.

Так, уравнение  $y = 9x^2 - 6x + 2$  преобразуется следующим образом:

$$y = 9 \left( x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \right) - 1 + 2;$$

$$y - 1 = 9 \left( x - \frac{1}{3} \right)^2; \quad \left( x - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}(y - 1).$$

Отсюда снова получаем, что вершина параболы находится в точке  $O_1(1/3; 1)$ , параметр  $p = 1/18$ , а ветвь параболы направлена в положительную сторону оси  $Oy$ . ▲

182. Привести уравнение гиперболы  $y = (4x + 5)/(2x - 1)$  к виду  $x'y' = k$ . Найти уравнения асимптот гиперболы относительно первоначальной системы координат.

△ С помощью параллельного переноса осей координат преобразуем данное уравнение к виду

$$(y' + b)(2x' + 2a - 1) = 4x' + 4a + 5,$$

или

$$2x'y' + (2b - 4)x' + (2a - 1)y' = 4a + b - 2ab + 5.$$

Найдем  $a$  и  $b$  из условий  $2b - 4 = 0$  и  $2a - 1 = 0$ , т. е.  $a = 0,5$ ,  $b = 2$ . Тогда уравнение гиперболы в новой системе координат примет вид  $x'y' = 3,5$ . Асимптотами гиперболы служат новые оси координат, а поэтому их уравнения  $x' = 0,5$ ,  $y' = 2$ .

Другой способ решения таких задач заключается в том, что уравнение вида  $y = (kx + l)/(px + q)$  преобразуется к виду  $(x-a)(y-b) = m$ ; центр гиперболы находится в точке  $O_1(a; b)$ ; ее асимптотами служат прямые  $x = a$  и  $y = b$ , знак  $m$  по-прежнему определяет, в каких углах между асимптотами находятся ветви гиперболы.

Так, уравнение  $y = (4x + 5)/(2x - 1)$  преобразуется следующим образом:

$$2 \left( x - \frac{1}{2} \right) y - 4 \left( x - \frac{1}{2} + \frac{7}{4} \right) = 0;$$

$$(2x - 1)y - (4x + 5) = 0; \quad 2(x - 0,5)(y - 2) = 7.$$

Значит, уравнение гиперболы приведено к виду  $(x - 0,5)(y - 2) = 3,5$ ; центр гиперболы находится в точке  $O_1(0,5; 2)$ , ветви гиперболы расположены в I и III четвертях между ее асимптотами  $x - 0,5 = 0$ ,  $y - 2 = 0$ . ▲

183. Привести к каноническому виду уравнения парабол: 1)  $y = 4x - 2x^2$ ; 2)  $y = -x^2 + 2x + 2$ ; 3)  $x = -4y^2 + y$ ; 4)  $x = y^2 + 4y + 5$ .

184. Преобразовать уравнения гипербол к виду  $x'y' = m$ : 1)  $y = 2x/(4x - 1)$ ; 2)  $y = (2x + 3)/(3x - 2)$ ; 3)  $y = (10x + 2)/(5x + 4)$ ; 4)  $y = (4x + 3)/(2x + 1)$ .

3. Пятичленное уравнение кривой второго порядка. Уравнение второй степени вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(не содержащее члена  $xy$  с произведением координат) называется **пятичленным уравнением кривой второго порядка**. Оно определяет на плоскости  $xOy$  эллипс,

гиперболы или параболы (с возможными случаями распада и вырождения этих кривых) с осями симметрии, параллельными осям координат, в зависимости от знака произведения коэффициентов  $A$  и  $C$ .

1. Пусть  $AC > 0$ ; тогда определяемая этим уравнением кривая есть эллипс (действительный, мнимый или выродившийся в точку); при  $A=C$  эллипс превращается в окружность.

2. Пусть  $AC < 0$ ; тогда соответствующая кривая является гиперболой, которая может вырождаться в две пересекающиеся прямые, если левая часть уравнения распадается на произведение двух линейных множителей;

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2).$$

3. Пусть  $AC = 0$  (т. е. либо  $A = 0$ ,  $C \neq 0$ , либо  $C = 0$ ,  $A \neq 0$ ); тогда уравнение определяет параболу, которая может вырождаться в две параллельные прямые (действительные различные, действительные слившиеся или мнимые), если левая часть уравнения не содержит либо  $x$ , либо  $y$  (т. е. если уравнение имеет вид  $Ax^2 + 2Dx + F = 0$  или  $Cy^2 + 2Ey + F = 0$ ).

Вид кривой и расположение ее на плоскости легко устанавливаются преобразованием уравнения к виду  $A(x-x_0)^2 + C(y-y_0)^2 = f$  (в случае  $AC > 0$  или  $AC < 0$ ); по виду полученного уравнения обнаруживаются и случаи распада или вырождения эллипса и гиперболы.

В случае невырожденных кривых переносом начала координат в точку  $O_1(x_0; y_0)$  полученное уравнение эллипса или гиперболы можно привести к каноническому виду.

Случай  $AC = 0$  подробно рассмотрен в предыдущем параграфе, поскольку уравнение невырожденной параболы здесь может быть записано в виде  $y = a_1x^2 + b_1x + c$  или  $x = a_1y^2 + b_1y + c_1$ .

185. Какую линию определяет уравнение  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ ?

△ Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4; \quad -$$

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4;$$

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = -4 + 4 + 36; \quad 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку  $O'(1; 2)$ . Воспользуемся формулами преобразования координат:  $x = x' + 1$ ,  $y = y' + 2$ . Относительно новых осей уравнение кривой примет вид

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36, \quad \text{или} \quad x'^2/9 + y'^2/4 = 1.$$

Таким образом, заданная кривая является эллипсом. ▲

186. Какую линию определяет уравнение  $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$ ?

△ Преобразуем данное уравнение так:

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) - 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 44;$$

$$(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 44 + 1 - 36, \quad (x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 9.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку  $O'(-1; 2)$ . Формулы преобразования координат имеют вид  $x = x' - 1$ ,  $y = y' + 2$ . После преобразования координат получим уравнение

$$x'^2 - 9y'^2 = 9, \quad \text{или} \quad x'^2/9 - y'^2 = 1.$$

Кривая является гиперболой. Асимптотами этой гиперболы относительно новых осей служат прямые  $y' = \pm (1/3)x'$ . ▲

Установить, какие кривые определяются нижеследующими уравнениями. Построить чертежи.

187.  $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$ .

188.  $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$ .

$$189. \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0.$$

$$190. x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0.$$

$$191. x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0.$$

$$192. x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0.$$

$$193. 2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0.$$

$$194. x^2 - 6x + 8 = 0.$$

$$195. x^2 + 2x + 5 = 0.$$

4. Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка. Если кривая второго порядка задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

то, применив преобразование поворота осей координат с использованием формул  $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$ ,  $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$ , следует при надлежащем выборе  $\alpha$  освободиться в уравнении от члена с произведением координат.

Дальнейшие преобразования были рассмотрены в предыдущем разделе.

Случай распада кривой второго порядка на две прямые может быть легко установлен по исходному уравнению следующим образом: рассматривая уравнение как квадратное относительно  $y$  (предполагая, что коэффициент при  $y^2$  отличен от нуля), разрешают его относительно  $y$ ; если при этом под корнем окажется точный квадрат некоторого двучлена  $ax + b$ , то корень извлечется, и для  $y$  получатся два значения:  $y_1 = k_1x + b_1$ ;  $y_2 = k_2x + b_2$ . Это и покажет, что кривая распадается на две прямые.

Данное уравнение может быть разрешено и относительно  $x$ . Если в общем уравнении кривой второго порядка  $A=C=0$  (естественно, что  $B \neq 0$ ), то указанное уравнение определяет пару прямых тогда и только тогда, если  $B/D = 2E/F$ . В этом случае левая часть уравнения разлагается на линейные множители.

196. Показать, что уравнение  $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 25 = 0$  определяет совокупность двух прямых.

$\Delta$  Перепишем уравнение в виде  $(3x + 4y)^2 - 25 = 0$ . Разложив левую часть на множители, получаем  $(3x + 4y + 5)(3x + 4y - 5) = 0$ . Таким образом, заданное уравнение определяет прямые  $3x + 4y + 5 = 0$  и  $3x + 4y - 5 = 0$ .  $\blacktriangle$

197. Показать, что уравнение  $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 14x - 2y + 8 = 0$  определяет совокупность двух прямых.

$\Delta$  Перепишем уравнение в виде  $3y^2 - 2(4x - 1)y - (3x^2 - 14x + 8) = 0$ . Разрешим уравнение относительно  $y$ :

$$y = \frac{4x - 1 \pm \sqrt{(4x - 1)^2 + (9x^2 - 42x + 24)}}{3}, \text{ или } y = \frac{4x - 1 \pm (5x - 5)}{3}.$$

Получаем уравнения прямых  $y = 3x - 2$  и  $y = (-x + 4)/3$ . Эти уравнения можно записать в виде  $3x - y - 2 = 0$ ,  $x + 3y - 4 = 0$ .  $\blacktriangle$

198. Какая линия определяется уравнением  $xy + 2x - 4y - 8 = 0$ ?

$\Delta$  Запишем уравнение в виде  $x(y + 2) - 4(y + 2) = 0$ , или  $(x - 4)(y + 2) = 0$ . Таким образом, уравнение определяет две прямые  $x - 4 = 0$  и  $y + 2 = 0$ , одна из которых параллельна оси  $Ox$ , а другая параллельна оси  $Oy$ .  $\blacktriangle$

199. Привести к каноническому виду уравнение

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0.$$

△ 1. Преобразуем это уравнение, воспользовавшись формулами (3) п. 1 поворота осей координат. Имеем

$$5(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 4(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + \\ + 8(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 8(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 14(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + 5 = 0,$$

или

$$(5 \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha + 8 \sin^2 \alpha) x'^2 + (5 \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha + 8 \cos^2 \alpha) y'^2 + \\ + [6 \sin \alpha \cos \alpha + 4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] x' y' + (8 \cos \alpha + 14 \sin \alpha) x' + \\ + (14 \cos \alpha - 8 \sin \alpha) y' + 5 = 0.$$

Найдем  $\alpha$  из условия  $4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 6 \sin \alpha \cos \alpha = 0$ , т. е. приравняем нулю коэффициент при  $x' y'$ . Получаем уравнение  $2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha - 2 = 0$ . Отсюда  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_2 = -1/2$ .

Заметим, что эти значения  $\operatorname{tg} \alpha$  соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям. Поэтому, взяв  $\operatorname{tg} \alpha = 2$  вместо  $\operatorname{tg} \alpha = -1/2$ , мы только меняем ролями оси  $x'$  и  $y'$  (рис. 15).

Пусть  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ , тогда  $\sin \alpha = \pm 2/\sqrt{5}$ ,  $\cos \alpha = \pm 1/\sqrt{5}$ ; возьмем положительные значения  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ . Тогда уравнение принимает вид

$$9x'^2 + 4y'^2 + \frac{36}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y' + 5 = 0,$$

или

$$9 \left( x' + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + 4 \left( y' - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right)^2 = -5.$$

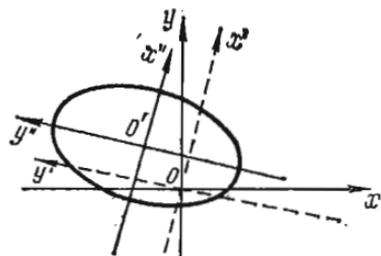


Рис. 15

2. Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$9 \left( x' + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + 4 \left( y' - \frac{1}{4\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{36}{5} + \frac{1}{20} - 5,$$

или

$$9 \left( x' + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + 4 \left( y' - \frac{1}{4\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Приняв за новое начало точку  $O'(-2/\sqrt{5}; 1/(4\sqrt{5}))$ , применим формулы преобразования координат  $x' = x'' - 2/\sqrt{5}$ ,  $y' = y'' + 1/(4\sqrt{5})$ ; получим  $9x''^2 + 4y''^2 = 9/4$ , или  $\frac{x''^2}{1/4} + \frac{y''^2}{9/16} = 1$  (уравнение эллипса). ▲

200. Привести к каноническому виду уравнение

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

△ 1. Преобразуем это уравнение, воспользовавшись формулами (3) п. 1 поворота осей координат:

$$6(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + 8(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 - \\ - 12(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) - 26(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + 11 = 0,$$

или

$$(6 \sin \alpha \cos \alpha + 8 \sin^2 \alpha) x'^2 + (8 \cos^2 \alpha - 6 \sin \alpha \cos \alpha) y'^2 + \\ + [16 \sin \alpha \cos \alpha + 6(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] x' y' - \\ - (12 \cos \alpha + 26 \sin \alpha) x' - (26 \cos \alpha - 12 \sin \alpha) y' + 11 = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициент при  $x'y'$ , имеем

$$16 \sin \alpha \cos \alpha + 6 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0, \text{ или } 3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 8 \operatorname{tg} \alpha - 3 = 0.$$

Отсюда  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 3$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_2 = -1/3$ ; примем  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ , тогда  $\sin \alpha = \pm 3/\sqrt{10}$ ,  $\cos \alpha = \pm 1/\sqrt{10}$ ; возьмем положительные значения  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ . Тогда уравнение принимает вид

$$9x'^2 - y'^2 - 9\sqrt{10}x' + \sqrt{10}y' + 11 = 0,$$

или

$$9(x'^2 - \sqrt{10}x') - (y'^2 - \sqrt{10}y') = -11.$$

2. Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} - \frac{5}{2} - 11,$$

или

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9.$$

Приняв за новое начало точку  $O'(\sqrt{10}/2; \sqrt{10}/2)$ , применим формулы преобразования координат  $x' = x'' + \sqrt{10}/2$ ,  $y' = y'' + \sqrt{10}/2$ ; получим  $9x''^2 - y''^2 = 9$ , или  $x''^2 - y''^2/9 = 1$  (уравнение гиперболы). ▲

201. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Δ 1. Преобразуем уравнение с помощью формул поворота осей:

$$(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 - 2(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 - 10(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) - 6(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + 25 = 0,$$

или

$$(\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha)x'^2 + (\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)y'^2 + 2(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)x'y' - (10 \cos \alpha + 6 \sin \alpha)x' + (10 \sin \alpha - 6 \cos \alpha)y' + 25 = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициент при произведении  $x'y'$ , имеем  $(2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 0$ , откуда  $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$ , т. е.  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_2 = -1$ . Возьмем  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ , откуда  $\alpha = \pi/4$  и  $\sin \alpha = 1/\sqrt{2}$ ,  $\cos \alpha = 1/\sqrt{2}$ . Тогда уравнение принимает вид

$$2y'^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 25 = 0, \text{ или } 2(y'^2 + \sqrt{2}y') - 8\sqrt{2}x' + 25 = 0.$$

2. Выражение в скобках дополним до полного квадрата:

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}x' - 24, \text{ или } \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Приняв за новое начало точку  $O'(3/\sqrt{2}; -\sqrt{2}/2)$ , применим формулы преобразования координат  $x' = x'' + 3/\sqrt{2}$ ,  $y' = y'' - \sqrt{2}/2$ ; получим  $y''^2 = 4\sqrt{2}x''$  (уравнение параболы). ▲

Показать, что нижеследующие уравнения определяют кривые, распадающиеся на пару прямых, и найти уравнения этих прямых:

202.  $25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0.$

203.  $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$

204.  $8x^2 - 18xy + 9y^2 + 2x - 1 = 0.$

Привести к каноническому виду уравнения следующих кривых:

205.  $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$ .

206.  $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$ .

207.  $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ .

## § 5. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Определители второго порядка и системы линейных уравнений. *Определитель второго порядка*, соответствующий таблице элементов  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ , определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

если ее определитель  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (1)$$

Если определитель  $D=0$ , то система является либо несовместной, либо неопределенной. В последнем случае система сводится к одному уравнению (например, первому), второе же уравнение является следствием первого.

Условие несовместности системы можно записать в виде  $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$ , а условие неопределенности — в виде  $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ .

Линейное уравнение называется *однородным*, если свободный член этого уравнения равен нулю.

Рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0. \end{cases}$$

1. Если  $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ , то система сводится к одному уравнению (например, первому), из которого одно из неизвестных выражается через два других, значения которых остаются произвольными.

2. Если условие  $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$  не выполнено, то решения системы находятся по формулам

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad y = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad (2)$$

где  $t$  может принимать любые значения. Эти решения можно записать также в виде

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{- \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = t.$$

При этой форме записи решений следует помнить, что если один из знаменателей обращается в нуль, то следует приравнять нулю и соответствующий числитель.

### 208. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab, \\ (a-b)x + (a+b)y = 2(a^2 - b^2). \end{cases}$$

$\Delta$  Находим определитель  $D$  системы и определители  $D_x$  и  $D_y$ , входящие в числители формул (1):

$$D = \begin{vmatrix} a+b & -(a-b) \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4ab & -(a-b) \\ 2(a^2 - b^2) & a+b \end{vmatrix} = 4a^2b + 4ab^2 + 2a^3 - 2a^2b - 2ab^2 + 2b^3 = 2(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = 2(a^2 + b^2)(a+b),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a+b & 4ab \\ a-b & 2(a^2 - b^2) \end{vmatrix} = 2a^3 + 2a^2b - 2ab^2 - 2b^3 - 4a^2b + 4ab^2 = 2(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = 2(a^2 + b^2)(a-b).$$

Отсюда  $x = D_x/D = a+b$ ,  $y = D_y/D = a-b$ .  $\blacktriangle$

### 209. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

$\Delta$  Используя формулы (2), находим

$$x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = -22t, \quad y = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = 14t, \quad z = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 2t,$$

где  $t$  можно придавать любые значения.  $\blacktriangle$

### Решить системы уравнений:

$$210. \begin{cases} 5x - 3y = 1, \\ x + 11y = 6. \end{cases}$$

$$211. \begin{cases} 2x + y = 1/5, \\ 4x + 2y = 1/3. \end{cases}$$

$$212. \begin{cases} ax - by = a^2 + b^2, \\ bx + ay = a^2 + b^2. \end{cases}$$

$$213. \begin{cases} 3x + 2y = 1/6, \\ 9x + 6y = 1/2. \end{cases}$$

$$214. \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 3x - 5y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$215. \begin{cases} x \cos \alpha - y \sin \alpha = \cos 2\alpha, \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin 2\alpha. \end{cases}$$

$$216. \begin{cases} a^2x - 2(a^2 + b^2)y + b^2z = 0, \\ 2x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

2. Определители третьего порядка и системы линейных уравнений. *Определитель третьего порядка*, соответствующий таблице элементов  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ , определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

*Минором* данного элемента определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, который получится, если в исходном определителе вычеркнуть строку и столбец, содержащие данный элемент. *Алгебраическим до-*

полняем данного элемента называется его минор, умноженный на  $(-1)^k$ , где  $k$ —сумма номеров строки и столбца, содержащих данный элемент.

Таким образом, знак, который при этом приписывается минору соответствующего элемента определителя, определяется следующей таблицей:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

В приведенном выше равенстве, выражающем определитель третьего порядка, в правой части стоит сумма произведений элементов 1-й строки определителя на их алгебраические дополнения.

**Теорема 1.** *Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения.*

Эта теорема позволяет вычислять значение определителя, раскрывая его по элементам любой его строки или столбца.

**Теорема 2.** *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.*

Свойства определителей.

1°. *Определитель не изменится, если строки определителя заменить столбцами, а столбцы—соответствующими строками.*

2°. *Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя.*

3°. *Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.*

4°. *При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.*

5°. *Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число (теорема о линейной комбинации параллельных рядов определителя).*

Решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

находится по формулам Крамера

$$x = D_x/D, \quad y = D_y/D, \quad z = D_z/D, \quad (1)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

При этом предполагается, что  $D \neq 0$  (если  $D = 0$ , то исходная система либо неопределенная, либо несовместная).

Если система однородная, т. е. имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{cases}$$

и ее определитель отличен от нуля, то она имеет единственное решение  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ .

Если же определитель однородной системы равен нулю, то система сводится либо к двум независимым уравнениям (третье является их следствием), либо к одному уравнению (остальные два являются его следствиями). Первый случай имеет место тогда, когда среди миноров определителя однородной системы есть хотя бы один отличный от нуля, второй—тогда, когда все миноры этого определителя равны нулю.

В обоих случаях (см. п. 1) однородная система имеет бесчисленное множество решений.

217. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

△ Разложив определитель по элементам 1-й строки, получим

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 3(-34) + 2(-17) = 68. \blacktriangle$$

218. Вычислить тот же определитель на основании теоремы о линейной комбинации элементов строк (столбцов).

△ К элементам 1-й строки прибавим соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на 5, а к элементам 3-й строки — соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на 7:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель по элементам 1-го столбца, получаем

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 13 \cdot 34 - 17 \cdot 22 = 68. \blacktriangle$$

219. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

△ По формулам (1) находим

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{8 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{28}{14} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{42}{14} = 3. \blacktriangle$$

220. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 4x + y + z = 0, \\ x + 3y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

$\Delta$  Здесь  $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ . Для вычисления этого определителя к элементам 1-й строки прибавим элементы 3-й строки, умноженные на  $-4$ , а к элементам 2-й строки — элементы 3-й строки, умноженные на  $-1$ :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 17.$$

Так как  $D \neq 0$ , то система имеет только нулевое решение  $x=y=z=0$ .  $\blacktriangle$

221. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + 9z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

$\Delta$  Имеем

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 14 + 1 = 0.$$

Следовательно, система имеет решения, отличные от нулевого. Решаем систему первых двух уравнений (третье уравнение является их следствием):

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + 9z = 0. \end{cases}$$

Отсюда по формулам (2) п. 1 получаем

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \cdot t = 20t, \quad y = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \cdot t = -28t, \quad z = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 4t. \quad \blacktriangle$$

222. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$ , разложив его по элементам 3-й строки.

223. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ , используя теорему о линейной комбинации строк (столбцов).

224. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$ .

Решить системы уравнений:

$$225. \begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases} \quad 226. \begin{cases} x + 3y - 6z = 12, \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$$

$$227. \begin{cases} -5x + y + z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ x + y - 7z = 0. \end{cases} \quad 228. \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$229. \begin{cases} ax + by + cz = a - b, \\ bx + cy + az = b - c, \\ cx + ay + bz = c - a, \end{cases} \quad 230. \begin{cases} ax + by + (a+b)z = 0, \\ bx + ay + (a+b)z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

если  $a + b + c \neq 0$ .

## ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

## § 1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат  $Oxyz$ , то точка  $M$  пространства, имеющая координаты  $x$  (абсцисса),  $y$  (ордината) и  $z$  (эп-пликаата), обозначается  $M(x; y; z)$ .

Расстояние между двумя точками  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

В частности, расстояние точки  $M(x; y; z)$  от начала координат  $O$  определяется по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

Если отрезок, концами которого служат точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ , разделен точкой  $C(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$  в отношении  $\lambda$  (см. гл. I, § 1), то координаты точки  $C$  определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad \bar{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

В частности, координаты середины отрезка определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (4)$$

231. Даны точки  $M_1(2; 4; -2)$  и  $M_2(-2; 4; 2)$ . На прямой  $M_1M_2$  найти точку  $M$ , делящую отрезок  $M_1M_2$  в отношении  $\lambda = 3$ .

△ Воспользуемся формулами деления отрезка в данном отношении:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + 3(-2)}{1 + 3} = -1, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{4 + 3 \cdot 4}{1 + 3} = 4, \\ z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} = \frac{-2 + 3 \cdot 2}{1 + 3} = 1.$$

Следовательно, искомая точка  $M(-1; 4; 1)$ . ▲

232. Дан треугольник:  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(5; 1; -2)$ ,  $C(7; 9; 1)$ . Найти координаты точки  $D$  пересечения биссектрисы угла  $A$  со стороной  $CB$ .

△ Найдем длины сторон треугольника, образующих угол  $A$ :

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2} = 10; \\ |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5.$$

Следовательно,  $|CD| : |DB| = 10 : 5 = 2$ , так как биссектриса делит сторону  $CB$  на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом,

$$x_D = \frac{x_C + \lambda x_B}{1 + \lambda} = \frac{7 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = \frac{17}{3}, \quad y_D = \frac{y_C + \lambda y_B}{1 + \lambda} = \frac{9 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = \frac{11}{3},$$

$$z_D = \frac{z_C + \lambda z_B}{1 + \lambda} = \frac{1 + 2(-2)}{1 + 2} = -1;$$

искомая точка  $D(17/3, 11/3, -1)$ . ▲

233. На оси  $Ox$  найти точку, равноудаленную от точек  $A(2; -4; 5)$  и  $B(-3; 2; 7)$ .

△ Пусть  $M$  — искомая точка. Для нее должно выполняться равенство  $|AM| = |MB|$ . Так как эта точка лежит на оси  $Ox$ , то ее координаты  $(x; 0; 0)$ , а потому имеем

$$|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + (-4)^2 + 5^2}, \quad |MB| = \sqrt{(x+3)^2 + 2^2 + 7^2}.$$

Отсюда после возведения в квадрат получаем

$$(x-2)^2 + 41 = (x+3)^2 + 53, \text{ или } 10x = -17, \text{ т. е. } x = -1,7.$$

Таким образом, искомая точка  $M(-1,7; 0; 0)$ . ▲

234. Даны точки  $A(3; 3; 3)$  и  $B(-1; 5; 7)$ . Найти координаты точек  $C$  и  $D$ , делящих отрезок  $AB$  на три равные части.

235. Дан треугольник:  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(7; 10; 3)$ ,  $C(-1; 3; 1)$ . Показать, что угол  $A$  — тупой.

236. Найти координаты центра тяжести треугольника с вершинами  $A(2; 3; 4)$ ,  $B(3; 1; 2)$  и  $C(4; -1; 3)$ .

237. В каком отношении точка  $M$ , равноудаленная от точек  $A(3; 1; 4)$  и  $B(-4; 5; 3)$ , разделит отрезок оси  $Oy$  от начала координат до точки  $C(0; 6; 0)$ ?

238. На оси  $Oz$  найти точку, равноудаленную от точек  $M_1(2; 4; 1)$  и  $M_2(-3; 2; 5)$ .

239. На плоскости  $xOy$  найти точку, равноудаленную от точек  $A(1; -1; 5)$ ,  $B(3; 4; 4)$  и  $C(4; 6; 1)$ .

## § 2. ВЕКТОРЫ И ПРОСТЕЙШИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Свободный вектор  $\mathbf{a}$  (т. е. такой вектор, который без изменения длины и направления может быть перенесен в любую точку пространства), заданный в координатном пространстве  $Oxyz$ , может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Такое представление вектора  $\mathbf{a}$  называется его *разложением по осям координат*, или *разложением по ортам*.

Здесь  $a_x, a_y, a_z$  — проекции вектора  $\mathbf{a}$  на соответствующие оси координат (их называют *координатами* вектора  $\mathbf{a}$ ),  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты этих осей (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси).

Векторы  $a_x \mathbf{i}, a_y \mathbf{j}$  и  $a_z \mathbf{k}$ , в виде суммы которых представлен вектор  $\mathbf{a}$ , называются *составляющими* (компонентами) вектора  $\mathbf{a}$  по осям координат.

Длина (модуль) вектора  $\mathbf{a}$  обозначается  $a$  или  $|\mathbf{a}|$  и определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора  $\mathbf{a}$  определяется углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , образованными им с осями координат  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Косинусы этих углов (так называемые *направляющие косинусы вектора*) определяются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  заданы их разложениями по ортам, то их сумма и разность определяются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}, \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &= (a_x - b_x)\mathbf{i} + (a_y - b_y)\mathbf{j} + (a_z - b_z)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Напомним, что сумма векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , начала которых совмещены, изображается вектором с тем же началом, совпадающим с диагональю параллелограмма,

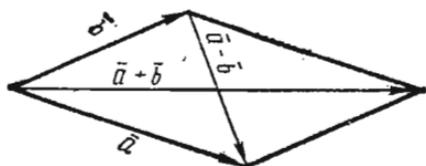


Рис. 16

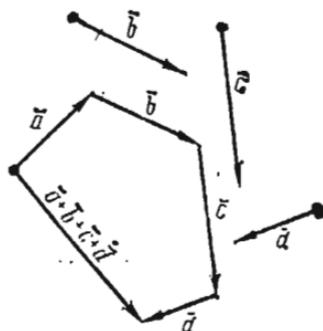


Рис. 17

сторонами которого являются векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Разность  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  этих векторов изображается вектором, совпадающим со второй диагональю того же параллелограмма, причем начало этого вектора находится в конце вектора  $\mathbf{b}$ , а конец — в конце вектора  $\mathbf{a}$  (рис. 16).

Сумма любого числа векторов может быть найдена по правилу многоугольника (рис. 17).

Произведение вектора  $\mathbf{a}$  на скалярный множитель  $m$  определяется формулой

$$m\mathbf{a} = ma_x\mathbf{i} + ma_y\mathbf{j} + ma_z\mathbf{k}.$$

Напомним, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $m\mathbf{a}$  параллельны (коллинеарны) и направлены в одну и ту же сторону, если  $m > 0$ , и в противоположные стороны, если  $m < 0$ .

В частности, если  $m = 1/a$ , то косинус  $\mathbf{a}/a$  имеет длину, равную единице, и направление, совпадающее с направлением вектора  $\mathbf{a}$ . Этот вектор называют *единичным вектором (ортом)* вектора  $\mathbf{a}$  и обозначают  $\mathbf{a}_0$ . Нахождение единичного вектора того же направления, что и данный вектор  $\mathbf{a}$ , называется *нормированием* вектора  $\mathbf{a}$ .

Таким образом,  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}/a$ , или  $\mathbf{a} = a\mathbf{a}_0$ .

Вектор  $\overline{OM}$ , начало которого находится в начале координат, а конец — в точке  $M(x; y; z)$ , называют *радиусом-вектором* точки  $M$  и обозначают  $\mathbf{r}(M)$  или просто  $\mathbf{r}$ . Так как его координаты совпадают с координатами точки  $M$ , то его разложение по ортам имеет вид

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Вектор  $\overline{AB}$ , имеющий начало в точке  $A(x_1; y_1; z_1)$  и конец в точке  $B(x_2; y_2; z_2)$ , может быть записан в виде  $\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , где  $\mathbf{r}_2$  — радиус-вектор точки  $B$ ,

а  $\mathbf{r}_1$  — радиус-вектор точки  $A$ . Поэтому разложение вектора  $\overline{AB}$  по ортам имеет вид

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} + (z_2 - z_1) \mathbf{k}.$$

Его длина совпадает с расстоянием между точками  $A$  и  $B$ :

$$|\overline{AB}| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

В силу приведенных выше формул направление вектора  $\overline{AB}$  определяется направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

240. В треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  точками  $M$  и  $N$  разделена на три равные части:  $|AM| = |MN| = |NB|$ . Найти вектор  $\overline{CM}$ , если  $\overline{CA} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{CB} = \mathbf{b}$ .

△ Имеем  $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ . Следовательно,  $\overline{AM} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/3$ . Так как  $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$ , то  $\overline{CM} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})/3 = (2\mathbf{a} + \mathbf{b})/3$ . ▲

241. В треугольнике  $ABC$  прямая  $AM$  является биссектрисой угла  $BAC$ , причём точка  $M$  лежит на стороне  $BC$ . Найти  $\overline{AM}$ , если  $\overline{AB} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AC} = \mathbf{c}$ .

△ Имеем  $\overline{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ . Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что  $|BM| : |MC| = b : c$ , т. е.  $|BM| : |BC| = b : (b + c)$ . Отсюда получаем  $\overline{BM} = \frac{b}{b+c} (\mathbf{c} - \mathbf{b})$ . Так как  $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$ , то

$$\overline{AM} = \mathbf{b} + \frac{b}{b+c} (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \frac{bc + cb}{b+c}. \quad \blacktriangle$$

242. Радиусами-векторами вершин треугольника  $ABC$  являются  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$ . Найти радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника.

△ Имеем  $\overline{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$ ;  $\overline{BD} = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)/2$  ( $D$  — середина стороны  $BC$ );  $\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ;  $\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)/2 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1)/2$ ;  $\overline{AM} = (2/3) \overline{AD}$  ( $M$  — точка пересечения медиан), поэтому  $\overline{AM} = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1)/3$ . Итак,

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = \mathbf{r}_1 + \overline{AM} = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1)/3 + \mathbf{r}_1, \text{ или } \mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/3. \quad \blacktriangle$$

243. Найти длину вектора  $\mathbf{a} = 20\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 60\mathbf{k}$  и его направляющие косинусы.

$$\triangle a = \sqrt{20^2 + 30^2 + 60^2} = 70; \quad \cos \alpha = 20/70 = 2/7, \\ \cos \beta = 30/70 = 3/7, \quad \cos \gamma = -60/70 = -6/7. \quad \blacktriangle$$

244. Найти вектор  $\mathbf{a} = \overline{AB}$ , если  $A(1; 3; 2)$  и  $B(5; 8; -1)$ .

△ Проекциями вектора  $\overline{AB}$  на оси координат являются разности соответственных координат точек  $B$  и  $A$ :  $a_x = 5 - 1 = 4$ ,  $a_y = 8 - 3 = 5$ ,  $a_z = -1 - 2 = -3$ . Следовательно,  $\overline{AB} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ . ▲

245. Нормировать вектор  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ .

△ Найдём длину вектора  $\mathbf{a}$ :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13.$$

Искомый единичный вектор имеет вид

$$a_0 = \frac{a}{|a|} = \frac{3i + 4j - 12k}{13} = \frac{3}{13}i + \frac{4}{13}j - \frac{12}{13}k. \blacktriangle$$

246. Дан треугольник  $ABC$ . На стороне  $BC$  расположена точка  $M$  так, что  $|BM| : |MC| = \lambda$ . Найти  $\overline{AM}$ , если  $\overline{AB} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AC} = \mathbf{c}$ .

247. Дано  $\overline{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ ,  $\overline{BC} = -4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  $\overline{CD} = -5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ . Доказать, что  $ABCD$  — трапеция.

248. Найти проекции вектора  $\mathbf{a}$  на оси координат, если  $\mathbf{a} = \overline{AB} + \overline{CD}$ ,  $A(0; 0; 1)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(4; 6; 5)$  и  $D(1; 6; 3)$ .

249. Найти длину вектора  $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + (m+1)\mathbf{j} + m(m+1)\mathbf{k}$ .

250. Даны радиусы-векторы вершин треугольника  $ABC$ :  $\mathbf{r}_A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}_B = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}_C = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Показать, что треугольник  $ABC$  равносторонний.

251. Вычислить модуль вектора  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} - (1/5)(4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$  и найти его направляющие косинусы.

252. Даны точки  $M_1(1; 2; 3)$  и  $M_2(3; -4; 6)$ . Найти длину и направление вектора  $\overline{M_1M_2}$ .

253. Дан вектор  $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ . Найти вектор  $\mathbf{b}$ , если  $b = a$ ,  $b_y = a_y$  и  $b_x = 0$ .

254. Радиус-вектор точки  $M$  составляет с осью  $Oy$  угол  $60^\circ$ , а с осью  $Oz$  угол  $45^\circ$ , его длина  $r = 8$ . Найти координаты точки  $M$ , если ее абсцисса отрицательна.

255. Нормировать вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ .

### § 3. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

1. Скалярное произведение. Скалярным произведением двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла  $\varphi$  между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi.$$

Свойства скалярного произведения.

1°.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ , или  $a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ .

2°.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , если  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , либо  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , либо  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  (ортогональность ненулевых векторов).

3°.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  (переместительный закон).

4°.  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  (распределительный закон).

5°.  $(m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  (сочетательный закон по отношению к скалярному множителю).

Скалярные произведения ортов осей координат:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Пусть векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  заданы своими координатами:  $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ . Тогда скалярное произведение этих векторов находится по формуле

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

2. Векторное произведение. Векторным произведением вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{b}$  называется третий вектор  $\mathbf{c}$ , определяемый следующим образом (рис. 18):

1) модуль вектора  $\mathbf{c}$  равен площади параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ( $c = ab \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ );

2) вектор  $\mathbf{c}$  перпендикулярен векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ;

3) векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  после приведения к общему началу ориентированы по от-

ношению друг к другу соответственно как орты  $i, j, k$  (в правой системе координат образуют так называемую *правую тройку* векторов).

Векторное произведение  $a$  на  $b$  обозначается через  $a \times b$ .

Свойства векторного произведения.

1°.  $b \times a = -a \times b$ , т. е. векторное произведение не обладает переместительным свойством.

2°.  $a \times b = 0$ , если  $a = 0$ , либо  $b = 0$ , либо  $a \parallel b$  (коллинеарность ненулевых векторов).

3°.  $(ma) \times b = a \times (mb) = m(a \times b)$  (сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю).

4°.  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  (распределительное свойство).

Векторные произведения координатных ортов  $i, j$  и  $k$ :

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0, \\ i \times j = -j \times i = k; \quad j \times k = -k \times j = i; \quad k \times i = -i \times k = j.$$

Векторное произведение векторов  $a = x_1 i + y_1 j + z_1 k$  и  $b = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ , удобнее всего находить по формуле

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

3. **Смешанное произведение.** *Смешанным произведением* векторов  $a, b$  и  $c$  называется скалярное произведение вектора  $a \times b$  на вектор  $c$ , т. е.  $(a \times b) \cdot c$ .

Смешанное произведение трех векторов  $a, b, c$  по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения.

1°. Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если:

а) хоть один из перемножаемых векторов равен нулю;

б) два из перемножаемых векторов коллинеарны;

в) три ненулевых вектора параллельны одной и той же плоскости (компланарность).

2°. Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного ( $\times$ ) и скалярного ( $\cdot$ ) умножения, т. е.  $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$ . В силу этого свойства смешанное произведение векторов  $a, b$  и  $c$  условимся записывать в виде  $abc$ .

3°. Смешанное произведение не изменяется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке:

$$abc = bca = cab.$$

4°. При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак:

$$bac = -abc; \quad cba = -abc; \quad acb = -abc.$$

Пусть векторы заданы их разложениями по ортам:  $a = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ ;  $b = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ ;  $c = x_3 i + y_3 j + z_3 k$ . Тогда

$$abc = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Из свойств смешанного произведения трех векторов вытекает следующее: необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов служит условие  $abc = 0$ ;

объем  $V_1$  параллелепипеда, построенного на векторах  $a, b$  и  $c$ , и объем  $V_2$  образованной ими треугольной пирамиды находятся по формулам

$$V_1 = |abc|, \quad V_2 = \frac{1}{6} V_1 = \frac{1}{6} |abc|.$$

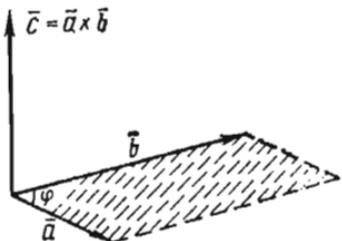


Рис. 18

256. Найти скалярное произведение векторов  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ .

$\Delta$  Находим  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2 + 4(-5) + 7 \cdot 2 = 0$ . Так как  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  и  $\mathbf{a} \neq 0$ ,  $\mathbf{b} \neq 0$ , то  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .  $\blacktriangle$

257. Даны векторы  $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + m\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ . При каком значении  $m$  эти векторы перпендикулярны?

$\Delta$  Находим скалярное произведение этих векторов:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4m + 3m - 28$ ; так как  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , то  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . Отсюда  $7m - 28 = 0$ , т. е.  $m = 4$ .  $\blacktriangle$

258. Найти  $(5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$ , если  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .

$\Delta (5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 10a^2 - 5\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3b^2 = 10a^2 - 3b^2 = 40 - 27 = 13$ .  $\blacktriangle$

259. Определить угол между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ .

$\Delta$  Так как  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi$ , то  $\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab}$ . Имеем  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3(-2) = 8$ ,  $a = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ ,  $b = \sqrt{36+16+4} = 2\sqrt{14}$ .

Следовательно,  $\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7}$  и  $\varphi = \arccos \frac{2}{7}$ .  $\blacktriangle$

260. Найти векторное произведение векторов  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

$\Delta$  Имеем

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

т. е.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .  $\blacktriangle$

261. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ .

$\Delta$  Находим векторное произведение  $\mathbf{a}$  на  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} - 42\mathbf{j} - 21\mathbf{k}.$$

Так как модуль векторного произведения двух векторов равен площади построенного на них параллелограмма, то  $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = 49$  (кв. ед.).  $\blacktriangle$

262. Вычислить площадь треугольника с вершинами  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 3; 4)$ ,  $C(4; 3; 2)$ .

$\Delta$  Находим векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ :

$$\overline{AB} = (2-1)\mathbf{i} + (3-1)\mathbf{j} + (4-1)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

$$\overline{AC} = (4-1)\mathbf{i} + (3-1)\mathbf{j} + (2-1)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Площадь треугольника  $ABC$  равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ , поэтому находим векторное произведение этих векторов:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 + 16} = \sqrt{24} \text{ (кв. ед.) } \blacktriangle$$

263. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  и  $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , если  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = 30^\circ$ .

$\Delta$  Имеем

$$(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (3\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 3\mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + 9\mathbf{b} \times \mathbf{a} + 3\mathbf{b} \times \mathbf{b} + \\ = 3 \cdot 0 + \mathbf{a} \times \mathbf{b} - 9\mathbf{a} \times \mathbf{b} + 3 \cdot 0 = -8\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

(поскольку  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ). Итак,

$$S = 8|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = 4 \text{ (кв. ед.) } \blacktriangle$$

264. Найти смешанное произведение векторов  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ .

$$\Delta \text{ abc} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 26 + 5 + 2 = 33. \blacktriangle$$

265. Показать, что векторы  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  компланарны.

$\Delta$  Находим смешанное произведение векторов:

$$\text{abc} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 15 + 7 = 0.$$

Так как  $\text{abc} = 0$ , то заданные векторы компланарны.  $\blacktriangle$

266. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами  $A(2; 2; 2)$ ,  $B(4; 3; 3)$ ,  $C(4; 5; 4)$  и  $D(5; 5; 6)$ .

$\Delta$  Найдем векторы  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  и  $\overline{AD}$ , совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине  $A$ :  $\overline{AB} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\overline{AC} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\overline{AD} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ . Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 7.$$

Так как объем пирамиды равен  $1/6$  объема параллелепипеда, построенного на векторах  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  и  $\overline{AD}$ , то  $V = 7/6$  (куб. ед.).  $\blacktriangle$

267. Вычислить  $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{c} - \mathbf{a})$ .

$\Delta$  Так как  $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$ , то эти векторы компланарны (рис. 19). Следовательно, их смешанное произведение равно нулю:  $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$ .  $\blacktriangle$

268. Найти скалярное произведение векторов  $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  и  $5\mathbf{a} - 6\mathbf{b}$ , если  $a = 4$ ,  $b = 6$  и угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равен  $\pi/3$ .

269. Определить угол между векторами  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ .

270. При каком значении  $m$  векторы  $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + \mathbf{j}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  перпендикулярны?

271. Найти скалярное произведение векторов  $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$  и  $5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$ , если  $a=1, b=2, c=3$ , а  $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{c}}) = (\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}}) = \pi/3$ .

272. Найти работу силы  $\mathbf{F}$  на перемещении  $\mathbf{s}$ , если  $F=2, s=5$ ,  $\varphi = (\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{s}}) = \pi/6$ .

273. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

274. Векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти вектор  $\mathbf{c}$ , если  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

275. Даны векторы  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ . Найти  $\text{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$  и  $\text{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ .

276. Даны радиусы-векторы трех последовательных вершин параллелограмма  $ABCD$ :  $\mathbf{r}_A = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{r}_B = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{r}_C = 7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$ . Определить радиус-вектор четвертой вершины  $D$ .

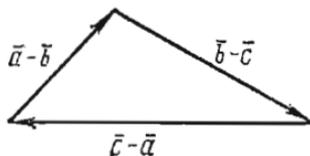


Рис. 19

277. Показать, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не могут быть перпендикулярными, если  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} > 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} > 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} > 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{i} < 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{j} < 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{k} < 0$ .

278. Показать, что векторы  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + m\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + (m+1)\mathbf{k}$  и  $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + m\mathbf{k}$  ни при каком значении  $m$  не могут быть компланарными.

279. Могут ли отличные от нуля числа  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$  удовлетворять уравнениям

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{aligned} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 &= 0, \\ x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 &= 0, \\ x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 &= 0? \end{aligned}$$

280. Найти векторное произведение векторов  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ .

281. Вычислить площадь треугольника с вершинами  $A(2; 2; 2), B(4; 0; 3)$  и  $C(0; 1; 0)$ .

282. Найти смешанное произведение векторов  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ .

283. Показать, что векторы  $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$  компланарны.

284. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами  $A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3)$  и  $D(3; 7; 2)$ . Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань  $BCD$ .

285. Показать, что точки  $A(5; 7; -2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4)$  и  $D(1; 5; 0)$  лежат в одной плоскости.

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

## § 1. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ

1. *Плоскость.* 1) Уравнение плоскости в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = p.$$

Здесь  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  — радиус-вектор текущей точки  $M(x; y; z)$  плоскости;  $\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$  — единичный вектор, имеющий направление перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат;  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат  $Ox, Oy, Oz$ ;  $p$  — длина этого перпендикуляра.

При переходе к координатам это уравнение принимает вид

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (1)$$

(нормальное уравнение плоскости)

2) Уравнение всякой плоскости может быть записано также в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

если  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$  (общее уравнение). Здесь  $A, B, C$  можно рассматривать как координаты некоторого вектора  $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ , перпендикулярного плоскости (нормального вектора плоскости). Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду надо все члены уравнения умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm 1/N = \pm 1/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad (3)$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена  $D$  в общем уравнении плоскости.

3) Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ :

$A = 0$ ; параллельна оси  $Ox$ ;

$B = 0$ ; » »  $Oy$ ;

$C = 0$ ; » »  $Oz$ ;

$D = 0$ ; проходит через начало координат;

$A = B = 0$ ; перпендикулярна оси  $Oz$  (параллельна плоскости  $xOy$ );

$A = C = 0$ ; » »  $Oy$  ( » »  $xOz$ );

$B = C = 0$ ; » »  $Ox$  ( » »  $yOz$ );

$A = D = 0$  проходит через ось  $Ox$ ;

$B = D = 0$  » »  $Oy$ ;

$C = D = 0$  » »  $Oz$ ;

$A = B = D = 0$ ; совпадает с плоскостью  $xOy$  ( $z = 0$ );

$A = C = D = 0$ ; » »  $xOz$  ( $y = 0$ );

$B = C = D = 0$ ; » »  $yOz$  ( $x = 0$ ).

Если в общем уравнении плоскости коэффициент  $D \neq 0$ , то, разделив все члены уравнения на  $-D$ , уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (4)$$

(здесь  $a = -D/A, b = -D/B, c = -D/C$ ). Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*: в нем  $a, b$  и  $c$  — соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями  $Ox, Oy$  и  $Oz$ .

4) Угол  $\varphi$  между плоскостями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (5)$$

Условие параллельности плоскостей:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2. \quad (6)$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (7)$$

5) Расстояние от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости, определяемой уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ , находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8)$$

Оно равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости; знак результата этой подстановки характеризует взаимное расположение точки и начала координат относительно данной плоскости: «плюс», если точка  $M_0$  и начало координат расположены по разные стороны от плоскости, и «минус», если они расположены по одну сторону от плоскости.

6) Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  и перпендикулярной вектору  $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ , имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (9)$$

При произвольных значениях  $A$ ,  $B$  и  $C$  последнее уравнение определяет некоторую плоскость, принадлежащую связке плоскостей, проходящих через точку  $M_0$ . Его поэтому часто называют *уравнением связки плоскостей*.

7) Уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (10)$$

при произвольном значении  $\lambda$  определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (I) \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (II)$$

т. е. некоторую плоскость, принадлежащую пучку плоскостей, проходящих через эту прямую (в силу чего такое уравнение часто называют *уравнением пучка плоскостей*). Если плоскости, определяемые уравнениями (I) и (II), параллельны, то пучок плоскостей превращается в совокупность плоскостей, параллельных этим плоскостям.

8) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки  $M_1(r_1)$ ,  $M_2(r_2)$ ,  $M_3(r_3)$  (здесь  $r_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ ;  $r_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ ;  $r_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$ ), проще найти из условия компланарности векторов  $r - r_1$ ,  $r_2 - r_1$ ,  $r_3 - r_1$ , где  $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  — радиус-вектор текущей точки искомой плоскости  $M$ :

$$(r - r_1)(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) = 0,$$

или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

286. Уравнение плоскости  $2x + 3y - 6z + 21 = 0$  привести к нормальному виду.

△ Находим нормирующий множитель (который берем со знаком «минус», поскольку  $D = 21 > 0$ ):  $\mu = -1/\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = -1/7$ . Итак, нормальное уравнение заданной плоскости имеет вид  $-(2/7)x - (3/7)y + (6/7)z - 3 = 0$ . ▲

287. Определить расстояние от точки  $M_0(3; 5; -8)$  до плоскости  $6x - 3y + 2z - 28 = 0$ .

△ Используя формулу (8) расстояния от точки до плоскости, находим

$$d = \frac{|6 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) - 28|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{41}{7}.$$

Так как результат подстановки координат точки  $M_0$  в нормальное уравнение плоскости отрицателен, то  $M_0$  и начало координат лежат по одну сторону от заданной плоскости. ▲

288. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2; 3; 5)$  и перпендикулярной вектору  $N = 4i + 3j + 2k$ .

△ Достаточно воспользоваться уравнением (9) плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору:

$$4(x-2) + 3(y-3) + 2(z-5) = 0, \text{ т. е. } 4x + 3y + 2z - 27 = 0. \blacktriangle$$

289. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2; 3; -1)$  параллельно плоскости  $5x - 3y + 2z - 10 = 0$ .

△ Запишем уравнение (9) связки плоскостей, проходящих через данную точку:

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z+1) = 0.$$

Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором  $n = (5; -3; 2)$  данной плоскости; следовательно,  $A=5$ ,  $B=-3$ ,  $C=2$  и уравнение искомой плоскости примет вид

$$5(x-2) - 3(y-3) + 2(z+1) = 0, \text{ или } 5x - 3y + 2z + 1 = 0. \blacktriangle$$

290. Из точки  $P(2; 3; -5)$  на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

△ Основаниями перпендикуляров, опущенных на координатные плоскости, служат следующие точки:  $M_1(2; 3; 0)$ ,  $M_2(2; 0; -5)$ ,  $M_3(0; 3; -5)$ . Используя соотношение (11), запишем уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 15x + 10y - 6z - 60 = 0. \blacktriangle$$

291. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(5; 4; 3)$  и отсекающей равные отрезки на осях координат.

△ Используя уравнение (4) плоскости в отрезках, в котором  $a=b=c$ , имеем  $x/a + y/a + z/a = 1$ . Координаты точки  $A$  удовлетворяют уравнению искомой плоскости, поэтому выполняется равенство  $5/a + 4/a + 3/a = 1$ , откуда  $a=12$ . Итак, получаем уравнение  $x + y + z - 12 = 0$ . ▲

292. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $x + y + 5z - 1 = 0$ ,  $2x + 3y - z + 2 = 0$  и через точку  $M(3; 2; 1)$ .

△ Воспользуемся уравнением (10) пучка плоскостей:

$$x + y + 5z - 1 + \lambda(2x + 3y - z + 2) = 0.$$

Значение  $\lambda$  определяем из условия, что координаты точки  $M$  удовлетворяют этому уравнению:  $3+2+5-1+\lambda(6+6-1+2)=9+13\lambda=0$ , откуда  $\lambda=-9/13$ . Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$x+y+5z-1-\frac{9}{13}(2x+3y-z+2)=0, \text{ или } 5x+14y-74z+31=0. \blacktriangle$$

**293.** Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $x+3y+5z-4=0$  и  $x-y-2z+7=0$  и параллельной оси  $Oy$ .

$\triangle$  Воспользуемся уравнением пучка плоскостей:

$$\begin{aligned} x+3y+5z-4+\lambda(x-y-2z+7) &= 0; \\ (1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(5-2\lambda)z+(7\lambda-4) &= 0. \end{aligned}$$

Так как искомая плоскость параллельна оси ординат, то коэффициент при  $y$  должен быть равен нулю:  $3-\lambda=0$ , т. е.  $\lambda=3$ . Подставив найденное значение  $\lambda$  в уравнение пучка, получаем  $4x-z+17=0$ .  $\blacktriangle$

**294.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(2; -1; 4)$  и  $B(3; 2; -1)$  перпендикулярно плоскости  $x+y+2z-3=0$ .

$\triangle$  В качестве нормального вектора  $N$  искомой плоскости можно взять вектор, перпендикулярный вектору  $\overline{AB}=\{1; 3; -5\}$  и нормальному вектору  $n=\{1; 1; 2\}$  данной плоскости. Поэтому за  $N$  примем векторное произведение  $\overline{AB}$  и  $n$ :

$$N = \overline{AB} \times n = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Остается воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через данную точку (например,  $A$ ) перпендикулярно заданному вектору  $N=\{11; -7; -2\}$ :

$$11(x-2)-7(y+1)-2(z-4)=0, \text{ или } 11x-7y-2z-21=0. \blacktriangle$$

**295.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(3; -1; -5)$  и перпендикулярной плоскостям  $3x-2y+2z+7=0$  и  $5x-4y+3z+1=0$ .

$\triangle$  Очевидно, что в качестве нормального вектора  $N$  искомой плоскости можно взять векторное произведение нормальных векторов  $n_1=\{3; -2; 2\}$  и  $n_2=\{5; -4; 3\}$  данных плоскостей:

$$\begin{aligned} N = n_1 \times n_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Теперь, используя уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $M(3; -1; -5)$  перпендикулярно вектору  $N=\{2; 1; -2\}$ , получаем

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0, \text{ или } 2x+y-2z-15=0. \blacktriangle$$

**296.** Привести к нормальному виду уравнения следующих плоскостей: 1)  $x+y-z-2=0$ ; 2)  $3x+5y-4z+7=0$ .

**297.** Найти расстояние от точки  $M_0(1; 3; -2)$  до плоскости

$2x - 3y - 4z + 12 = 0$ . Как расположена точка  $M_0$  относительно плоскости?

298. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки  $M_0(2; 3; -5)$  на плоскость  $4x - 2y + 5z - 12 = 0$ .

299. Найти уравнение плоскости, проходящей: 1) через точку  $M(-2; 3; 4)$ , если она отсекает на осях координат равные отрезки; 2) через точку  $N(2; -1; 4)$ , если она отсекает на оси  $Oz$  отрезок вдвое больший, чем на осях  $Ox$  и  $Oy$ .

300. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки  $P(2; 0; -1)$  и  $Q(1; -1; 3)$  и перпендикулярной плоскости  $3x + 2y - z + 5 = 0$ .

301. На плоскости  $2x - 5y + 2z + 5 = 0$  найти такую точку  $M$ , чтобы прямая  $OM$  составляла с осями координат равные углы.

302. Найти уравнение плоскости, зная, что точка  $P(4; -3; 12)$  служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

303. Найти уравнения плоскостей, проходящих через оси координат перпендикулярно плоскости  $3x - 4y + 5z - 12 = 0$ .

304. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек  $P(1; -4; 2)$  и  $Q(7; 1; -5)$ .

305. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки  $P(0; 2; 0)$  и  $Q(2; 0; 0)$  и образующей угол  $60^\circ$  с плоскостью  $x = 0$ .

306. Вычислить угол между плоскостями, проходящими через точку  $M(1; -1; -1)$ , одна из которых содержит ось  $Ox$ , а другая — ось  $Oz$ .

307. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки  $P(4; -2; 1)$  и  $Q(2; 4; -3)$ .

308. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей  $2x + 2y + z - 7 = 0$ ,  $2x - y + 3z - 3 = 0$ ,  $4x + 5y - 2z - 12 = 0$  и через точки  $M(0; 3; 0)$  и  $N(1; 1; 1)$ .

309. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $x + 5y + 9z - 13 = 0$ ,  $3x - y - 5z + 1 = 0$  и через точку  $M(0; 2; 1)$ .

310. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $x + 2y + 3z - 5 = 0$  и  $3x - 2y - z + 1 = 0$  и отсекающей равные отрезки на осях  $Ox$  и  $Oz$ .

311. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $(1 + \sqrt{2})x + 2y + 2z - 4 = 0$ ,  $x + y + z + 1 = 0$  и образующей с координатной плоскостью  $xOy$  угол  $60^\circ$ .

312. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $2x - y - 12z - 3 = 0$  и  $3x + y - 7z - 2 = 0$  и перпендикулярной плоскости  $x + 2y + 5z - 1 = 0$ .

313. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  и через начало координат.

314. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(0; 2; 1)$  и параллельной векторам  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ .

315. Какой угол образует с плоскостью  $x + y + 2z - 4 = 0$  вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ?

2. Прямая. 1) Прямая может быть задана уравнениями двух плоскостей

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

пересекающихся по этой прямой.

2) Исключив поочередно  $x$  и  $y$  из предыдущих уравнений, получим уравнения  $x = az + c$ ,  $y = bz + d$ . Здесь прямая определена двумя плоскостями, проецирующими ее на плоскости  $xOz$  и  $yOz$ .

3) Уравнения прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ , имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (1)$$

4) Так называемые канонические уравнения

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \quad (2)$$

определяют прямую, проходящую через точку  $M(x_1; y_1; z_1)$  и параллельную вектору  $s = li + mj + nk$ . В частности, эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha} = \frac{y-y_1}{\cos \beta} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы, образованные прямой с осями координат. Направляющие косинусы прямой находятся по формулам

$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (3)$$

5) От канонических уравнений прямой, вводя параметр  $t$ , нетрудно перейти к параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x = lt + x_1, \\ y = mt + y_1, \\ z = nt + z_1. \end{cases} \quad (4)$$

6) Угол между двумя прямыми, заданными их каноническими уравнениями  $(x-x_1)/l_1 = (y-y_1)/m_1 = (z-z_1)/n_1$  и  $(x-x_2)/l_2 = (y-y_2)/m_2 = (z-z_2)/n_2$ , определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}; \quad (5)$$

условие параллельности двух прямых:

$$l_1/l_2 = m_1/m_2 = n_1/n_2; \quad (6)$$

условие перпендикулярности двух прямых:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (7)$$

7) Необходимое и достаточное условие нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости (условие компланарности двух прямых):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Если величины  $l_1$ ,  $m_1$ ,  $n_1$  не пропорциональны величинам  $l_2$ ,  $m_2$ ,  $n_2$ , то указанное соотношение является необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

8) Угол между прямой  $(x-x_1)/l=(y-y_1)/m=(z-z_1)/n$  и плоскостью  $Ax+By+Cz+D=0$  определяется по формуле

$$\sin \varphi = \frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{l^2+m^2+n^2}}; \quad (9)$$

условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al+Bm+Cn=0; \quad (10)$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$A/l=B/m=C/n. \quad (11)$$

9) Для определения точки пересечения прямой  $(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n$  с плоскостью  $Ax+By+Cz+D=0$  нужно решить совместно их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой  $x=lt+x_0$ ,  $y=mt+y_0$ ,  $z=nt+z_0$ :

а) если  $Al+Bm+Cn \neq 0$ , то прямая пересекает плоскость;

б) если  $Al+Bm+Cn=0$  и  $Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$ , то прямая параллельна плоскости;

в) если  $Al+Bm+Cn=0$  и  $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ , то прямая лежит в плоскости.

316. Уравнения прямых  $2x-y+3z-1=0$  и  $5x+4y-z-7=0$  привести к каноническому виду.

Δ I способ. Исключив сначала  $y$ , а затем  $z$ , имеем

$$13x+11z-11=0 \text{ и } 17x+11y-22=0.$$

Если разрешить каждое из уравнений относительно  $x$ , то получим

$$x = \frac{11(y-2)}{-17} = \frac{11(z-1)}{-13}, \text{ т. е. } \frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

II способ. Найдем вектор  $s=l+i+mj+nk$ , параллельный искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен нормальным векторам  $N_1=2i-1j+3k$  и  $N_2=5i+4j-k$  заданных плоскостей, то за  $s$  можно принять векторное произведение векторов  $N_1$  и  $N_2$ :

$$s = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11i + 17j + 13k.$$

Таким образом,  $l=-11$ ;  $m=17$ ;  $n=13$ .

В качестве точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ , через которую проходит искомая прямая, можно взять точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью  $yOz$ . Так как при этом  $x_1=0$ , то координаты  $y_1$  и  $z_1$  этой точки определяются из системы уравнений заданных плоскостей, если в них положить  $x=0$ :

$$\begin{cases} -y+3z-1=0, \\ 4y-z-7=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим  $y_1=2$ ,  $z_1=1$ . Итак, искомая прямая определяется уравнениями  $x/(-11)=(y-2)/17=(z-1)/13$ . ▲

317. Построить прямую  $\begin{cases} 2x+3y+3z-9=0, \\ 4x+2y+z-8=0. \end{cases}$

Δ Искомую прямую можно построить как линию пересечения плоскостей. Для этого запишем уравнения этих плоскостей в отрезках на осях:  $x/4,5+y/3+z/3=1$ ,  $x/2+y/4+z/8=1$ . Построив данные плоскости, получим искомую прямую (рис. 20). ▲

318. Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую  $(x-2)/2 = (y-1)/3 = (z-3)/1$ .

Δ Используя условие (11) перпендикулярности прямой и плоскости и полагая  $A=l$ ,  $B=m$ ,  $C=n$ ,  $D=0$ , составим уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной заданной прямой. Это уравнение имеет вид  $2x+3y+z=0$ .

Найдем точку пересечения этой плоскости и данной прямой. Параметрические уравнения прямой запишутся так:  $x=2t+2$ ,  $y=3t+1$ ,  $z=t+3$ . Для определения  $t$  имеем уравнение  $2(2t+2)+3(3t+1)+t+3=0$ , откуда  $t=-5/7$ . Координаты точки пересечения  $x=4/7$ ,  $y=-8/7$ ,  $z=16/7$ , т. е.  $M(4/7; -8/7; 16/7)$ .

Остается составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и через точку  $M$ ; используя соотношения (1), получим

$$x/(4/7) = y/(-8/7) = z/(16/7), \text{ или } x/1 = y/(-2) = z/4. \blacktriangle$$

319. В уравнениях прямой  $x/2 = y/(-3) = z/n$  определить параметр  $n$  так, чтобы эта прямая пересеклась с прямой  $(x+1)/3 = (y+5)/2 = z/1$ , и найти точку их пересечения.

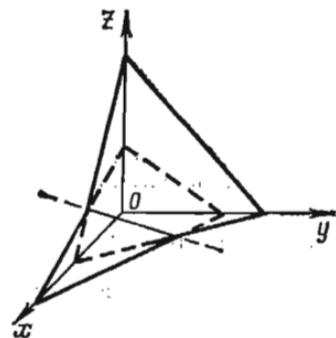


Рис. 20

Δ Для нахождения параметра  $n$  используем условие (8) пересечения двух прямых; полагая  $x_1=-1$ ,  $y_1=-5$ ,  $z_1=0$ ,  $x_2=0$ ,  $y_2=0$ ,  $z_2=0$ ,  $l_1=3$ ,  $m_1=2$ ,  $n_1=1$ ,  $l_2=2$ ,  $m_2=-3$ ,  $n_2=n$ , получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & n \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 2n+10+3-15n=0, \text{ т. е. } n=1.$$

Чтобы найти координаты точки пересечения прямых  $x/2 = y/(-3) = z/1$  и  $(x+1)/3 = (y+5)/2 = z/1$ , выразим из первых уравнений  $x$  и  $y$  через  $z$ :  $x=2z$ ,  $y=-3z$ . Подставляя эти значения в равенство  $(x+1)/3 = (y+5)/2$ , имеем  $(2z+1)/3 = (-3z+5)/2$ , откуда  $z=1$ . Зная  $z$ , находим  $x=2z=2$ ,  $y=-3z=-3$ . Следовательно,  $M(2; -3; 1)$ .  $\blacktriangle$

320. Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M(3; 2; -1)$  и пересекающей ось  $Ox$  под прямым углом.

Δ Так как прямая перпендикулярна оси  $Ox$  и пересекает ее, то она проходит через точку  $N(3; 0; 0)$ . Составив уравнения прямой, проходящей через точки  $M$  и  $N$ , получаем  $(x-3)/0 = (y-2)/(-2) = (z+1)/1$ .  $\blacktriangle$

321. Дана плоскость  $x+y-2z-6=0$  и вне ее точка  $M(1; 1; 1)$ . Найти точку  $N$ , симметричную точке  $M$  относительно данной плоскости.

Δ Запишем уравнения любой прямой, проходящей через точку  $M$ :  $(x-1)/l = (y-1)/m = (z-1)/n$ . Координаты  $\{l; m; n\}$  направляющего вектора прямой, перпендикулярной плоскости, можно заменить координатами нормального вектора  $\mathbf{n} = \{1; 1; -2\}$  данной плоскости. Тогда уравнения этой прямой запишутся в виде  $(x-1)/1 = (y-1)/1 = (z-1)/(-2)$ .

Найдем проекцию точки  $M$  на данную плоскость, решив совместно уравнения

$$x+y-2z-6=0, (x-1)/1 = (y-1)/1 = (z-1)/(-2).$$

Перепишем уравнения прямой в виде  $x=t+1$ ,  $y=t+1$ ,  $z=-2t+1$ . Подставляя эти выражения для  $x$ ,  $y$  и  $z$  в уравнение плоскости, найдем  $t=1$ , откуда  $x=2$ ,  $y=2$ ,  $z=-1$ .

Координаты симметричной точки найдутся из формул  $\bar{x}=(x_M+x_N)/2$ ,  $\bar{y}=(y_M+y_N)/2$ ,  $\bar{z}=(z_M+z_N)/2$ , т. е.  $2=(1+x_N)/2$ ,  $2=(1+y_N)/2$ ,  $-1=(1+z_N)/2$ , откуда  $x_N=3$ ,  $y_N=3$ ,  $z_N=-3$ . Следовательно,  $N(3; 3; -3)$ . ▲

**322.** Дана прямая  $(x-1)/2=y/3=(z+1)/(-1)$  и вне ее точка  $M(1; 1; 1)$ . Найти точку  $N$ , симметричную точке  $M$  относительно данной прямой.

△ Уравнение плоскости, проецирующей точку  $M$  на данную прямую, имеет вид

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0.$$

Координаты нормального вектора  $\{A; B; C\}$  плоскости, перпендикулярной прямой, заменим координатами направляющего вектора  $\{2; 3; -1\}$  данной прямой; тогда получим

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0, \text{ или } 2x+3y-z-4=0.$$

Найдем проекцию точки  $M$  на прямую, для чего совместно решим систему уравнений

$$2x+3y-z-4=0, (x-1)/2=y/3=(z+1)/(-1).$$

Параметрические уравнения данной прямой имеют вид  $x=2t+1$ ,  $y=3t$ ,  $z=-t-1$ . Подставляя  $x$ ,  $y$  и  $z$  в уравнение плоскости, найдем  $t=1/14$ . Отсюда  $x=8/7$ ,  $y=3/14$ ,  $z=-15/14$ .

Тогда координаты симметричной точки можно найти, используя формулы для координат середины отрезка, т. е.  $8/7=(1+x_N)/2$ ,  $3/14=(1+y_N)/2$ ,  $-15/14=(1+z_N)/2$ , откуда  $x_N=9/7$ ,  $y_N=-4/7$ ,  $z_N=-22/7$ . Итак,  $N(9/7; -4/7; -22/7)$ . ▲

**323.** Через прямую  $(x+1)/2=(y-1)/(-1)=(z-2)/3$  провести плоскость, параллельную прямой  $x/(-1)=(y+2)/2=(z-3)/(-3)$ .

△ Запишем уравнения первой из заданных прямых с помощью уравнений двух плоскостей, проецирующих ее соответственно на плоскости  $xOy$  и  $yOz$ :

$$(x+1)/2=(y-1)/(-1), \text{ или } x+2y-1=0;$$

$$(y-1)/(-1)=(z-2)/3, \text{ или } 3y+z-5=0.$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую, имеет вид

$$x+2y-1+\lambda(3y+z-5)=0, \text{ или } x+(2+3\lambda)y+\lambda z-(1+5\lambda)=0.$$

Используя условие параллельности прямой и плоскости, определим  $\lambda$  так, чтобы соответствующая плоскость пучка была параллельна второй из заданных прямых. Имеем  $-1 \cdot 1 + 2(2+3\lambda) - 3\lambda = 0$ , или  $3\lambda + 3 = 0$ , откуда  $\lambda = -1$ . Таким образом, искомая плоскость определяется уравнением  $x - y - z + 4 = 0$ . ▲

**324.** Найти уравнения проекции прямой  $(x-1)/1=(y+1)/2=z/3$  на плоскость  $x+y+2z-5=0$ .

△ Запишем уравнения заданной прямой в виде уравнений двух плоскостей, проецирующих ее соответственно на плоскости  $xOy$  и  $xOz$ :

$$(x-1)/1=(y+1)/2, \text{ или } 2x-y-3=0;$$

$$(x-1)/1=z/3, \text{ или } 3x-z-3=0.$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую, запишется в виде

$$2x-y-3+\lambda(3x-z-3)=0, \text{ или } (2+3\lambda)x-y-\lambda z-3(1+\lambda)=0.$$

Используя условие перпендикулярности плоскостей, выберем из этого пучка плоскость, проецирующую данную прямую на заданную плоскость. Имеем  $1 \cdot (2 + 3\lambda) + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-\lambda) = 0$ , или  $\lambda + 1 = 0$ , откуда  $\lambda = -1$ . Итак, уравнение проецирующей плоскости имеет вид

$$2x - y - 3 + (-1) \cdot (3x - z - 3) = 0, \text{ или } x + y - z = 0.$$

Искомую проекцию можно определить как линию пересечения двух плоскостей — заданной и проецирующей:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Приведя эти уравнения прямой к каноническому виду, окончательно получим  $x/1 = (y - 5/3)/(-1) = (z - 5/3)/0$ . ▲

325. Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M(5; 3; 4)$  и параллельной вектору  $s = 2i + 5j - 8k$ .

△ Воспользуемся каноническими уравнениями прямой. Полагая в равенствах (2)  $l = 2$ ,  $m = 5$ ,  $n = -8$ ,  $x_1 = 5$ ,  $y_1 = 3$ ,  $z_1 = 4$ , получаем  $(x - 5)/2 = (y - 3)/5 = (z - 4)/(-8)$ . ▲

326. Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M(1; 1; 1)$  и перпендикулярной векторам  $s_1 = 2i + 3j + k$  и  $s_2 = 3i + j + 2k$ .

△ Прямая параллельна вектору  $s_1 \times s_2 = 5i - j - 7k$ , поэтому она определяется уравнениями  $(x - 1)/5 = (y - 1)/(-1) = (z - 1)/(-7)$ . ▲

327. Найти уравнения проекций прямой

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 26 = 0, \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$$

на координатные плоскости.

328. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0, \\ 3x + y - 17z = 0. \end{cases}$$

329. Вычислить углы, образованные с осями координат прямой

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0, \\ x - 3z + 8 = 0. \end{cases}$$

330. Найти уравнения прямой, проходящей через точку  $M(1; -2; 3)$  и образующей с осями  $Ox$  и  $Oy$  углы  $45^\circ$  и  $60^\circ$ .

331. Найти уравнения прямой, проходящей через точку  $N(5; -1; -3)$  и параллельной прямой

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

332. Найти точку пересечения прямых  $(x - 1)/(-1) = (y - 2)/5 = (z + 4)/2$  и  $(x - 2)/2 = (y - 5)/(-2) = (z - 1)/3$ .

333. Даны три последовательные вершины параллелограмма:  $A(3; 0; -1)$ ,  $B(1; 2; -4)$  и  $C(0; 7; -2)$ . Найти уравнения сторон  $AD$  и  $CD$ .

334. Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точки  $M(2; -5; 1)$  и  $N(-1; 1; 2)$ .

335. Вычислить расстояние между параллельными прямыми  $x/1 = (y-3)/2 = (z-2)/1$  и  $(x-3)/1 = (y+1)/2 = (z-2)/1$ .

336. Даны точки  $A(-1; 2; 3)$  и  $B(2; -3; 1)$ . Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M(3; -1; 2)$  и параллельной вектору  $\overline{AB}$ .

337. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0, \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0, \\ 3x - z = 0. \end{cases}$$

338. В плоскости  $yOz$  найти прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную прямой  $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ y + 2z = -2. \end{cases}$

339. Даны две вершины параллелограмма  $ABCD$ :  $C(-2; 3; -5)$  и  $D(0; 4; -7)$  и точка пересечения диагоналей  $M(1; 2; -3,5)$ . Найти уравнения стороны  $AB$ .

340. Треугольник  $ABC$  образован пересечением плоскости  $x + 2y + 4z - 8 = 0$  с координатными осями. Найти уравнения средней линии треугольника, параллельной плоскости  $xOy$ .

341. Даны точки  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 3; 3)$  и  $C(3; 3; 2)$ . Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $A$  и перпендикулярной векторам  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ .

342. Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M(0; 2; 1)$  и образующей равные углы с векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{c} = 3\mathbf{k}$ .

343. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую  $(x+1)/3 = (y-2)/(-1) = z/4$  и перпендикулярной плоскости  $3x + y - z + 2 = 0$ .

344. Найти уравнения проекции прямой  $x/2 = (y+3)/1 = (z-2)/(-2)$  на плоскость  $2x + 3y - z - 5 = 0$ .

## § 2. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. **Сфера.** В декартовой системе координат сфера, имеющая центр в точке  $C(a; b; c)$  и радиус  $r$ , определяется уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \quad (1)$$

Если центр сферы находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (2)$$

345. Найти координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0.$$

△ Приведем уравнение сферы к каноническому виду (1), для чего дополним до полных квадратов члены, содержащие  $x$ ,  $y$ , и  $z$ , т. е. перепишем уравнение в следующем виде:

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + (y^2 + 2y + 1) - 1 + z^2 + 1 = 0,$$

или

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, центр сферы — точка  $C(1/2; -1; 0)$ , а ее радиус  $r=1/2$ . ▲

**346.** Составить уравнение сферы, проходящей через точки  $A(1; 2; -4)$ ,  $B(1; -3; 1)$  и  $C(2; 2; 3)$ , если ее центр находится в плоскости  $xOy$ .

△ Так как точки  $A, B$  и  $C$  принадлежат сфере  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ , центр которой находится в плоскости  $xOy$  (откуда  $c=0$ ), то их координаты должны обращать искомое уравнение в тождество; поэтому получаем уравнения

$$\begin{aligned}(1-a)^2 + (2-b)^2 + (-4)^2 &= r^2, & (1-a)^2 + (-3-b)^2 + 1^2 &= r^2, \\ (2-a)^2 + (2-b)^2 + 3^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(1-a)^2 + (2-b)^2 + 16 &= (1-a)^2 + (-3-b)^2 + 1, \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 + 16 &= (2-a)^2 + (2-b)^2 + 9,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(2-b)^2 - (-3-b)^2 &= -15, \text{ т. е. } 10b = 10; \\ (1-a)^2 - (2-a)^2 &= -7, \text{ т. е. } 2a = -4,\end{aligned}$$

Итак,  $a=-2$ ,  $b=1$ . Следовательно, центр сферы — точка  $C(-2; 1; 0)$ . Далее, находим  $r^2 = (1-a)^2 + (2-b)^2 + 16 = (1+2)^2 + (2-1)^2 + 16 = 26$ . Таким образом, искомое уравнение имеет вид  $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$ . ▲

**347.** Найти координаты центра и радиус окружности

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0. \end{cases}$$

△ Из центра сферы  $C(3; -2; 1)$  опустим на плоскость  $2x - 2y - z + 9 = 0$  перпендикуляр, уравнения которого можно записать в виде

$$(x-3)/2 = (y+2)/(-2) = (z-1)/(-1) \quad (*)$$

(в качестве направляющего вектора этого перпендикуляра можно взять нормальный вектор заданной плоскости).

Теперь найдем координаты точки пересечения прямой (\*) с плоскостью  $2x - 2y - z + 9 = 0$ . Эта точка и есть центр окружности, являющейся сечением сферы данной плоскостью.

Записав уравнения прямой в параметрическом виде  $x=2t+3$ ,  $y=-2t-2$ ,  $z=-t+1$  и подставив  $x, y, z$  в уравнение плоскости, получим

$$2(2t+3) - 2(-2t-2) - (-t+1) + 9 = 0, \text{ т. е. } t = -2.$$

Следовательно,  $x=2(-2)+3=-1$ ,  $y=-2(-2)-2=2$ ,  $z=-(-2)+1=3$ , т. е. центр окружности находится в точке  $C(-1; 2; 3)$ .

Найдем теперь расстояние  $d$  от центра сферы  $C(3; -2; 1)$  до плоскости  $2x - 2y - z + 9 = 0$ :

$$d = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 1 + 9}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = 6.$$

Радиус окружности  $r$  определится из равенства  $r^2 = R^2 - d^2$ , где  $R$  — радиус сферы; таким образом,  $r^2 = 100 - 36 = 64$ , т. е.  $r = 8$ . ▲

**348.** Определить координаты центров и радиусы сфер, заданных уравнениями: 1)  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$ ; 2)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$ ; 3)  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4y - 3z + 2 = 0$ ; 4)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ ; 5)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 3$ .

**349.** Как расположена точка  $M(1; -1; 3)$  относительно сфер: 1)  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 19$ ; 2)  $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$ ; 3)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y - 2z = 0$ ?

350. Составить уравнение сферы, если точки  $M(4; -1; -3)$  и  $N(0; 3; -1)$  являются концами одного из ее диаметров.

351. Составить уравнения окружности, образующейся в сечении сферы  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$  координатной плоскостью  $z=0$ .

352. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ ,  $2x + 2y - z = 18$ .

2. Цилиндрические поверхности и конус второго порядка. Уравнение вида  $F(x, y) = 0$  в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси  $Oz$ . Аналогично, уравнение  $F(x, z) = 0$  определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси  $Oy$ , и  $F(y, z) = 0$  — цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси  $Ox$ .

Канонические уравнения цилиндров второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — эллиптический цилиндр,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — гиперболический цилиндр,}$$

$$y^2 = 2px \text{ — параболический цилиндр.}$$

Образующие всех трех цилиндров, определяемых этими уравнениями, параллельны оси  $Oz$ , а направляющей служит соответствующая кривая второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), лежащая в плоскости  $xOy$ .

Следует помнить, что кривую в пространстве можно задать либо параметрически, либо в виде линии пересечения двух поверхностей. Например, уравнения направляющей эллиптического цилиндра, т. е. уравнения эллипса в плоскости  $xOy$ , имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$z = 0.$$

Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат, осью которого служит ось  $Oz$ , записывается в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Аналогично, уравнения

$$\frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

являются уравнениями конусов второго порядка с вершиной в начале координат, осями которых служат соответственно оси  $Oy$  и  $Ox$ .

353. Какую поверхность определяют в пространстве уравнения:

1)  $x^2 = 4y$ ; 2)  $z^2 = xz$ ?

△ 1) Уравнение  $x^2 = 4y$  определяет параболический цилиндр с образующими, параллельными оси  $Oz$ . Направляющей цилиндрической поверхности является парабола  $x^2 = 4y$ ,  $z = 0$ .

2) Уравнение  $z^2 = xz$  может быть представлено в виде  $z(z-x)$  и распадается на два уравнения:  $z=0$  и  $z=x$ , т. е. оно определяет две плоскости — плоскость  $xOy$  и биссектральную плоскость  $z=x$ , проходящую через ось  $Oy$ . ▲

354. По какой линии пересекается конус  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$  с плоскостью  $y = 2$ ?

△ Исключив из системы уравнений  $y$ , получим  $x^2 + 4 - 2z^2 = 0$ , или  $z^2/2 - x^2/4 = 1$ . Следовательно, искомой линией пересечения является гипербола, лежащая в плоскости  $y=2$ ; ее действительная ось параллельна оси  $Oz$ , а мнимая — оси  $Ox$ . ▲

**355.** Составить уравнение конической поверхности, вершиной которой служит точка  $M(0; 0; 1)$ , а направляющей — эллипс  $x^2/25 + y^2/9 = 1, z = 3$ .

△ Составим уравнение образующей  $AM$ , где  $A(x_0; y_0; z_0)$  — точка, лежащая на эллипсе. Уравнения этой образующей имеют вид  $x/x_0 = y/y_0 = (z-1)/(z_0-1)$ . Так как точка  $A$  лежит на эллипсе, то ее координаты удовлетворяют уравнениям эллипса, т. е.  $x_0^2/25 + y_0^2/9 = 1, z_0 = 3$ .

Исключив теперь  $x_0, y_0$  и  $z_0$  из системы

$$x/x_0 = (z-1)/(z_0-1), \quad y/y_0 = (z-1)/(z_0-1), \quad x_0^2/25 + y_0^2/9 = 1, \quad z_0 = 3,$$

получим уравнение искомого конуса:  $x^2/25 + y^2/9 - (z-1)^2/4 = 0$ . ▲

**356.** Установить, какие поверхности определяются следующими уравнениями, и построить эти поверхности: 1)  $x^2 + y^2 = 4$ ; 2)  $x^2/25 + y^2/16 = 1$ ; 3)  $x^2 - y^2 = 1$ ; 4)  $y^2 = 2x$ ; 5)  $z^2 = y$ ; 6)  $z + x^2 = 0$ ; 7)  $x^2 + y^2 = 2y$ ; 8)  $x^2 + y^2 = 0$ ; 9)  $x^2 - z^2 = 0$ ; 10)  $y^2 = xy$ .

**357.** Составить уравнения линий пересечения конуса  $x^2 - y^2 + z^2 = 0$  с плоскостями: 1)  $y = 3$ ; 2)  $z = 1$ ; 3)  $x = 0$ .

**358.** Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющие которого заданы уравнениями: 1)  $x = a, y^2 + z^2 = b^2$ ; 2)  $y = b, x^2 + z^2 = a^2$ ; 3)  $z = c, x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

**3. Поверхности вращения.** Поверхности второго порядка. Если лежащая в плоскости  $yOz$  кривая  $F(y, z) = 0, x = 0$  вращается вокруг оси  $Oz$ , то уравнение образуемой ею поверхности вращения имеет вид

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Аналогично, уравнение  $F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$  определяет поверхность, образованную вращением вокруг оси  $Ox$  кривой  $F(x, y) = 0, z = 0$ ; уравнение  $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$  — поверхность, образованную вращением той же кривой вокруг оси  $Oy$ .

Приведем уравнения поверхностей вращения второго порядка, образуемых вращением эллипса, гиперболы и параболы вокруг их осей симметрии.

*Эллипсоид вращения*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

осью вращения служит ось  $Oz$ ; эллипсоид сжат при  $a > c$  и удлиннен при  $a < c$  (при  $a = c$  он превращается в сферу).

*Однополостный гиперboloид вращения*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

осью вращения является ось  $Oz$  (служащая мнимой осью гиперболы, вращением которой образована эта поверхность).

*Двуполостный гиперboloид вращения*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1;$$

осью вращения является ось  $Oz$  (служащая действительной осью гиперболы, вращением которой образована эта поверхность).

### Параболоид вращения

$$x^2 + y^2 = 2pz;$$

осью вращения служит ось  $Oz$ .

Поверхности вращения второго порядка являются частным случаем поверхностей второго порядка общего вида, канонические уравнения которых таковы:  
**Эллипсоид** (трехосный)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**Однополостный гиперболоид**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**Двуполостный гиперболоид**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

**Эллиптический параболоид**

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0).$$

Кроме этих четырех поверхностей второго порядка, трех цилиндров второго порядка (эллиптического, гиперболического и параболического) и конуса второго порядка, существует еще одна поверхность второго порядка — **гиперболический параболоид**, каноническое уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0).$$

Таким образом, всего существует девять различных поверхностей второго порядка.

**359.** Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой  $x + 2y = 4, z = 0$  вокруг оси  $Ox$ .

△ Поверхностью вращения является конус с вершиной в точке  $M(4; 0; 0)$ . Пусть произвольная точка  $A$  искомой поверхности имеет координаты  $X; Y; Z$ ; ей соответствует на данной прямой точка  $B(x; y; 0)$ . Точки  $A$  и  $B$  лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси вращения  $Ox$ . Тогда  $X = x, Y^2 + Z^2 = y^2$ .

Подставляя выражения для  $x$  и  $y$  в уравнение данной прямой, получим уравнения искомой поверхности вращения:  $X + 2\sqrt{Y^2 + Z^2} = 4$ , или  $4(Y^2 + Z^2) - (X - 4)^2 = 0$ , т. е.  $4Y^2 + 4Z^2 - (X - 4)^2 = 0$ . ▲

**360.** Какую поверхность определяет уравнение  $x^2 = yz$ ?

△ Произведем поворот координатных осей вокруг оси  $Ox$  на угол  $\alpha = 45^\circ$  (от оси  $Oy$  к оси  $Oz$  против часовой стрелки). Формулы преобразования координат:  $x = x', y = y' \cos \alpha - z' \sin \alpha, z = y' \sin \alpha + z' \cos \alpha$ . Так как  $\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{2}/2$ , то  $x = x', y = (\sqrt{2}/2)(y' - z'), z = (\sqrt{2}/2)(y' + z')$ .

Подставив эти выражения в уравнение поверхности, получим  $x'^2 = y'^2/2 - z'^2/2$ , или  $x'^2 - y'^2/2 + z'^2/2 = 0$  (конус с вершиной в начале координат, осью которого является ось ординат). ▲

**361.** Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой  $2y + z - 2 = 0, x = 0$  вокруг оси  $Oz$ .

**362.** Найти уравнения линий пересечения поверхности  $z = x^2 - y^2$  плоскостями  $z = 1, y = 1, x = 1, z = -1$ .

**363.** Какие поверхности определяются уравнениями: 1)  $z = xy$ , 2)  $z^2 = xy$ ?

● Произвести поворот вокруг оси  $Oz$  на угол  $45^\circ$ .

364. Найти уравнение эллиптического параболоида, имеющего вершину в начале координат, осью которого является ось  $Oz$ , если на его поверхности заданы две точки  $M(-1; -2; 2)$  и  $N(1; 1; 1)$ .

365. Составить уравнение эллипсоида, осями симметрии которого служат оси координат, если на его поверхности заданы три точки  $A(3; 0; 0)$ ,  $B(-2; 5/3; 0)$  и  $C(0; -1; 2/\sqrt{5})$ .

366. Найти уравнения линии пересечения поверхностей  $z = 2 - x^2 - y^2$  и  $z = x^2 + y^2$ .

367. Исследовать, какие поверхности определяет уравнение  $z^2 + x^2 + y^2 = m(z^2 + y^2)$  при: 1)  $m = 0$ ; 2)  $0 < m < 1$ ; 3)  $m > 1$ ; 4)  $m < 0$ ; 5)  $m = 1$ .

4. Общее уравнение поверхности второго порядка. Общее уравнение второй степени относительно  $x$ ,  $y$  и  $z$  имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

Это уравнение может определять сферу, эллипсоид, однополостный или двуполостный гиперболоид, эллиптический или гиперболический параболоид, цилиндрическую или коническую поверхность второго порядка. Оно может также определять совокупность двух плоскостей, точку, прямую или даже не иметь геометрического смысла (определять «мнимую» поверхность).

При  $D = 0$ ,  $E = 0$ ,  $F = 0$  общее уравнение принимает вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

В этом случае уравнение легко упрощается с помощью параллельного переноса осей координат, что позволяет сразу установить его геометрический смысл.

368. Каков геометрический смысл уравнения

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy - 4x - 8y - 12z + 3 = 0?$$

△ Данное уравнение можно записать в виде

$$(x + 2y + 3z)^2 - 4(x + 2y + 3z) + 3 = 0.$$

Разложим на множители левую часть уравнения:  $(x + 2y + 3z - 1)(x + 2y + 3z - 3) = 0$ . Таким образом, уравнение определяет совокупность двух плоскостей  $x + 2y + 3z - 1 = 0$ ,  $x + 2y + 3z - 3 = 0$ . ▲

369. Каков геометрический смысл уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy = 0?$$

△ Умножая на 2, перепишем уравнение в виде

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2xz - 2xy = 0,$$

или

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты только тех точек, для которых выполняются равенства  $x = y$ ,  $y = z$ ,  $x = z$ . Таким образом, уравнение определяет прямую  $x = y = z$ . ▲

370. Каков геометрический смысл уравнения

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 8z + 5 = 0?$$

△ Перепишем уравнение в виде  $(x - y)^2 + 4(z - 1)^2 = -1$ . Это уравнение не имеет геометрического смысла, так как его левая часть не может быть отрицательной ни при каких действительных значениях  $x$ ,  $y$  и  $z$ . ▲

**371.** Привести к каноническому виду уравнение

$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$$

△ Сгруппируем члены с одинаковыми координатами:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) = -13.$$

Дополнив до полных квадратов выражения в скобках, получим.

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 2y + 1) + 36(z^2 - 2z + 1) = -13 + 4 + 9 + 36,$$

или 
$$4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 + 36(z-1)^2 = 36.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку  $O'(1; 1; 1)$ . Формулы преобразования координат имеют вид  $x = x' + 1$ ,  $y = y' + 1$ ,  $z = z' + 1$ . Тогда уравнение поверхности запишется так:

$$4x'^2 + 9y'^2 + 36z'^2 = 36, \text{ или } x'^2/9 + y'^2/4 + z'^2 = 1.$$

Это уравнение определяет эллипсоид; его центр находится в новом начале координат, а полуоси соответственно равны 3, 2 и 1. ▲

**372.** Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0.$$

△ Сгруппируем члены, содержащие  $x$  и  $y$ :  $(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 2z$ . Дополняем до полных квадратов выражения в скобках:

$$(x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 8y + 16) = 2z + 4 - 16, \text{ или } (x-2)^2 - (y-4)^2 = 2(z-6).$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку  $O'(2; 4; 6)$ . Тогда  $x = x' + 2$ ,  $y = y' + 4$ ,  $z = z' + 6$ . В результате получаем уравнение  $x'^2 - y'^2 = 2z'$ , определяющее гиперболический параболоид. ▲

**373.** Какая поверхность определяется уравнением

$$4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0?$$

△ Выполнив соответствующие преобразования, получим

$$4(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 4(z^2 + 2z) = -4;$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) + 4(z^2 + 2z + 1) = -4 + 4 - 4 + 4;$$

$$4(x-1)^2 - (y-2)^2 + 4(z+1)^2 = 0.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку  $O'(1; 2; -1)$ . Формулы преобразования координат  $x = x' + 1$ ,  $y = y' + 2$ ,  $z = z' - 1$ . Тогда данное уравнение примет вид  $4x'^2 - y'^2 + 4z'^2 = 0$ , или  $x'^2 - y'^2/4 + z'^2 = 0$ . Это уравнение конической поверхности. ▲

Выяснить, какие поверхности определяются следующими уравнениями:

**374.**  $x^2 - xy - xz + yz = 0$ . **375.**  $x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$ .

**376.**  $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 0$ . **377.**  $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$ .

**378.**  $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y + 4z + 4 = 0$ .

**379.**  $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$ .

**380.**  $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$ .

**381.**  $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$ .

**382.**  $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$ .

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ

§ 1. ПОНЯТИЕ ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ  $n$ -ГО ПОРЯДКА

Определитель четвертого порядка, соответствующий таблице элементов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \text{ определяется равенством}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \\ - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

С помощью определителей четвертого порядка можно аналогично ввести понятие определителя пятого порядка и т. д.

Для определителей любых порядков остаются в силе определения минора и алгебраического дополнения некоторого элемента и обе теоремы об алгебраических дополнениях, сформулированные для определителей третьего порядка.

Таким образом, обозначая через  $M_{ik}$  минор, а через  $A_{ik}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ik}$  определителя  $n$ -го порядка (т. е. элемента, находящегося в  $i$ -й строке и  $k$ -м столбце этого определителя), имеем

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Пусть  $D$  — определитель  $n$ -го порядка. Раскрывая его сначала по элементам  $i$ -й строки, а затем по элементам  $k$ -го столбца, в силу теоремы 1 (см. с. 41) получим

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}; \\ D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}.$$

С другой стороны, при  $j \neq i$  и  $k \neq l$  в силу теоремы 2 (см. с. 41) имеем

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \dots + a_{jn}A_{in} = 0, \\ a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \dots + a_{nk}A_{nl} = 0.$$

Свойства определителей второго и третьего порядка, сформулированные на с. 41, справедливы и для определителей любого порядка.

Решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

определяющей которой

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

находится по формулам

$$x_1 = D_1/D; \quad x_2 = D_2/D; \quad \dots; \quad x_n = D_n/D.$$

В этих формулах  $D$  — определитель системы, а  $D_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) — определитель, полученный из определителя системы заменой  $k$ -го столбца (т. е. столбца коэффициентов при определяемом неизвестном) столбцом свободных членов:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, k-1} & b_1 & a_{1, k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2, k-1} & b_2 & a_{2, k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n, k-1} & b_n & a_{n, k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

### 383. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

△ Произведем следующие действия: 1) из элементов 1-й строки вычтем утроенные элементы 2-й строки; 2) к элементам 3-й строки прибавим удвоенные элементы 2-й строки; 3) из элементов 4-й строки вычтем элементы 2-й строки. Тогда исходный определитель преобразуется к виду

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам 1-го столбца:

$$D = - \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя к элементам 1-й строки элементы 3-й строки и вычитая из элементов 2-й строки элементы 3-й строки, получим

$$D = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам 1-го столбца:

$$D = - \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -70. \quad \blacktriangle$$

### 384. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

△ Вынесем за знак определителя общие множители 2, 4 и 5-го столбцов:

$$D = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-го столбца элементы 1-го столбца и разложим полученный определитель по элементам 1-й строки:

$$D = 20 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к элементам 2-й строки элементы 1-й строки, вынесем  $-2$  (общий множитель элементов 1-го столбца) за знак определителя, а затем разложим полученный определитель по элементам 1-го столбца:

$$D = -40 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-й строки элементы 3-й строки, вынесем 2 (общий множитель элементов 1-й строки) за знак определителя и разложим полученный определитель по элементам 3-го столбца:

$$D = -80 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -80 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 640. \blacktriangle$$

385. Найти  $y$  из системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ y + 2z + 3t = 20, \\ z + 2t + 3x = 14, \\ t + 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

$\Delta$  Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 0 \cdot t = 14, \\ 0 \cdot x + y + 2z + 3t = 20, \\ 3x + 0 \cdot y + z + 2t = 14, \\ 2x + 3y + 0 \cdot z + t = 12. \end{cases}$$

Найдем

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Из элементов 2-го столбца вычтем удвоенные элементы 1-го столбца; из элементов 3-го столбца вычтем утроенные элементы 1-го столбца:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

Из элементов 2-го столбца вычтем удвоенные элементы 1-го столбца; из элементов 3-го столбца вычтем утроенные элементы 1-го столбца:

$$D = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -10 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 2(8 + 40) = 96.$$

Находим

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 2 & 3 \\ 3 & 14 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Из элементов 3-й строки вычтем утроенные элементы 1-й строки; из элементов 4-й строки вычтем удвоенные элементы 1-й строки:

$$D_y = 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 0 & -14 & -8 & 2 \\ 0 & -8 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -14 & -8 & 2 \\ -8 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Из элементов 1-й строки вычтем утроенные элементы 3-й строки; из элементов 2-й строки вычтем удвоенные элементы 3-й строки:

$$D_y = 8 \begin{vmatrix} 17 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 17 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 192.$$

Отсюда  $y = D_y/D = 192/96 = 2$ . ▲

**386.** Вычислить определитель

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

△ Вычтем из 2-й строки 1-ю, умноженную на  $a$ ; из 3-й строки 2-ю, умноженную на  $a$ ; из 4-й строки 3-ю, умноженную на  $a$ :

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из 2-й строки 1-ю, умноженную на  $b$ ; из 3-й строки 2-ю, умноженную на  $b$ :

$$\begin{aligned} V &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-bc & d^2-db \end{vmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что рассматриваемый определитель равен нулю тогда и только тогда, когда среди чисел  $a, b, c, d$  имеются равные. ▲

Вычислить определители:

$$387. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$388. \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}.$$

$$389. \begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10 \end{vmatrix}.$$

$$390. \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}.$$

Решить системы уравнений:

$$391. \begin{cases} y - 3z + 4t = -5, \\ x - 2z + 3t = -4, \\ 3x + 2y - 5t = 12, \\ 4x + 3y - 5z = 5. \end{cases}$$

$$392. \begin{cases} x - 3y + 5z - 7t = 12, \\ 3x - 5y + 7z - t = 0, \\ 5x - 7y + z - 3t = 4, \\ 7x - y + 3z - 5t = 16. \end{cases}$$

$$393. \begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3y + 4z = 18, \\ 5z + 6u = 39, \\ 7u + 8v = 68, \\ 9v + 10x = 55. \end{cases}$$

$$394. \begin{cases} 2x + 3y - 3z + 4t = 7, \\ 2x + y - z + 2t = 5, \\ 6x + 2y + z = 4, \\ 2x + 3y - 5t = -11. \end{cases}$$

## § 2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МАТРИЦЫ

С помощью равенств

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y', \end{aligned}$$

значения переменных  $x$  и  $y$  можно выразить линейно через значения переменных  $x'$  и  $y'$ . Эти равенства принято называть *линейным преобразованием* переменных  $x'$  и  $y'$ . Их можно рассматривать также как линейное преобразование координат точки (или вектора) на плоскости.

Таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей* рассматриваемого *линейного преобразования*, а определитель

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

— *определителем линейного преобразования*. В дальнейшем будем предполагать, что  $D_A \neq 0$ .

Можно также рассматривать линейное преобразование трех переменных (т. е. для пространства)\*

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

— соответственно матрица и определитель этого преобразования.

Матрица  $A$  называется *невырожденной (неособой)*, если  $D_A \neq 0$ . Если же  $D_A = 0$ , то матрица называется *вырожденной (особой)*.

Матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называются *квадратными матрицами* соответственно *второго* и *третьего порядков*.

Для большей общности ряд определений будет дан для матриц третьего порядка; применение их к матрицам второго порядка не вызывает затруднений.

\* Часто линейным преобразованием называют равенства более общего вида

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + b_1, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b_2, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + b_3. \end{aligned}$$

Здесь рассматривается линейное преобразование, для которого  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ . В курсах функционального анализа такое линейное преобразование называют *линейным оператором*.

Если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию  $a_{mn} = a_{nm}$ , то матрица называется *симметрической*.

Две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

считаются *равными* ( $A = B$ ) тогда и только тогда, когда равны их соответственные элементы, т. е. когда  $a_{mn} = b_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ).

*Суммой* двух матриц  $A$  и  $B$  называется матрица, определяемая равенством

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}.$$

*Произведением* числа  $m$  на матрицу  $A$  называется матрица, определяемая равенством

$$m \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

*Произведение* двух матриц  $A$  и  $B$  обозначается символом  $AB$  и определяется равенством

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix},$$

т. е. элемент матрицы-произведения, стоящий в  $i$ -й строке и  $k$ -м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  и  $k$ -го столбца матрицы  $B$ .

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется:  $AB \neq BA$ .

*Определитель произведения* двух матриц равен произведению определителей этих матриц.

*Нулевой матрицей* называется матрица, все элементы которой равны нулю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Сумма этой матрицы и любой матрицы  $A$  дает матрицу  $A$ :  $A + 0 = A$ .

*Единичной матрицей* называется матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении этой матрицы слева или справа на матрицу  $A$  получается матрица  $A$ :  $EA = AE = A$ . Единичной матрице отвечает тождественное линейное преобразование:  $x = x'$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$ .

Матрица  $B$  называется *обратной* по отношению к матрице  $A$ , если произведения  $AB$  и  $BA$  равны единичной матрице:  $AB=BA=E$ .

Для матрицы, обратной по отношению к матрице  $A$ , принято обозначение  $A^{-1}$ , т. е.  $B=A^{-1}$ .

Всякая невырожденная квадратная матрица  $A$  имеет обратную матрицу. Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/D_A & A_{21}/D_A & A_{31}/D_A \\ A_{12}/D_A & A_{22}/D_A & A_{32}/D_A \\ A_{13}/D_A & A_{23}/D_A & A_{33}/D_A \end{pmatrix},$$

где  $A_{mn}$  — алгебраическое дополнение элемента матрицы  $a_{mn}$  в ее определителе, т. е. произведение минора второго порядка, полученного вычеркиванием  $m$ -й строки и  $n$ -го столбца в определителе матрицы  $A$ , на  $(-1)^{m+n}$ .

Матрицей-столбцом называется матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Произведение  $AX$  определяется равенством

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

может быть записана в виде  $AX=B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы имеет вид  $X=A^{-1}B$  (если  $D_A \neq 0$ ).

Характеристическим уравнением матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  называются *характеристическими числами* матрицы; они всегда действительны, если исходная матрица является симметрической.

Система уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \xi_1 + a_{12} \xi_2 + a_{13} \xi_3 = 0, \\ a_{21} \xi_1 + (a_{22} - \lambda) \xi_2 + a_{23} \xi_3 = 0, \\ a_{31} \xi_1 + a_{32} \xi_2 + (a_{33} - \lambda) \xi_3 = 0, \end{cases}$$

в которой  $\lambda$  имеет одно из значений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и определитель которой в силу этого равен нулю, определяет тройку чисел  $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ , соответствующую данному характеристическому числу.

Эта совокупность трех чисел ( $\xi_1$ ;  $\xi_2$ ;  $\xi_3$ ) с точностью до постоянного множителя определяет ненулевой вектор  $\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k}$ , называемый *собственным вектором* матрицы.

**395.** Дано линейное преобразование  $x = x' + y' + z'$ ,  $y = x' + y'$ ,  $z = x'$  и даны точки в системе координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ :  $(1; -1; 1)$ ,  $(3; -2; -1)$ ,  $(-1; -2; -3)$ . Определить координаты этих точек в системе  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$\Delta$  Подставив координаты точек в равенства, определяющие данное линейное преобразование, получаем: если  $x' = 1$ ,  $y' = -1$ ,  $z' = 1$ , то  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$ , т. е.  $(1; 0; 1)$ ; если  $x' = 3$ ,  $y' = -2$ ,  $z' = -1$ , то  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 3$ , т. е.  $(0; 1; 3)$ ; если  $x' = -1$ ,  $y' = -2$ ,  $z' = -3$ , то  $x = -6$ ,  $y = -3$ ,  $z = -1$ , т. е.  $(-6; -3; -1)$ .  $\blacktriangle$

**396.** Написать линейное преобразование предыдущей задачи для перехода от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  к координатам  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ .

$\Delta$  Имеем  $x' = z$  (из третьего равенства);  $y' = y - z$  (вычитаем из второго равенства третье);  $z' = x - y$  (вычитаем из первого равенства второе).  $\blacktriangle$

**397.** Дано линейное преобразование  $x = x' + 2y'$ ,  $y = 3x' + 4y'$ . У каких точек оно не меняет координат?

$\Delta$  Нужно найти  $x$  и  $y$ , если  $x = x'$ ,  $y = y'$ , т. е.  $x = x + 2y$ ,  $y = 3x + 4y$ . Следовательно,  $x = x' = 0$ ,  $y = y' = 0$ .  $\blacktriangle$

**398.** У каких точек линейное преобразование  $x = 3x' - 2y'$ ,  $y = -5x' - 4y'$  не меняет координат?

$\Delta$  Имеем  $x = 3x - 2y$ ,  $y = 5x - 4y$ . Следовательно,  $x = y = x' = y'$ , т. е. линейное преобразование не меняет координат у точек  $(t; t)$  с одинаковыми координатами.  $\blacktriangle$

**399.** Найти сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

**400.** Найти матрицу  $2A + 5B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta 2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2A + 5B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

**401.** Найти произведения матриц  $AB$  и  $BA$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

402. Найти  $A^3$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

$$\Delta A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2 & 6+8 \\ 3+4 & 2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33+14 & 22+56 \\ 21+18 & 14+72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

403. Найти значение матричного многочлена  $2A^2 + 3A + 5E$  при  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , если  $E$  — единичная матрица третьего порядка.

$$\Delta A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad 2A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix},$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad 5E = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$2A^2 + 3A + 5E = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 15 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

404. Даны два линейных преобразования  $x = a_{11}x' + a_{12}y'$ ,  $y = a_{21}x' + a_{22}y'$  и  $x' = b_{11}x'' + b_{12}y''$ ,  $y' = b_{21}x'' + b_{22}y''$ . Подставляя  $x'$  и  $y'$  из второго преобразования в первое, получим линейное преобразование, выражающее  $x$  и  $y$  через  $x''$  и  $y''$ . Показать, что матрица полученного преобразования равна произведению матриц первого и второго преобразований.

$\Delta$  Имеем

$$x = a_{11}(b_{11}x'' + b_{12}y'') + a_{12}(b_{21}x'' + b_{22}y'') = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x'' + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y'',$$

$$y = a_{21}(b_{11}x'' + b_{12}y'') + a_{22}(b_{21}x'' + b_{22}y'') = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x'' + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y''.$$

Матрица полученного линейного преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

т. е. она является произведением матриц  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ .  $\blacktriangle$

405. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Найти обратную матрицу.

$\Delta$  Вычисляем определитель матрицы  $A$ :

$$D_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

406. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16, \end{cases}$$

представив ее в виде матричного уравнения.

△ Перепишем систему в виде  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения имеет вид  $X = A^{-1}B$ . Найдем  $A^{-1}$ . Имеем

$$D_A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, & A_{21} &= - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, & A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13, \\ A_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 126 + 70 - 208 \\ -90 - 56 + 128 \\ -18 + 14 + 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $z = -2$ . ▲

407. Дана матрица  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Найти ее характеристические числа и собственные векторы.

△ Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0, \text{ т. е. } \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

характеристические числа  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 7$ . Собственный вектор, соответствующий первому характеристическому числу, находим из системы уравнений

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)\xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 + (3-\lambda_1)\xi_2 = 0; \end{cases}$$

так как  $\lambda_1 = 1$ , то  $\xi_1$  и  $\xi_2$  связаны зависимостью  $2\xi_1 + \xi_2 = 0$ .

Полагая  $\xi_1 = \alpha$  ( $\alpha \neq 0$  — произвольное число), получаем  $\xi_2 = -2\alpha$  и собственный вектор, соответствующий характеристическому числу  $\lambda_1 = 1$ , есть  $\mathbf{r}_1 = \alpha\mathbf{i} - 2\alpha\mathbf{j}$ .

Найдем второй собственный вектор. Имеем

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)\xi_1'' + 2\xi_2'' = 0, \\ 4\xi_1'' + (3-\lambda_2)\xi_2'' = 0. \end{cases}$$

Подставив значение  $\lambda_2 = 7$ , приходим к соотношению  $\xi_1'' - \xi_2'' = 0$ , т. е.  $\xi_1'' = \xi_2'' = \beta \neq 0$ . Собственным вектором, соответствующим второму характеристическому числу, служит  $r_2 = \beta i + \beta j$ .  $\blacktriangle$

408. Найти характеристические числа и собственные векторы матрицы  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

$\triangle$  Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(3-\lambda)[(5-\lambda)(3-\lambda)-1] + (-3+\lambda+1) + (1-5+\lambda) = 0.$$

После элементарных преобразований уравнение приводится к виду  $(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$ , откуда  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 6$ .

Находим собственный вектор, соответствующий характеристическому числу  $\lambda_1 = 2$ . Из системы уравнений

$$\begin{cases} \xi_1' - \xi_2' + \xi_3' = 0, \\ -\xi_1' + 3\xi_2' - \xi_3' = 0, \\ \xi_1' - \xi_2' + \xi_3' = 0 \end{cases}$$

(одно из уравнений этой системы есть следствие двух других и может быть отброшено), получим  $\xi_2' = 0$ ,  $\xi_3' = -\xi_1'$ . Полагаем  $\xi_1' = \alpha$ , тогда  $\xi_2' = 0$ ,  $\xi_3' = -\alpha$  и  $r_1 = \alpha i - \alpha k$ .

Находим собственный вектор, соответствующий значению  $\lambda_2 = 3$ . Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\xi_2'' + \xi_3'' = 0, \\ -\xi_1'' + 2\xi_2'' - \xi_3'' = 0, \\ \xi_1'' - \xi_2'' = 0 \end{cases}$$

(одно из этих уравнений—следствие двух других). Отсюда  $\xi_1'' = \xi_2'' = \xi_3'' = \beta$  и  $r_2 = \beta i + \beta j + \beta k$ .

Находим собственный вектор, соответствующий значению  $\lambda_3 = 6$ . Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} -3\xi_1''' - \xi_2''' + \xi_3''' = 0, \\ -\xi_1''' - \xi_2''' - \xi_3''' = 0, \\ \xi_1''' - \xi_2''' - 3\xi_3''' = 0 \end{cases}$$

(снова одно из уравнений—следствие двух других). Решая эту систему, находим  $\xi_1''' = \gamma$ ,  $\xi_2''' = -2\gamma$ ,  $\xi_3''' = \gamma$  и  $r_3 = \gamma i - 2\gamma j + \gamma k$ .

Итак, собственные векторы заданной матрицы имеют вид  $r_1 = \alpha(i - k)$ ;  $r_2 = \beta(i + j + k)$ ;  $r_3 = \gamma(i - 2j - k)$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ —произвольные отличные от нуля числа.  $\blacktriangle$

409. Даны два линейных преобразования  $x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z'$ ,  $y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z'$ ,  $z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'$ ;  $x'' = b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z''$ ,  $y'' = b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z''$ ,  $z'' = b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''$ . Подставляя  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  из второго преобразования в первое, получим линейное преобразование, выражающее  $x$ ,  $y$ ,  $z$  через  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$ . Показать, что матрица полученного преобразования равна произведению матриц первого и второго преобразований.

410. Дано линейное преобразование  $x = 6x' + y' - 2z'$ ,  $y = -18x' + 2y' + 6z'$ ,  $z = 2x' + 2y'$ . Координаты каких точек удваиваются в результате этого преобразования?

411. Даны два линейных преобразования:  $x = x' + y' + 2z'$ ,  $y = x' + 2y' + 6z'$ ,  $z = 2x' + 3y'$ ;  $x = 2x' + 2z'$ ,  $y = x' + 3y' + 4z'$ ,  $z = x' + 3y' + 2z'$ . Найти точки, для которых каждое из этих преобразований дает один и тот же результат.

412. Найти точки, координаты которых не меняются при применении линейного преобразования  $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$ ,  $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$ .

413. Найти множество точек, координаты которых меняются местами при применении линейного преобразования  $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$ ,  $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$ .

414. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ . Какую матрицу  $B$  нужно прибавить к матрице  $A$ , чтобы получить единичную матрицу?

415. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Найти сумму матриц  $A^2 + A + E$ .

416. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ . Найти обратную матрицу.

417. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 5y + 6z = 28, \\ x + 2z = 7, \end{cases}$$

представив ее в виде матричного уравнения.

418. Найти характеристические числа и нормированные собственные векторы матрицы  $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

419. Найти характеристические числа и собственные векторы матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### § 3. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Выражения вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

и

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

называются *квадратичными формами* соответственно от двух и трех переменных.

Симметрические матрицы

$$A_2^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{21} = a_{12},$$

и

$$A_3^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13} \text{ и } a_{32} = a_{23}.$$

называются *матрицами* этих форм.

Квадратичные формы с помощью линейного преобразования переменных можно преобразовать к виду, не содержащему произведений новых переменных (привести, как говорят, к алгебраической сумме квадратов); иными словами, квадратичная форма двух переменных может быть приведена к виду  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$ , а квадратичная форма трех переменных — к виду  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$ .

Для того чтобы коэффициенты при  $x_i^2$  были характеристическими числами, линейное преобразование должно быть произведено следующим образом: определяют тройку (для квадратичной формы двух переменных — пару) нормированных попарно ортогональных собственных векторов, соответствующих характеристическим числам  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ :

$$e_1 = \alpha_1 i + \beta_1 j + \gamma_1 k,$$

$$e_2 = \alpha_2 i + \beta_2 j + \gamma_2 k,$$

$$e_3 = \alpha_3 i + \beta_3 j + \gamma_3 k.$$

В силу нормированности и ортогональности векторов  $e_1, e_2, e_3$  должны выполняться тождества:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3); \quad \alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j).$$

Тогда матрица преобразования переменных имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix};$$

иными словами, надо положить

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$

$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

(для случая двух переменных все формулы соответственно упрощаются). Такое преобразование переменных носит название *линейного ортогонального преобразования*: в этом случае определитель матрицы  $S$  равен  $\pm 1$ :  $D_S = \pm 1$ .

Линейное ортогональное преобразование используется для приведения к каноническому виду общего уравнения кривой или поверхности второго порядка, причем если хотят сохранить взаимную ориентацию новых координатных осей, то налагают на матрицу преобразования  $S$  дополнительное условие:  $D_S = 1$ .

Преобразование уравнения кривой или поверхности второго порядка к каноническому виду производят следующим образом:

а) находят то линейное ортогональное преобразование координат, которое приводит квадратичную форму старших членов уравнения кривой или поверхности к сумме квадратов, и выполняют в уравнении соответствующую замену. В результате этого преобразования из уравнения исчезают члены с произведениями координат;

б) производят после этого параллельный перенос новых осей координат (в пространстве иногда приходится, кроме того, делать дополнительный поворот двух осей в одной из координатных плоскостей), приводят уравнение к требуемому каноническому виду.

#### 420. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

$\Delta$  В данном случае матрица старших членов имеет вид  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ . Составляем характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е. } \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Находим характеристические числа  $\lambda_1=4$ ,  $\lambda_2=9$ . Полагая  $\lambda_1=4$ , для определения соответствующего собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $\xi_1 = -2\xi_2$ ; полагая  $\xi_2 = -\alpha$ , находим  $\xi_1 = 2\alpha$  и  $r_1 = \alpha(2i - j)$ . Нормируя вектор  $r_1$ , имеем  $e_1 = (2/\sqrt{5})i - (1/\sqrt{5})j$ .

Полагая  $\lambda_2=9$ , для определения второго собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -4\eta_1 + 2\eta_2 = 0, \\ 2\eta_1 - \eta_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $\eta_2 = 2\eta_1$  и  $r_2 = \beta(i + 2j)$ . Нормируя, определяем  $e_2 = (1/\sqrt{5})i + (2/\sqrt{5})j$ . Легко проверить, что скалярное произведение  $e_1 \cdot e_2 = 0$ , т. е. векторы  $e_1$  и  $e_2$  ортогональны.

Используем собственные нормированные ортогональные векторы для построения матрицы преобразования координат

$$S = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}; \quad D_S = 1.$$

Отсюда

$$x = (2/\sqrt{5})x' + (1/\sqrt{5})y', \quad y = (-1/\sqrt{5})x' + 2/(V\sqrt{5})y'.$$

Найденные для  $x$  и  $y$  выражения подставим в уравнение кривой:

$$\begin{aligned} & 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + \\ & + 8\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 - 32\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 80 = 0, \end{aligned}$$

откуда после раскрытия скобок и приведения подобных членов получим

$$4x'^2 + 9y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0.$$

Заметим, что в преобразованном уравнении коэффициентами при  $x'^2$  и  $y'^2$  оказались (как и следовало ожидать) характеристические числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Перепишем уравнение в виде

$$4\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}x'\right) + 9\left(y'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y'\right) + 80 = 0.$$

Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$4\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + 9\left(y'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y' + \frac{64}{5} - \frac{64}{5}\right) + 80 = 0,$$

или

$$4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{576}{5} + 80 = 0,$$

или окончательно

$$4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, полагая  $x'' = x' - 1/\sqrt{5}$ ,  $y'' = y' - 8/\sqrt{5}$ ; получаем  $4x''^2 + 9y''^2 = 36$ , или  $x''^2/9 + y''^2/4 = 1$  (каноническое уравнение эллипса).  $\blacktriangle$

421. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 225 = 0.$$

Δ Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 25\lambda = 0, \text{ т. е. } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25.$$

При  $\lambda = 0$  получаем систему

$$\begin{cases} 9\xi_1 + 12\xi_2 = 0, \\ 12\xi_1 + 16\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений сводится к уравнению  $\xi_1/4 = \xi_2/(-3)$ . Следовательно, собственным вектором матрицы служит вектор  $r = \alpha(4i - 3j)$ , а при  $\alpha = 1/\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 1/5$  находим собственный нормированный вектор  $e_1 = (4/5)i - (3/5)j$ .

При  $\lambda = 25$  получаем систему

$$\begin{cases} -16\eta_1 + 12\eta_2 = 0, \\ 12\eta_1 - 9\eta_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы аналогичным образом находим второй собственный нормированный вектор  $e_2 = (3/5)i + (4/5)j$  ( $e_1 \cdot e_2 = 0$ ).

Матрица преобразования координат имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \quad (D_S = 1);$$

формулы преобразования  $x = (4/5)x' + (3/5)y'$ ,  $y = (-3/5)x' + (4/5)y'$ .

Перепишав уравнение кривой в виде

$$(3x + 4y)^2 - 230x + 110y - 225 = 0,$$

перейдем к новым координатам:

$$25y'^2 - 230\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 110\left(-\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right) - 225 = 0.$$

После приведения подобных членов и сокращения на 25 приходим к уравнению

$$y'^2 - 10x' - 2y' - 9 = 0.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде  $(y' - 1)^2 = 10(x' + 1)$ . Произведя параллельный перенос осей, примем за новое начало координат точку  $O'(-1, 1)$ . В итоге приходим к каноническому уравнению заданной кривой  $y''^2 = 10x''$  (парабола). ▲

422. Привести к каноническому виду уравнение поверхности

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 12x - 10 = 0.$$

Δ Здесь матрица старших членов уравнения поверхности имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

характеристические числа матрицы определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которое приводится к виду  $(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$ ; отсюда находим  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 6$ .

При  $\lambda=2$  получаем систему

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = 0, \\ -u_1 + 3u_2 - u_3 = 0, \\ u_1 - u_2 + u_3 = 0. \end{cases}$$

Указанному значению  $\lambda$  соответствует собственный вектор  $(\alpha; 0; -\alpha)$ . После нормирования приходим к вектору  $e_1 = (1/\sqrt{2})i - (1/\sqrt{2})k$ .

При  $\lambda=3$  получаем систему

$$\begin{cases} -v_2 + v_3 = 0, \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 = 0, \\ v_1 - v_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим второй собственный нормированный вектор  $e_2 = (1/\sqrt{3})i + (1/\sqrt{3})j + (1/\sqrt{3})k$ . Векторы  $e_1$  и  $e_2$  ортогональны:  $e_1 \cdot e_2 = 0$ .

При  $\lambda=6$  получаем систему

$$\begin{cases} -3w_1 - w_2 + w_3 = 0, \\ -w_1 - w_2 - w_3 = 0, \\ w_1 - w_2 - 3w_3 = 0. \end{cases}$$

Соответствующим собственным нормированным вектором (третьим) служит вектор  $e_3 = (1/\sqrt{6})i - (2/\sqrt{6})j + (1/\sqrt{6})k$ , который ортогонален векторам  $e_1$  и  $e_2$ :  $e_1 \cdot e_3 = 0$ ,  $e_2 \cdot e_3 = 0$ . Находим матрицу преобразования координат:

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned} x &= (1/\sqrt{2})x' + (1/\sqrt{3})y' + (1/\sqrt{6})z', & y &= (1/\sqrt{3})y' - (2/\sqrt{6})z', \\ z &= (-1/\sqrt{2})x' + (1/\sqrt{3})y' + (1/\sqrt{6})z'. \end{aligned}$$

Подставив выражения для  $x$ ,  $y$  и  $z$  в уравнение поверхности, после упрощений получим

$$2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 - 6\sqrt{2}x' - 4\sqrt{3}y' - 2\sqrt{6}z' - 10 = 0.$$

Коэффициентами при  $x'^2$ ,  $y'^2$ ,  $z'^2$ , как и должно быть, являются соответственно числа  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ . Перепишем уравнение в виде

$$2\left(x' - \frac{6}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(y' - \frac{4}{\sqrt{3}}\right) + 6\left(z' - \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 10,$$

что после дополнения выражений в скобках до полных квадратов дает

$$2\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(y' - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6\left(z' - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 24.$$

Произведя параллельный перенос осей координат по формулам  $x' = x'' + 3/\sqrt{2}$ ,  $y' = y'' + 2/\sqrt{3}$ ,  $z' = z'' + 1/\sqrt{6}$  и разделив уравнение на 24, приходим к каноническому уравнению эллипсоида  $x''^2/12 + y''^2/8 + z''^2/4 = 1$ .  $\blacktriangle$

Привести к каноническому виду уравнения кривых:

423.  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$ .

424.  $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$ .

425.  $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$ .

Привести к каноническому виду уравнения поверхностей:

426.  $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 6 = 0$ .

● Формулы преобразования координат:  $x = (1/\sqrt{3})x' + (1/\sqrt{6})y' + (1/\sqrt{2})z'$ ,  
 $y = -(1/\sqrt{3})x' + (2/\sqrt{6})y'$ ,  $z = (1/\sqrt{3})x' + (1/\sqrt{6})y' - (1/\sqrt{2})z'$ .

$$427. 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0.$$

● Формулы преобразования координат:  $x = -(1/\sqrt{6})x' - (1/\sqrt{2})y' + (1/\sqrt{3})z'$ ,  $x' = x''$ ;  $y = -(2/\sqrt{6})x' - (1/\sqrt{3})z'$ ,  $y' = y'' + 1/\sqrt{2}$ ;  $z = -(1/\sqrt{6})x' + (1/\sqrt{2})y' + (1/\sqrt{3})z'$ ,  $z' = z'' + 1/\sqrt{3}$ .

#### § 4. РАНГ МАТРИЦЫ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ

Дана прямоугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в этой матрице  $k$  произвольных строк и  $k$  произвольных столбцов ( $k \leq m$ ,  $k \leq n$ ). Определитель  $k$ -го порядка, составленный из элементов матрицы  $A$ , расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется *минором*  $k$ -го порядка матрицы  $A$ . Матрица  $A$  имеет  $C_m^k \cdot C_n^k$  миноров  $k$ -го порядка.

Рассмотрим всевозможные миноры матрицы  $A$ , отличные от нуля. *Рангом матрицы*  $A$  называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от нуля. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг этой матрицы принимают равным нулю.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется *базисным минором* матрицы.

Ранг матрицы  $A$  будем обозначать через  $r(A)$ . Если  $r(A) = r(B)$ , то матрицы  $A$  и  $B$  называются *эквивалентными*. В этом случае пишут  $A \sim B$ .

Ранг матрицы не изменится от элементарных преобразований. Под *элементарными преобразованиями* понимают:

- 1) замену строк столбцами, а столбцов — соответствующими строками;
- 2) перестановку строк матрицы;
- 3) вычеркивание строки, все элементы которой равны нулю;
- 4) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;
- 5) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

$$428. \text{ Определить ранг матрицы } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

△ Все миноры второго и третьего порядков данной матрицы равны нулю, так как элементы строк этих миноров пропорциональны. Миноры же первого порядка (сами элементы матрицы) отличны от нуля. Следовательно, ранг матрицы равен 1. ▲

$$429. \text{ Определить ранг матрицы } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

△ Вычеркнув из этой матрицы 2-ю строку, а затем 2, 3 и 4-й столбцы, получаем матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ , эквивалентную заданной. Так как  $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , то ранг данной матрицы равен 2. ▲

$$430. \text{ Определить ранг матрицы } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

△ Сложим соответствующие элементы 1-й и 3-й строк, а затем разделим на 4 элементы 1-й строки:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Из элементов 1-й строки вычтем соответствующие элементы 2-й строки, после чего вычеркнем 1-ю строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 2, так как, например,  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ . Следовательно, и ранг данной матрицы равен 2. ▲

431. Определить ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ .

△ Вычтем из элементов 4-го столбца элементы 3-го столбца, а затем вычеркнем 4-й столбец:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$ , то ранг матрицы равен 3. ▲

432. Определить ранг и найти базисные миноры матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

△ Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; r(A) = 2.$$

Базисными минорами являются миноры второго порядка этой матрицы, отличные от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, матрица  $A$  имеет 8 базисных миноров. ▲

433. Сколько миноров второго порядка имеет матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}?$$

Выписать все эти миноры.

△ Матрица имеет  $C_3^2 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 3 = 9$  миноров второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad \blacktriangle$$



базисные неизвестные через свободные неизвестные (например, по формулам Крамера).

Таким образом, придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно найти соответствующие значения базисных неизвестных. Следовательно (об этом уже сказано выше), система (1) имеет бесчисленное множество решений.

#### 438. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

△ Определим ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Выпишем расширенную матрицу

$$A_1 = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right).$$

Вертикальной чертой мы отделили элементы матрицы системы (матрицы  $A$ ) от свободных членов системы.

Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 3-й строки, а затем разделим все элементы 2-й строки на 3:

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right).$$

Вычтем из элементов 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки:

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right); A \sim \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{array} \right).$$

Нетрудно видеть, что  $r(A) = 2$ ,  $r(A_1) = 3$ , т. е.  $r(A) \neq r(A_1)$ ; следовательно, система несовместна.▲

#### 439. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

△ Расширенная матрица системы имеет вид

$$A_1 = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Прибавим элементы 2-й строки к соответствующим элементам 1-й и 4-й строк а затем разделим элементы 1-й строки на 4, а элементы 4-й строки на 5:

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Вычтем из элементов 3-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 5-й строки вычтем элементы 4-й строки; после этого вычеркнем 3-ю и

5-ю строки:

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right); \quad A \sim \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Найдем определитель последней матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно,  $r(A) = 3$ . Ранг расширенной матрицы также равен 3, так как найденный определитель является минором матрицы  $A_1$ .

Итак, система совместна. Для ее решения возьмем, например, первое, третье и пятое уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда легко находим, что  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ .  $\blacktriangle$

#### 440. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$\triangle$  Здесь

$$A_1 = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Вычтем из 3-й строки 1-ю:

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Разделим элементы 3-й строки на 2 и вычтем из полученной 3-й строки 2-ю; затем вычеркнем 3-ю строку:

$$A_1 \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad A_1 \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Нетрудно видеть, что  $r(A) = r(A_1) = 2$ . Следовательно, система совместна.

Возьмем первое и второе уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

За базисные неизвестные примем  $x_1$  и  $x_2$ . Это можно сделать, так как определитель  $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$  из коэффициентов при этих неизвестных отличен от нуля. Свободными неизвестными служат  $x_3$  и  $x_4$ . Переписав систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4, \end{cases}$$

выразим  $x_1$  и  $x_2$  через  $x_3$  и  $x_4$ :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-4x_3-3x_4 & 5 \\ -2x_3+x_4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{8}{11}x_4 - \frac{1}{11},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-4x_3-3x_4 \\ 2 & -2x_3+x_4 \end{vmatrix}}{-14} = -\frac{6}{11}x_3 + \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Полагая  $x_3 = u$ ,  $x_4 = v$ , получим решение системы в виде

$$x_1 = -\frac{6}{11}u + \frac{8}{11}v - \frac{1}{11}, \quad x_2 = -\frac{6}{11}u + \frac{7}{11}v + \frac{2}{11}, \quad x_3 = u, \quad x_4 = v.$$

Придавая  $u$  и  $v$  различные числовые значения, будем получать различные решения данной системы уравнений.  $\blacktriangle$

Исследовать системы уравнений:

$$441. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8, \\ 3x_1 - 16x_2 = -5. \end{cases}$$

$$442. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5. \end{cases}$$

$$443. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

## § 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Численное решение линейных алгебраических уравнений с помощью определителей удобно производить для систем двух и трех уравнений. В случае же систем большего числа уравнений гораздо выгоднее пользоваться *методом Гаусса*, который заключается в последовательном исключении неизвестных. Поясним смысл этого метода на системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u = a_{15}, & (a) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}u = a_{25}, & (б) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}u = a_{35}, & (в) \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}u = a_{45}. & (г) \end{cases}$$

Допустим, что  $a_{11} \neq 0$  (если  $a_{11} = 0$ , то изменим порядок уравнений, выбрав первым такое уравнение, в котором коэффициент при  $x$  не равен нулю).

I шаг: делим уравнение (а) на  $a_{11}$ , умножаем полученное уравнение на  $a_{21}$  и вычитаем из (б); затем умножаем на  $a_{31}$  и вычитаем из (в); наконец, умножаем на  $a_{41}$  и вычитаем из (г). В результате I шага приходим к системе

$$\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15}, & (д) \\ b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u = b_{25}, & (е) \\ b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u = b_{35}, & (ж) \\ b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u = b_{45}, & (з) \end{cases}$$

причем  $b_{ij}$  получаются из  $a_{ij}$  по следующим формулам:

$$b_{1j} = a_{1j}/a_{11} \quad (j = 2, 3, 4, 5);$$

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \quad (i = 2, 3, 4; j = 2, 3, 4, 5).$$

И шаг: поступаем с уравнениями (е), (ж), (з) точно так же, как с уравнениями (а), (б), (в), (г) и т. д. В итоге исходная система преобразуется к так называемому ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15}, \\ y + c_{23}z + c_{24}u = c_{25}, \\ z + d_{34}u = d_{35}, \\ u = e_{45}. \end{cases}$$

Из преобразованной системы все неизвестные определяются последовательно без труда.

#### 444. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 36,47x + 5,28y + 6,34z = 12,26, & (а) \\ 7,33x + 28,74y + 5,86z = 15,15, & (б) \\ 4,63x + 6,31y + 26,17z = 25,22. & (в) \end{cases}$$

Δ Разделив уравнение (а) на 36,47, получим

$$x + 0,1447y + 0,1738z = 0,3361. \quad (**)$$

Умножим уравнение (\*\*) на 7,33 и результат вычтем из (б); получим

$$27,6793y + 4,586z = 12,6864;$$

теперь умножим уравнение (\*\*) на 4,63 и результат вычтем из (в); получим

$$5,64y + 25,3653z = 23,6639.$$

Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 27,6793y + 4,586z = 12,6864, & (г) \\ 5,64y + 25,3653z = 23,6639. & (д) \end{cases}$$

Разделив уравнение (г) на 27,68 имеем

$$y + 0,1657z = 0,4583. \quad (***)$$

Умножая уравнение (\*\*\*) на 5,64 и вычитая из (д), получим  $24,4308z = 21,0791$ . Следовательно,  $z = 0,8628$ . Тогда

$$\begin{aligned} y &= 0,4583 - 0,1657 \cdot 0,8628 = 0,3153, \\ x &= 0,3361 - 0,1447 \cdot 0,3153 - 0,1738 \cdot 0,8628 = 0,1405. \end{aligned}$$

Таким образом,  $x = 0,1405$ ,  $y = 0,3153$ ,  $z = 0,8628$ .

Практически удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 \end{array} \right).$$

Введем 5-й, так называемый *контрольный столбец*, каждым элементом которого является сумма четырех элементов данной строки:

$$\left( \begin{array}{ccc|c|c} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 & 60,35 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{array} \right).$$

При линейных преобразованиях элементов матрицы такому же преобразованию должны подвергнуться и элементы контрольного столбца. Нетрудно видеть, что каждый элемент контрольного столбца преобразованной матрицы равен сумме элементов соответствующей строки. Переход от одной матрицы к другой будем

записывать с помощью знака эквивалентности:

$$\begin{pmatrix} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 & 60,35 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 27,6793 & 4,586 & 12,6864 & 44,9516 \\ 0 & 5,64 & 25,3653 & 23,6639 & 54,6688 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 5,64 & 25,3653 & 23,6639 & 54,6688 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 0 & 24,4308 & 21,0791 & 45,5094 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 0 & 1 & 0,8628 & 1,8629 \end{pmatrix}.$$

Используя полученную матрицу, выписываем преобразованную систему и находим решение:

$$\begin{aligned} z &= 0,8628, \\ y &= 0,4583 - 0,1657 \cdot 0,8628 = 0,3153, \\ x &= 0,3361 - 0,1738 \cdot 0,8628 - 0,1447 \cdot 0,3153 = 0,1405. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Если система имеет единственное решение, то ступенчатая система уравнений приводится к *треугольной*, в которой последнее уравнение содержит одно неизвестное. В случае неопределенной системы, т. е. такой, в которой число неизвестных больше числа линейно независимых уравнений, допускающей поэтому бесчисленное множество решений, треугольной системы не получается, так как последнее уравнение содержит более одного неизвестного.

Если же система уравнений несовместна, то после приведения к ступенчатому виду она содержит хотя бы одно уравнение вида  $0=1$ , т. е. уравнение, в котором все неизвестные имеют нулевые коэффициенты, а правая часть отлична от нуля. Такая система не имеет решений.

#### 445. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Δ Преобразуем матрицу в эквивалентную:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array} \right)$$

(для упрощения вычислений мы поменяли местами первое и второе уравнения).  
Вычитаем из остальных двух строк 1-ю строку, умноженную на 3 и на 4:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right).$$

Изменив знаки во 2-й строке и умножив ее на 5, прибавляем к 3-й:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -22 & -33 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

(мы разделили на  $-11$  последнюю строку).

Система уравнений приняла треугольный вид:

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ y - 4z = -5, \\ z = 2. \end{cases}$$



Для определения элемента  $a'_{ij}$  матрицы  $A'$  полезно иметь в виду так называемое «правило прямоугольника».

Рассмотрим 4 элемента матрицы  $A$ :  $a_{ij}$  (элемент, подлежащий преобразованию),  $a_{qp}$  (разрешающий элемент) и элементы  $a_{ip}$  и  $a_{qj}$ . Для нахождения элемента  $a'_{ij}$  следует из элемента  $a_{ij}$  вычесть произведение элементов  $a_{ip}$  и  $a_{qj}$ , расположенных в противоположных вершинах прямоугольника, деленное на разрешающий элемент  $a_{qp}$ :

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \square & \vdots \\ a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{array}$$

Аналогичным образом можно преобразовать систему (2), приняв за разрешающий элемент матрицы  $A'$  элемент  $a'_{sr} \neq 0$ , причем  $s \neq q$ ,  $r \neq p$ . После этого преобразования все коэффициенты при  $x_r$ , кроме  $a'_{sr}$ , обратятся в нуль. Полученная система может быть снова преобразована и т. д. Если  $r = n$  (ранг системы равен числу неизвестных), то после ряда преобразований придем к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} k_1 x_1 &= l_1, \\ k_2 x_2 &= l_2, \\ &\dots \\ k_n x_n &= l_n, \end{aligned}$$

из которой находятся значения неизвестных. Описанный метод решения, основанный на последовательном исключении неизвестных, называется методом Жордана — Гаусса.

**452.** Дана матрица системы линейных уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

При решении этой системы методом Жордана — Гаусса за разрешающий элемент приняли  $a_{23} = 3$ . Найти элементы  $a'_{24}$ ,  $a'_{13}$ ,  $a'_{44}$  преобразованной матрицы.

△ Так как  $a_{24}$  — элемент разрешающей строки, то  $a'_{24} = a_{24} = 2$ . Элемент  $a_{13}$  принадлежит разрешающему столбцу; поэтому  $a'_{13} = 0$ . Элемент  $a'_{44}$  определяем по правилу прямоугольника:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & \boxed{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$a'_{44} = a_{44} - \frac{a_{24}a_{43}}{a_{23}} = -4 - \frac{2 \cdot 5}{3} = -7\frac{1}{3}. \blacktriangle$$

**453.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 \quad \quad - x_4 = -6, \\ \quad \quad x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \quad \quad = 6. \end{cases}$$

△ Запишем коэффициенты, свободные члены и суммы коэффициентов и свободных членов ( $\Sigma$  — контрольный столбец) в следующую таблицу:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	$\Sigma$
$\boxed{1}$	1	-3	2	6	7
1	-2	0	-1	-6	-8
0	1	1	3	16	21
2	-3	2	0	6	7

Мы взяли за разрешающий элемент коэффициент при  $x_1$  в первом уравнении. Перепишем без изменения строку таблицы, содержащую этот элемент (разрешающую строку), а все элементы 1-го столбца, кроме разрешающего, заменим нулями. Применив правило прямоугольника, заполняем остальные клетки таблицы (это же правило применяем и к столбцу  $\Sigma$ ):

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	$\Sigma$
1	1	-3	2	6	7
0	-3	3	-3	-12	-15
0	1	1	3	16	21
0	-5	8	-4	-6	-7

Отметим, что в контрольном столбце получаются суммы элементов соответствующих строк. Разделив на -3 элементы 2-й строки, получаем таблицу:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	$\Sigma$
1	1	-3	2	6	7
0	$\boxed{\frac{1}{-3}}$	-1	1	4	5
0	1	1	3	16	21
0	-5	8	-4	-6	-7

Примем за разрешающий 2-й элемент 2-й строки. 1-й столбец перепишем без изменения, элементы 2-го столбца, кроме разрешающего, заменим нулями, 2-ю (разрешающую) строку перепишем без изменения, элементы остальных клеток таблицы преобразуем по правилу прямоугольника:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	$\Sigma$
1	0	-2	1	2	2
0	1	-1	1	4	5
0	0	2	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Разделим элементы 3-й строки на 2:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	$\Sigma$
1	0	-2	1	2	2
0	1	-1	1	4	5
0	0	$\left[ \frac{1}{2} \right]$	1	6	8
0	0	3	1	14	18

Преобразуем таблицу, приняв за разрешающий 3-й элемент 3-го столбца:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	$\Sigma$
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	-2	-4	-6

Разделим элементы 4-й строки на —2:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	$\Sigma$
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	$\boxed{1}$	2	3

Преобразуем таблицу, приняв за разрешающий 4-й элемент 4 й строки:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	$\Sigma$
1	0	0	0	8	9
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 8, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 6, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 4, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 2, \end{cases}$$

т. е.  $x_1=8$ ,  $x_2=6$ ,  $x_3=4$ ,  $x_4=2$ . ▲

**454.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

△ Составим таблицу

$\boxed{1}$	1	-2	1	1	2
1	-3	1	1	0	0
4	-1	-1	-1	1	2
4	3	-4	-1	2	4

1-й элемент 1-го столбца — разрешающий:

1	1	-2	1	1	2
0	-4	3	0	-1	-2
0	-5	7	-5	-3	-6
0	-1	4	-5	-2	-4

Изменим знаки в 4-й строке:

1	1	-2	1	1	2
0	-4	3	0	-1	-2
0	-5	7	-5	-3	-6
0	$\boxed{1}$	-4	5	2	4

4-й элемент 2-го столбца — разрешающий:

1	0	2	-4	-1	-2
0	0	-13	20	7	14
0	0	-13	20	7	14
0	1	-4	5	2	4

Вычтем из 3-й строки 2-ю и вычеркнем 3-ю строку:

1	0	2	-4	-1	-2
0	0	-13	$\boxed{20}$	7	14
0	1	-4	5	2	4

4-й элемент 2-й строки — разрешающий:

1	0	-0,6	0	0,4	0,8
0	0	-13	20	7	14
0	1	-0,75	0	0,25	0,5

Матрица имеет ранг, равный 3, следовательно, система содержит три базисных неизвестных  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$  и одно свободное неизвестное  $x_3$ . Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 0,6x_3 + 0 \cdot x_4 = 0,4, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 13x_3 + 20x_4 = 7, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 0,75x_3 + 0 \cdot x_4 = 0,25. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_1 = 0,4 + 0,6x_3, \quad x_2 = 0,25 + 0,75x_3, \quad x_4 = 0,35 + 0,65x_3.$$

Итак, решение системы имеет вид

$$x_1 = 0,4 + 0,6u, \quad x_2 = 0,25 + 0,75u, \quad x_3 = u, \quad x_4 = 0,35 + 0,65u,$$

где  $u$  — произвольное число. ▲

455. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6x - 5y + 7z + 8t = 3, \\ 3x + 11y + 2z + 4t = 6, \\ 3x + 2y + 3z + 4t = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

△ Составим таблицу:

6	-5	7	8	3	19
3	11	2	4	6	26
3	2	3	4	1	13
$\boxed{1}$	1	1	0	0	3

4-й элемент 1-го столбца — разрешающий:

0	-11	$\boxed{1}$	8	3	1
0	8	-1	4	6	17
0	-1	0	4	1	4
1	1	1	0	0	3

1-й элемент 3-го столбца — разрешающий:

0	-11	$\overline{1}$	8	3	1
0	-3	0	12	9	18
0	-1	0	4	1	4
1	12	0	-8	-3	2

Изменим знаки элементов 3-й строки на противоположные:

0	-11	1	8	3	1
0	-3	0	12	9	18
0	$\overline{1}$	0	-4	-1	-4
1	12	0	-8	-3	2

3-й элемент 2-го столбца — разрешающий:

0	0	1	-36	-8	-43
0	0	0	0	6	6
0	$\overline{1}$	0	-4	-1	-4
1	0	0	40	9	50

В результате приходим к системе

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z - 36t = -8, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot t = 6, \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z - 4 \cdot t = -1, \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 40t = 9. \end{cases}$$

Легко видеть, что второму уравнению не удовлетворяют никакие значения  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ . Таким образом, полученная система уравнений и заданная система несовместны. ▲

456. Применить метод Жордана—Гаусса к определению ранга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

△ Составим таблицу

7	-1	3	5	14
$\boxed{1}$	3	5	7	16
4	1	4	6	15
3	-2	-1	-1	-1

В последнем (контрольном) столбце записаны суммы элементов соответствующих строк, 2-й элемент 1-го столбца — разрешающий:

0	-22	-32	-44	-98
1	3	5	7	16
0	-11	-16	-22	-49
0	-11	-16	-22	-49

Разделим элементы 1-й строки на -2, вычтем элементы 1-й строки из соответствующих элементов 4-й и 3-й строк и вычеркнем 3-ю и 4-ю строки. Тогда получим

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16

Любой определитель второго порядка полученной матрицы отличен от нуля. Следовательно,  $r(A) = 2$  ▲.

Методом Жордана—Гаусса решить системы уравнений:

$$457. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 23, \end{cases}$$

$$458. \begin{cases} x_2 - x_1 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

$$459. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

460. Методом Жордана—Гаусса определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

## ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

## § 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

**1. Основные понятия.** Рассмотрим такое множество  $R$  элементов  $x, y, z, \dots$ , в котором для любых двух элементов  $x \in R$  и  $y \in R$  определена *сумма*  $x+y \in R$  и для любого элемента  $x \in R$  и любого действительного числа  $\lambda$  определено *произведение*  $\lambda x \in R$ .

Если сложение элементов множества  $R$  и умножение элемента этого множества на действительное число удовлетворяет следующим условиям:

$$1^0. x+y=y+x;$$

$$2^0. (x+y)+z=x+(y+z);$$

3<sup>0</sup>. существует такой элемент  $0 \in R$  (нуль-элемент), что  $x+0=x$  для любого  $x \in R$ ;

4<sup>0</sup>. для каждого элемента  $x \in R$  существует элемент  $y \in R$  такой что  $x+y=0$  (в дальнейшем будем писать  $y=-x$ , т. е.  $x+(-x)=0$ );

$$5^0. 1 \cdot x=x;$$

$$6^0. \lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x;$$

$$7^0. (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x;$$

$$8^0. \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y,$$

то множество  $R$  называется *линейным (или векторным) пространством*, а элементы  $x, y, z, \dots$  этого пространства — *векторами*.

Например, множество всех геометрических векторов является линейным пространством, так как для элементов этого множества определены действия сложения и умножения на число, удовлетворяющие сформулированным условиям.

*Разностью* двух векторов  $x$  и  $y$  линейного пространства называется такой вектор  $v$  этого пространства, что  $y+v=x$ . Разность векторов  $x$  и  $y$  обозначают через  $x-y$ , т. е.  $x-y=v$ . Легко доказывается, что  $x-y=x+(-y)$ .

Справедливы также следующие теоремы:

1. В каждом линейном пространстве существует только один нуль-элемент.

2. Для каждого элемента линейного пространства существует только один противоположный элемент.

3. Для каждого элемента  $x \in R$  выполняется равенство  $0 \cdot x=0$ .

4. Для любого действительного числа  $\lambda$  и  $0 \in R$  выполняется равенство  $\lambda \cdot 0=0$ .

5. Из равенства  $\lambda x=0$  следует одно из двух равенств:  $\lambda=0$  или  $x=0$ .

6. Элемент  $(-1) \cdot x$  является противоположным для элемента  $x$ .

**461.** Имеется множество всевозможных систем действительных чисел  $(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ ,  $(\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n)$ ,  $(\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_n)$ ,  $\dots$ . Сумма двух любых элементов определяется равенством  $(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n) + (\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \dots; \xi_n + \eta_n)$ , а произведение любого элемента на любое число — равенством  $\lambda(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n) = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \dots; \lambda\xi_n)$ . Доказать, что это множество является линейным пространством.

$\Delta$  Обозначим  $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ ,  $y = (\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n)$ ,  $z = (\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_n)$ ,  $\dots$ . Проверим выполнение сформулированных выше условий 1<sup>0</sup>—8<sup>0</sup>.

1<sup>0</sup>.  $x+y = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \dots; \xi_n + \eta_n)$ ,  $y+x = (\eta_1 + \xi_1; \eta_2 + \xi_2; \dots; \eta_n + \xi_n)$ , т. е.  $x+y=y+x$ .

2<sup>0</sup>.  $x+y = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \dots; \xi_n + \eta_n)$ ,  $y+z = (\eta_1 + \zeta_1; \eta_2 + \zeta_2; \dots; \eta_n + \zeta_n)$ ,  $(x+y)+z = (\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1; \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2; \dots; \xi_n + \eta_n + \zeta_n)$ ,  $x+(y+z) = (\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1; \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2; \dots; \xi_n + \eta_n + \zeta_n)$ . Таким образом,  $(x+y)+z = x+(y+z)$ .

3º. Нуль-элементом является  $0 = (0, 0 \dots, 0)$ . Действительно,  $x + 0 = (\xi_1 + 0; \xi_2 + 0; \dots; \xi_n + 0) = x$ .

4º. Элемент  $(-\xi_1; -\xi_2; \dots; -\xi_n)$  является противоположным элементом  $(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ , так как  $(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n) + (-\xi_1; -\xi_2; \dots; -\xi_n) = (0; 0; \dots; 0) = 0$ .

5º.  $1 \cdot x = (1 \cdot \xi_1; 1 \cdot \xi_2; \dots; 1 \cdot \xi_n) = x$ .

6º.  $\lambda (\mu x) = \lambda (\mu \xi_1; \mu \xi_2; \dots; \mu \xi_n) = (\lambda \mu \xi_1; \lambda \mu \xi_2; \dots; \lambda \mu \xi_n) = (\lambda \mu) x$ .

7º.  $(\lambda + \mu) x = ((\lambda + \mu) \xi_1; (\lambda + \mu) \xi_2; \dots; (\lambda + \mu) \xi_n) = (\lambda \xi_1 + \mu \xi_1; \lambda \xi_2 + \mu \xi_2; \dots; \lambda \xi_n + \mu \xi_n) = (\lambda \xi_1; \lambda \xi_2; \dots; \lambda \xi_n) + (\mu \xi_1; \mu \xi_2; \dots; \mu \xi_n) = \lambda (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n) + \mu (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n) = \lambda x + \mu x$ .

8º.  $\lambda (x + y) = \lambda (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \dots; \xi_n + \eta_n) = (\lambda \xi_1 + \lambda \eta_1; \lambda \xi_2 + \lambda \eta_2; \dots; \lambda \xi_n + \lambda \eta_n) = (\lambda \xi_1; \lambda \xi_2; \dots; \lambda \xi_n) + (\lambda \eta_1; \lambda \eta_2; \dots; \lambda \eta_n) = \lambda (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n) + \lambda (\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n) = \lambda x + \lambda y$ .  $\blacktriangle$

462. Доказать, что множество всех комплексных чисел является линейным пространством.

463. Является ли линейным пространством множество систем четырех действительных чисел  $(\xi_1; \xi_2; 0; 0)$ ,  $(\eta_1; \eta_2; 0; 0)$ ,  $(\zeta_1; \zeta_2; 0; 0)$ , где  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$  — всевозможные действительные числа? Сложение элементов и умножение на действительное число определены так же, как и в задаче 461.

464. Образует ли линейное пространство множество элементов  $(\xi_1; \xi_2; 1; 1)$ ,  $(\eta_1; \eta_2; 1; 1)$ ,  $(\zeta_1; \zeta_2; 1; 1)$ ?

465. Является ли линейным пространством множество всевозможных многочленов второй степени  $\alpha_0 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2$ ,  $\beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2$ ,  $\gamma_0 t^2 + \gamma_1 t + \gamma_2, \dots$ ?

466. Образует ли линейное пространство множество всех многочленов не выше третьей степени?

467. Даны функции  $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots$ . Является ли множество этих функций линейным пространством, если эти функции образуют: 1) совокупность всех непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$ ; 2) совокупность всех дифференцируемых функций на отрезке  $[a, b]$ ; 3) совокупность всех элементарных функций; 4) совокупность всех неэлементарных функций?

468. Дано множество всевозможных пар положительных чисел:  $x = (\xi_1; \xi_2)$ ,  $y = (\eta_1; \eta_2)$ ,  $z = (\zeta_1; \zeta_2), \dots$ . Является ли это множество линейным пространством, если сложение двух элементов определяется равенством  $x + y = (\xi_1 \eta_1; \xi_2 \eta_2)$ , а умножение на действительное число — равенством  $\lambda x = (\xi_1^\lambda; \xi_2^\lambda)$ ?

469. Может ли линейное пространство состоять: 1) из одного вектора; 2) из двух различных векторов?

470. Из линейного пространства исключен вектор  $x$ . Может ли полученное после этого исключения множество векторов остаться линейным пространством?

471. Из линейного пространства исключено бесчисленное множество векторов. Может ли полученное после этого исключения множество векторов быть линейным пространством?

472. В резерв проводников вагонов для выдачи им ежедневно поступают со склада: 1) сахар; 2) чай; 3) печенье; 4) сухари; 5) древесный уголь. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$  — соответственно приращения за день количества (в кг) этих поступлений. Если  $\xi_i > 0$ , то соответствующего продукта или угля поступило больше, чем выдано в этот день, а если  $\xi_i < 0$ , то их выдано больше, чем поступило со склада.

Является ли совокупность систем чисел  $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4; \xi_5)$  линейным пространством? Что означает вектор  $(-100; 5; 0; -200; 3)$ ?

473. Образует ли линейное пространство совокупность троек целых чисел  $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ ?

474. В парк вагонного депо ежедневно прибывают вагоны разных типов: багажные, почтовые, жесткоплацкартные, купированные и мягкие, из которых ежедневно формируются и отправляются пассажирские и скорые поезда. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$  — приращения за сутки числа соответствующих вагонов. Является ли совокупность чисел  $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4; \xi_5)$  линейным пространством?

475. Образуют ли линейное пространство все геометрические векторы, имеющие общее начало в начале координат и расположенные в I октанте?

476. Доказать, что множество всех решений системы линейных однородных уравнений 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$
 образует линейное пространство.

● Доказать, что если  $(x_1; y_1; z_1)$  и  $(x_2; y_2; z_2)$  — решения этой системы, то  $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$  и  $(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$  при любом  $\lambda$  также являются решениями системы.

477. Доказать, что все функции  $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$ , удовлетворяющие дифференциальному уравнению  $A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_n y = 0$  ( $A_0, A_1, \dots, A_n$  — функции от  $x$ ) образуют линейное пространство.

2. **Линейно независимые векторы.** Пусть  $x, y, z, \dots, u$  — какие-нибудь векторы линейного пространства  $R$ . Вектор, определяемый равенством

$$v = \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \lambda u,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$  — действительные числа, также принадлежит линейному пространству  $R$ . Этот вектор называется *линейной комбинацией* векторов  $x, y, z, \dots, u$ .

Пусть линейная комбинация векторов  $x, y, z, \dots, u$  является нуль-вектором, т. е.

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \lambda u = 0. \quad (1)$$

Векторы  $x, y, z, \dots, u$  называются *линейно независимыми*, если равенство (1) выполняется лишь при  $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \lambda = 0$ . Если же равенство (1) может выполняться и в том случае, когда не все числа  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$  равны нулю, то говорят, что векторы  $x, y, z, \dots, u$  *линейно зависимы*.

Легко доказывается, что векторы  $x, y, z, \dots, u$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из этих векторов может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов.

478. Показать, что если среди векторов  $x, y, z, \dots, u$  имеется нуль-вектор, то рассматриваемые векторы линейно зависимы.

△ Пусть  $x = 0$ . Так как равенство  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \lambda u = 0$  может выполняться при  $\alpha \neq 0, \beta = \gamma = \dots = \lambda = 0$ , то векторы линейно зависимы. ▲

479. Элементами линейного пространства являются системы упорядоченных действительных чисел  $x_i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{ni})$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Какому условию должны удовлетворять числа  $\xi_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n$ ) для того чтобы векторы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  были линейно независимы, если сумма векторов и произведение вектора на число определяются равенствами  $x_i + x_k = (\xi_{1i} + \xi_{1k}; \xi_{2i} + \xi_{2k}; \dots; \xi_{ni} + \xi_{nk}), \lambda x_i = (\lambda \xi_{1i}; \lambda \xi_{2i}; \dots; \lambda \xi_{ni})$ ?



Совокупность  $n$  линейно независимых векторов  $n$ -мерного линейного пространства называется *базисом*. Справедлива следующая теорема: *каждый вектор линейного  $n$ -мерного пространства может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов базиса*. Так, если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базис  $n$ -мерного линейного пространства  $R$ , то любой вектор  $x \in R$  может быть единственным образом представлен в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

Таким образом, вектор  $x$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  определяется единственным образом с помощью чисел  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Эти числа называются *координатами* вектора  $x$  в данном базисе.

Если  $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ ,  $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$ , то  $x + y = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + (\xi_2 + \eta_2)e_2 + \dots + (\xi_n + \eta_n)e_n$ ,  $\lambda x = \lambda \xi_1 e_1 + \lambda \xi_2 e_2 + \dots + \lambda \xi_n e_n$ .

Для определения размерности линейного пространства полезно использовать следующую теорему: *если любой вектор линейного пространства  $R$  может быть представлен в виде линейной комбинации линейно независимых векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , то  $\dim(R) = n$  (а следовательно, векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют базис в пространстве  $R$ )*.

486. Дано линейное пространство всевозможных пар упорядоченных действительных чисел  $x_1 = (\xi_{11}, \xi_{21})$ ,  $x_2 = (\xi_{12}, \xi_{22})$ ,  $x_3 = (\xi_{13}, \xi_{23})$ , ..., причем сложение векторов и умножение вектора на действительное число определены равенствами  $x_l + x_k = (\xi_{1l} + \xi_{1k}, \xi_{2l} + \xi_{2k})$ ;  $\lambda x_l = (\lambda \xi_{1l}, \lambda \xi_{2l})$ . Доказать, что векторы  $e_1 = (1; 2)$  и  $e_2 = (3; 4)$  образуют базис данного линейного пространства. Найти координаты вектора  $x = (7; 10)$  в этом базисе.

$\Delta$  Векторы  $e_1 = (1; 2)$  и  $e_2 = (3; 4)$  линейно независимы (см. задачу 479). Рассмотрим какой-нибудь вектор  $y = (\eta_1; \eta_2)$ . Покажем, что для любых  $\eta_1$  и  $\eta_2$  можно определить числа  $\lambda$  и  $\mu$  так, чтобы выполнялось равенство  $y = \lambda e_1 + \mu e_2$ , или  $(\eta_1; \eta_2) = (\lambda + 3\mu; 2\lambda + 4\mu)$ .

Нетрудно видеть, что существует единственная пара значений  $(\lambda; \mu)$ , для которой выполняется это равенство. Это следует из того, что система уравнений

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = \eta_1, \\ 2\lambda + 4\mu = \eta_2 \end{cases}$$

является определенной.

Итак, векторы  $e_1$  и  $e_2$  образуют базис. Определим координаты вектора  $x = (7; 10)$  в этом базисе. Задача сводится к определению  $\lambda$  и  $\mu$  из системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 7, \\ 2\lambda + 4\mu = 10. \end{cases}$$

Отсюда находим  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ , т. е.  $x = e_1 + 2e_2$ .  $\blacktriangle$

487. Показать, что линейное пространство, элементами которого являются векторы  $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$  (см. задачу 479), имеет своим базисом совокупность векторов  $e_1 = (1; 0; 0; \dots; 0)$ ,  $e_2 = (0; 1; 0; \dots; 0)$ ,  $e_3 = (0; 0; 1; \dots; 0)$ , ...,  $e_n = (0; 0; 0; \dots; 1)$ .

$\Delta$  Нетрудно видеть, что

$$x = \xi_1 (1; 0; 0; \dots; 0) + \xi_2 (0; 1; 0; \dots; 0) + \dots + \xi_n (0; 0; 0; \dots; 1),$$

т. е.  $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ . Таким образом, любой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независимы, так как определитель, составленный из координат этих векторов, равен 1, т. е. отличен от нуля. Итак, эти векторы образуют базис, а пространство  $R$  является  $n$ -мерным.  $\blacktriangle$

488. Из каких элементов состоит линейное пространство с базисом  $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n$ , если сложение элементов и умножение элемента на действительное число понимать в обычном смысле?

489. Показать, что множество всех матриц второго порядка является линейным пространством четвертого измерения.

490. Показать, что матрицы  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  образуют базис линейного пространства, рассмотренного в задаче 489.

491. Показать, что элементы  $e_1 = (1; 10)$  и  $e_2 = (10; 1)$  линейного пространства, рассмотренного в задаче 468, являются базисными. Найти координаты вектора  $x = (2; 3)$  в этом базисе.

△ Так как  $\ln 1 \cdot \ln 1 - \ln 10 \cdot \ln 10 \neq 0$ , то векторы  $e_1$  и  $e_2$  линейно независимы (см. задачу 481). Пусть любой вектор  $y = (\eta_1; \eta_2)$  представлен в виде линейной комбинации векторов  $e_1$  и  $e_2$ . Покажем, что существует такая пара чисел  $(\lambda; \mu)$ , для которой выполняется равенство  $y = \lambda e_1 + \mu e_2$ , или  $(\eta_1; \eta_2) = (1^\lambda \cdot 10^\mu; 10^\lambda \cdot 1^\mu)$ . Следовательно,  $\mu = \lg \eta_1$ ,  $\lambda = \lg \eta_2$ . В частности,  $x = e_1 \lg 3 + e_2 \lg 2$ . Таким образом,  $(\lg 3; \lg 2)$  — координаты вектора  $x$  в базисе  $e_1, e_2$ . ▲

492. Показать, что за базис  $n$ -мерного пространства, рассмотренного в задаче 479, могут быть приняты векторы  $e_1 = (1; 1; 1; \dots; 1; 1)$ ,  $e_2 = (0; 1; 1; \dots; 1; 1)$ ,  $e_3 = (0; 0; 1; \dots; 1; 1)$ ,  $\dots$ ,  $e_{n-1} = (0; 0; 0; \dots; 1; 1)$ ,  $e_n = (0; 0; 0; \dots; 0; 1)$ .

● Рассмотреть векторы  $e'_1 = e_1 - e_2$ ,  $e'_2 = e_2 - e_3$ ,  $\dots$ ,  $e'_{n-1} = e_{n-1} - e_n$ ,  $e'_n = e_n$ .

4. **Изоморфизм линейных пространств.** Рассмотрим два линейных пространства  $R$  и  $R'$ . Элементы пространства  $R$  будем обозначать через  $x, y, z, \dots$ , а элементы пространства  $R'$  — через  $x', y', z', \dots$ .

Пространства  $R$  и  $R'$  называют *изоморфными*, если между их элементами  $x, y, x', y'$  можно установить такое взаимно однозначное соответствие  $x \leftrightarrow x'; y \leftrightarrow y'$ , при котором  $x + y \leftrightarrow x' + y'$ ,  $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$  ( $\lambda$  — любое действительное число). Следует отметить важную теорему, с помощью которой легко устанавливается изоморфизм конечномерных линейных пространств: для того чтобы два конечномерных пространства  $R$  и  $R'$  были изоморфными, необходимо и достаточно, чтобы их размерности были одинаковыми.

493. Даны два линейных пространства  $R$  и  $R'$ . Элементами пространства  $R$  являются всевозможные дифференцируемые функции аргумента  $t$ , обращающиеся в нуль при  $t=0$ . Элементами же пространства  $R'$  являются производные функций, принадлежащих пространству  $R$ . Доказать, что пространства  $R$  и  $R'$  изоморфны.

△ Пусть  $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots$  — функции пространства  $R$ , а  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \dots$  — функции пространства  $R'$ . Из того, что эти функции снабжены индексами, не следует делать заключение, что  $R$  и  $R'$  — счетные множества.

Пусть  $\varphi_i(t) = f'_i(t)$ ; тогда  $f_i(t) = \int_0^t \varphi_i(t) dt$ . Таким образом, между элементами

линейных пространств  $R$  и  $R'$  (доказательство их линейности предоставляем выполнить самостоятельно) установлено взаимно однозначное соответствие.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей перехода* от старого базиса к новому.

Возьмем какой-нибудь вектор  $x$ . Пусть  $(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$  — координаты этого вектора в старом базисе, а  $(\xi'_1; \xi'_2; \dots; \xi'_n)$  — его координаты в новом базисе. При этом старые координаты вектора  $x$  выражаются через новые координаты этого вектора по формулам

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_{11}\xi'_1 + a_{12}\xi'_2 + \dots + a_{1n}\xi'_n, \\ \xi_2 &= a_{21}\xi'_1 + a_{22}\xi'_2 + \dots + a_{2n}\xi'_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \xi_n &= a_{n1}\xi'_1 + a_{n2}\xi'_2 + \dots + a_{nn}\xi'_n, \end{aligned}$$

которые называются *формулами преобразования координат*.

Нетрудно видеть, что столбцы матрицы  $A$  являются координатами в формулах перехода от старого базиса к новому, а строки этой матрицы — координатами в формулах преобразования старых координат через новые.

**500.** Дан вектор  $x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ . Разложить этот вектор по новому базису  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4$ , если  $e'_1 = e_2 + e_3 + e_4$ ,  $e'_2 = e_1 + e_3 + e_4$ ,  $e'_3 = e_1 + e_2 + e_4$ ,  $e'_4 = e_1 + e_2 + e_3$ .

$\Delta$  I способ. Выпишем матрицу перехода от старого базиса к новому:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы являются коэффициентами в формулах преобразования координат:

$$\xi_1 = \xi'_2 + \xi'_3 + \xi'_4, \quad \xi_2 = \xi'_1 + \xi'_3 + \xi'_4, \quad \xi_3 = \xi'_1 + \xi'_2 + \xi'_4, \quad \xi_4 = \xi'_1 + \xi'_2 + \xi'_3.$$

Так как  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 1$ , то, решив систему уравнений, находим  $\xi'_1 = \xi'_2 = \xi'_3 = \xi'_4 = 1/3$  и  $x = (1/3)(e'_1 + e'_2 + e'_3 + e'_4)$ .

II способ. Исключив  $e_1, e_2, e_3, e_4$  из системы уравнений

$$\begin{cases} x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ e'_1 = 0 \cdot e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ e'_2 = e_1 + 0 \cdot e_2 + e_3 + e_4, \\ e'_3 = e_1 + e_2 + 0 \cdot e_3 + e_4, \\ e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + 0 \cdot e_4 \end{cases}$$

получаем

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e'_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ e'_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ e'_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e'_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Остается раскрыть этот определитель по элементам 1-го столбца и выразить  $x$  через  $e'_1, e'_2, e'_3$  и  $e'_4$ .

III способ. Так как  $e'_1 + e'_2 + e'_3 + e'_4 = 3e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 3e_4$ , то  $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = (1/3)(e'_1 + e'_2 + e'_3 + e'_4)$ . Отсюда  $x = (1/3)(e'_1 + e'_2 + e'_3 + e'_4)$ .  $\blacktriangle$

501. Дан вектор  $x = 8e_1 + 6e_2 + 4e_3 - 18e_4$ . Разложить этот вектор по новому базису, связанному со старым базисом уравнениями  $e'_1 = -3e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ ,  $e'_2 = 2e_1 - 4e_2 + e_3 + e_4$ ,  $e'_3 = e_1 + 3e_2 - 5e_3 + e_4$ ,  $e'_4 = e_1 + e_2 + 4e_3 - 6e_4$ .

502. Дан вектор  $x = 2(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$ . Разложить вектор  $x$  по базису  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ , если  $e'_1 = e_1 + e_2$ ,  $e'_2 = e_2 + e_3$ ,  $e'_3 = e_3 + e_4$ ,  $\dots$ ,  $e'_{n-1} = e_{n-1} + e_n$ ,  $e'_n = e_n + e_1$ .

503. Система координат  $xOy$  повернута вокруг начала координат на угол  $\alpha$  (рис. 21). Выразить координаты вектора  $a = xi + yj$  в новой системе через его координаты в старой системе.

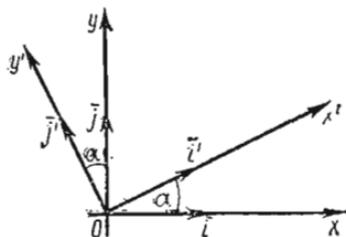


Рис. 21

$\Delta$  Разложим векторы  $i'$  и  $j'$  по ортам  $i$  и  $j$ :

$$i' = i \cos \alpha + j \sin \alpha,$$

$$j' = i \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + j \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right).$$

Запишем матрицу перехода от старого базиса  $i, j$  к новому базису  $i', j'$ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

т. е.

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad \blacktriangle$$

504. Даны зависимости  $e'_1 = \alpha e_2$ ,  $e'_2 = \beta e_3$ ,  $e'_3 = \gamma e_4$ ,  $e'_4 = \delta e_5$ ,  $e'_5 = \epsilon e_1$ . Написать формулы, связывающие старые координаты  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$  вектора  $x$  с новыми координатами  $(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4, \xi'_5)$  этого же вектора.

505. Возможны ли зависимости  $e'_1 = e_2 - e_3$ ,  $e'_2 = e_3 - e_1$ ,  $e'_3 = e_1 - e_2$  между старым базисом  $e_1, e_2, e_3$  и новым базисом  $e'_1, e'_2, e'_3$ ?

### § 3. ПОДПРОСТРАНСТВА

1. Подпространство линейного пространства. Линейное пространство  $R'$  называется подпространством линейного пространства  $R$ , если элементами пространства  $R'$  являются только элементы пространства  $R$ .

Например, множество всех векторов, параллельных одной и той же плоскости, является подпространством всех геометрических векторов пространства.

Если  $x, y, z, \dots, u$  — какие-нибудь векторы линейного пространства  $R$ , то все векторы  $\alpha x + \beta y + \dots + \lambda u$ , где  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  — всевозможные действительные числа, образуют подпространство пространства  $R$ . Множество всех линейных комбинаций векторов  $\alpha x + \beta y + \dots + \lambda u$  называется линейной оболочкой векторов  $x, y, \dots, u$  и обозначается через  $L(x, y, \dots, u)$ .

Если  $R_1$  — подпространство линейного пространства  $R$ , то  $d(R_1) \leq d(R)$ .

Пусть в линейном пространстве  $R$  имеются два подпространства  $R_1$  и  $R_2$ . Пересечением подпространств  $R_1$  и  $R_2$  называется множество  $R_3$  всех элементов, одновременно принадлежащих  $R_1$  и  $R_2$ . Запись  $R_3 = R_1 \cap R_2$  означает, что  $R_3$  является пересечением подпространств  $R_1$  и  $R_2$ . Суммой подпространств  $R_1$  и  $R_2$

называется множество  $R_4$  всех элементов вида  $x + y$ , где  $x \in R_1$ , а  $y \in R_2$ . Запись  $R_4 = R_1 + R_2$  означает, что множество  $R_4$  является суммой подпространств  $R_1$  и  $R_2$ .

Доказывается, что пересечение  $R_3$  и сумма  $R_4$  являются подпространствами пространства  $R$ . Следует иметь в виду, что  $d(R_1) + d(R_2) = d(R_3) + d(R_4)$ .

506. Может ли подпространство линейного пространства  $R$  состоять из одного элемента?

507. Дано линейное пространство  $R$ , элементами которого являются всевозможные системы действительных чисел:  $x = (\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$ ,  $y = (\eta_1; \eta_2; \eta_3; \eta_4)$ ,  $z = (\zeta_1; \zeta_2; \zeta_3; \zeta_4)$ , ... Сложение двух элементов и умножение элемента на число определены равенствами

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \xi_3 + \eta_3; \xi_4 + \eta_4), \quad \lambda x = (\lambda \xi_1; \lambda \xi_2; \lambda \xi_3; \lambda \xi_4).$$

Доказать, что множество  $R_1$  элементов  $x_1 = (0; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$ ,  $y_1 = (0; \eta_2; \eta_3; \eta_4)$ ,  $z_1 = (0; \zeta_2; \zeta_3; \zeta_4)$ , ... и множество  $R_2$  элементов  $x_2 = (\xi_1; 0; \xi_3; \xi_4)$ ,  $y_2 = (\eta_1; 0; \eta_3; \eta_4)$ ,  $z_2 = (\zeta_1; 0; \zeta_3; \zeta_4)$ , ... являются подпространствами линейного пространства  $R$ .

508. Для линейного пространства  $R$ , рассмотренного в задаче 507, найти пересечение  $R_3$  и сумму  $R_4$  подпространств  $R_1$  и  $R_2$ .

509. Показать, что для подпространств задач 504 и 505 выполняется равенство  $d(R_1) + d(R_2) = d(R_3) + d(R_4)$ .

510. Дано линейное пространство, состоящее из всех геометрических векторов. Является ли подпространством этого пространства множество векторов с началом в начале координат и расположенных в I октанте?

511. Дано линейное пространство  $R$ , элементами которого являются координаты точек  $P = (x; y; z)$  I октанта, не лежащих на координатных плоскостях. Сложение двух каких-нибудь элементов  $P_1 = (x_1; y_1; z_1)$  и  $P_2 = (x_2; y_2; z_2)$  определено равенством  $P_1 + P_2 = (x_1 x_2; y_1 y_2; z_1 z_2)$ , а умножение элемента  $P = (x; y; z)$  на действительное число  $\lambda$  — равенством  $\lambda P = (x^\lambda; y^\lambda; z^\lambda)$ . Доказать, что множество  $R_1$  точек этого пространства, расположенных на плоскости  $z = 1$ , является подпространством пространства  $R$ .

512. Дано линейное пространство  $R$  многочленов не выше пятой степени. Доказать, что множество  $R_1$  многочленов вида  $a_0 t + a_1$  и множество  $R_2$  многочленов  $b_0 t^4 + b_1 t^2 + b_2$  являются подпространствами пространства  $R$ , если сложение элементов и умножение элемента на число понимать в обычном смысле.

513. Найти подпространства  $R_3 = R_1 \cap R_2$  и  $R_4 = R_1 + R_2$  по условию предыдущей задачи.

514. Рассматриваются два подпространства пространства  $R$  всех геометрических векторов:  $R_1$  — множество векторов, параллельных координатной плоскости  $xOy$ , и  $R_2$  — множество векторов, параллельных плоскости  $xOz$ . Найти  $R_3 = R_1 \cap R_2$  и  $R_4 = R_1 + R_2$ .

515. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  — подпространства линейного пространства  $R$ , а  $R'_1$  и  $R'_2$  — подпространства линейного пространства  $R'$ . Известно, что подпространства  $R_1$  и  $R'_1$ , а также  $R_2$  и  $R'_2$  изоморфны. Доказать, что изоморфны подпространства  $R_3 = R_1 \cap R_2$  и  $R'_3 = R'_1 \cap R'_2$ , а также  $R_4 = R_1 + R_2$  и  $R'_4 = R'_1 + R'_2$ .



Возьмем первое уравнение системы и запишем его в виде  $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4$ . Если  $x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$ , то  $x_1 = -2$ ; если  $x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$ , то  $x_1 = -3$ ; если  $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$ , то  $x_1 = -4$ . Итак, мы получили линейно независимые векторы  $f_1 = (-2; 1; 0; 0)$ ,  $f_2 = (-3; 0; 1; 0)$ ,  $f_3 = (-4; 0; 0; 1)$ , которые образуют базис трехмерного подпространства решений данной системы.  $\blacktriangle$

519. Показать, что вектор  $f = f_1 - 2f_2 + f_3$  удовлетворяет системе уравнений задачи 518.

520. Найти базис и размерность подпространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$\triangle$  Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

равен 2, так как определитель третьего порядка, образованный элементами матрицы, равен нулю, а среди миноров второго порядка имеются отличные от нуля. Размерность подпространства решений  $k = n - r = 3 - 2 = 1$ . Так как  $r = 2$ , то достаточно взять два уравнения из заданных трех. Отбросим третье уравнение, поскольку его коэффициенты пропорциональны соответствующим коэффициентам первого уравнения.

В системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3, \\ 2x_1 - x_2 = x_3 \end{cases}$$

полагаем  $x_3 = 1$ , тогда решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

есть  $x_1 = 1, x_2 = 1$ .

Итак, подпространство решений определяется одним базисным вектором  $f = (1; 1; 1)$ .  $\blacktriangle$

521. Найти размерность и базис подпространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$\triangle$  Определяем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем из 3-й строки 2-ю, а из 4-й строки 1-ю:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как элементы 3-й строки пропорциональны соответствующим элементам 1-й строки, а элементы 4-й строки пропорциональны элементам 2-й строки, то

3-ю и 4-ю строки можно вычеркнуть:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы  $A$  равен 2 и  $k = n - r = 4 - 2 = 2$ .

Итак, размерность подпространства решений равна 2. Так как  $r = 2$ , то из четырех уравнений возьмем два:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Полагая  $x_3 = 1, x_4 = 0$ , получим систему  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$  Следовательно,  $x_1 = 0, x_2 = 1$  и  $f_1 = (0; 1; 1; 0)$ .

Полагая теперь  $x_3 = 0, x_4 = 1$ , имеем  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$  Таким образом,  $x_1 = 0, x_2 = -1$  и  $f_2 = (0; -1; 0; 1)$ . За базисные векторы подпространства могут быть приняты векторы  $f_1 = (0; 1; 1; 0), f_2 = (0; -1; 0; 1)$ . Общее решение системы уравнений определяется вектором  $f = c_1 f_1 + c_2 f_2$ , т. е.  $f = (0; c_1 - c_2; c_1; c_2)$ .  $\blacktriangle$

522. Определить размерность подпространства решений, базис и общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

#### § 4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. **Основные понятия.** Будем говорить, что в линейном пространстве  $R$  задано преобразование  $A$ , если каждому вектору  $x \in R$  по некоторому правилу поставлен в соответствие вектор  $Ax \in R$ . Преобразование  $A$  называется *линейным*, если для любых векторов  $x$  и  $y$  и для любого действительного числа  $\lambda$  выполняются равенства

$$A(x + y) = Ax + Ay, \quad A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Линейное преобразование называется *тождественным*, если оно преобразует любой вектор  $x$  в самого себя. Тождественное линейное преобразование обозначается через  $E$ . Таким образом,  $Ex = x$ .

523. Показать, что преобразование  $Ax = \alpha x$ , где  $\alpha$  — действительное число, является линейным.

$\Delta$  Имеем  $A(x + y) = \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y = Ax + Ay, \quad A(\lambda x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda Ax$ . Итак, оба условия, определяющие линейное преобразование, выполнены. Рассмотренное преобразование  $A$  называется *преобразованием подобия*.  $\blacktriangle$

524. Преобразование  $A$  в линейном пространстве  $R$  определено равенством  $Ax = x + x_0$ , где  $x_0 \in R$  — фиксированный ненулевой вектор. Является ли преобразование  $A$  линейным?

$\Delta$  Из равенств  $Ax = x + x_0, Ay = y + x_0, A(x + y) = x + y + x_0, A(x + y) = Ax + Ay$  заключаем, что  $x + y + x_0 = (x + x_0) + (y + x_0)$ . Отсюда следует, что  $x_0 = 0$ , но это противоречит условию. Следовательно, преобразование  $A$  не является линейным.  $\blacktriangle$

525. Дано линейное пространство геометрических векторов. Преобразование  $A$  состоит в замене каждого вектора его составляющей по оси  $Ox$ . Является ли это преобразование линейным?



Эти  $n$  равенств можно назвать линейным преобразованием  $A$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Коэффициенты в формулах этого линейного преобразования являются элементами строк матрицы  $A$ .

532. Найти матрицу тождественного преобразования  $E$  в  $n$ -мерном пространстве.

$\Delta$  Тождественное преобразование не меняет базисных векторов:  $e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = e_3, \dots, e'_n = e_n$ , т. е.

$$\begin{aligned} e'_1 &= 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n, \\ e'_2 &= 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n, \\ &\dots \dots \dots \\ e'_n &= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 1 \cdot e_n. \end{aligned}$$

Следовательно, матрицей линейного преобразования служит единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

533. Найти матрицу преобразования подобия  $Ax = ax$  в  $n$ -мерном пространстве.

534. В четырехмерном линейном пространстве рассматривается линейное преобразование  $A$ . Записать это преобразование в координатной форме, если  $Ae_1 = e_3 + e_4, Ae_2 = e_1 + e_4, Ae_3 = e_4 + e_2, Ae_4 = e_2 + e_3$ .

$\Delta$  Матрица преобразования  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, преобразование  $A$  в координатной форме записывается так:  $x'_1 = x_2 + x_3, x'_2 = x_3 + x_4, x'_3 = x_1 + x_4, x'_4 = x_1 + x_2$ .  $\blacktriangle$

535. Линейное преобразование совокупности всех векторов на плоскости  $xOy$  заключается в повороте каждого вектора против часовой стрелки на угол  $\alpha$  (рис. 22). Найти матрицу этого линейного преобразования в координатной форме.

$\Delta$  Так как  $Ai = i \cos \alpha + j \sin \alpha, Aj = -i \sin \alpha + j \cos \alpha$ , то

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

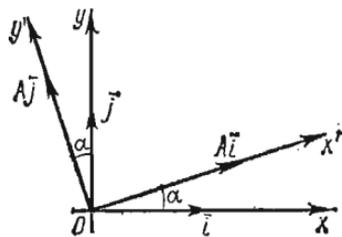


Рис. 22

Таким образом, рассматриваемое линейное преобразование имеет вид

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha; y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \blacktriangle$$

536. Рассматривается линейное пространство векторов  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$ , где  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — всевозможные действительные



537. Преобразование  $A$  заключается в повороте каждого вектора плоскости  $xOy$  на угол  $\alpha = \pi/4$ . Найти в координатной форме преобразование  $A + E$ .

$\Delta$  Имеем

$$A\mathbf{i} = \mathbf{i} \cos(\pi/4) + \mathbf{j} \sin(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)\mathbf{i} + (\sqrt{2}/2)\mathbf{j};$$

$$A\mathbf{j} = \mathbf{i} \cos(3\pi/4) + \mathbf{j} \sin(3\pi/4) = -(\sqrt{2}/2)\mathbf{i} + (\sqrt{2}/2)\mathbf{j}.$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Так как  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , то

$$A + E = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 + 1 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейное преобразование  $A + E$  можно записать с помощью равенств  $x' = (\sqrt{2}/2 + 1)x - (\sqrt{2}/2)y$ ,  $y' = (\sqrt{2}/2)x + (\sqrt{2}/2 + 1)y$ .  $\blacktriangle$

538. Даны два линейных преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + 3z, & x' &= x + 3y + 4,5z, \\ y' &= 4x + 5y + 6z, & y' &= 6x + 7y + 9z, & (B) \\ z' &= 7x + 8y + 9z, & z' &= 10,5x + 12y + 13z. \end{aligned} \quad (A) \text{ и } (B)$$

Найти  $3A - 2B$ .

539. Даны линейные преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= x + y, & x' &= y + z, \\ y' &= y + z, & y' &= x + z, & (B) \\ z' &= z + x, & z' &= x + y. \end{aligned} \quad (A) \text{ и } (B)$$

Найти преобразования  $AB$  и  $BA$ .

$\Delta$  Матрицы данных преобразований имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведения этих матриц:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае  $AB = BA$ , поэтому линейные преобразования  $AB$  и  $BA$  совпадают. Координатная форма преобразования  $AB$  записывается следующим образом:  $x' = x + y + 2z$ ,  $y' = 2x + y + z$ ,  $z' = x + 2y + z$ .  $\blacktriangle$

540. Пусть над совокупностью векторов  $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  на плоскости  $xOy$  производятся два линейных преобразования:  $A$  — замена вектора его составляющей по оси  $Ox$ ;  $B$  — зеркальное отображение вектора относительно биссектрисы I и III координатных углов. Найти преобразования  $AB$  и  $BA$ .

$\Delta$  Согласно условию,  $Ai = xi$ ,  $Bj = xj + yi$ . Таким образом,  $Ai = i$ ,  $Aj = 0$ ,  $Bi = j$ ,  $Bj = i$ , т. е.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, преобразование  $AB$  определяется равенствами  $x' = y$ ,  $y' = 0$ , а преобразование  $BA$  — равенствами  $x' = 0$ ,  $y' = x$ . Рекомендуем получить эти равенства из геометрических соображений.  $\blacktriangle$

**541.** Преобразование  $A$  заключается в повороте каждого вектора плоскости  $xOy$  на угол  $\alpha$ . Найти матрицу преобразования  $A^2$  (т. е.  $A \cdot A$ ).

$\Delta$  Так как  $Ai = i \cos \alpha + j \sin \alpha$ ,  $Aj = -i \sin \alpha + j \cos \alpha$ , то

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразование  $A^2$  в координатной форме определяется равенствами  $x' = x \cos 2\alpha - y \sin 2\alpha$ ,  $y' = x \sin 2\alpha + y \cos 2\alpha$ . Эти результаты могут быть получены и из чисто геометрических соображений.  $\blacktriangle$

**542.** Линейное преобразование  $A$  заключается в повороте на угол  $\pi/4$  каждого вектора плоскости  $xOy$ . Найти матрицу линейного преобразования  $B = A^2 + \sqrt{2}A + E$ .

$$\Delta A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

**543.** Дано пространство геометрических векторов. Пусть линейное преобразование  $A$  — поворот пространства вокруг оси  $Oz$  на угол  $\pi/4$ , а линейное преобразование  $B$  — поворот пространства вокруг оси  $Ox$  на тот же угол. Найти матрицу линейного преобразования  $AB$ .

$\Delta$  Имеем  $Ai = i \cos(\pi/4) + j \sin(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)i + (\sqrt{2}/2)j$ ,  $Aj = -i \sin(\pi/4) + j \cos(\pi/4) = -(\sqrt{2}/2)i + (\sqrt{2}/2)j$ ,  $Ak = k$ ;  $Bi = i$ ,  $Bj = (\sqrt{2}/2)j + (\sqrt{2}/2)k$ ,  $Bk = -(\sqrt{2}/2)j + (\sqrt{2}/2)k$ . Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -1/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

**544.** Дано линейное преобразование  $A$ :  $x' = -0,5(y + z)$ ,  $y' = -0,5(x + z)$ ,  $z' = -0,5(x + y)$ . Найти матрицу обратного линейного преобразования.

545. Рассматривается совокупность всех геометрических векторов. Линейное преобразование  $A$  — зеркальное отображение этих векторов относительно плоскости  $P$ . Найти  $A^{-1}$ .

546. В линейном пространстве с базисом  $e_1, e_2$  дано линейное преобразование  $A$ . Найти матрицу обратного преобразования, если  $Ae_1 = e_2, Ae_2 = e_1$ .

547. Линейное преобразование  $A$  заключается в повороте каждого вектора плоскости  $xOy$  на угол  $\alpha$ . Найти матрицу  $B = A + A^{-1}$ .

548. Дано линейное преобразование  $A: x' = x + y, y' = 2(x + y)$ . Найти обратное линейное преобразование.

549. Линейное преобразование  $A$  заключается в повороте каждого вектора плоскости  $xOy$  на угол  $\pi/4$ . Найти матрицу  $A^{-2}$ .

550. При каком значении  $\lambda$  линейное преобразование  $x' = -2x + y + z, y' = x - 2y + z, z' = x + y + \lambda z$  не имеет обратного?

**4. Характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования.** Пусть  $R$  — заданное  $n$ -мерное линейное пространство. Ненулевой вектор  $x \in R$  называется *собственным вектором* линейного преобразования  $A$ , если найдется такое число  $\lambda$ , что выполняется равенство  $Ax = \lambda x$ . Само число  $\lambda$  называется *характеристическим числом* линейного преобразования  $A$ , соответствующим вектору  $x$ .

Если линейное преобразование  $A$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то характеристическими числами линейного преобразования  $A$  служат действительные корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  уравнения  $n$ -й степени, которое можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Оно называется *характеристическим уравнением*, а его левая часть — *характеристическим многочленом* линейного преобразования  $A$ . Собственным вектором  $x_k$ , соответствующим характеристическому числу  $\lambda_k$ , является любой вектор  $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ , координаты которого удовлетворяют системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_k) \xi_1 + a_{12} \xi_2 + \dots + a_{1n} \xi_n = 0, \\ a_{21} \xi_1 + (a_{22} - \lambda_k) \xi_2 + \dots + a_{2n} \xi_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1} \xi_1 + a_{n2} \xi_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_k) \xi_n = 0. \end{cases}$$

Отметим следующие важные теоремы.

*Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.*

*Если матрица  $A$  линейного преобразования  $A$  является симметрической, то все корни характеристического уравнения  $|A - \lambda E| = 0$  — действительные числа.*

551. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования  $A$ , определяемого уравнениями  $x' = 5x + 4y, y' = 8x + 9y$ .

△ Матрица преобразования запишется так:  $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ . Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0;$$

характеристические числа  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 13$ .

Для определения координат собственных векторов получаем две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (5-\lambda_1) \xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 + (9-\lambda_1) \xi_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} (5-\lambda_2) \xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 + (9-\lambda_2) \xi_2 = 0. \end{cases}$$

Так как  $\lambda_1 = 1$ , то первую систему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 + 8\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, значения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  должны удовлетворять уравнению  $\xi_1 + \xi_2 = 0$ , или  $\xi_2 = -\xi_1$ . Следовательно, решение этой системы имеет вид  $\xi_1 = c_1$ ,  $\xi_2 = -c_1$ , где  $c_1$  — произвольная величина. Поэтому характеристическому числу  $\lambda = 1$  соответствует семейство собственных векторов  $u = c_1 e_1 - c_1 e_2$ , т. е.  $u = c_1 (e_1 - e_2)$ .

Значение  $\lambda_2 = 13$  приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 = 0, \end{cases}$$

т. е.  $\xi_2 = 2\xi_1$ . Полагая  $\xi_1 = c_2$ , получаем  $\xi_2 = 2c_2$ . Следовательно, характеристическому числу  $\lambda = 13$  соответствует семейство собственных векторов  $v = c_2 (e_1 + 2e_2)$ .

Итак, придавая в равенствах  $u = c_1 (e_1 - e_2)$ ,  $v = c_2 (e_1 + 2e_2)$  величинам  $c_1$  и  $c_2$  всевозможные числовые значения, будем получать всевозможные собственные векторы линейного преобразования  $A$ . ▲

552. Дано линейное преобразование с матрицей  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ . Найти характеристические числа и собственные векторы этого преобразования.

553. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ .

554. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ .

555. Определить характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

△ Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$(1-\lambda) [(2-\lambda)^2 - 1] = 0, \quad (1-\lambda)^2 (3-\lambda) = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Если  $\lambda = 1$ , то для определения координат собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0, \\ \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, характеристическому числу  $\lambda = 1$  соответствует семейство собственных векторов  $u = c_1 (e_1 + e_2)$ .

Если  $\lambda = 3$ , то для определения координат собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Семейство собственных векторов, соответствующих этому характеристическому числу, определяется равенством  $v = c_2 (e_1 - e_2)$ . ▲

556. Определить характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования  $A$  с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

557. Доказать, что если  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  — симметрическая матрица, а действительные числа  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  отличны от нуля, то все корни характеристического уравнения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\alpha/\beta & a_{13}\alpha/\gamma \\ a_{21}\beta/\alpha & a_{22} & a_{23}\beta/\gamma \\ a_{31}\gamma/\alpha & a_{32}\gamma/\beta & a_{33} \end{pmatrix}$$

являются действительными числами.

△ В базисе  $e_1, e_2, e_3$  рассмотрим линейное преобразование  $A$  с матрицей  $A$ . Тогда

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + (a_{21}\beta/\alpha)e_2 + (a_{31}\gamma/\alpha)e_3, \\ Ae_2 &= (a_{12}\alpha/\beta)e_1 + a_{22}e_2 + (a_{32}\gamma/\beta)e_3, \\ Ae_3 &= (a_{13}\alpha/\gamma)e_1 + (a_{23}\beta/\gamma)e_2 + a_{33}e_3 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} A(\alpha e_1) &= a_{11}\alpha e_1 + a_{21}\beta e_2 + a_{31}\gamma e_3, \\ A(\beta e_2) &= a_{12}\alpha e_1 + a_{22}\beta e_2 + a_{32}\gamma e_3, \\ A(\gamma e_3) &= a_{13}\alpha e_1 + a_{23}\beta e_2 + a_{33}\gamma e_3. \end{aligned}$$

Полагая  $\alpha e_1 = e'_1$ ,  $\beta e_2 = e'_2$ ,  $\gamma e_3 = e'_3$ , имеем

$$\begin{aligned} Ae'_1 &= a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + a_{31}e'_3, \\ Ae'_2 &= a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + a_{32}e'_3, \\ Ae'_3 &= a_{13}e'_1 + a_{23}e'_2 + a_{33}e'_3. \end{aligned}$$

Таким образом, матрицей линейного преобразования  $A$  в базисе  $e'_1, e'_2, e'_3$  служит симметрическая матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, характеристическое уравнение линейного преобразования  $A$  в базисе  $e'_1, e'_2, e'_3$  имеет только действительные корни. Так как при переходе к базису  $e_1, e_2, e_3$  характеристические числа не меняются, то те же корни имеет и характеристическое уравнение матрицы  $A$ . ▲

558. Линейное преобразование  $A$  заключается в повороте пространства на угол  $\pi/3$  вокруг оси  $Oz$ . Найти характеристические числа и собственные векторы этого преобразования.

● Показать, что матрица этого линейного преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

559. Зная характеристические числа линейного преобразования  $A$ , найти характеристические числа обратного линейного преобразования  $A^{-1}$ .

● Показать, что из уравнения  $|A^{-1} - \lambda E| = 0$  следует  $|A - (1/\lambda)E| = 0$ .

560. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования  $A$  с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

561. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ .

## § 5. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Линейное пространство  $R$  называется *евклидовым*, если имеется правило, которое позволяет для каждого двух векторов  $x$  и  $y$  из  $R$  построить действительное число, называемое *скалярным произведением* векторов  $x$  и  $y$  и обозначаемое  $(x, y)$ , причем это правило удовлетворяет следующим условиям:

1°.  $(x, y) = (y, x)$ ;

2°.  $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ ;

3°.  $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$  для любого действительного числа  $\lambda$ ;

4°.  $(x, x) > 0$ , если  $x \neq 0$ .

Из условий 1°—4° следует, что:

а)  $(y + z, x) = (y, x) + (z, x)$ ;

б)  $(x, \lambda y) = \lambda (x, y)$ ;

в)  $(0, x) = 0$  для любого вектора  $x$ .

Скалярное произведение любого вектора  $x \in R$  на себя называется *скалярным квадратом* вектора  $x$ .

Длиной вектора  $x$  в евклидовом пространстве называется квадратный корень из скалярного квадрата этого вектора, т. е.  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ .

Если  $\lambda$ —любое действительное число, а  $x$ —любой вектор евклидова пространства, то  $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ .

Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным*. Если  $x \in R$ —ненулевой вектор, то нетрудно видеть, что  $\frac{1}{|x|} \cdot x$  (можно обозначить

$\frac{x}{|x|}$ ) является нормированным вектором.

Для любых двух векторов  $x$  и  $y$  в евклидовом пространстве выполняется неравенство  $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$ , называемое *неравенством Коши—Буняковского*. Равенство  $(x, y)^2 = (x, x)(y, y)$  имеет место тогда и только тогда, когда векторы  $x$  и  $y$  линейно зависимы.

Из неравенства Коши—Буняковского следует, что  $-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$ . Угол  $\varphi$ , определяемый равенством  $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$  и принадлежащий отрезку  $[0, \pi]$ , называется *углом между векторами*  $x$  и  $y$ . Если  $x$  и  $y$ —ненулевые векторы, а  $\varphi = \pi/2$ , то  $(x, y) = 0$ . В этом случае говорят, что векторы  $x$  и  $y$  *ортогональны*, и пишут  $x \perp y$ .

Для произвольных векторов  $x$  и  $y$  евклидова пространства имеют место следующие важные соотношения:

1.  $|x+y| \leq |x|+|y|$  (неравенство треугольника).
2. Пусть  $\varphi$  — угол между векторами  $x$  и  $y$ ; тогда  $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\varphi$  (теорема косинусов). Если  $x \perp y$ , то получается равенство  $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ . Заменяя в последнем равенстве  $y$  на  $-y$ , получаем  $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$  (теорема Пифагора).

562. Дано линейное пространство, рассмотренное в задаче 461. Можно ли скалярное произведение двух произвольных векторов  $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$  и  $y = (\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n)$  определить равенством  $(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_n\eta_n$  (для того чтобы это пространство стало евклидовым)?

△ Проверим выполнение условий 1°—4°.

1°. Так как  $(y, x) = \eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2 + \dots + \eta_n\xi_n$ , то  $(x, y) = (y, x)$ .

2°. Пусть  $z = (\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_n)$ . Тогда  $y+z = (\eta_1+\zeta_1; \eta_2+\zeta_2; \dots; \eta_n+\zeta_n)$  и

$$\begin{aligned} (x, y+z) &= \xi_1(\eta_1+\zeta_1) + \xi_2(\eta_2+\zeta_2) + \dots + \xi_n(\eta_n+\zeta_n) = \\ &= (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_n\eta_n) + (\xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2 + \dots + \xi_n\zeta_n) = (x, y) + (x, z). \end{aligned}$$

3°.  $(\lambda x, y) = \lambda\xi_1\eta_1 + \lambda\xi_2\eta_2 + \dots + \lambda\xi_n\eta_n = \lambda(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_n\eta_n) = \lambda(x, y)$ .

4°.  $(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 \neq 0$ , если хотя бы одно из чисел  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  отлично от нуля.

Значит, в заданном пространстве с помощью указанного равенства можно определить скалярное произведение. ▲

563. Дано евклидово пространство, рассмотренное в задаче 562. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — количество  $n$  видов изделий, выпускаемых ежедневно заводом, а  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  — соответственно цены этих изделий. Как можно истолковать скалярное произведение векторов  $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$  и  $y = (\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n)$ ?

564. Дано линейное пространство, векторами которого являются всевозможные системы, состоящие из  $n$  положительных чисел:  $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ ,  $y = (\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n)$ ,  $z = (\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_n), \dots$ . Сложение векторов и умножение вектора на число определены равенствами  $x+y = (\xi_1+\eta_1; \xi_2+\eta_2; \dots; \xi_n+\eta_n)$ ,  $\lambda x = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \dots; \lambda\xi_n)$ . Можно ли сделать это пространство евклидовым, определив скалярное произведение равенством  $(x, y) = \ln \xi_1 \ln \eta_1 + \ln \xi_2 \ln \eta_2 + \dots + \ln \xi_n \ln \eta_n$ ?

△ Проверим выполнение условий 1°—4°.

1°.  $(x, y) = \ln \xi_1 \ln \eta_1 + \ln \xi_2 \ln \eta_2 + \dots + \ln \xi_n \ln \eta_n$ ,  $(y, x) = \ln \eta_1 \ln \xi_1 + \ln \eta_2 \ln \xi_2 + \dots + \ln \eta_n \ln \xi_n$ , т. е.  $(x, y) = (y, x)$ .

2°. Так как  $y+z = (\eta_1+\zeta_1; \eta_2+\zeta_2; \dots; \eta_n+\zeta_n)$ , то

$$\begin{aligned} (x, y+z) &= \ln \xi_1 \ln (\eta_1+\zeta_1) + \ln \xi_2 \ln (\eta_2+\zeta_2) + \dots + \ln \xi_n \ln (\eta_n+\zeta_n) = \\ &= \ln \xi_1 \ln \eta_1 + \ln \xi_2 \ln \eta_2 + \dots + \ln \xi_n \ln \eta_n + \ln \xi_1 \ln \zeta_1 + \\ &\quad + \ln \xi_2 \ln \zeta_2 + \dots + \ln \xi_n \ln \zeta_n = (x, y) + (x, z). \end{aligned}$$

3°. Так как  $\lambda x = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \dots; \lambda\xi_n)$ , то

$$\begin{aligned} (\lambda x, y) &= \ln \lambda\xi_1 \ln \eta_1 + \ln \lambda\xi_2 \ln \eta_2 + \dots + \ln \lambda\xi_n \ln \eta_n = \\ &= \lambda(\ln \xi_1 \ln \eta_1 + \ln \xi_2 \ln \eta_2 + \dots + \ln \xi_n \ln \eta_n) = \lambda(x, y). \end{aligned}$$

4°.  $(x, x) = \ln^2 \xi_1 + \ln^2 \xi_2 + \dots + \ln^2 \xi_n \geq 0$ .

Следовательно, рассматриваемое пространство является евклидовым. ▲

565. Рассматривается линейное пространство непрерывных в промежутке  $[a, b]$  функций  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t), \dots$ . Можно ли

сделать это пространство линейным, определив скалярное произведение двух любых векторов  $x$  и  $y$  равенством  $(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt$ ?

566. Является ли множество всех геометрических векторов евклидовым пространством, если скалярное произведение двух векторов определить как произведение их длин?

567. Образует ли множество всех геометрических векторов евклидово пространство, если определить скалярное произведение двух произвольных векторов  $a$  и  $b$  как произведение длины вектора  $a$  и утроенной проекции вектора  $b$  на направление вектора  $a$ ?

568. Задано линейное пространство, рассмотренное в задаче 562, при  $n=4$ . Определить угол между векторами  $x=(4; 1; 2; 2)$  и  $y=(1; 3; 3; -9)$ .

$$\Delta |x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{16+1+4+4} = 5; |y| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{1+9+9+81} = 10;$$

$$(x, y) = 4+3+6-18 = -5; \cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{-5}{5 \cdot 10} = -0,1; \varphi = \arccos(-0,1) = 174^\circ 15'. \blacktriangle$$

569. Задано евклидово пространство, рассмотренное в задаче 562. Определить угол между векторами  $x=(1; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \dots; \sqrt{2n-1})$  и  $y=(1; 0; 0; \dots; 0)$ .

570. Рассматривается евклидово пространство непрерывных функций  $x(t), y(t), z(t), \dots$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Скалярное произведение определено равенством  $(x, y) = \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt$ . Найти угол между векторами  $x=3t^2-1, y=3t-5t^3$ .

$$\Delta \text{ Имеем } (x, y) = \int_{-1}^1 (3t^2-1)(3t-5t^3) dt. \text{ Нетрудно видеть, что } (x, y) = 0, \text{ так}$$

как подынтегральная функция является нечетной. Следовательно, векторы  $x$  и  $y$  ортогональны.  $\blacktriangle$

571. Задано евклидово пространство, рассмотренное в задаче 562, при  $n=6$ . Проверить справедливость теоремы Пифагора для ортогональных векторов  $x=(1; 0; 2; 0; 2; 0)$  и  $y=(0; 6; 0; 3; 0; 2)$ .

$\Delta$  Имеем

$$|x| = \sqrt{1+0+4+0+4+0} = 3, |y| = \sqrt{0+36+0+9+0+4} = 7;$$

$$x+y = (1; 6; 2; 3; 2; 2); |x+y| = \sqrt{1+36+4+9+4+4} = \sqrt{58}.$$

Итак,  $|x|^2 + |y|^2 = |x+y|^2$ .  $\blacktriangle$

572. В евклидовом пространстве непрерывных функций, соответствующих условию задачи 565, рассматриваются два вектора:  $x=t^2+1, y=\lambda t^2+1$ . Найти значение  $\lambda$ , при котором векторы  $x$  и  $y$  ортогональны на отрезке  $[0, 1]$ , и проверить справедливость теоремы Пифагора для этих векторов.

△ Составим скалярное произведение

$$(x, y) = \int_0^1 (t^2 + 1)(\lambda t^2 + 1) dt = \lambda/5 + (\lambda + 1)/3 + 1.$$

Из условия  $(x, y) = 0$  определяем  $\lambda$ ; имеем  $\lambda/5 + (\lambda + 1)/3 + 1 = 0$ , откуда  $\lambda = -5/2$ .

Найдем теперь длины векторов  $x = t^2 + 1$ ,  $y = -(5/2)t^2 + 1$  и  $x + y = -(3/2)t^2 + 2$ :

$$|x| = \sqrt{\int_0^1 (t^4 + 2t^2 + 1) dt} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1} = \sqrt{\frac{28}{15}},$$

$$|y| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{25}{4}t^4 - 5t^2 + 1\right) dt} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{5}{3} + 1} = \sqrt{\frac{7}{12}},$$

$$|x + y| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{9}{4}t^4 - 6t^2 + 4\right) dt} = \sqrt{\frac{9}{20} - 2 + 4} = \sqrt{\frac{49}{20}}.$$

Таким образом,  $|x|^2 = 28/15$ ,  $|y|^2 = 7/12$ ,  $|x + y|^2 = 49/20$ , т. е.  $|x|^2 + |y|^2 = |x + y|^2$ . ▲

573. Рассматривается множество всевозможных упорядоченных систем геометрических векторов  $\mathbf{a}^* = (\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n)$ ,  $\mathbf{b}^* = (\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n)$ , .... Является ли это множество евклидовым пространством, если сложение элементов, умножение элемента на число и скалярное произведение определить равенствами  $\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^* = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1; \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)$ ,  $\lambda \mathbf{a}^* = (\lambda \mathbf{a}_1; \lambda \mathbf{a}_2; \dots; \lambda \mathbf{a}_n)$ ,  $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n$  (правая часть последнего равенства представляет собой сумму скалярных произведений геометрических векторов)?

574. Доказать справедливость неравенств:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\xi_1 + \eta_1)^2 + (\xi_2 + \eta_2)^2 + \dots + (\xi_n + \eta_n)^2} \leq \\ & \leq \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2} + \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2}; \\ & (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2) \leq (\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n)^2, \end{aligned}$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  — действительные числа.

● Воспользоваться неравенствами треугольника и Коши — Бунаковского для евклидова пространства, рассмотренного в задаче 562.

575. Рассматриваются всевозможные непрерывные на отрезке  $[0, 1]$  функции  $x(t), y(t), z(t), \dots$ . Доказать справедливость неравенств:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\int_0^1 (x + y)^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^1 x^2 dt} + \sqrt{\int_0^1 y^2 dt}, \\ & \int_0^1 (y^2/x^2) dt \geq \left(\int_0^1 y dt\right)^2 / \left(\int_0^1 x^2 dt\right), \text{ если } x(0) \neq 0. \end{aligned}$$

## § 6. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. **Ортогональный базис.** Базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  евклидова пространства называется *ортогональным*, если  $(e_i, e_k) = 0$  при  $i \neq k$ .

Справедлива следующая теорема: во всяком евклидовом пространстве имеется ортогональный базис. Если ортогональный базис состоит из нормированных векторов, то этот базис называется *ортонормированным*. Для ортонормированного базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  выполняются равенства

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Если в  $n$ -мерном евклидовом пространстве известен какой-нибудь базис  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , то в этом пространстве всегда можно найти и ортонормированный базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Любой вектор  $x$  евклидова пространства, заданный в ортонормированном базисе, определяется равенством

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

Длина вектора  $x$  находится по формуле

$$|x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}.$$

Два вектора  $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$  и  $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$  линейно независимы (коллинеарны, пропорциональны) тогда и только тогда, когда

$$\xi_1/\eta_1 = \xi_2/\eta_2 = \dots = \xi_n/\eta_n.$$

Условие ортогональности векторов  $x$  и  $y$  имеет вид

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n = 0.$$

Угол между двумя векторами  $x$  и  $y$  находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2} \cdot \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2}}.$$

В следующих задачах ортонормированный базис  $n$ -мерного евклидова пространства обозначается через  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

576. Найти длину вектора  $x = 4e_1 - 2e_2 + 2e_3 - e_4$ .

577. Нормировать вектор  $x = e_1 + 2\sqrt{2}e_2 + 3\sqrt{3}e_3 + 8e_4 + 5\sqrt{5}e_5$ .

578. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 6/7 & -2/7 & 3/7 \\ 3/7 & 6/7 & -2/7 \end{pmatrix}$  перехода от ортонормированного базиса  $e_1, e_2, e_3$  к базису  $e'_1, e'_2, e'_3$ . Доказать, что базис  $e'_1, e'_2, e'_3$  — ортонормированный.

579. Нормировать вектор  $x = e_1 \sin^3 \alpha + e_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + e_3 \sin \alpha \cos \alpha + e_4 \cos \alpha$ .

580. Определить угол между векторами  $x = e_1 \sqrt{7} + e_2 \sqrt{5} + e_3 \sqrt{3} + e_4$  и  $y = e_1 \sqrt{7} + e_2 \sqrt{5}$ .

581. Найти нормированный вектор, ортогональный векторам  $x = 3e_1 - e_2 - e_3 - e_4$ ,  $y = e_1 - 3e_2 + e_3 + e_4$ ,  $z = e_1 + e_2 - 3e_3 + e_4$ .

582. При каком значении  $\lambda$  векторы  $x = \lambda e_1 + \lambda e_2 - e_3 - \lambda e_4$  и  $y = e_1 - e_2 + \lambda e_3 - e_4$  имеют одинаковые длины?

583. В четырехмерном пространстве дан базис  $f_1, f_2, f_3, f_4$ . С помощью векторов этого базиса построить ортонормированный базис того же пространства.

△ Сначала построим в заданном пространстве какой-нибудь ортогональный базис  $g_1, g_2, g_3, g_4$ .

Положим  $g_1 = f_1$ ,  $g_2 = f_2 + \alpha g_1$ . Подберем действительное число  $\alpha$  так, чтобы выполнялось условие  $g_2 \perp g_1$ . Умножив скалярно на  $g_1$  обе части последнего равенства, получим

$$(g_1, g_2) = (g_1, f_2) + \alpha (g_1, g_1).$$

Так как  $(g_1, g_2) = 0$ , то  $\alpha = -(g_1, f_2)/(g_1, g_1)$ .

Далее, в равенстве  $g_3 = f_3 + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2$  подберем  $\beta_1$  и  $\beta_2$  так, чтобы выполнялись условия  $g_3 \perp g_1$ ,  $g_3 \perp g_2$ . Из равенств

$$\begin{aligned} (g_1, g_3) &= (g_1, f_3) + \beta_1 (g_1, g_1) + \beta_2 (g_1, g_2), \\ (g_2, g_3) &= (g_2, f_3) + \beta_1 (g_1, g_2) + \beta_2 (g_2, g_2) \end{aligned}$$

получим  $\beta_1 = -(g_1, f_3)/(g_1, g_1)$ ,  $\beta_2 = -(g_2, f_3)/(g_2, g_2)$ .

Наконец, из равенства  $g_4 = f_4 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3$  находим  $\gamma_1 = -(g_1, f_4)/(g_1, g_1)$ ,  $\gamma_2 = -(g_2, f_4)/(g_2, g_2)$ ,  $\gamma_3 = -(g_3, f_4)/(g_3, g_3)$ .

Итак, при сделанном выборе  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  векторы  $g_1, g_2, g_3, g_4$  попарно ортогональны. Значит, векторы  $e_i = g_i/|g_i|$ ,  $e_2 = g_2/|g_2|$ ,  $e_3 = g_3/|g_3|$ ,  $e_4 = g_4/|g_4|$  образуют ортонормированный базис. ▲

584. Рассматривается евклидово пространство многочленов не выше второй степени. Скалярное произведение двух произвольных многочленов  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  определено равенством  $(x, y) = \int_0^1 x(t) y(t) dt$ . Используя базис  $f_1 = t^2$ ,  $f_2 = t$ ,  $f_3 = 1$  и применив метод решения, рассмотренный в задаче 583, построить для этого пространства ортонормированный базис.

△ Сначала построим ортогональный базис  $g_1, g_2, g_3$ . Положим  $g_1 = f_1$ , т. е.  $g_1 = t^2$ ,  $g_2 = f_2 + \alpha g_1 = t + \alpha t^2$ . Тогда

$$\int_0^1 g_2 t^2 dt = \int_0^1 t^3 dt + \alpha \int_0^1 t^4 dt.$$

В силу ортогональности векторов  $g_1$  и  $g_2$  левая часть последнего равенства обращается в нуль. Таким образом,  $\alpha = -5/4$  и  $g_2 = t - 5t^2/4$ .

Найдем теперь  $g_3$ . В равенстве  $g_3 = 1 + \beta_1 t^2 + \beta_2 (t - 5t^2/4)$  значения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  определяем из условий ортогональности

$$\int_0^1 g_3 t^2 dt = 0 \text{ и } \int_0^1 g_3 \left( t - \frac{5}{4} t^2 \right) dt = 0.$$

Таким образом,

$$0 = \int_0^1 t^2 dt + \beta_1 \int_0^1 t^4 dt \text{ и } 0 = \int_0^1 \left( t - \frac{5}{4} t^2 \right) dt + \beta_2 \int_0^1 \left( t - \frac{5}{4} t^2 \right) dt.$$

Отсюда  $\beta_1 = -5/3$ ,  $\beta_2 = -4$ ,  $g_3 = 1 - 5t^2/3 - 4(t - 5t^2/4)$ , т. е.  $g_3 = 1 - 4t + 10t^2/3$ .

Находим длины векторов  $g_1 = t^2$ ,  $g_2 = t - 5t^2/4$  и  $g_3 = 1 - 4t + 10t^2/3$ :

$$|g_1| = \sqrt{\int_0^1 t^4 dt} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad |g_2| = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{5}{4}t^2\right)^2 dt} = \frac{1}{4\sqrt{3}},$$

$$|g_3| = \sqrt{\int_0^1 \left(1 - 4t + \frac{10}{3}t^2\right)^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 \left(1 - 8t + \frac{68}{3}t^2 - \frac{80}{3}t^3 + \frac{100}{9}t^4\right) dt} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, векторы  $e_1 = g_1/|g_1| = \sqrt{5}t^2$ ,  $e_2 = g_2/|g_2| = \sqrt{3}(4 - 5t^2)$ ,  $e_3 = g_3/|g_3| = 3 - 12t + 10t^2$ , образуют ортонормированный базис.  $\blacktriangle$

585. При каком значении  $\lambda$  базис, образованный векторами  $g_1 = \lambda e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ ,  $g_2 = e_1 + \lambda e_2 + e_3 + e_4$ ,  $g_3 = e_1 + e_2 + \lambda e_3 + e_4$ ,  $g_4 = e_1 + e_2 + e_3 + \lambda e_4$ , является ортогональным? Нормировать этот базис.

$\Delta$  Из условия  $(e_i, e_k) = 0$  (при  $i \neq k$ ) получаем уравнение  $\lambda + \lambda + 1 + 1 = 0$ . Следовательно,  $\lambda = -1$  и  $g_1 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ ,  $g_2 = e_1 - e_2 + e_3 + e_4$ ,  $g_3 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ ,  $g_4 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$ ,  $|g_i| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$ .

Таким образом, векторы  $e'_1 = 0,5(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ ,  $e'_2 = 0,5(e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$ ,  $e'_3 = 0,5(e_1 + e_2 - e_3 + e_4)$ ,  $e'_4 = 0,5(e_1 + e_2 + e_3 - e_4)$  образуют ортонормированный базис.  $\blacktriangle$

586. При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  базис, образованный векторами  $e'_1 = \frac{\alpha}{3}e_1 + \frac{1-\alpha}{3}e_2 + \beta e_3$ ,  $e'_2 = \frac{1-\alpha}{3}e_1 + \beta e_2 + \frac{\alpha}{3}e_3$ ,  $e'_3 = \beta e_1 + \frac{\alpha}{3}e_2 + \frac{1-\alpha}{3}e_3$ , является ортонормированным?

$\Delta$  Из условий  $|e'_i| = 1$ ,  $(e'_i, e'_k) = 0$  (при  $i \neq k$ ) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 9\beta^2 = 9, \\ \alpha(1-\alpha) + 3(1-\alpha)\beta + 3\alpha\beta = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим  $\beta = -\alpha(\alpha-1)/3$ . Подставив это значение  $\beta$  в первое уравнение, имеем

$$\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + \alpha^2(1-\alpha)^2 = 9; \quad 1 - 2(1-\alpha)\alpha + \alpha^2(1-\alpha)^2 = 9; \quad (1-\alpha + \alpha^2)^2 = 9.$$

Так как  $1 - \alpha + \alpha^2 > 0$  при действительных значениях  $\alpha$ , то  $1 - \alpha + \alpha^2 = 3$ , т. е.  $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ . Следовательно,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\beta_1 = -2/3$ ,  $\beta_2 = 2/3$ .

Итак, получаем два ортонормированных базиса:

$$e_1^{(1)} = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{2}{3}e_3, \quad e_2^{(1)} = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3,$$

$$e_3^{(1)} = -\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3,$$

$$e_1^{(2)} = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3, \quad e_2^{(2)} = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3, \quad e_3^{(2)} = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3. \quad \blacktriangle$$

2. Ортогональные преобразования. Линейное преобразование  $A$  евклидова пространства называется ортогональным, если оно сохраняет скалярное произведение любых двух векторов  $x$  и  $y$  этого пространства, т. е.  $(Ax, Ay) = (x, y)$ . Длина вектора  $x$  при этом не изменяется, т. е.  $|Ax| = |x|$ . Таким образом,

$$\frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{(Ax, Ay)}{|Ax| \cdot |Ay|}.$$

Из последнего равенства следует, что ортогональное преобразование  $A$  не изменяет угла между любыми двумя векторами  $x$  и  $y$ .

Ортогональное преобразование переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный. Наоборот, если линейное преобразование переводит какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный, то оно является ортогональным.

587. Является ли ортогональным преобразование, переводящее каждый геометрический вектор в вектор, симметричный относительно некоторой фиксированной плоскости?

588. Является ли ортогональным преобразование, заключающееся в повороте любого вектора, лежащего в плоскости  $xOy$ , на фиксированный угол  $\alpha$ ?

589. При каких значениях  $\lambda$  преобразование  $A$ , определяемое равенством  $Ax = \lambda x$ , является ортогональным?

590. Является ли ортогональным преобразование  $A$ , определяемое в каком-нибудь ортонормированном базисе  $e_1, e_2, e_3$  матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ если } a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0, a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1?$$

591. Является ли ортогональным преобразование  $Ax = -\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4$ , где  $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4$  — произвольный вектор, а  $e_1, e_2, e_3, e_4$  — ортонормированный базис?

592. Пусть  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$  — ортонормированный базис. Доказать, что  $A$  — ортонормированное преобразование, если  $Ae_1 = e_1$ ,  $Ae_2 = -e_2$ ,  $Ae_3 = e_3 \cos \alpha + e_4 \sin \alpha$ ,  $Ae_4 = -e_3 \sin \alpha + e_4 \cos \alpha$ ,  $Ae_5 = e_5 \cos \beta + e_6 \sin \beta$ ,  $Ae_6 = -e_5 \sin \beta + e_6 \cos \beta$ .

## § 7. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

*Квадратичной формой* действительных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — квадратичная форма переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $\lambda$  — какое-нибудь действительное число, то  $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  
Если  $n=2$ , то

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Если  $n=3$ , то

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

В дальнейшем все необходимые формулировки и определения приведем для квадратичной формы трех переменных.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

у которой  $a_{ik} = a_{ki}$ , называется *матрицей квадратичной формы*  $f(x_1, x_2, x_3)$ , а соответствующий определитель — *определителем этой квадратичной формы*.

Так как  $A$  — симметрическая матрица, то корни  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$  характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

являются действительными числами.

Пусть

$$e'_1 = b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + b_{31}e_3,$$

$$e'_2 = b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{32}e_3,$$

$$e'_3 = b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3$$

— нормированные собственные векторы, соответствующие характеристическим числам  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . В свою очередь, векторы  $e'_1, e'_2, e'_3$  образуют ортонормированный базис. Матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса  $e_1, e_2, e_3$  к базису  $e'_1, e'_2, e'_3$ .

Формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису имеют вид

$$x_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3,$$

$$x_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3,$$

$$x_3 = b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3.$$

Преобразовав с помощью этих формул квадратичную форму  $f(x_1, x_2, x_3)$ , получаем квадратичную форму

$$f(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \lambda_3 x'^2_3,$$

не содержащую членов с произведениями  $x'_1 x'_2, x'_1 x'_3, x'_2 x'_3$ .

Принято говорить, что квадратичная форма  $f(x_1, x_2, x_3)$  приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования  $B$ . Рассуждения проводились в предположении, что характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  различны. При решении задач будет показано, как следует поступать, если среди характеристических чисел имеются одинаковые.

**593.** Привести к каноническому виду квадратичную форму  $f = 27x^2_1 - 10x_1x_2 + 3x^2_2$ .

$\Delta$  Здесь  $a_{11} = 27, a_{12} = -5, a_{22} = 3$ . Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 27 - \lambda & -5 \\ -5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 30\lambda + 56 = 0,$$

т. е. характеристические числа  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 28$ .

Определяем собственные векторы. Если  $\lambda = 2$ , то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 25\xi_1 - 5\xi_2 = 0, \\ -5\xi_1 + \xi_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом,  $\xi_2 = 5\xi_1$ . Полагая  $\xi_1 = c$ , имеем  $\xi_2 = 5c$ , т. е. собственный вектор  $u = c(e_1 + 5e_2)$ .

Если  $\lambda = 28$ , то приходим к системе

$$\begin{cases} -\xi_1 - 5\xi_2 = 0, \\ -5\xi_1 - 25\xi_2 = 0. \end{cases}$$

В этом случае получаем собственный вектор  $v = c(-5e_1 + e_2)$ .

Для того чтобы пронормировать векторы  $u$  и  $v$ , следует принять  $c = 1/\sqrt{1^2 + 5^2} = 1/\sqrt{26}$ . Итак, мы нашли нормированные собственные векторы  $e'_1 = (e_1 + 5e_2)/\sqrt{26}, e'_2 = (-5e_1 + e_2)/\sqrt{26}$ .

Матрица перехода от ортонормированного базиса  $e_1, e_2$  к ортонормированному базису  $e'_1, e'_2$  имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{26} & -5/\sqrt{26} \\ 5/\sqrt{26} & 1/\sqrt{26} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем формулы преобразования координат:  $x_1 = (1/\sqrt{26})x'_1 - (5/\sqrt{26})x'_2$ ,  $x_2 = (5/\sqrt{26})x'_1 + (1/\sqrt{26})x'_2$ . Таким образом,

$$f = 27 \left( \frac{1}{\sqrt{26}}x'_1 - \frac{5}{\sqrt{26}}x'_2 \right)^2 - 10 \left( \frac{1}{\sqrt{26}}x'_1 - \frac{5}{\sqrt{26}}x'_2 \right) \left( \frac{5}{\sqrt{26}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}x'_2 \right) + 3 \left( \frac{5}{\sqrt{26}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}x'_2 \right)^2 = 2x_1'^2 + 28x_2'^2.$$

Этот результат можно было получить сразу, так как  $f = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$ . ▲

594. Привести к каноническому виду квадратичную форму  $f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2$ .

△ Здесь  $a_{11} = 2$ ,  $a_{12} = 4$ ,  $a_{22} = 8$ . Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 10.$$

Определяем собственные векторы. При  $\lambda = 0$  получаем систему

$$\begin{cases} 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 + 8\xi_2 = 0, \end{cases}$$

которая имеет решение  $\xi_1 = 2c$ ,  $\xi_2 = -c$ , т. е.  $\mathbf{u} = c(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ .

При  $\lambda = 10$  имеем

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 - 2\xi_2 = 0, \end{cases}$$

откуда  $\xi_1 = c$ ,  $\xi_2 = 2c$ , т. е.  $\mathbf{v} = c(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$ .

Приняв  $c = 1/\sqrt{2^2 + 1^2} = 1/\sqrt{5}$ , находим нормированные собственные векторы  $\mathbf{e}'_1 = (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{5}$ ,  $\mathbf{e}'_2 = (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)/\sqrt{5}$ .

Матрица перехода к новому базису (матрица ортогонального преобразования) имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования координат запишутся так:  $x_1 = (2/\sqrt{5})x'_1 + (1/\sqrt{5})x'_2$ ,  $x_2 = -(1/\sqrt{5})x'_1 + (2/\sqrt{5})x'_2$ . Следовательно,

$$f = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{5}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}x'_2 \right)^2 + 8 \left( \frac{2}{\sqrt{5}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}x'_2 \right) \left( -\frac{1}{\sqrt{5}}x'_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}x'_2 \right) + 8 \left( -\frac{1}{\sqrt{5}}x'_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}x'_2 \right)^2 = 10x_2'^2.$$

Эту задачу можно решить проще. Заметим, что  $f = 2(x_1 + 2x_2)^2$ ; поэтому можно принять  $x'_2 = (x_1 + 2x_2)/\sqrt{1+4} = (x_1 + 2x_2)/\sqrt{5}$ ,  $x'_1 = (2x_1 - x_2)/\sqrt{5}$  (второе равенство написано с учетом ортогональности преобразования). Так как  $x_1 + 2x_2 = \sqrt{5}x'_2$ , то  $f = 10x_2'^2$ . ▲

595. Привести к каноническому виду квадратичную форму  $f = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ .

△ Здесь  $a_{11} = 3$ ,  $a_{22} = 2$ ,  $a_{33} = 1$ ,  $a_{12} = 2$ ,  $a_{13} = 0$ ,  $a_{23} = 2$ . Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 4(1-\lambda) + 4(3-\lambda) = 0;$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-8(2-\lambda)=0; \quad 2-\lambda(\lambda^2-4\lambda+3-8)=0, \\ (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-5)=0; \quad \lambda_1=2, \lambda_2=-1, \lambda_3=5.$$

Определяем собственные векторы, соответствующие найденным характеристическим числам. Для определения координат собственных векторов получаем три системы линейных уравнений:

$$1) \lambda=2, \quad 2) \lambda=-1, \quad 3) \lambda=5, \\ \begin{cases} \xi_1+2\xi_2=0, \\ 2\xi_1+2\xi_3=0, \\ 2\xi_2-\xi_3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4\xi_1+2\xi_2=0, \\ 2\xi_1+3\xi_2+2\xi_3=0, \\ 2\xi_2+2\xi_3=0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2\xi_1+2\xi_2=0, \\ 2\xi_1-3\xi_2+2\xi_3=0, \\ 2\xi_2-4\xi_3=0; \end{cases}$$

$$\xi_1=2c, \xi_2=-c, \xi_3=-2c; \quad \xi_1=c, \xi_2=-2c, \xi_3=2c, \quad \xi_1=2c, \xi_2=2c, \xi_3=c, \\ \mathbf{u}=c(2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{v}=c(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{w}=c(2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3), \\ \mathbf{e}'_1=\frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3); \quad \mathbf{e}'_2=\frac{1}{3}(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3); \quad \mathbf{e}'_3=\frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3).$$

Матрица ортогонального преобразования имеет вид

$$B=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования координат таковы:  $x_1=(2/3)x'_1+(1/3)x'_2+(2/3)x'_3$ ,  $x_2=-(1/3)x'_1-(2/3)x'_2+(2/3)x'_3$ ,  $x_3=-(2/3)x'_1+(2/3)x'_2+(1/3)x'_3$ . Следовательно,  $f=2x_1^2-x_2^2+5x_3^2$ . ▲

**596.** Привести к каноническому виду квадратичную форму  $f=6x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ .

△ Здесь  $a_{11}=6$ ,  $a_{22}=3$ ,  $a_{33}=3$ ,  $a_{12}=2$ ,  $a_{13}=2$ ,  $a_{23}=-4$ . Решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

находим характеристические числа  $\lambda_1=\lambda_2=7$ ,  $\lambda_3=-2$ .

При  $\lambda=7$  приходим к системе

$$\begin{cases} -\xi_1+2\xi_2+2\xi_3=0, \\ 2\xi_1-4\xi_2-4\xi_3=0, \\ 2\xi_1-4\xi_2-4\xi_3=0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению  $\xi_1=2\xi_2+2\xi_3$ . Решение этой системы можно записать в виде  $\xi_1=2a+2b$ ,  $\xi_2=a$ ,  $\xi_3=b$ . В результате получаем семейство собственных векторов  $\mathbf{u}=2(a+b)\mathbf{e}_1+a\mathbf{e}_2+b\mathbf{e}_3$ , зависящее от двух параметров  $a$  и  $b$ .

При  $\lambda=-2$  получаем систему

$$\begin{cases} 8\xi_1+2\xi_2+2\xi_3=0, \\ 2\xi_1+5\xi_2-4\xi_3=0, \\ 2\xi_1-4\xi_2+5\xi_3=0. \end{cases}$$

Решив, например, два последних уравнения, имеем  $\xi_1/9=\xi_2/(-18)=\xi_3/(-18)$ , или  $\xi_1=-\xi_2/2=-\xi_3/2$ ;  $\xi_1=c$ ,  $\xi_2=-2c$ ,  $\xi_3=-2c$ . Таким образом, получим однопараметрическое семейство собственных векторов  $\mathbf{v}=c(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3)$ .

Из семейства собственных векторов  $\mathbf{u}=2(a+b)\mathbf{e}_1+a\mathbf{e}_2+b\mathbf{e}_3$  выделим два каких-нибудь ортогональных вектора. Полагая, например,  $a=0$ ,  $b=1$ , получим собственный вектор  $\mathbf{u}_1=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$ . Подберем параметры  $a$  и  $b$  так, чтобы выполнялось равенство  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)=0$ . Тогда получим уравнение  $2 \cdot 2(a+b)+b=0$ , т. е.  $4a+5b=0$ . Теперь можно принять  $a=5$ ,  $b=-4$ ; отсюда находим другой собственный вектор рассмотренного семейства:  $\mathbf{u}_2=2\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2-4\mathbf{e}_3$ .

Итак, мы получили три попарно ортогональных вектора:  $\mathbf{u}_1=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{u}_2=2\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2-4\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{v}=\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3$ . Собственные векторы  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  соответствуют

характеристическому числу  $\lambda = 7$ , а собственный вектор  $\mathbf{v}$  — характеристическому числу  $\lambda = -2$  при  $c = 1$ .

Пронормировав эти векторы, получим новый ортонормированный базис, причем матрица перехода к новому базису имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5}) & 1/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4/(3\sqrt{5}) & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Применив формулы преобразования координат  $x_1 = (2/\sqrt{5})x'_1 + (2/(3\sqrt{5}))x'_2 + (1/3)x'_3$ ,  $x_2 = (\sqrt{5}/3)x'_2 - (2/3)x'_3$ ,  $x_3 = (1/\sqrt{5})x'_1 - (4/(3\sqrt{5}))x'_2 - (2/3)x'_3$  к заданной квадратичной форме, получаем  $f = 7x_1'^2 + 7x_2'^2 - 2x_3'^2$ .  $\blacktriangle$

**597.** Привести к каноническому виду уравнение линии  $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 80 = 0$ .

$\Delta$  Группа старших членов уравнения образует квадратичную форму  $17x^2 + 12xy + 8y^2$  с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ . Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & 6 \\ 6 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0,$$

т. е. характеристические числа  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 20$ . Следовательно, квадратичная форма  $17x^2 + 12xy + 8y^2$  преобразуется к каноническому виду  $5x'^2 + 20y'^2$ , а данное уравнение — к виду

$$5x'^2 + 20y'^2 - 80 = 0, \text{ или } x'^2/16 + y'^2/4 = 1,$$

т. е. заданная линия является эллипсом.

Найдем базис, в котором уравнение эллипса принимает канонический вид, для чего определим собственные векторы.

При  $\lambda = 5$  имеем систему уравнений  $\begin{cases} 12\xi_1 + 6\xi_2 = 0, \\ 6\xi_1 + 3\xi_2 = 0, \end{cases}$  откуда  $\xi_2 = -2\xi_1$ . Полагая  $\xi_1 = c$ , получим  $\xi_2 = -2c$ , т. е. собственный вектор  $\mathbf{u} = c(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$ .

При  $\lambda = 20$  имеем систему  $\begin{cases} -3\xi_1 + 6\xi_2 = 0, \\ 6\xi_1 - 12\xi_2 = 0, \end{cases}$  откуда  $\xi_1 = 2\xi_2$ , т. е. собственный вектор  $\mathbf{v} = c(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ .

Приняв  $c = 1/\sqrt{1^2 + 2^2} = 1/\sqrt{5}$ , находим нормированные собственные векторы  $\mathbf{e}'_1 = (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)/\sqrt{5}$  и  $\mathbf{e}'_2 = (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{5}$ .

Матрица ортогонального преобразования имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования координат запишутся так:  $x = (1/\sqrt{5})x' + (2/\sqrt{5})y'$ ,  $y = -(2/\sqrt{5})x' + (1/\sqrt{5})y'$ . Следовательно,

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 80 = \frac{17}{5}(x' + 2y')^2 + \frac{12}{5}(x' + 2y')(-2x' + y') + \frac{8}{5}(-2x' + y')^2 - 80 = 5x'^2 + 20y'^2 - 80.$$

Этот же результат можно было получить сразу, как только были найдены  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 - 80 = 0$ .  $\blacktriangle$

Привести к каноническому виду уравнения линий:

**598.**  $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 - 21 = 0$ .      **599.**  $4xy + 3y^2 + 16 = 0$ .

**600.**  $5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 - 44 = 0$ .

## ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

## § 1. АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ

Пусть  $a$  — приближенное число, заменяющее собой в вычислениях точное число  $A$ .

*Абсолютной погрешностью* приближенного числа  $a$  называется абсолютная величина разности между ним и соответствующим точным числом:  $|A - a|$ .

*Предельной абсолютной погрешностью* называется возможно меньшее число  $\Delta$ , удовлетворяющее неравенству  $|A - a| \leq \Delta$ .

Точное число  $A$  находится в границах  $a - \Delta \leq A \leq a + \Delta$ , или  $A = a \pm \Delta$ .

*Относительной погрешностью* приближенного числа  $a$  называется отношение абсолютной погрешности этого числа к соответствующему точному числу:  $|A - a|/A$ .

*Предельной относительной погрешностью* называется возможно меньшее число  $\delta$ , удовлетворяющее неравенству  $|A - a|/A \leq \delta$ .

Так как практически  $A \approx a$ , то за предельную относительную погрешность принимают число  $\delta = \Delta/a$  (выражаемое обычно в процентах).

Справедливо неравенство  $a(1 - \delta) \leq A \leq a(1 + \delta)$ .

Говорят, что положительное приближенное число  $a$ , записанное в виде десятичного разложения, имеет  $n$  верных знаков (цифр), если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы  $n$ -го разряда.

При  $n > 1$  за предельную относительную погрешность приближенного числа  $a$  с первой значащей цифрой  $k$  можно принять число  $\delta = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ .

Если известно, что

$$\delta \leq \frac{1}{2(k+1)} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \quad (1)$$

то число  $a$  имеет  $n$  верных знаков.

Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

Относительная погрешность суммы положительных слагаемых не превышает наибольшей из относительных погрешностей этих слагаемых.

Предельная относительная погрешность произведения и частного приближенных чисел равна сумме предельных относительных погрешностей этих чисел.

Предельная относительная погрешность степени приближенного числа равна произведению предельной относительной погрешности этого числа на показатель степени.

**601.** Угол, измеренный теодолитом, оказался равным  $22^\circ 20' 30'' \pm \pm 30''$ . Какова относительная погрешность измерения?

△ Абсолютная погрешность  $\Delta = 30''$ . Тогда относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta}{a} = \frac{30''}{22^\circ 20' 30''} \cdot 100\% = 0,04\%. \blacktriangle$$

**602.** Определить число верных знаков и дать соответствующую запись приближенной величины ускорения силы тяжести  $g = 9,806 \dots$  при относительной погрешности  $0,5\%$ .

△ Так как первая значащая цифра есть 9, то, воспользовавшись неравенством (1), получим  $0,005 \leq \frac{1}{2 \cdot 10} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ , т. е.  $n=2$ . Значит,  $g=9,8$ . ▲

603. Известно, что предельная относительная погрешность числа  $\sqrt{19}$  равна 0,1%. Сколько верных знаков содержится в этом числе?

△ Здесь первая значащая цифра есть 4, предельная относительная погрешность  $\delta=0,001=10^{-3}$ . На основании неравенства (1) имеем  $0,001 \leq \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$  откуда  $n=3$ . Следовательно,  $\sqrt{19}=4,36$  (по четырехзначным таблицам  $\sqrt{19}=4,3589$ ). ▲

604. Сколько верных знаков содержит число  $A=3,7563$ , если относительная погрешность равна 1%?

△ Первая верная цифра есть 3, поэтому  $0,01 \leq \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ , откуда  $n=2$ . Число  $A$  следует записать так:  $A=3,8$ . ▲

605. Площадь квадрата равна  $25,16 \text{ см}^2$  (с точностью до  $0,01 \text{ см}^2$ ). С какой относительной погрешностью и со сколькими верными знаками можно определить сторону квадрата?

△ Искомая сторона  $x=\sqrt{25,16}$ . Относительная погрешность стороны квадрата  $\delta=(1/2) \cdot (0,01/25,16)$ , где  $0,01$  — абсолютная погрешность площади, т. е.  $\delta=0,0002$ . Первая значащая цифра числа, измеряющего сторону квадрата, есть 5. Решив неравенство (1) при  $k=5$ , получим  $(5+1) \cdot 0,0002 \leq 1/10^{n-1}$ , или  $1,2 \cdot 10^{-3} \leq 1/10^{n-1}$ . Отсюда  $n=3$ . ▲

606. Со сколькими верными знаками можно определить радиус круга, если известно, что его площадь равна  $124,35 \text{ см}^2$  (с точностью до  $0,01 \text{ см}^2$ )?

607. Найти предельную относительную погрешность при вычислении полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований  $R=23,64 \pm 0,01$  (см),  $r=17,31 \pm 0,01$  (см), образующая  $l=10,21 \pm 0,01$  (см); число  $\pi=3,14$ .

608. Число  $g=9,8066$  является приближенным значением ускорения силы тяжести (для широты  $45^\circ$ ) с пятью верными знаками. Найти его относительную погрешность.

609. Вычислить площадь прямоугольника, стороны которого  $92,73 \pm 0,01$  (м) и  $94,5 \pm 0,01$  (м). Определить относительную погрешность результата и число верных знаков.

## § 2. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Действительными (или вещественными) числами называются рациональные и иррациональные числа. Множество всех действительных чисел обозначается буквой  $R$ . Каждое действительное число может быть изображено точкой на числовой прямой.

Пусть даны два непустых множества  $X$  и  $Y$ . Если каждому элементу  $x$  из множества  $X$  по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент  $y$  из  $Y$ , то говорят, что на множестве  $X$  задана функция (или отображение) со множеством значений  $Y$ . Это можно записать так:  $x \in X, X \xrightarrow{f} Y$  или  $f: X \rightarrow Y$ , где множество  $X$  называется областью определения функции, а мно-

жество  $Y$ , состоящее из всех чисел вида  $y = f(x)$ , — множеством значений функции. Если  $y$  является функцией от  $x$ , то пишут также  $y = f(x)$  или  $y = \varphi(x)$ . Буквы  $f$  или  $\varphi$  характеризуют то правило, по которому получается значение  $y$ , соответствующее заданному аргументу  $x$ . Область определения функции  $f$  обозначается через  $D(f)$ , а множество значений — через  $E(f)$ . Значение функции  $f(x)$  при  $x = a$ , где  $a \in D(f)$ , называется *частным значением* функции и обозначается  $f(a)$ .

Область определения функции в простейших случаях представляет собой: *интервал (открытый промежуток)*,  $[a, b]$ , т. е. совокупность значений  $x$ , удовлетворяющих условию  $a < x < b$ ; *сегмент (отрезок или замкнутый промежуток)*  $[a, b]$ , т. е. совокупность значений  $x$ , удовлетворяющих условию  $a \leq x \leq b$ ; *полуинтервал*  $[a, b]$  (т. е.  $a < x \leq b$ ) или  $[a, b[$  (т. е.  $a \leq x < b$ ); *бесконечный интервал*  $[a, +\infty[$  (т. е.  $a < x < +\infty$ ) или  $]-\infty, b]$  (т. е.  $-\infty < x < b$ ) или  $]-\infty, +\infty[$  (т. е.  $-\infty < x < +\infty$ ); совокупность нескольких интервалов или сегментов и т. п.

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

- 1) *степенная функция*  $y = x^\alpha$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- 2) *показательная функция*  $y = a^x$ , где  $a$  — любое положительное число, отличное от единицы:  $a > 0, a \neq 1$ ;
- 3) *логарифмическая функция*  $y = \log_a x$ , где  $a$  — любое положительное число, отличное от единицы:  $a > 0, a \neq 1$ ;
- 4) *тригонометрические функции*  $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, y = \sec x, y = \operatorname{cosec} x$ ;
- 5) *обратные тригонометрические функции*  $y = \operatorname{arcsin} x, y = \operatorname{arccos} x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$ .

Элементарными функциями называются функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (т. е. формирования сложных функций), примененных конечное число раз.

Примером неэлементарной функции может служить *абсолютная величина (модуль)* действительного числа  $x$ :

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Геометрически  $|x|$  равен расстоянию на числовой прямой от точки с координатой  $x$  до начала отсчета. В общем случае  $|x - a|$  есть расстояние между точками с координатами  $x$  и  $a$ .

Графиком функции  $y = f(x)$  называется множество точек плоскости  $xOy$  с координатами  $(x; f(x))$ , где  $x \in D(f)$ .

Функция  $f(x)$ , область определения которой симметрична относительно нуля, называется *четной (нечетной)*, если для любого значения  $x \in D(f)$   $f(-x) = f(x)$  [соответственно  $f(-x) = -f(x)$ ]. График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции — относительно начала координат.

Функция  $f(x)$  называется *периодической*, если существует такое число  $T \neq 0$ , что для любых  $x \in D(f)$ ,  $x - T \in D(f)$ ,  $x + T \in D(f)$  выполняются равенства  $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$ . Основным периодом функции называется наименьшее положительное число  $\tau$ , обладающее указанным свойством.

610. Найти  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , если  $f(x) = x^2$ .

△ Найдем значения данной функции при  $x = a$  и  $x = b$ :  $f(a) = a^2, f(b) = b^2$ . Тогда получим

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b. \blacktriangle$$

611. Найти область определения функции  $f(x) = \frac{x-2}{2x-1}$ .

△ Данная функция определена, если  $2x - 1 \neq 0$ , т. е. если  $x \neq 1/2$ . Таким образом, область определения функции является объединение двух интервалов:  $D(f) = (-\infty, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$ .  $\blacktriangle$

612. Найти область определения функции  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$ .

$\Delta$  Функция определена, если  $x-1 \neq 0$  и  $1+x > 0$ , т. е. если  $x \neq 1$  и  $x > -1$ . Область определения функции есть объединение двух интервалов:  $D(f) = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .  $\blacktriangle$

613. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}.$$

$\Delta$  Первое слагаемое принимает действительные значения при  $1-2x \geq 0$ , а второе — при  $-1 \leq (3x-1)/2 \leq 1$ . Таким образом, для нахождения области определения заданной функции необходимо решить систему неравенств:  $1-2x \geq 0$ ,  $(3x-1)/2 \leq 1$ ,  $(3x-1)/2 \geq -1$ . В результате получаем  $x \leq 1/2$ ,  $x \leq 1$ ,  $x \geq -1/3$ . Следовательно, область определения функции есть отрезок  $[-1/3, 1/2]$ .  $\blacktriangle$

614. Найти множества значений функций:

1)  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ; 2)  $f(x) = 2 + 3 \sin x$ .

$\Delta$  (1) Выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, получим  $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 4$ . Первое слагаемое при всех  $x$  является неотрицательным числом, поэтому функция принимает значения, не меньше  $-4$ . Итак, множество значений функции — бесконечный промежуток  $[-4, +\infty)$ .

(2) Так как синус принимает значения, не превосходящие по модулю единицы, то получаем неравенство  $|\sin x| \leq 1$ , или  $-1 \leq \sin x \leq 1$ . Умножив все части этого двойного неравенства на 3 и прибавляя к ним по 2, имеем  $-3 \leq 3 \sin x \leq 3$ ;  $-1 \leq 2 + 3 \sin x \leq 5$ . Следовательно,  $E(f) = [-1, 5]$ .  $\blacktriangle$

615. Найти основные периоды функций:

1)  $f(x) = \cos 8x$ ; 2)  $f(x) = \sin 6x + \operatorname{tg} 4x$ .

$\Delta$  1) Так как основной период функции  $\cos x$  есть  $2\pi$ , то основной период функции  $f(x) = \cos 8x$  равен  $2\pi/8$ , т. е.  $\pi/4$ .

2) Здесь для первого слагаемого основной период равен  $2\pi/6 = \pi/3$ , а для второго он равен  $\pi/4$ . Очевидно, что основной период данной функции есть наименьшее общее кратное чисел  $\pi/3$  и  $\pi/4$ , т. е.  $\pi$ .  $\blacktriangle$

616. Установить четность или нечетность функций:

1)  $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + 2 \sin x$ ; 2)  $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ ; 3)  $f(x) = |x| - 5e^{x^2}$ ;

4)  $f(x) = x^2 + 5x$ ; 5)  $f(x) = \lg \frac{x+3}{x-3}$ .

$\Delta$  В рассматриваемых примерах область определения каждой из функций симметрична относительно нуля: в первых четырех примерах  $D(f) = (-\infty, +\infty)$ , а в последнем примере  $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ .

1) Заменяя  $x$  на  $-x$ , получим  $f(-x) = (-x)^2 \sqrt[3]{(-x)} + 2 \sin(-x) = -x^2 \sqrt[3]{x} - 2 \sin x$ , т. е.  $f(-x) = -f(x)$ . Значит, данная функция является нечетной.

2) Имеем  $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x$ , т. е.  $f(-x) = f(x)$ . Итак, данная функция — четная.

3) Здесь  $f(-x) = |x| - 5e^{(-x)^2} = |x| - 5e^{x^2}$ , т. е.  $f(-x) = f(x)$ . Следовательно,  $f(x)$  — четная функция.

4) Имеем  $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x$ . Таким образом,  $f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ , т. е. заданная функция не является ни четной, ни нечетной.

5) Находим

$$f(-x) = \lg \frac{-x+3}{-x-3} = \lg \frac{x-3}{x+3} = \lg \left( \frac{x+3}{x-3} \right)^{-1} = -\lg \frac{x+3}{x-3},$$

т. е.  $f(-x) = -f(x)$ , и, следовательно, данная функция — нечетная.  $\blacktriangle$

617. Найти области определения функций:

1)  $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x}$ ; 2)  $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ ;

3)  $f(x) = \frac{1}{xe^x}$ ; 4)  $f(x) = \frac{x-2}{\cos 2x}$ ; 5)  $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$ ;

6)  $f(x) = \lg(3x-1) + 2\lg(x+1)$ ; 7)  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{\sin x}$ .

618. Найти множества значений функций:

1)  $f(x) = |x| + 1$ ; 2)  $f(x) = 5/x$ ; 3)  $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ ;

4)  $f(x) = -x^2 + 8x - 13$ ; 5)  $f(x) = 1 - 3\cos x$ ; 6)  $f(x) = 4^{-x^2}$ .

619. Установить четность или нечетность функций:

1)  $f(x) = x^4 \sin 7x$ ; 2)  $f(x) = 5|x| - 3\sqrt[3]{x^2}$ ; 3)  $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$ ;

4)  $f(x) = |x| + 2$ ; 5)  $f(x) = |x + 2|$ ; 6)  $f(x) = \lg \cos x$ ;

7)  $f(x) = \frac{16^x - 1}{4x}$ .

620. Найти основные периоды функций:

1)  $f(x) = \sin 5x$ ; 2)  $f(x) = -2\cos(x/3) + 1$ ;

3)  $f(x) = \lg \cos 2x$ ; 4)  $f(x) = \lg 3x + \cos 4x$ .

### § 3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

При построении графиков функций применяются следующие приемы: построение «по точкам»; действия с графиками (сложение, вычитание, умножение графиков); преобразования графиков (сдвиг, растяжение).

Исходя из графика функции  $y=f(x)$ , можно построить графики функций:

1)  $y=f(x-a)$  — первоначальный график, сдвинутый вдоль оси  $Ox$  на величину  $a$ ;

2)  $y=f(x)+b$  — тот же график, сдвинутый вдоль оси  $Oy$  на величину  $b$ ;

3)  $y=Af(x)$  — исходный график, растянутый в  $A$  раз вдоль оси  $Oy$ .

4)  $y=f(kx)$  — тот же график, растянутый в  $1/k$  раз вдоль оси  $Ox$ .

Таким образом, можно по графику функции  $y=f(x)$  построить график функции вида  $y=Af[k(x-a)]+b$ .

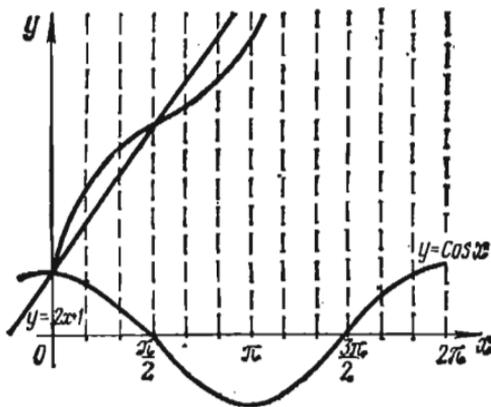


Рис. 23

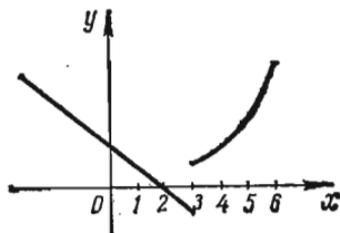


Рис. 24

621. Построить график функции  $y = 2x + 1 + \cos x$ .

△ График данной функции можно построить сложением графиков двух функций:  $y = 2x + 1$  и  $y = \cos x$ . График первой функции есть прямая, ее можно построить по двум точкам, график второй функции — косинусоида (рис. 23). ▲

622. Построить график функции

$$y = \begin{cases} 2-x & \text{при } x \leq 3, \\ 0,1x^2 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

△ При  $x < 3$  графиком является луч, а при  $x \geq 3$  — ветвь параболы. Искомый график изображен на рис. 24. ▲

623. Построить график функции  $y = 2 \sin(2x - 1)$ .

△ Преобразуем данную функцию к виду  $y = 2 \sin 2(x - 1/2)$ . Здесь  $A = 2$ ,  $k = 2$ ,  $a = 1/2$ . В качестве исходного возьмем график  $y = \sin x$ . Затем строим график функции  $y = \sin 2x$  сжатием вдоль оси абсцисс в два раза. После этого строим график функции  $y = \sin 2(x - 1/2)$  сдвигом на  $1/2$  вправо и, наконец, растяжением в два раза вдоль оси ординат последнего графика получаем искомый график функции  $y = 2 \sin(2x - 1)$  (рис. 25). ▲

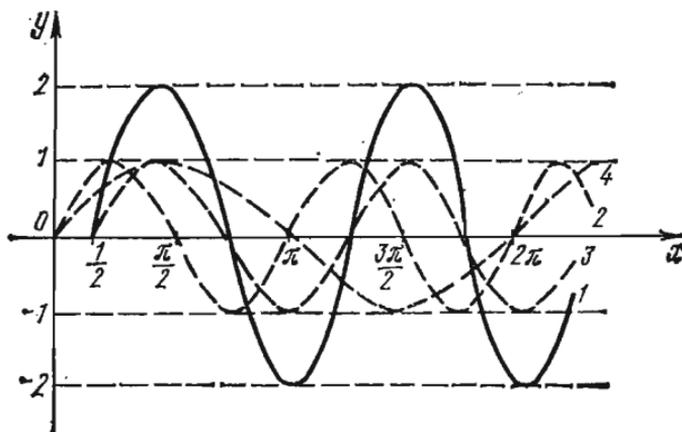


Рис. 25

Построить графики функций:

624.  $y = \frac{x^3 - x}{3}$  на отрезке  $[-4, 4]$ .

625.  $y = x^2(2 - x)^2$  на отрезке  $[-3, 3]$ .

626.  $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$  в области определения.

627.  $y = 0,5x + 2^{-x}$  на отрезке  $[0, 5]$ .

628.  $y = 2(x - 1)^3$ , исходя из функции  $y = x^3$ .

629.  $y = \frac{1}{x^2 + 4}$ . 630.  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ .

631.  $y = \sin(3x - 2) + 1$ . 632.  $y = -2 \cos(2x + 1)$ .

633.  $y = \arcsin(x - 2)$ .

634.  $y = x + 1 + \sin(x - 1)$ . 635.  $y = \sin x + \cos x$ .

636.  $y = \begin{cases} -x^2 & \text{при } x < 0, \\ 3x & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$  637.  $y = \begin{cases} 4 - x & \text{при } x < -1, \\ 5 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ x^2 + 5 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

## § 4. ПРЕДЕЛЫ

Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , если для всякого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое положительное число  $N$ , что  $|x_n - a| < \varepsilon$  при  $n > N$ . В этом случае пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $|f(x) - A| < \varepsilon$  при  $0 < |x - a| < \delta$ . Это записывают так:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

Аналогично  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , если  $|f(x) - A| < \varepsilon$  при  $|x| > N$ .

Условно записывают  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , если  $|f(x)| > M$  при  $0 < |x - a| < \delta$ , где

$M$  — произвольное положительное число.

В этом случае функция  $f(x)$  называется *бесконечно большой* при  $x \rightarrow a$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ , то функция  $\alpha(x)$  называется *бесконечно малой* при  $x \rightarrow a$ .

Если  $x < a$  и  $x \rightarrow a$ , то употребляют запись  $x \rightarrow a - 0$ ; если  $x > a$  и  $x \rightarrow a$  — запись  $x \rightarrow a + 0$ . Числа  $f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a - 0} f(x)$  и  $f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a + 0} f(x)$  называются

соответственно *левым* и *правым пределом* функции  $f(x)$  в точке  $a$ .

Для существования предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  необходимо и достаточно, чтобы  $f(a - 0) = f(a + 0)$ .

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , то

$$1) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{при } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0).$$

Используются также следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{первый замечательный предел});$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e = 2,71828\dots \quad (\text{второй замечательный предел}).$$

Логарифм числа  $x$  по основанию  $e$  называется *натуральным логарифмом* и обозначается  $\ln x$ .

При решении примеров полезно иметь в виду следующие равенства:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

638. Показать, что при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}, \dots$  имеет пределом число 2.

△ Здесь  $n$ -й член последовательности есть  $x_n = 2 + 1/n$ . Следовательно,  $x_n - 2 = 1/n$ . Зададим заранее положительное число  $\varepsilon$ . Выберем  $n$  настолько большим, что будет выполнено неравенство  $1/n < \varepsilon$ . Для этого достаточно принять  $n > 1/\varepsilon$ . При таком выборе  $n$  получим  $|x_n - 2| < \varepsilon$ . Значит,  $\lim x_n = 2$ . ▲

639. Показать, что при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $7/3, 10/5, 13/7, \dots (3n+4)/(2n+1), \dots$  имеет пределом число  $3/2$ .

△ Здесь  $x_n - 3/2 = (3n+4)/(2n+1) - 3/2 = 5/[2(2n+1)]$ . Определим, при каком значении  $n$  выполняется неравенство  $5/[2(2n+1)] < \varepsilon$ ; так как  $2(2n+1) >$

$> 5/\varepsilon$ , то  $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$ . Итак, если  $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$ , то  $|x_n - 3/2| < \varepsilon$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x = 3/2$ .

Полагая  $\varepsilon = 0,1$ , заключаем, что неравенство  $|x_n - 3/2| < 0,1$  выполняется при  $n > 12$  (например, при  $n = 13$ ). Аналогично, неравенство  $|x_n - 3/2| < 0,01$  выполняется при  $n > 124,5$  (например, при  $n = 125$ ), а неравенство  $|x_n - 3/2| < 0,001$  — при  $n > 1249,5$  (например, при  $n = 1250$ ). ▲

Найти следующие пределы:

$$640. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3}.$$

△ Так как  $x \rightarrow 4$ , то числитель дроби стремится к числу  $5 \cdot 4 + 2 = 22$ , а знаменатель — к числу  $2 \cdot 4 + 3 = 11$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{22}{11} = 2$ . ▲

$$641. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2x+7}.$$

△ Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при  $x \rightarrow \infty$ . В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида  $\infty/\infty$ . Разделив на  $x$  числитель и знаменатель дроби, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2x+7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+5/x}{2+7/x} = \frac{3}{2},$$

так как при  $x \rightarrow \infty$  каждая из дробей  $5/x$  и  $7/x$  стремится к нулю. ▲

$$642. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}.$$

△ Здесь числитель и знаменатель дроби при  $x \rightarrow 3$  стремятся к нулю (неопределенность вида  $0/0$ ). Имеем

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x};$$

если  $x \neq 3$ , то  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x}$ . Но при  $x \rightarrow 3$  дробь  $\frac{x+3}{x}$  стремится к числу  $\frac{3+3}{3} = 2$ . Итак,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = 2$ . ▲

$$643. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}.$$

△ Здесь имеет место неопределенность вида  $0/0$ . Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$644. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}.$$

△ Это — также неопределенность вида  $0/0$ . Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}.$$

Числитель дроби стремится к 300, а знаменатель стремится к нулю, т. е. является бесконечно малой величиной, следовательно, рассматриваемая дробь — бесконечно большая величина и  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \infty$ . ▲

$$645. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}.$$

△ Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму  $\sqrt{x+4} + 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}. \quad \blacktriangle$$

$$646. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x}.$$

△ Положим  $1+x=y^5$ ; тогда  $y \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ . Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^5 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y^4 + y^3 + y^2 + y + 1} = \frac{3}{5}. \quad \blacktriangle$$

$$647. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x}.$$

△ Используя первый замечательный предел, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m \sin mx}{mx} = m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} = m. \quad \blacktriangle$$

$$648. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}.$$

△ Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(5x/2)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(5x/2)}{x} \right)^2 = 2 \cdot \left( \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{2}. \quad \blacktriangle$$

Здесь мы воспользовались результатом предыдущего примера, приняв  $m = 5/2$ . ▲

$$649. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

△ Это — неопределенность вида  $\infty/\infty$ . Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень  $x$ , т. е. на  $x^3$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/x + 3/x^2 + 4/x^3}{4 + 3/x + 2/x^2 + 1/x^3} = \frac{1}{4}. \quad \blacktriangle$$

$$650. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}.$$

△ Разделим числитель и знаменатель на  $x^4$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2/x^4}{\sqrt{1 + 3/x^7 + 4/x^8}} = \frac{3}{1} = 3. \quad \blacktriangle$$

$$651. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}).$$

△ Здесь имеет место неопределенность вида  $\infty - \infty$ . Умножим и разделим данное выражение на  $\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+3}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3})}{\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+8x+3 - x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+8/x+3/x^2} + \sqrt{1+4/x+3/x^2}} = \frac{4}{2} = 2. \blacktriangle \end{aligned}$$

652.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} \right)^x$ .

△ Делением числителя дроби на знаменатель выделим целую часть:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} = 1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$$

Таким образом, при  $x \rightarrow \infty$  данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности (неопределенность вида  $1^\infty$ ). Преобразуя функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7} \right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} \right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7} \right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} \right]^{\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}}. \end{aligned}$$

Так как  $\frac{8x-3}{x^2-3x+7} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7} \right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} = e.$$

Учитывая, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2} = 8$ , находим  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} \right)^x = e^8$ .  $\blacktriangle$

653. Найти левый и правый пределы функции  $f(x) = \frac{1}{x+2^{1/(x-3)}}$  при  $x \rightarrow 3$ .

△ Если  $x \rightarrow 3-0$ , то  $1/(x-3) \rightarrow -\infty$  и  $2^{1/(x-3)} \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = 1/3$ . Если же  $x \rightarrow 3+0$ , то  $1/(x-3) \rightarrow +\infty$ ,  $2^{1/(x-3)} \rightarrow +\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 0$ .  $\blacktriangle$

654. Найти левый и правый пределы функции  $f(x) = e^{1/(x-a)}$  при  $x \rightarrow a$ .

$\Delta$  Если  $x \rightarrow a-0$ , то  $1/(x-a) \rightarrow -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = 0$ . Если же  $x \rightarrow a+0$ , то  $1/(x-a) \rightarrow +\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ .  $\blacktriangle$

655. Показать, что при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $1/2, 5/3, 9/4, \dots, (4n-3)/(n+1), \dots$  имеет предел, равный 4.

656. Показать, что при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $1, 1/3, 1/5, \dots, 1/(2n-1), \dots$  является бесконечно малой.

Найти следующие пределы:

657.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$ . 658.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$ .

659.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$ . 660.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ .

661.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2}$ . 662.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$ .

663.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0}$ . 664.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ .

665.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$ . 666.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 5x - 6}{x^3 + 3x^2 + 7x - 1}$ .

● Положить  $\pi/2 - x = \alpha$ .

667.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 4x + 5)(x^2 + x + 1)}{(x+2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x - 1)}$ . 668.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$ .

669.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1}$ . 670.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2}$ .

671.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x-1}}$ . 672.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7x+2x-x^2}}{x^2 - 2x}$ .

673.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$ . 674.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ .

675.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+mx)}{x}$ . 676.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 3}$ .

677.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d})$ .

678.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ .

679.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$ . 680.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-5^x}{1-e^x}$ .

681.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x}$ . 682.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$ .

683.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x}$ . 684.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$ .

● Положить  $x = t^4$ .

685.  $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sin x}{|x|}$ . 686.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + \sin t}{t - \sin t}$ .

687.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\ln(x+1)}$ . 688.  $\lim_{x \rightarrow 5-0} 10^{1/(x-5)}$ .

$$689. \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x. \quad 690. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1}.$$

$$691. \text{Найти } \lim_{t \rightarrow \infty} t \left( \sqrt[t]{a} - 1 \right) \text{ (где } t > 0 \text{)}.$$

● Положить  $x = 1/t$ , где  $x \rightarrow 0$ .

$$692. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1}.$$

$$693. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^x.$$

$$694. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right).$$

$$695. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 + x}.$$

● Привести дроби к общему знаменателю.

$$696. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}. \quad 697. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{x}.$$

● Учтеть, что  $x^x = e^{x \ln x}$ .

$$698. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + 7}{2x^5 + 3x^4 + 1}. \quad 699. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x}.$$

$$700. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+8}{x-2} \right)^x. \quad 701. \lim_{\alpha \rightarrow 0} (2 - \cos \alpha)^{\csc^2 \alpha}.$$

$$702. \text{Найти } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c}. \quad 703. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x}{2} \right)^{1/(x-2)}.$$

## § 5. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow a$ .

1. Если  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha/\beta) = 0$ , то говорят, что  $\alpha$  является *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с  $\beta$ . В этом случае пишут  $\alpha = o(\beta)$ .

2. Если  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha/\beta) = m$ , где  $m$  — число, отличное от нуля, то говорят, что  $\alpha$  и  $\beta$  — *бесконечно малые одного и того же порядка*. В частности, если  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha/\beta) = 1$ , то бесконечно малые  $\alpha$  и  $\beta$  называются *эквивалентными*. Запись  $\alpha \sim \beta$  означает, что  $\alpha$  и  $\beta$  — эквивалентные бесконечно малые.

Если  $\alpha/\beta \rightarrow \infty$ , то это означает, что  $\lim_{x \rightarrow a} (\beta/\alpha) = 0$ . Таким образом,  $\beta$  является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с  $\alpha$ , т. е.  $\beta = o(\alpha)$ .

3. Если  $\alpha^k$  и  $\beta$  — бесконечно малые одного и того же порядка, причем  $k > 0$ , то говорят, что бесконечно малая  $\beta$  имеет *порядок  $k$*  по сравнению с  $\alpha$ .

Отметим некоторые свойства бесконечно малых:

1°. *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с множителями*, т. е. если  $\gamma = \alpha\beta$ , то  $\gamma = o(\alpha)$  и  $\gamma = o(\beta)$ .

2°. *Бесконечно малые  $\alpha$  и  $\beta$  эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность  $\alpha - \beta = \gamma$  является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с  $\alpha$  и  $\beta$* , т. е. если  $\gamma = o(\alpha)$ ,  $\gamma = o(\beta)$ , то  $\alpha \sim \beta$ .

3°. *Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой*, т. е. если  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha/\beta) = m$ ,  $\alpha \sim \alpha_1$ ,  $\beta \sim \beta_1$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha_1/\beta_1) = m$ .

Полезно иметь в виду эквивалентность следующих бесконечно малых: если  $x \rightarrow 0$ , то

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x.$$

704. Пусть  $t$  — бесконечно малая. Сравнить бесконечно малые  $\alpha = 5t^2 + 2t^5$  и  $\beta = 3t^2 + 2t^3$ .

$\Delta$  Имеем  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5t^2 + 2t^5}{3t^2 + 2t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5 + 2t^3}{3 + 2t} = \frac{5}{3}$ . Так как предел отношения  $\alpha$  и  $\beta$  есть число, отличное от нуля, то  $\alpha$  и  $\beta$  — бесконечно малые одного и того же порядка.  $\blacktriangle$

705. Сравнить бесконечно малые  $\alpha = t \sin^2 t$  и  $\beta = 2t \sin t$  при  $t \rightarrow 0$ .

$\Delta$  Здесь  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sin^2 t}{2t \sin t} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$ , т. е.  $\alpha = o(\beta)$ .  $\blacktriangle$

706. Сравнить бесконечно малые  $\alpha = t \ln(1+t)$ ,  $\beta = t \sin t$  при  $t \rightarrow 0$ .

$\Delta$  Находим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln(1+t)}{t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = 1,$$

т. е.  $\alpha \sim \beta$ .  $\blacktriangle$

707. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2}$ .

$\Delta$  Заменяем числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми:  $\ln(1+3x \sin x) \sim 3x \sin x$ ,  $\operatorname{tg} x^2 \sim x^2$ . Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin x}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 3. \blacktriangle$$

708. Определить порядок бесконечно малой  $y = xe^x$  по сравнению с бесконечно малой  $x$ .

709. Определить порядок бесконечно малой  $y = \sqrt{1+x \sin x} - 1$  по сравнению с бесконечно малой  $x$ .

710. Определить порядок бесконечно малой  $y = \sqrt{\sin 2x}$  по сравнению с  $x$  при  $x \rightarrow 0$ .

711. Сравнить бесконечно малые  $\alpha = t^2 \sin^2 t$  и  $\beta = t \operatorname{tg} t$ , если  $t \rightarrow 0$ .

712. Сравнить бесконечно малые  $\alpha = (1+x)^m - 1$  и  $\beta = mx$ , если  $x \rightarrow 0$  и  $m$  — рациональное положительное число.

713. Сравнить бесконечно малые  $\alpha = a^x - 1$  и  $\beta = x \ln a$ , если  $x \rightarrow 0$ .

Найти следующие пределы:

714.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$ . 715.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$ .

$\bullet$  Заменить числитель и знаменатель эквивалентными бесконечно малыми.

716.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1-4x)}$ . 717.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$ .

718.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}$ . 719.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^x - 1) - 1}{\ln x}$ .

$\bullet$  Представить  $\cos x$  в виде  $1 - (1 - \cos x)$ .

$$720. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3 - 1}}{(1+x)^3 \sqrt[3]{(1+x)^3 - 1}}. \quad 721. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(5^\alpha - 1)(4^\alpha - 1)}{(3^\alpha - 1)(6^\alpha - 1)}.$$

$$722. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-2}}{\sqrt[4]{16+5x-2}}.$$

● Разделить на 2 числитель и знаменатель.

## § 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке  $a$* , если: 1) эта функция определена в некоторой окрестности точки  $a$ ; 2) существует предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ; 3) этот предел равен значению функции в точке  $a$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Обозначая  $x - a = \Delta x$  (приращение аргумента) и  $f(x) - f(a) = \Delta y$  (приращение функции), условие непрерывности можно записать так:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , т. е. функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области (интервала, сегмента и т. п.), то она называется *непрерывной в этой области*.

Точка  $a$ , принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Если существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$ , причем не все три числа  $f(a)$ ,  $f(a-0)$ ,  $f(a+0)$  равны между собой, то  $a$  называется *точкой разрыва I рода*.

Точки разрыва I рода подразделяются, в свою очередь, на *точки устранимого разрыва* (когда  $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$ , т. е. когда левый и правый пределы функции в точке  $a$  равны между собой, но не равны значению функции в этой точке) и на *точки скачка* (когда  $f(a-0) \neq f(a+0)$ , т. е. когда левый и правый пределы функции в точке  $a$  различны); в последнем случае разность  $f(a+0) - f(a-0)$  называется *скачком* функции в точке  $a$ . Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются *точками разрыва II рода*. В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов.

Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, где делитель не равен нулю.

723. Показать, что при  $x = 4$  функция  $y = \frac{x}{x-4}$  имеет разрыв.

△ Находим  $\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty$ . Таким образом, функция при  $x \rightarrow 4$  не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно,  $x = 4$  является точкой разрыва II рода (рис. 26). ▲

724. Показать, что при  $x = 4$  функция  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}$  имеет разрыв.

△ Если  $x \rightarrow 4-0$ , то  $1/(x-4) \rightarrow -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 4-0} y = -\pi/2$ . Если же  $x \rightarrow 4+0$ , то  $1/(x-4) \rightarrow +\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 4+0} y = \pi/2$ . Итак, при  $x \rightarrow 4$  функция имеет как левый, так и правый конечный предел, причем эти пределы различны. Следовательно,  $x = 4$  является точкой разрыва I рода — точкой скачка. Скачок функции в этой точке равен  $\pi/2 - (-\pi/2) = \pi$  (рис. 27). ▲

725. Показать, что при  $x=5$  функция  $y = \frac{x^2-25}{x-5}$  имеет разрыв.

$\Delta$  В точке  $x=5$  функция не определена, так как, выполнив подстановку, получаем неопределенность  $0/0$ . В других точках дробь можно сократить на  $x-5$ , так как  $x-5 \neq 0$ . Следовательно,  $y=x+5$  при  $x \neq 5$ . Легко видеть, что  $\lim_{x \rightarrow 5-0} y = \lim_{x \rightarrow 5+0} y = 10$ .

Таким образом, при  $x=5$  функция имеет устранимый разрыв. Он будет устранен, если условиться, что  $y=10$  при  $x=5$ .

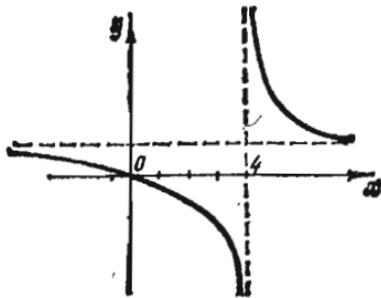


Рис. 26

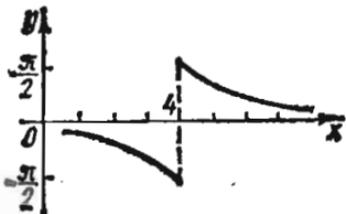


Рис. 27

Итак, можно считать, что функция  $y = \frac{x^2-25}{x-5}$  непрерывна при всех значениях  $x$ , если считать, что равенство  $\frac{x^2-25}{x-5} = x+5$  справедливо при всех значениях  $x$ , не исключая и  $x=5$ . В этом случае график функции есть прямая  $y=x+5$ .  $\blacktriangle$

726. Найти точки разрыва функции  $y = \frac{2^{1/(x-2)} - 1}{2^{1/(x-2)} + 1}$ .

727. Найти точки разрыва функции  $y = \frac{1}{(x-1)(x-5)}$ .

728. Каков характер разрыва функции  $y = \frac{1}{1-e^{1-x}}$  в точке  $x=1$ ?

729. Каков характер разрыва функции  $y = \frac{\sin x}{x}$  в точке  $x=0$ ?

730. Найти точки разрыва функции  $y = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}}{x(x-5)}$ .

731. Найти точки разрыва функции  $y = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ .

732. Найти точки разрыва функции  $y = \frac{x+1}{x^2 + 6x^2 + 11x + 6}$ .

733. Найти точки разрыва функции  $y = \frac{1}{x^3 + x + 1}$ .

734. Исследовать на непрерывность функцию  $y = \frac{1}{(x-1)(x-6)}$  на отрезке: 1)  $[2, 5]$ ; 2)  $[4, 10]$ ; 3)  $[0, 7]$ .

735. Исследовать на непрерывность функцию  $y = \frac{1}{x^4 - 26x^2 + 25}$  на отрезке: 1)  $[6, 10]$ ; 2)  $[-2, 2]$ ; 3)  $[-6, 6]$ .

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ  
ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## § 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Дифференцирование явных функций. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — значения аргумента, а  $y_1 = f(x_1)$  и  $y_2 = f(x_2)$  — соответствующие значения функции  $y = f(x)$ . Разность  $\Delta x = x_2 - x_1$  называется *приращением аргумента*, а разность  $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$  — *приращением функции* на отрезке  $[x_1, x_2]$ .

Производной от функции  $y = f(x)$  по аргументу  $x$  называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ или } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(производная обозначается также  $\frac{dy}{dx}$ ).

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ , т. е.  $y' = \operatorname{tg} \alpha$ .

Производная есть *скорость изменения* функции в точке  $x$ .

Отыскание производной называется *дифференцированием* функции.

Формулы дифференцирования основных функций

$$\text{I. } (x^m)' = mx^{m-1}.$$

$$\text{II. } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{III. } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\text{IV. } (e^x)' = e^x.$$

$$\text{V. } (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$\text{VI. } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$\text{VII. } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$\text{VIII. } (\sin x)' = \cos x.$$

$$\text{IX. } (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\text{X. } (\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x.$$

$$\text{XI. } (\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

$$\text{XII. } (\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{XIII. } (\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{XIV. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{XV. } (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{XVI. } (\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x.$$

$$\text{XVII. } (\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x.$$

$$\text{XVIII. } (\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\text{XIX. } (\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Основные правила дифференцирования

Пусть  $C$  — постоянная,  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  — функции, имеющие производные.

Тогда:

$$1) C' = 0; 2) x' = 1; 3) (u \pm v)' = u' \pm v'; 4) (Cu)' = Cu';$$

$$5) (uv)' = u'v + uv'; 6) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

7) если  $y=f(u)$ ,  $u=u(x)$ , т. е.  $y=f[u(x)]$ , где функции  $f(u)$  и  $u(x)$  имеют производные, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

(правило дифференцирования сложной функции).

736. Исходя из определения производной (не пользуясь формулами дифференцирования), найти производную функции  $y=2x^3+5x^2-7x-4$ .

△ Дадим  $x$  приращение  $\Delta x$ , тогда  $y$  получит приращение  $\Delta y$ :

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Найдем приращение функции:

$$\begin{aligned} \Delta y &= [2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4] - (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) = \\ &= 6x^2 \Delta x + 6x \Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x \Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x. \end{aligned}$$

Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x \Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7.$$

Найдем предел этого отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x^2 + 6x \Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Следовательно, по определению производной  $y' = 6x^2 + 10x - 7$ . ▲

737. Исходя из определения производной, найти производную функции  $y = \sqrt{x}$ .

△ Находим приращение функции:  $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$ . Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Итак,  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . ▲

738. Исходя из определения производной, найти производную функции  $y = -\operatorname{ctg} x - x$ .

△ Находим

$$\Delta y = -\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - (x + \Delta x) + \operatorname{ctg} x + x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \Delta x.$$

Используя формулу  $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$ , получим

$$\Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - \Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - 1$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Итак,  $y' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$ . ▲

Исходя из определения производной, найти производные функций:

739.  $y = \frac{1}{x^2}$ . 740.  $y = \sqrt[3]{x^2}$ . 741.  $y = 5 \sin x + 3 \cos x$ .

742.  $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$ . 743.  $y = \frac{1}{e^x + 1}$ . 744.  $y = 2^{x^2}$ .

Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

745.  $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$ .

$$\Delta y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2(3x^2)' - 5(2x)' + 7x' + 4' = \\ = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7. \blacktriangle$$

746.  $y = x^2 e^x$ .

$$\Delta y' = x^2 (e^x)' + e^x \cdot (x^2)' = x^2 e^x + 2x e^x = x e^x (x + 2). \blacktriangle$$

747.  $y = x^3 \operatorname{arctg} x$ .

$$\Delta y' = x^3 (\operatorname{arctg} x)' + \operatorname{arctg} x \cdot (x^3)' = x^3 \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 \operatorname{arctg} x = \\ = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \operatorname{arctg} x. \blacktriangle$$

748.  $y = x \sqrt{x} (3 \ln x - 2)$ .

Δ Перепишем заданную функцию в виде  $y = x^{3/2} (3 \ln x - 2)$ . Тогда  $y' = x^{3/2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{3}{2} x^{1/2} (3 \ln x - 2) = 3x^{1/2} + \frac{9}{2} x^{1/2} \ln x - 3x^{1/2} = \frac{9}{2} \sqrt{x} \ln x$ . ▲

749.  $y = \frac{\arcsin x}{x}$ .

$$\Delta y' = \frac{x \cdot (\arcsin x)' - \arcsin x \cdot (x)'}{x^2} = \\ = \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}. \blacktriangle$$

750.  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ .

$$\Delta y' = \frac{(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \\ = \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}. \blacktriangle$$

751.  $y = (2x^3 + 5)^4$ .

Δ Обозначим  $2x^3 + 5 = u$ , тогда  $y = u^4$ . По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (u^4)'_u \cdot (2x^3 + 5)'_x = 4u^3 (6x^2) = 24x^2 (2x^3 + 5)^3. \blacktriangle$$

$$752. y = \operatorname{tg}^6 x.$$

$$\Delta y' = 6 \operatorname{tg}^5 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 6 \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x. \blacktriangle$$

$$753. y = \cos^2 x.$$

$$\Delta y' = 2 \cos x (\cos x)' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x. \blacktriangle$$

$$754. y = \sin(2x+3).$$

$$\Delta y' = \cos(2x+3) \cdot (2x+3)' = 2 \cos(2x+3). \blacktriangle$$

$$755. y = \operatorname{tg} \ln x.$$

$$\Delta y' = \sec^2 \ln x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot \sec^2 \ln x. \blacktriangle$$

$$756. y = \sin^3 \frac{x}{3}.$$

$$\Delta y' = 3 \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \left(\sin \frac{x}{3}\right)' = 3 \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \left(\frac{x}{3}\right)' = \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}. \blacktriangle$$

$$757. y = \ln(x^2+5).$$

$$\Delta y' = \frac{1}{x^2+5} \cdot (x^2+5)' = \frac{2x}{x^2+5}. \blacktriangle$$

$$758. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)} \cdot (\operatorname{tg}(x/2))' = \frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)} \cdot \sec^2(x/2) \cdot (x/2)' = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{tg}(x/2) \cos^2(x/2)} = \frac{1}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} = \frac{1}{\sin x}. \blacktriangle \end{aligned}$$

$$759. y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot (x + \sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \blacktriangle \end{aligned}$$

$$760. y = \ln(\sqrt{2\sin x+1} + \sqrt{2\sin x-1}).$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1} + \sqrt{2\sin x-1}} (\sqrt{2\sin x+1} + \sqrt{2\sin x-1})' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1} + \sqrt{2\sin x-1}} \left(\frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x+1}} + \frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x-1}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1} + \sqrt{2\sin x-1}} \frac{\cos x (\sqrt{2\sin x+1} + \sqrt{2\sin x-1})}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}} = \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}}. \blacktriangle \end{aligned}$$

$$761. y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+k}).$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}\right) = \\ &= \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+k}} + \frac{\sqrt{x^2+k}}{2} + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}} \frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}} = \\ &= \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}} = \sqrt{x^2+k}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$762. y = \arcsin \frac{2x^2}{1+x^4}, \quad |x| < 1.$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}} \times \\ &\times \frac{(1+x^4) \cdot 4x - 2x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-2x^4+x^8}} \cdot \frac{4x(1-x^4)}{1+x^4} = \frac{4x}{1+x^4}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$763. y = \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{3}.$$

$$\Delta y' = \frac{1}{1 + (\ln^2 x)/9} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{3}{x(9 + \ln^2 x)}. \quad \blacktriangle$$

$$764. y = e^x \cdot \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}}.$$

$\Delta$  Записав данную функцию в виде

$$y = e^x \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}),$$

получим

$$\begin{aligned} y' &= e^x \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x + e^x \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^{2x}} e^{2x} \cdot 2 = \\ &= \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} + e^x \operatorname{arctg} e^x - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = e^x \operatorname{arctg} e^x. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$765. y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

$\Delta$  Преобразуем данную функцию:

$$y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln(1 + \sin x) - \ln \cos x.$$

Тогда

$$y' = \frac{\cos^2 x \cos x - \sin x \cdot 2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} + \frac{1}{1 + \sin x} \cos x - \frac{1}{\cos x} (-\sin x),$$

или

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x (1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \\ &+ \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\cos^3 x} = 2 \sec^3 x. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$766. y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} + \ln \cos \sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \operatorname{tg} \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos \sqrt{x}} (-\sin \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg} \sqrt{x} (\sec^2 \sqrt{x} - 1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$$767. y = 5 \operatorname{sh}^3 \frac{x}{15} + 3 \operatorname{sh}^5 \frac{x}{15}.$$

△ Находим

$$y' = 15 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \operatorname{ch} \frac{x}{15} \cdot \frac{1}{15} + 15 \operatorname{sh}^4 \frac{x}{15} \operatorname{ch} \frac{x}{15} \cdot \frac{1}{15} = \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \operatorname{ch} \frac{x}{15} \left( 1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \right),$$

откуда, используя соотношение  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ , окончательно получаем  $y' = \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \operatorname{ch}^3 \frac{x}{15}$ . ▲

$$768. y = x^{x^2}.$$

△ Здесь основание и показатель степени зависят от  $x$ . Логарифмируя, получим  $\ln y = x^2 \ln x$ . Продифференцируем обе части последнего равенства по  $x$ . Так как  $y$  является функцией от  $x$ , то  $\ln y$  есть сложная функция  $x$  и  $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$ . Следовательно,

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x, \quad \frac{y'}{y} = x(1 + 2 \ln x),$$

т. е.

$$y' = xy(1 + 2 \ln x) = xx^{x^2}(1 + 2 \ln x) = x^{x^2+1}(1 + 2 \ln x). \quad \blacktriangle$$

$$769. y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

△ Имеем  $\ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x$ , откуда

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \sec^2 x \ln \sin x = 1 + \sec^2 x \ln \sin x;$$

$$y' = y(1 + \sec^2 x \ln \sin x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} (1 + \sec^2 x \ln \sin x). \quad \blacktriangle$$

$$770. y = \frac{(2x-1)^3 \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}}.$$

△ Здесь заданную функцию также следует предварительно прологарифмировать:

$$\ln y = 3 \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \ln(3x+2) - 2 \ln(5x+4) - \frac{1}{3} \ln(1-x);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x-1} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3x+2} - 2 \cdot \frac{5}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)};$$

$$y' = \frac{(2x-1)^3 \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}} \left[ \frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)} \right]. \quad \blacktriangle$$

Найти производные функций:

$$771. y = \frac{7}{x^3}. \quad 772. y = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}.$$

$$773. y = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} - \frac{4}{11} x^5 \sqrt{x} + \frac{2}{15} x^7 \sqrt{x}.$$

$$774. y = (x^2 + 2x + 2) e^{-x}. \quad 775. \bar{y} = 3x^3 \ln x - x^3.$$

$$776. \dot{y} = \frac{2^x x}{3^{2x}}. \quad 777. y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$$

$$778. y = \ln(2x^3 + 3x^2). \quad 779. y = \sqrt{1-3x^2}.$$

$$780. y = x \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}.$$

781.  $y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ .
782.  $y = \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2$ . 783.  $y = \cos^3(x/3)$ .
784.  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}$ . 785.  $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ .
786.  $y = \operatorname{tg} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 2x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 2x$ .
787.  $y = \frac{1}{3} \sin^3 \sqrt{x} - \frac{2}{5} \sin^5 \sqrt{x} + \frac{1}{7} \sin^7 \sqrt{x}$ .
788.  $y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1})$ . 789.  $y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$ .
790.  $y = \ln \frac{\sqrt{4 \operatorname{tg} x + 1} - 2 \sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{4 \operatorname{tg} x + 1} + 2 \sqrt{\operatorname{tg} x}}$ . 791.  $y = -\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 2 \ln \sin \frac{x}{2}$ .
792.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x^2 - 1}$ . 793.  $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ .
794.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$ . 795.  $y = \arcsin \frac{2x^3}{1+x^6}$ , если  $|x| < 1$ .
796.  $y = \arccos \frac{9-x^2}{9+x^2}$ . 797.  $y = e^{-x} - \sin e^{-x} \cos e^{-x}$ .
798.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . 799.  $y = \ln \frac{(x-1)(x-3)^3}{(x-2)^3(x-4)}$ .
800.  $y = 1 - e^{\sin^2 3x} \cos^2 3x$ . 801.  $y = \ln \frac{2 \ln^2 \sin x + 3}{2 \ln^2 \sin x - 3}$ .
802.  $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$ . 803.  $y = -\ln(\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x)$ .
804.  $y = e^{\sqrt{2x}} (\sqrt{2x} - 1)$ . 805.  $y = \ln \frac{x^5}{x^5 + 2}$ .
806.  $y = \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^2$ . 807.  $y = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$ .
808.  $y = -\operatorname{cosec}^2(x/2)$ . 809.  $y = \sin(\ln x) \cdot \cos(\ln x) - \ln(1/x)$ .
810.  $y = (x^5 + 3)[\ln(x^5 + 3) - 1]$ . 811.  $y = \arcsin \sqrt{1 - 0,2x^2}$ .
812.  $y = 0,5[(x + \alpha) \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta} + (\beta - \alpha^2) \ln(x + \alpha + \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta})]$ .
813.  $y = \arcsin e^x + \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}$ .
814.  $y = m \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta} + (n - m\alpha) \ln(x + \alpha + \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta})$ .
815.  $y = \frac{x}{\sqrt{1 - mx^2}}$ . 816.  $y = x^2 + 2x \sin x \cos x + \cos^2 x$ .
817.  $y = \operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x + \ln(\operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec} x)$ . 818.  $y = \frac{\sin x}{1 + \ln \sin x}$ .
819.  $y = 3x \sin^3 x + 3 \cos x - \cos^3 x$ . 820.  $y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}$ .
821.  $y = e^x - \sin e^x \cos^3 e^x - \sin^3 e^x \cos e^x$ .
822.  $y = \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$ .
823.  $y = x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6)$ .

824.  $y = \ln \sin \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$ . 825.  $y = \operatorname{arctg} \frac{x^x - x^{-x}}{2}$ .
826.  $y = \frac{1}{64} \left( \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{8} \left( \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} \right) + \frac{3}{8} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .
827.  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$ . 828.  $y = -\frac{2 \cos(x/2)}{\sin(x/2) + 3 \cos(x/2)}$ .
829.  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sin x + \ln \cos \sin x$ . 830.  $y = \ln \left( 1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x}$ .
831.  $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1}$ . 832.  $y = 2x \operatorname{tg} 2x + \ln \cos 2x - 2x^2$ .
833.  $y = \arccos(2e^{2x} - 1)$ . 834.  $y = \ln \ln x (\ln \ln \ln x - 1)$ .
835.  $y = \frac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}$ . 836.  $y = \ln \frac{x \ln x - 1}{x \ln x + 1}$ .
837.  $y = \operatorname{arctg} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ . 838.  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{e^{2 \sin x}}{4}$ .
839.  $y = \frac{a}{2} \sin^2 x + \frac{b}{2} \cos^2 x - \frac{a+b}{4} \cos 2x$ .
840.  $y = \operatorname{tg}^3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg} \operatorname{tg} x$ . 841.  $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .
842.  $y = \frac{\ln x}{x^5} + \frac{1}{5x^5}$ . 843.  $y = \sqrt{2x+1} [\ln(2x+1) - 2]$ .
844.  $y = \sec x (1 + \ln \cos x)$ . 845.  $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x$ .
846.  $y = 2 \cos^3 x - 3 \cos x$ . 847.  $y = \frac{e^{x \cdot 25x}}{3^{4x}}$ .
848.  $y = \frac{x+1}{x} - e^{-\ln \frac{x}{x+1}}$ . 849.  $y = x \sin x \cos x + \frac{1}{2} \cos^2 x$ .
850.  $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}$ . 851.  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$ .
852.  $y = 2(\operatorname{tg} \sqrt{x} - \sqrt{x})$ . 853.  $y = \frac{1}{4a} \ln \frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ .
854.  $y = \ln \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}$ . 855.  $y = e^{0.5 \operatorname{tg}^2 x} \cos x$ .
856.  $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1-x^8}$ . 857.  $y = x^2 e^{x^2} \ln x$ .
858.  $y = \arccos \sqrt{1-2^x}$ . 859.  $y = \log_{x^2} 2$ .
860.  $y = -m \sqrt{-x^2 + 2\alpha x + \beta} + (m\alpha + n) \arcsin \frac{x-\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}}$ .
861.  $y = \log_2 \sin^2 x$ . 862.  $y = \log_a (x + \sqrt{x^2 + 9})$ .
863.  $y = x^{\arcsin x}$ . 864.  $y = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^4$ .
865.  $y = \frac{2^x (x+1)^3}{(x-1)^2 \sqrt{2x+1}}$ . 866.  $y = \ln \left( \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right)$ .
867.  $y = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2 + n^2} [(m+1) \cos(n \ln x) + n \sin(n \ln x)]$ .
868.  $y = (x \operatorname{tg} x + \ln \cos x) \cdot \operatorname{tg} (x \operatorname{tg} x + \ln \cos x) + \ln \cos (x \operatorname{tg} x + \ln \cos x)$ .

869.  $y = (x \cos x - \sin x) [\ln(x \cos x - \sin x) - 1]$ .

870.  $y = 3 \sin(xe^x - e^x) - \sin^3(xe^x - e^x)$ .

871.  $y = \arccos(2x\sqrt{1-x^2})$ . 872.  $y = |x| (x \neq 0)$ .

873.  $y = |f(x)|$ . 874.  $y = |3x - 5|$ .

875.  $y = e^{|x|}$ . 876.  $y = |x| + |x - 2|$ .

877.  $y = xe^x (\sin x - \cos x) + e^x \cos x$ .

878.  $y = \ln[x \sin x + \cos x + \sqrt{(x \sin x + \cos x)^2 + 1}]$ .

879.  $y = \frac{x^x}{e^x} (x \ln x - x - 1)$ . 880.  $y = \log_{\cos x} \sin x$ .

881.  $y = \log_{e^x} (x^n + \sqrt{x^{2n} + 1})$ . 882.  $y = \log_x e$ .

883.  $y = \log_{x^2} x$ . 884.  $y = \log_{x^2} x^x$ . 885.  $y = x^{1/\ln x}$ .

886.  $y = x^x$ . 887.  $y = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2$ .

888.  $y = x^{\ln x}$ . 889.  $y = \frac{x^2 \sqrt{x+1}}{(x-1)^3 \sqrt[5]{5x-1}}$ .

890. Показать, что  $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$ .

891. Показать, что  $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$ .

892. Показать, что  $(u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \ln u$ .

893. Вывести формулы дифференцирования  $\operatorname{arcsec} x$  и  $\operatorname{arccosec} x$ .894. Чему равно выражение  $u = y^2 + y'^2 + 4y^2/y'^2$ , если  $y = 2 \cos x^2$ ?895. Показать, что функция  $y = (x^2 + 1)(e^x + C)$  обращает уравнение  $y' - \frac{2xy}{x^2+1} = e^x(x^2+1)$  в тождество.

2. Дифференцирование неявных функций. Пусть уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y$  как неявную функцию от  $x$ . В дальнейшем будем считать эту функцию дифференцируемой.

Продифференцировав по  $x$  обе части уравнения  $F(x, y) = 0$ , получим уравнение первой степени относительно  $y'$ . Из этого уравнения легко находится  $y'$ , т. е. производная неявной функции для всех значений  $x$  и  $y$ , при которых множитель при  $y'$  в уравнении не обращается в нуль.

896. Найти производную  $y'_x$  из уравнения  $x^2 + y^2 = 4$ .

△ Так как  $y$  является функцией от  $x$ , то будем рассматривать  $y^2$  как сложную функцию от  $x$ . Следовательно,  $(y^2)' = 2yy'$ . Продифференцировав по  $x$  обе части данного уравнения, получим  $2x + 2yy' = 0$ , т. е.  $y' = -x/y$ . ▲

897. Найти производную  $y'_x$  из уравнения  $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$ .

△ Дифференцируя по  $x$  обе части уравнения, получаем

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y y' - 2x e^y = 0, \text{ т. е. } y' = \frac{(2x e^y - 3x^2) y}{1 - x^2 e^y}. \blacktriangle$$

Найти производную  $y'_x$  от неявных функций:

898.  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .

899.  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ .

900.  $x^4 - 6x^2 y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$ .

901.  $x^y - y^x = 0$ . 902.  $x \sin y + y \sin x = 0$ .

903.  $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$ .

904.  $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$ .

$$905. \frac{y}{x} + e^{y/x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0. \quad 906. x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0.$$

$$907. x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0.$$

3. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Если функция аргумента  $x$  задана параметрическими уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

$$908. \text{Найти } y' = \frac{dy}{dx}, \text{ если } x = t^3 + 3t + 1, \quad y = 3t^5 + 5t^3 + 1.$$

$$\Delta \text{ Найдем } \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 3, \quad \frac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2. \text{ Следовательно, } \frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2. \blacktriangle$$

$$909. \text{Найти } y' = \frac{dy}{dx}, \text{ если } x = a \cos t, \quad y = a \sin t.$$

$$910. \text{Найти } y' = \frac{dy}{dx}, \text{ если } x = e^{-t} \sin t, \quad y = e^t \cos t.$$

$$911. \text{Найти } \rho' = \frac{d\rho}{d\theta}, \text{ если } \rho = \left(\frac{2}{3} \sqrt{\alpha} + 1\right) \alpha, \quad \theta = \sqrt{\alpha} e^{\sqrt{\alpha}}.$$

$$912. \text{Найти } y' = \frac{dy}{dx}, \text{ если } x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t.$$

4. Приложения производной к задачам геометрии и механики. Если кривая задана уравнением  $y = f(x)$ , то  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол, образованный с положительным направлением оси  $Ox$  касательной к кривой в точке с абсциссой  $x_0$ .

Уравнение касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $M_0(x_0; y_0)$  имеет вид

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

где  $y'_0$  есть значение производной  $y'$  при  $x = x_0$ .

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

Уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0).$$

Углом между двумя кривыми  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  в точке их пересечения  $M_0(x_0; y_0)$  называется угол между касательными к этим кривым в точке  $M_0$ . Этот угол находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) f'_2(x_0)}.$$

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения  $s = s(t)$ , то скорость движения в момент  $t_0$  есть производная пути по времени:  $v = s'(t_0)$ .

913. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой  $y = (2/3)x^5 - (1/9)x^3$ , проведенная в точке с абсциссой  $x = 1$ ?

$\Delta$  Находим производную  $y' = (10/3)x^4 - (1/3)x^2$ ; при  $x = 1$  имеем  $y' = 3$ , т. е.  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ , откуда  $\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71^\circ 34'$ .  $\blacktriangle$

914. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе  $y = x^2 - 3x + 5$ , проведенная в точке  $M(2; 3)$ ? Написать уравнение этой касательной.

**915.** Составить уравнения касательной и нормали к кривой  $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$  в точке  $M(1; -1)$ .

△ Из уравнения кривой найдем производную:

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0, \text{ т. е. } y' = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

Следовательно,  $y'_0 = -\frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)^3} = \frac{1}{4}$ .

Уравнение касательной

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1), \text{ или } x - 4y - 5 = 0.$$

Уравнение нормали

$$y + 1 = -4(x - 1), \text{ или } 4x + y - 3 = 0. \blacktriangle$$

**916.** Найти угол между параболой  $y = 8 - x^2$  и  $y = x^2$ .

△ Решив совместно уравнения парабол, найдем точки их пересечения  $A(2; 4)$  и  $B(-2; 4)$ . Продифференцируем уравнения парабол:  $y' = -2x$ ,  $y' = 2x$ . Найдем угловые коэффициенты касательных к параболом в точке  $A$  (т. е. значения производных при  $x = 2$ ):  $k_1 = -4$ ,  $k_2 = 4$ . Следовательно,  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4 + 4}{1 - 16} = -\frac{8}{15}$ ,  $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(-8/15)$ . Так же определяется угол между кривыми в точке  $B$ :  $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(8/15)$ .  $\blacktriangle$

**917.** Найти уравнение нормали к параболе  $y^2 = 2px$  в точке  $M(x_0; y_0)$ .

**918.** Составить уравнение касательной к гиперболу  $x^2/9 - y^2/8 = 1$ , проведенной в точке  $M(-9; -8)$ .

**919.** Составить уравнения касательной и нормали к астроиде  $x = \sqrt{2} \cos^3 t$ ,  $y = \sqrt{2} \sin^3 t$ , проведенных в точке, для которой  $t = \pi/4$ .

**920.** Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ , проведенных в точке, для которой  $t = \pi/2$ .

**921.** Составить уравнения касательной и нормали к полукубической параболе  $x = t^2$ ,  $y = t^3$ , проведенных в точке, для которой  $t = 2$ .

**922.** Показать, что уравнение касательной к эллипсу  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  в точке  $M(x_0; y_0)$  имеет вид  $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1$ .

**923.** Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой  $y = \operatorname{sh} x$ , проведенная в точке  $(0; 0)$ ?

**924.** Составить уравнения касательной и нормали к цепной линии  $y = \operatorname{ch}(x/2)$  в точке, где  $x = 2 \ln 2$ .

**925.** Составить уравнение касательной к равносторонней гиперболу  $x = \operatorname{ch} t$ ,  $y = \operatorname{sh} t$  в точке  $t = t_0$ .

**926.** Найти угол между кривой  $y = x - x^3$  и прямой  $y = 5x$ .

**927.** Найти угол между кривыми  $y = x^3$  и  $y = 1/x^2$ .

**928.** Найти угол между линиями  $y = 1 + \sin x$ ,  $y = 1$ .

**929.** Найти угол между кривыми  $x^2 + y^2 = 5$ ,  $y^2 = 4x$ .

**930.** Найти угол между кривыми  $y = \sqrt{2} \sin x$ ,  $y = \sqrt{2} \cos x$ .

**931.** Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением  $s = t^5/5 + (2/\pi) \sin(\pi t/8)$  ( $t$  — в секундах,

$s$ —в метрах). Определить скорость движения в конце второй секунды.

△ Находим производную пути по времени:

$$\frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi t}{8}.$$

При  $t=2$  имеем  $\frac{ds}{dt} = 16 + \frac{1}{8} \sqrt{2} \approx 16,18$ . Следовательно,  $v \approx 16,18$  м/с. ▲

932. По параболе  $y = x(8-x)$  движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени  $t$  по закону  $x = t\sqrt{t}$  ( $t$ —в секундах,  $x$ —в метрах). Какова скорость изменения ординаты в точке  $M(1; 7)$ ?

△ Найдём закон изменения ординаты; заменив в уравнении параболы  $x$  на  $t\sqrt{t}$ , получим  $y = 8t\sqrt{t} - t^3$ . Скорость изменения ординаты есть производная от ординаты по времени:  $y'_t = 12\sqrt{t} - 3t^2$ . Для точки  $M(1; 7)$  значение  $t$  равно 1. Следовательно,  $y'_{t=1} = 9$ , т. е. скорость измерения ординаты равна 9 м/с. ▲

933. Зависимость пути от времени задана уравнением  $s = t \ln(t+1)$  ( $t$ —в секундах,  $s$ —в метрах). Найти скорость движения в конце второй секунды.

934. По кубической параболе  $y = x^3$  движется точка так, что ее ордината изменяется в зависимости от времени  $t$  по закону  $y = at^3$ . Какова скорость изменения абсциссы в зависимости от времени?

5. Нахождение угла между радиусом-вектором и линией. Пусть плоская линия задана в декартовых координатах уравнением  $y = f(x)$ . Направление линии в данной точке  $M(x; y)$  определяется касательной в этой точке, т. е. углом  $\alpha$  между касательной и положительным направлением оси  $Ox$  (отсчитываемым против часовой стрелки), причем  $\operatorname{tg} \alpha = y'$ . Угловой коэффициент радиуса-вектора точки  $M$  составляет  $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ , а угол между радиусом-вектором и касательной к линии в этой точке есть  $\omega = \alpha - \varphi$ . Следовательно,

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y' \cdot \frac{y}{x}} = \frac{xy' - y}{x + yy'} = \frac{x dy - y dx}{x dx + y dy}.$$

Если линия задана в полярных координатах уравнением  $r = r(\varphi)$ , то  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $x dy - y dx = r^2 d\varphi$ ,  $x dx + y dy = r dr$ , откуда

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r^2 d\varphi}{r dr} = \frac{r}{r'}.$$

935. Найти угол между параболой  $y = 4 - x^2$  и радиусом-вектором точки  $M(1; 3)$  этой линии.

△ Находим

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{xy' - y}{x + yy'} = \frac{x(-2x) - y}{x + y(-2x)} = \frac{-2x^2 - y}{x - 2xy}.$$

В точке  $M(1; 3)$  получаем  $\operatorname{tg} \omega = \frac{-2-3}{1-6} = 1$ , т. е.  $\omega = \frac{\pi}{4}$ . ▲

936. Найти угол между окружностью  $r = a$  и радиусом-вектором любой ее точки.

△ Имеем  $r' = 0$ ; значит,  $\operatorname{tg} \omega = r/r' = a/0 = \infty$ , т. е.  $\omega = \pi/2$ . ▲

937. Найти угол между равносторонней гиперболой  $x^2 - y^2 = 36$  и радиусом-вектором точки  $M(10; 8)$ .

△ Так как  $2x - 2yy' = 0$ ,  $y' = x/y$ , то

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{x \cdot (x/y) - y}{x + y \cdot (x/y)} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{36}{2xy} = \frac{18}{xy},$$

а в точке  $M(10; 8)$  имеем  $\operatorname{tg} \omega = \frac{18}{10 \cdot 8} = 0,225$ , т. е.  $\omega = \operatorname{arctg} 0,225$ . ▲

938. Найти угол между кардиоидой  $r = a(1 - \cos \varphi)$  и радиусом-вектором точки  $M(3a/2; 2\pi/3)$ .

△ Здесь  $\dot{r} = a \sin \varphi$ ,  $\operatorname{tg} \omega = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{a(1 - \cos \varphi)}{a \sin \varphi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ . В данной точке  $M$  получаем  $\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg}(\pi/3)$ ,  $\omega = \pi/3$ . ▲

939. Найти угол между параболой  $y^2 = 8x$  и радиусом-вектором точки  $M(2; 4)$ .

940. Найти угол между спиралью Архимеда  $r = a\varphi$  и радиусом-вектором любой ее точки.

941. Найти угол между окружностью  $r = \cos \varphi$  и радиусом-вектором любой ее точки.

942. Найти угол между окружностью  $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 2$  и радиусом-вектором точки  $M(6; 6)$ .

943. Найти угол между спиралью  $r = ae^{m\varphi}$  и радиусом-вектором любой ее точки.

944. Найти угол между эллипсом  $x^2/100 + y^2/36 = 1$  и радиусом-вектором точки  $M(6; 4,8)$ .

**6. Производные высших порядков.** Производной второго порядка (второй производной) функции  $y = f(x)$  называется производная от ее производной. Вторая производная обозначается так:  $y''$ , или  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , или  $f''(x)$ .

Если  $s = f(t)$  — закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени  $\frac{d^2s}{dt^2}$  есть ускорение этого движения.

Аналогично производная третьего порядка функции  $y = f(x)$  есть производная от производной второго порядка:  $y''' = (y'')'$ .

Вообще, производной  $n$ -го порядка от функции  $y = f(x)$  называется производная от производной  $(n-1)$ -го порядка:  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ . Обозначается  $n$ -я производная так:  $y^{(n)}$  или  $\frac{d^ny}{dx^n}$ , или  $f^{(n)}(x)$ .

Производные высших порядков (вторая, третья и т. д.) вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Если функция задана параметрически:  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , то производные  $y'_x$ ,  $y''_{xx}$ , ..., вычисляются по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y''_t)t'_t}{x'_t{}^2}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y'''_t)t'_t}{x'_t{}^3} \text{ и т. д.}$$

Производную второго порядка можно вычислить также по формуле

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} x'_t - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

945.  $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0,5x + 7$ . Найти  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ , ...

$$\begin{aligned} \Delta \quad y' &= 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0,5, \\ y'' &= 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2, \\ y''' &= 60x^2 + 48x - 18, \\ y^{IV} &= 120x + 48, \quad y^V = 120, \quad y^{VI} = y^{VII} = \dots = 0. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

946.  $y = \ln x$ . Найти  $y^{(n)}$ .

$$\begin{aligned} \Delta \quad y' &= \frac{1}{x} = x^{-1}, \\ y'' &= -1 \cdot x^{-2}, \\ y''' &= 1 \cdot 2x^{-3}, \\ y^{IV} &= -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}, \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) (-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

947.  $x = 2^x$ . Найти  $y^{(n)}$ .

$$\begin{aligned} \Delta \quad y' &= 2^x \ln 2, \\ y'' &= 2^x \ln^2 2, \\ y''' &= 2^x \ln^3 2, \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= 2^x \ln^n 2. \end{aligned}$$

948.  $y = \sin x$ . Найти  $y^{(n)}$ .

$$\begin{aligned} \Delta \quad y' &= \cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right), \\ y'' &= -\sin x = \sin \left( x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \\ y''' &= -\cos x = \sin \left( x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= \sin \left( x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

949. Найти  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ , если  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

$$\begin{aligned} \Delta \quad y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{(a \sin^3 t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t, \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Найти производные второго порядка:

950.  $y = -\frac{22}{x+5}$ . 951.  $y = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 3)$ .

952.  $y = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$ .

953.  $y = -\frac{1}{9} x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$ .

$$954. y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$955. \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \quad 956. \begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}$$

957. Показать, что функция  $y = \sin \ln x + \cos \ln x$  удовлетворяет уравнению  $x^2 y'' + xy' + y = 0$ .

958. Показать, что функция  $y = x + \sin 2x$  удовлетворяет уравнению  $y'' + 4y = 4x$ .

959. При прямолинейном движении точки зависимость пути от времени задана уравнением  $s = \sqrt{t}$ . Найти ускорение точки в конце 4-й секунды.

Найти производные третьего порядка:

$$960. y = \frac{x}{6(x+1)}. \quad 961. y = \frac{1}{2} \ln^2 x.$$

$$962. y = (2x+3)^3 \sqrt{2x+3}. \quad 963. y = \operatorname{sh}^2 x.$$

● Учесть, что  $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ .

Найти производные  $n$ -го порядка:

$$964. y = x^n \sqrt{x}. \quad 965. y = \frac{1}{2x+1}. \quad 966. y = 5 - 3 \cos^2 x.$$

$$967. y = 2^x + 2^{-x}. \quad 968. y = \frac{ax+b}{cx+d}. \quad 969. y = e^{kx}.$$

$$970. y = \cos x. \quad 971. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = 1/t. \end{cases} \quad 972. \begin{cases} x = at + b, \\ y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma. \end{cases}$$

973. Показать, что функция  $y = e^x + 2e^{2x}$  удовлетворяет уравнению  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ .

974. Показать, что функция  $y = x^3$  удовлетворяет уравнению  $y^V + y^{IV} + y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$ .

8. Дифференциалы первого и высших порядков. Дифференциалом (первого порядка) функции  $y = f(x)$  называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента. Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента:  $dx = \Delta x$ .

Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента:

$$dy = y' dx.$$

Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке  $M(x; y)$  (рис. 28).

Основные свойства дифференциала

$$1^\circ. dC = 0, \text{ где } C = \text{const.}$$

$$2^\circ. d(Cu) = C du.$$

$$3^\circ. d(u \pm v) = du \pm dv.$$

$$4^\circ. d(uv) = u dv + v du.$$

$$5^\circ. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

$$6^\circ. df(u) = f'(u) du.$$

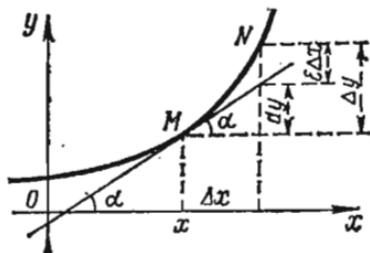


Рис. 28

Если приращение  $\Delta x$  аргумента мало по абсолютной величине, то  $\Delta y \approx dy$  и

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x.$$

Таким образом, дифференциал функции может применяться для приближенных вычислений.

Дифференциалом второго порядка функции  $y = f(x)$  называется дифференциал от дифференциала первого порядка:  $d^2y = d(dy)$ .

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка:  $d^3y = d(d^2y)$ .

Вообще,  $d^n y = d(d^{n-1}y)$ .

Если  $y = f(x)$  и  $x$  — независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам

$$d^2y = y''(dx)^2, \quad d^3y = y'''(dx)^3, \quad \dots, \quad d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

975. Найти дифференциал функции  $y = \operatorname{arctg} x$ .

$$\Delta dy = (\operatorname{arctg} x)' \cdot dx = \frac{dx}{1+x^2}. \quad \blacktriangle$$

976. Найти дифференциал функции  $s = e^{t^3}$ .

$$\Delta ds = e^{t^3} \cdot 3t^2 dt. \quad \blacktriangle$$

977. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции  $y = (2x - 3)^3$ .

$$\begin{aligned} \Delta dy &= 3(2x-3)^2 \cdot 2dx = 6(2x-3)^2 dx, \\ d^2y &= 12(2x-3) \cdot 2dx^2 = 24(2x-3) dx^2, \\ d^3y &= 24 \cdot 2dx^3 = 48 dx^3. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

978. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции  $v = e^{2t}$ .

$$\Delta dv = 2e^{2t} dt, \quad d^2v = 4e^{2t} \cdot dt^2. \quad \blacktriangle$$

979. Сравнить приращение и дифференциал функции  $y = 2x^3 + 5x^2$ .

$\Delta$  Находим

$$\begin{aligned} \Delta y &= 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 2x^3 - 5x^2 = (6x^2 + 10x) \Delta x + (6x + 5) \Delta x^2 + 2\Delta x^3, \\ dy &= (6x^2 + 10x) dx. \end{aligned}$$

Разность между приращением  $\Delta y$  и дифференциалом  $dy$  есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с  $\Delta x$ , равная  $(6x + 5) \Delta x^2 + 2\Delta x^3$ .  $\blacktriangle$

980. Вычислить приближенное значение  $\arcsin 0,51$ .

$\Delta$  Рассмотрим функцию  $y = \arcsin x$ . Полагая  $x = 0,5$ ,  $\Delta x = 0,01$  и применяя формулу  $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$ , получаем

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 = 0,513. \quad \blacktriangle$$

981. Вычислить приближенное значение площади круга, радиус которого равен 3,02 м.

$$\begin{aligned} \Delta S & \text{ Воспользуемся формулой } S = \pi R^2. \text{ Полагая } R = 3, \Delta R = 0,02, \text{ имеем} \\ \Delta S & \approx dS = 2\pi R \cdot \Delta R = 2\pi \cdot 3 \cdot 0,02 = 0,12\pi. \end{aligned}$$

Следовательно, приближенное значение площади круга составляет  $9\pi + 0,12\pi = 9,12\pi \approx 28,66$  (м<sup>2</sup>).  $\blacktriangle$

Найти дифференциалы функций:

982.  $y = \frac{x}{2} \sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2} \arcsin \frac{x}{7}$ . 983.  $x = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}$ .

984.  $y = 2 \ln \operatorname{ch} (x/2)$ .

985.  $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$

986. Найти  $dy$ ,  $d^2y$ ,  $d^3y$ , если  $y = x(\ln x - 1)$ .

987. Найти  $d^2y$ , если  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$ .

988. Сравнить приращение и дифференциал функции  $y = 1/x$ .

989. Вычислить  $\Delta y$  и  $dy$  для функции  $y = x^2 - 2x$  при  $x = 3$  и  $\Delta x = 0,01$ .

990. Найти приближенное значение объема шара радиуса 2,01 м.

991. Найти приближенное значение  $x$  из уравнения  $13\sin x - 15\cos x = 0$ .

Найти приближенное значение:

992.  $\operatorname{arctg} 1,05$ . 993.  $\operatorname{tg} 46^\circ$ .

994.  $\operatorname{Intg} 47^\circ 15'$ . 995.  $\sqrt[4]{15,8}$ .

## § 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

### 1. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши и формула Тейлора.

**Теорема Ролля.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема в интервале  $]a, b[$  и  $f(a) = f(b)$ , то в интервале  $]a, b[$  найдется хотя бы одно значение  $x = \xi$ , при котором  $f'(\xi) = 0$ .

Если, в частности,  $f(a) = 0$ ,  $f(b) = 0$ , то теорема Ролля означает, что между двумя корнями функции содержится хотя бы один корень ее производной.

**Теорема Лагранжа** (о конечном приращении). Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема в интервале  $]a, b[$ , то в этом интервале найдется хотя бы одно значение  $x = \xi$ , при котором выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

Эти теоремы имеют такой геометрический смысл: на дуге  $AB$  непрерывной кривой  $y = f(x)$ , имеющей в каждой внутренней точке определенную касательную (не параллельную оси  $Oy$ ), найдется хотя бы одна внутренняя точка, в которой касательная параллельна хорде  $AB$ . (Для теоремы Ролля и хорда  $AB$ , и касательная параллельны оси  $Ox$ .)

**Теорема Коши.** Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы в интервале  $]a, b[$ , причем  $\varphi'(x) \neq 0$ , то в этом интервале найдется хотя бы одно значение  $x = \xi$ , при котором

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \text{ где } a < \xi < b.$$

**Формула Тейлора.** Функция  $f(x)$ , дифференцируемая  $n+1$  раз в некотором интервале, содержащем точку  $a$ , может быть представлена в виде суммы многочлена  $n$ -й степени и остаточного члена  $R_n$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

где точка  $\xi$  лежит между точками  $a$  и  $x$ , т. е.  $\xi = a + \theta(x-a)$ , причем  $0 < \theta < 1$ .

При  $a=0$  получается формула Маклорена.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n;$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Приведем разложения некоторых функций по формуле Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n; \quad R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{m+1}x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m};$$

$$R_{2m} = (-1)^m \cos \theta x \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1};$$

$$R_{2m+1} = (-1)^{m+1} \cos \theta x \cdot \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!};$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{n!}x^n + R_n;$$

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1}$$

(всюду  $0 < \theta < 1$ ).

996. Выполняется ли теорема Ролля для функции  $f(x) = x^2 - 6x + 100$ , если  $a = 1$ ,  $b = 5$ ? При каком значении  $\xi$ ?

$\Delta$  Так как функция  $f(x)$  непрерывна и дифференцируема при всех значениях  $x$  и ее значения на концах отрезка  $[1, 5]$  равны:  $f(1) = f(5) = 95$ , то теорема Ролля на этом отрезке выполняется. Значение  $\xi$  определяем из уравнения  $f'(x) = 2x - 6 = 0$ , т. е.  $\xi = 3$ .  $\blacktriangle$

997. Выполняется ли теорема Ролля для функции  $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ , если  $a = 0$ ,  $b = 8$ ? При каком значении  $\xi$ ?

$\Delta$  Функция  $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$  непрерывна при всех значениях  $x$  и имеет производную  $f'(x) = (8-2x)/\left(3\sqrt[3]{(8x-x^2)^2}\right)$  при  $x \neq 0$ ,  $x \neq 8$ , т. е. дифференцируема в интервале  $(0, 8)$ . Кроме того,  $f(0) = f(8) = 0$ . Таким образом, теорема Ролля на отрезке  $[0, 8]$  выполняется; действительно,  $f'(x) = 0$  при  $x = \xi = 4$ .  $\blacktriangle$

998. Дана функция  $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$ . Пусть  $a = 0$ ,  $b = 16$ . Тогда  $f(0) = f(16) = 4$ . Однако производная  $f'(x) = 2/(3\sqrt[3]{x-8})$  не обращается в нуль ни в одной точке интервала  $(0, 16)$ . Противоречит ли это теореме Ролля?

$\Delta$  Нет, так как в точке  $x = 8$  интервала  $(0, 16)$  производная не существует, и условия теоремы Ролля нарушены.  $\blacktriangle$

999. Показать, что производная многочлена  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$  имеет действительный корень в интервале  $(-1, 1)$ .

△ Найдем корни данного многочлена:  $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$  или  $(x-1)^2(x+1) = 0$ , т. е.  $x_1 = x_2 = 1$ ,  $x_3 = -1$ . Так как  $f(-1) = f(1) = 0$ , то по теореме Ролля  $f'(x)$  имеет корень в интервале  $(-1, 1)$ . Найдем корни производной:  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$ , т. е.  $x_1 = -1/3$ ,  $x_2 = 1$ . Таким образом; между корнями функции  $-1$  и  $1$  содержится корень производной, равный  $-1/3$ . ▲

1000. На дуге  $AB$  кривой  $y = 2x - x^2$  найти точку  $M$ , в которой касательная параллельна хорде  $AB$ , если  $A(1; 1)$  и  $B(3; -3)$ .

△ Функция  $y = 2x - x^2$  непрерывна и дифференцируема при всех значениях  $x$ . По теореме Лагранжа между двумя значениями  $a=1$  и  $b=3$  существует значение  $x = \xi$ , удовлетворяющее равенству  $y(b) - y(a) = (b-a)y'(\xi)$ , где  $y' = 2 - 2x$ . Подставив соответствующие значения, получим  $y(3) - y(1) = (3-1)y'(\xi)$ ;  $(2 \cdot 3 - 3^2) - (2 \cdot 1 - 1^2) = (3-1) \cdot (2-2\xi)$ ;  $-4 = 4(1-\xi)$ . Отсюда  $\xi = 2$ ,  $y(2) = 0$ . Таким образом, точка  $M$  имеет координаты  $(2; 0)$ . ▲

1001. На дуге  $AB$  кривой, заданной параметрическими уравнениями  $x = t^2$ ,  $y = t^3$ , найти точку  $M$ , в которой касательная параллельна хорде  $AB$ , если точкам  $A$  и  $B$  соответствуют значения  $t = 1$  и  $t = 3$ .

△ Угловый коэффициент хорды  $AB$  равен  $\frac{y(3) - y(1)}{x(3) - x(1)}$ , а угловый коэффициент касательной в точке  $M$  (при  $t = \xi$ ) равен  $\frac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}$ , где  $x'_t = 2t$ ,  $y'_t = 3t^2$ .

Для определения  $\xi$  по теореме Коши получаем уравнение

$$\frac{y(3) - y(1)}{x(3) - x(1)} = \frac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}, \text{ или } \frac{27 - 1}{9 - 1} = \frac{3\xi^2}{2\xi}, \text{ или } \frac{13}{4} = \frac{3}{2}\xi,$$

т. е.  $\xi = 13/6$ . Найденное значение  $\xi$  удовлетворяет неравенству  $1 < \xi < 3$ .

Подставив значение  $t = \xi$  в параметрические уравнения кривой, получаем  $x = 169/36$ ,  $y = 2197/216$ . Итак, искомая точка  $M(169/36; 2197/216)$ . ▲

1002. Представить функцию  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  в виде многочлена пятой степени относительно двучлена  $x-1$ .

△ Вычислим значения функции  $f(x) = x^{1/3}$  и ее производных до пятого порядка включительно при  $a=1$ :  $f(1) = 1$ ,  $f'(x) = (1/3)x^{-2/3}$ ,  $f'(1) = 1/3$ ;  $f''(x) = -(2/9)x^{-5/3}$ ,  $f''(1) = -2/9$ ;  $f'''(x) = (10/27)x^{-8/3}$ ,  $f'''(1) = 10/27$ ;  $f^{IV}(x) = -(80/81)x^{-11/3}$ ,  $f^{IV}(1) = -80/81$ ;  $f^V(x) = (880/243)x^{-14/3}$ ,  $f^V(1) = 880/243$ . Следовательно, по формуле Тейлора получим

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} &= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 - \\ &\quad - \frac{80}{81 \cdot 4!}(x-1)^4 + \frac{880}{243 \cdot 5!}(x-1)^5 + R_5, \end{aligned}$$

где  $R_5 = \frac{f^{IV}(\xi)}{6!}(x-1)^6 = -\frac{12320}{729 \cdot 6!} \cdot \xi^{-17/3}(x-1)^6$ ,  $1 < \xi < x$ . ▲

1003. Представить функцию  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ ) в виде многочлена третьей степени относительно  $x$ .

△ Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= a^x \ln a, & f'(0) &= \ln a, \\ f''(x) &= a^x \ln^2 a, & f''(0) &= \ln^2 a, \\ f'''(x) &= a^x \ln^3 a, & f'''(0) &= \ln^3 a, \\ f^{IV}(x) &= a^x \ln^4 a, & f^{IV}(0) &= \ln^4 a \cdot a^{0x}, \end{aligned}$$

По формуле Маклорена получаем

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + R_3,$$

где  $R_3 = \frac{x^4 \ln^4 a}{4!} a^{\theta x}$ ,  $0 < \theta < 1$ . ▲

**1004.** Вычислить с точностью до  $10^{-3}$  приближенное значение  $\sqrt[3]{29}$ .

△ Представим заданный корень так:  $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3 \left(1 + \frac{2}{27}\right)^{1/3}$ . Воспользуемся биномиальным разложением

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-n+1]}{n!}x^n + R_n.$$

Отсюда получаем приближенное равенство

$$(1+x)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

погрешность которого

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1}$$

может быть сделана как угодно малой при  $|x| < 1$  и при достаточно большом  $n$ .

Полагая  $x = 2/27$  и  $m = 1/3$ , получим

$$\sqrt[3]{29} = 3 \left( 1 + \frac{2}{81} - \frac{2 \cdot 2}{81 \cdot 81} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{81^3} - \frac{2^5 \cdot 5}{81^4} + \dots + R_n \right).$$

Оценивая величины последовательных ошибок вычисления  $3|R_n|$ , находим

$$3|R_1| < \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{81^2} < 0,002, \quad 3|R_2| < \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{81^3} < 0,0003.$$

Следовательно, для вычисления с заданной точностью достаточно взять три члена, которые предшествуют остатку  $R_2$ , т. е.  $\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + 0,024 - 0,0006) = 3,072$ . ▲

**1005.** Вычислить  $\sqrt{e}$  с точностью до 0,0001.

△ Воспользуемся формулой Маклорена для функции  $e^x$ :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

где  $R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$ ,  $0 < \theta < 1$ . Полагая  $x = 1/2$ , получаем

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{2^n \cdot n!} + R_n,$$

где  $R_n = \frac{e^{\theta/2}}{2^{n+1} (n+1)!}$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Так как  $0 < \theta < 1$ ,  $2 < e < 3$ , то  $R_n < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1} (n+1)!}$ . Но  $e^{1/2} < 2$ , поэтому

$R_n < \frac{1}{2^n (n+1)!}$ . Требуется определить  $n$  так, чтобы выполнялось неравенство  $R_n < 0,0001$ .

Если  $n=3$ , то  $R_3 < \frac{1}{8 \cdot 24}$ ;  $R_3 < \frac{1}{192}$ ,

»  $n=4$ , »  $R_4 < \frac{1}{16 \cdot 120}$ ;  $R_4 < \frac{1}{1920}$ ,

»  $n=5$ , »  $R_5 < \frac{1}{32 \cdot 720}$ ;  $R_5 < 0,0001$ .

Для определения  $\sqrt[e]{e}$  с точностью до 0,0001 получаем приближенное равенство

$$\sqrt[e]{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} + \frac{1}{2^5 \cdot 5!}.$$

Произведем суммирование, обратив все слагаемые в десятичные дроби с одним лишним (запасным) знаком. В результате получим  $\sqrt[e]{e} \approx 1,6487$ . ▲

**1006.** Дана функция  $f(x)$ , непрерывная вместе со своими производными до  $(n-1)$ -го порядка включительно на отрезке  $[a, b]$  и имеющая производную  $n$ -го порядка в интервале  $(a, b)$ , причем для этой функции выполняются равенства  $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{n-1}) = f(b)$ , где  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ . Доказать, что в интервале  $(a, b)$  найдется по крайней мере одна такая точка  $\xi$ , для которой  $f^{(n)}(\xi) = 0$ .

**1007.** Рассмотреть частный случай предыдущей задачи, если  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ ,  $a=1$ ,  $x_1=2$ ,  $x_2=3$ ,  $b=4$ . Определить  $\xi$ .

**1008.** Представить в виде многочлена третьей степени относительно  $x-x_0$  ( $x_0 \neq 0$ ) функцию  $1/x$ .

**1009.** В какой точке дуги  $AB$  кривой  $y = x^3 - 3x$  касательная параллельна хорде  $AB$ , если  $A(0; 0)$ ,  $B(3; 18)$ ?

Вычислить с точностью до  $10^{-3}$ :

**1010.**  $\cos 41^\circ$ . **1011.**  $\sqrt[3]{121}$ .

**1012.**  $\sqrt[3]{e}$ . **1013.**  $\sqrt[7]{129}$ . **1014.**  $\sin 36^\circ$ .

**2. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей.** Пусть в некоторой окрестности точки  $x_0$  (кроме, быть может, самой точки  $x_0$ ) функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  дифференцируемы и  $\varphi'(x) \neq 0$ . Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ , т. е. частное  $f(x)/\varphi(x)$  в точке  $x=x_0$  представляет собой неопределенность вида  $0/0$  или  $\infty/\infty$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

если предел в правой части этого равенства существует.

Если частное  $f'(x)/\varphi'(x)$  в точке  $x=x_0$  также есть неопределенность вида  $0/0$  или  $\infty/\infty$  и производные  $f''(x)$  и  $\varphi''(x)$  удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и т. д.

В случае неопределенности вида  $0 \cdot \infty$  или  $\infty \cdot 0$  следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести ее к неопределенности вида  $0/0$  или  $\infty/\infty$  и далее воспользоваться правилом Лопиталья.

В случае неопределенности вида  $0^0$  или  $\infty^0$  или  $1^\infty$  следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

Найти следующие пределы:

$$1015. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}.$$

△ Числитель и знаменатель стремится к нулю при  $x \rightarrow 1$ , а потому имеем неопределенность вида  $0/0$ . Воспользуемся правилом Лопиталья, т. е. рассмотрим предел отношения производных заданных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1/x}{e^x} = \frac{3}{e}. \blacktriangle$$

$$1016. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

△ Это — неопределенность вида  $0/0$ . Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6};$$

так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Здесь правило Лопиталья применено дважды. ▲

$$1017. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}, \text{ если } n \text{ — целое положительное число.}$$

△ Это — неопределенность вида  $\infty/\infty$ . Применим правило Лопиталья  $n$  раз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{e^x} = 0. \blacktriangle$$

$$1018. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{x/2}}{x + e^x}.$$

△ В данном случае также имеет место неопределенность вида  $\infty/\infty$ . Находим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{x/2}}{x + e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}e^{x/2} \left(2 + \frac{x}{2}\right)}{e^x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{x}{2}}{e^{x/2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/2}{(1/2)e^{x/2}} = 0. \blacktriangle \end{aligned}$$

$$1019. \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x).$$

△ Здесь мы имеем неопределенность вида  $0 \cdot \infty$ . Представим произведение функций в виде частного, а затем, получив неопределенность вида  $\infty/\infty$ , применим правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-2/x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0. \blacktriangle$$

$$1020. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

△ Это — неопределенность вида  $\infty - \infty$ . Для того чтобы найти предел функции, приведем дроби к общему знаменателю, а затем, получив неопределенность вида  $0/0$ , применим правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(2+x)} = \frac{1}{2}. \blacktriangle$$

$$1021. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x.$$

△ Это — неопределенность вида  $0^0$ . Обозначим данную функцию через  $y$ , т. е.  $y = (\sin x)^x$ , и прологарифмируем ее:

$$\ln y = x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{1/x}.$$

Вычислим предел логарифма данной функции, применяя правило Лопиталю (здесь имеем неопределенность вида  $\infty/\infty$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x / \sin x}{-1/x^2} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$ . ▲

$$1022. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}.$$

△ Это — неопределенность вида  $\infty^0$ . Положим  $(\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = y$  и прологарифмируем:

$$\ln y = 2 \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x = \frac{2 \ln \operatorname{tg} x}{1/\cos x}.$$

Применяя правило Лопиталю, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \ln y &= 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sec x} = 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec^2 x / \operatorname{tg} x}{\sec x \operatorname{tg} x} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} = 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x = 0, \end{aligned}$$

т. е.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} y = e^0 = 1$ . ▲

$$1023. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}.$$

△ Это — неопределенность вида  $1^\infty$ . Логарифмируя и применяя правило Лопиталю, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x \ln (1+x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1+x)}{1/\ln x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x)}{-1/(x \ln^2 x)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln^2 x}{x+1} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2 x}{1+1/x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \ln x)/x}{-1/x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$ . ▲

Найти пределы следующих функций:

*Неопределенность вида  $0/0$ .*

$$1024. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}.$$

$$1025. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}.$$

$$1026. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}.$$

$$1027. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cos x}{x^4}.$$

$$1028. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}.$$

$$1029. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3xe^x + 3x^2}{\operatorname{arctg} x - \sin x - x^3/6}.$$

*Неопределенность вида  $\infty/\infty$ .*

$$1030. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$$

$$1031. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} \quad (n > 0).$$

$$1032. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x} \quad 1033. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(\pi x/2)}{\ln(1-x)} \quad 1034. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}$$

Неопределенность вида  $0 \cdot \infty$ .

$$1035. \lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg} \pi x). \quad 1036. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x).$$

$$1037. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

Неопределенность вида  $\infty - \infty$ .

$$1038. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right). \quad 1039. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{p}{1-x^p} - \frac{q}{1-x^q} \right).$$

$$1040. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

Неопределенности вида  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ .

$$1041. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x)^{\cos x}. \quad 1042. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}.$$

$$1043. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{1/x}. \quad 1044. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

3. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Функция  $f(x)$  называется *возрастающей* в точке  $x_0$ , если при любом достаточно малом  $h > 0$  выполняется условие  $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$  (рис. 29).

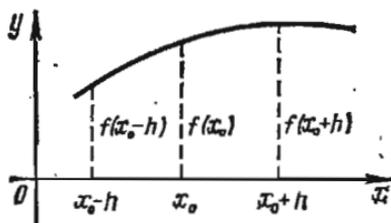


Рис. 29

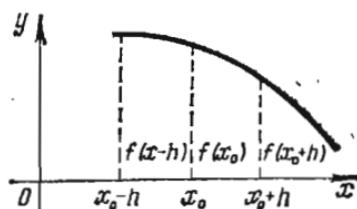


Рис. 30

Функция  $f(x)$  называется *убывающей* в точке  $x_0$ , если при любом достаточно малом  $h > 0$  выполняется условие  $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$  (рис. 30).

Функция  $f(x)$  называется *возрастающей* в интервале  $(a, b)$ , если для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Функция  $f(x)$  называется *убывающей* в интервале  $(a, b)$ , если для любых точек  $x_1$  и  $x_2$  из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Признаки возрастания и убывания функции.

1) Если  $f'(x_0) > 0$ , то функция  $f(x)$  возрастает в точке  $x_0$ .

2) Если  $f'(x_0) < 0$ , то функция  $f(x)$  убывает в точке  $x_0$ .

Значение  $f(x_0)$  называется *максимумом* функции  $f(x)$ , если при любом достаточно малом  $h > 0$  выполняются условия  $f(x_0 - h) < f(x_0)$  и  $f(x_0 + h) < f(x_0)$ . Точка  $x_0$  называется в этом случае *точкой максимума* функции  $f(x)$  (рис. 31).

Значение  $f(x_0)$  называется *минимумом* функции  $f(x)$ , если при любом достаточно малом  $h > 0$  выполняются условия  $f(x_0 - h) > f(x_0)$  и  $f(x_0 + h) > f(x_0)$ . Точка  $x_0$  называется в этом случае *точкой минимума* функции  $f(x)$  (рис. 32).

Максимум или минимум функции называется *экстремумом* функции. Точка максимума или минимума функции называется *точкой ее экстремума*.

Необходимое условие экстремума. Если функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  имеет экстремум, то производная  $f'(x_0)$  обращается в нуль или не существует.

Точка  $x_0$ , в которой  $f'(x_0) = 0$ , называется *стационарной точкой*. Точки, в которых  $f'(x) = 0$  или  $f'(x)$  не существует, называются *критическими точками*. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

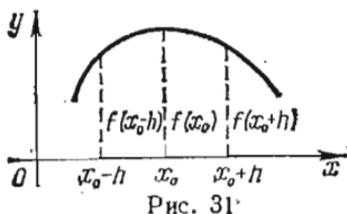


Рис. 31

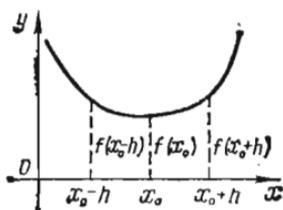


Рис. 32

**Достаточные условия экстремума.**

**Правило 1.** Если  $x_0$  — критическая точка функции  $f(x)$  и при произвольном достаточно малом  $h > 0$  выполняются неравенства  $f'(x_0-h) > 0$ ,  $f'(x_0+h) < 0$ , то функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  имеет максимум; если же  $f'(x_0-h) < 0$ ,  $f'(x_0+h) > 0$ , то функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  имеет минимум.

Если знаки  $f'(x_0-h)$  и  $f'(x_0+h)$  одинаковы, то функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  экстремума не имеет.

**Правило 2.** Если  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) \neq 0$ , то функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  имеет экстремум, а именно максимум, если  $f''(x_0) < 0$ , и минимум, если  $f''(x_0) > 0$ .

**Правило 3.** Пусть  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) = 0$ , ...,  $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . В этом случае функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  экстремум, если  $n$  — четное число, а именно, максимум при  $f^{(n)}(x_0) < 0$  и минимум при  $f^{(n)}(x_0) > 0$ . Если же  $n$  — нечетное число, то функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  экстремума не имеет.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  нужно из значений функции на границах отрезка и в критических точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее (наименьшее).

**1045.** Даны точки  $x = 3$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0,5$ . В каких из перечисленных точек функция  $y = x^3 - 3x^2$  возрастает? Убывает?

△ Найдем производную  $y' = 3x^2 - 6x$ . Имеем:  
 если  $x = 3$ , то  $y' = 9 > 0$  — функция возрастает;  
 »  $x = 1$  »  $y' = -3 < 0$  — » убывает;  
 »  $x = -1$  »  $y' = 9 > 0$  — » возрастает;  
 »  $x = 0,5$  »  $y' = -2,25 < 0$  — » убывает. ▲

**1046.** Найти интервалы возрастания и убывания функции  $y = x(1 + \sqrt{x})$ .

△ Находим  $y' = 1 + (3/2)x^{1/2}$ . Так как производная положительна в промежутке  $[0, +\infty)$ , то функция возрастает во всей области определения. ▲

**1047.** Найти интервалы возрастания и убывания функции  $y = x - 2 \sin x$ , если  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

△ Найдем производную:  $y' = 1 - 2 \cos x$ . Очевидно, что  $y' > 0$  в интервале  $(\pi/3, 5\pi/3)$  и  $y' < 0$  в интервалах  $(0, \pi/3)$  и  $(5\pi/3, 2\pi)$ . Таким образом, в интервале  $(\pi/3, 5\pi/3)$  данная функция возрастает, а в интервалах  $(0, \pi/3)$  и  $(5\pi/3, 2\pi)$  — убывает. ▲

**1048.** Исследовать на экстремум функцию  $y = (x-5)e^x$ .

△ Находим производную:  $y' = (x-4)e^x$ . Приравниваем ее нулю и находим стационарную точку:  $e^x(x-4) = 0$ ,  $x = 4$ ;  $y'(4-h) = -he^{4-h} < 0$ ,  $y'(4+h) = he^{4+h} > 0$ . Согласно правилу 1 заключаем, что в точке  $x = 4$  функция имеет минимум  $y_{\min} = -e^4$ . ▲

1049. Исследовать на экстремум функцию  $y = x\sqrt{1-x^2}$ .

△ Функция определена при  $-1 \leq x \leq 1$ . Найдем производную:  $y' = (1-2x^2)/\sqrt{1-x^2}$ ;  $y' = 0$  при  $1-2x^2 = 0$ ; отсюда  $x_1 = -1/\sqrt{2}$ ,  $x_2 = 1/\sqrt{2}$  (стационарные точки);  $y' = \infty$  при  $x = \pm 1$ , т. е. на границах области определения функции.

Найдем вторую производную:  $y'' = x(2x^2-3)/(1-x^2)^{3/2}$ . Вычислим значения второй производной в стационарных точках. При  $x = 1/\sqrt{2}$  имеем

$$y''(1/\sqrt{2}) = \frac{1 \cdot (1-3)}{\sqrt{2}(1-1/2)^{3/2}} < 0;$$

следовательно, согласно правилу 2 заключаем, что в точке  $x = 1/\sqrt{2}$  функция имеет максимум  $y_{\max} = (1/\sqrt{2})\sqrt{1/2} = 1/2$ . При  $x = -1/\sqrt{2}$  получим

$$y''(-1/\sqrt{2}) = -\frac{1 \cdot (1-3)}{\sqrt{2}(1-1/2)^{3/2}} > 0,$$

т. е. в точке  $x = -1/\sqrt{2}$  функция имеет минимум  $y_{\min} = -1/2$ .

В критических точках  $x = \pm 1$  экстремума нет, так как по определению точками экстремума могут быть лишь внутренние точки области определения функции. ▲

1050. Исследовать на экстремум функцию  $y = (x-1)^4$ .

△ Найдем производную:  $y' = 4(x-1)^3$ ;  $(x-1)^3 = 0$ ;  $x = 1$  — стационарная точка. Вторая производная  $y'' = 12(x-1)^2$  при  $x = 1$  равна нулю. Третья производная  $y''' = 24(x-1)$  при  $x = 1$  также обращается в нуль. Четвертая производная  $y^{IV} = 24 > 0$ . Следовательно, согласно правилу 3 заключаем, что в точке  $x = 1$  функция имеет минимум  $y_{\min} = 0$ . ▲

1051. Исследовать на экстремум функцию  $y = 1 - (x-2)^{4/5}$ .

△ Находим  $y' = -\frac{4}{5}(x-2)^{-1/5} = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}$ . Производная не обращается

в нуль ни при каких значениях  $x$  и не существует лишь при  $x = 2$  (критическая точка).

Так как при достаточно малом  $h > 0$  выполняются неравенства  $y'(2-h) > 0$  и  $y'(2+h) < 0$ , то согласно правилу 1 заключаем, что при  $x = 2$  функция имеет максимум  $y_{\max} = 1$ . ▲

1052. Исследовать на экстремум функцию  $y = (x-2)^{2/3}(2x+1)$ .

△ Находим  $y' = \frac{10}{3} \cdot \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}}$ . Критические точки  $x = 1$  (производная равна

нулю) и  $x = 2$  (производная не существует). При достаточно малом  $h > 0$  выполняются неравенства  $y'(1-h) > 0$ ,  $y'(1+h) < 0$ ;  $y'(2-h) < 0$ ,  $y'(2+h) > 0$ . Следовательно, в точке  $x = 1$  функция имеет максимум  $y_{\max} = 3$ , а в точке  $x = 2$  — минимум  $y_{\min} = 0$ . ▲

1053. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 3x - x^3$  на отрезке  $[-2, 3]$ .

△ Находим производную:  $f'(x) = 3 - 3x^2$ ;  $3 - 3x^2 = 0$ , т. е.  $x = \pm 1$  — стационарные точки. Определяем значения функции в этих точках:  $f(1) = 2$ ,  $f(-1) = -2$ . Вычисляем значения данной функции на границах промежутка:  $f(-2) = 2$ ,  $f(3) = -18$ . Из полученных четырех значений выбираем наибольшее и наименьшее. Итак, наибольшее значение функции на данном отрезке равно 2, а наименьшее равно -18. ▲

**1054.** Найти такой цилиндр, который имел бы наибольший объем при данной полной поверхности  $S$ .

$\Delta$  Пусть радиус основания цилиндра равен  $x$ , а высота равна  $y$ . Тогда

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy, \text{ т. е. } y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{S}{x} - 2\pi x \right).$$

Следовательно, объем цилиндра выразится так:

$$V = V(x) = \pi x^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \left( \frac{S}{x} - 2\pi x \right) = \frac{S}{2} x - \pi x^3.$$

Задача сводится к исследованию функции  $V(x)$  на максимум при  $x > 0$ .

Найдем производную  $\frac{dV}{dx} = \frac{S}{2} - 3\pi x^2$  и приравняем ее нулю, откуда  $x = \sqrt{S/(6\pi)}$ .

Найдем вторую производную:  $\frac{d^2V}{dx^2} = -6\pi x$ . Так как при  $x = \sqrt{S/(6\pi)}$  выполняется условие  $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$ , то объем имеет наибольшее значение, причем

$$y = \frac{S - 2\pi \cdot S/(6\pi)}{2\pi \sqrt{S/(6\pi)}} = 2 \sqrt{S/(6\pi)} = 2x,$$

т. е. осевое сечение цилиндра должно быть квадратом.  $\blacktriangle$

Найти интервалы возрастания и убывания функций:

**1055.**  $y = 2 - 3x + x^3$ . **1056.**  $y = (x^2 - 1)^{3/2}$ .

**1057.**  $y = xe^{-x}$ . **1058.**  $y = (2-x)(x+1)^2$ .

Найти экстремумы функций:

**1059.**  $y = x^2(1 - x\sqrt{x})$ . **1060.**  $y = x + \sqrt{3-x}$ . **1061.**  $y = \ln(x^2 + 1)$ .

**1062.**  $y = \operatorname{ch}^2 x$ . **1063.**  $y = \frac{x}{\ln x}$ . **1064.**  $y = xe^{-x^{2/3}}$ .

**1065.**  $y = (x-1)^{6/7}$ . **1066.**  $y = (2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$ .

**1067.**  $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$ . **1068.**  $y = x - 2\sin^2 x$ .

**1069.**  $y = e^{1.5 \sin x}$ .

**1070.** Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $y = x^4 - 2x^2 + 3$  на отрезке  $[-3, 2]$ .

**1071.** На оси  $Oy$  найти точку, из которой отрезок  $AB$  виден под наибольшим углом, если  $A(2; 0)$ ,  $B(8; 0)$ .

**1072.** Пункт  $B$  находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта  $A$  до ближайшей к пункту  $B$  точки  $C$  составляет 285 км. На каком расстоянии от точки  $C$  надо построить станцию, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижение между пунктами  $A$  и  $B$ , если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе равна 20 км/ч?

**1073.** Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс  $x^2/25 + y^2/9 = 1$ .

**1074.** Проволока длиной  $l$  согнута в прямоугольник. Каковы размеры этого прямоугольника, если его площадь наибольшая?

1075. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна  $l$ .

1076. Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная поверхность равна  $S$ .

1077. Турист идет из пункта  $A$ , находящегося на шоссе, в пункт  $B$ , расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от  $A$  до  $B$  по прямой составляет 17 км. В каком месте туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт  $B$ , если скорость его по шоссе 5 км/ч, а по бездорожью 3 км/ч?

1078. Канал, ширина которого 27 м, под прямым углом впадает в другой канал шириною 64 м. Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?

1079. На какой высоте над центром круглого стола радиуса  $a$  следует поместить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

● Яркость освещения выражается формулой  $I = (k \sin \varphi) / r^2$ , где  $\varphi$  — угол наклона лучей,  $r$  — расстояние источника света от освещаемой площадки,  $k$  — сила источника света.

4. Выпуклость, вогнутость. Точка перегиба. График функции  $y = f(x)$  называется *выпуклым* в интервале  $(a, b)$ , если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 33).

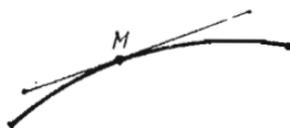


Рис. 33



Рис. 34

График функции  $y = f(x)$  называется *вогнутым* в интервале  $(a, b)$ , если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 34).

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции. Если  $f''(x) < 0$  в интервале  $(a, b)$ , то график функции является выпуклым в этом интервале; если же  $f''(x) > 0$ , то в интервале  $(a, b)$  график функции — вогнутый.

Предположим, что функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $x_0 \in (a, b)$ . Точка  $(x_0, f(x_0))$  графика функции  $y = f(x)$  называется *точкой перегиба* этого графика, если существует такая окрестность точки  $x_0$  оси абсцисс, в пределах которой график функции  $f(x)$  слева и справа от точки  $x_0$  имеет разные направления выпуклости (рис. 35).

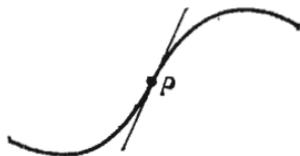


Рис. 35

Если  $x_0$  — абсцисса точки перегиба графика функции  $y = f(x)$ , то вторая производная равна нулю или не существует. Точки, в которых  $f''(x) = 0$  или  $f''(x)$  не существует, называются *критическими точками II рода*.

Если  $x_0$  — критическая точка II рода и при произвольном достаточно малом  $h > 0$  выполняются неравенства  $f''(x_0 - h) < 0$ ,  $f''(x_0 + h) > 0$  (или неравенства  $f''(x_0 - h) > 0$ ,  $f''(x_0 + h) < 0$ ), то точка кривой  $y = f(x)$  с абсциссой  $x_0$  является точкой перегиба.

Если же  $f''(x_0 - h)$  и  $f''(x_0 + h)$  имеют одинаковые знаки, то точка кривой  $y = f(x)$  с абсциссой  $x_0$  точкой перегиба не является.

1080. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции  $y = x^5 + 5x - 6$ .

$\Delta$  Имеем  $y' = 5x^4 + 5$ ,  $y'' = 20x^3$ . Если  $x < 0$ , то  $y'' < 0$  и кривая выпукла; если же  $x > 0$ , то  $y'' > 0$  и кривая вогнута. Итак, кривая выпукла в промежутке  $(-\infty, 0)$  и вогнута в промежутке  $(0, +\infty)$ .  $\blacktriangle$

1081. Найти экстремумы функции  $y = (x+1)^2(x-2)$  и точки перегиба ее графика.

$\Delta$  Найдем первую производную:  $y' = 3(x^2 - 1)$ . Корни первой производной:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ . Найдем вторую производную:  $y'' = 6x$ . Вычислим значения второй производной в стационарных точках:  $y''(-1) = -6 < 0$ , т. е.  $y_{\max} = 0$ ;  $y''(1) = 6 > 0$ , т. е.  $y_{\min} = -4$ .

Найдем точку перегиба, для чего вторую производную приравняем нулю:  $6x = 0$ , т. е.  $x = 0$ . Слева от точки  $x = 0$  имеем  $y''(0-h) < 0$  — кривая выпукла, а справа от точки  $x = 0$  имеем  $y''(0+h) > 0$  — кривая вогнута; следовательно, точка с абсциссой  $x = 0$  является точкой перегиба;  $y_{т.пер} = -2$ .  $\blacktriangle$

1082. Найти точки перегиба кривой  $y = (x-5)^{5/3} + 2$ .

$\Delta$  Находим  $y' = \frac{5}{3}(x-5)^{2/3}$ ,  $y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}$ . Вторая производная не обращается в нуль ни при каких значениях  $x$  и не существует в точке  $x = 5$ . Значение  $x = 5$  является абсциссой точки перегиба, так как  $y''(5-h) < 0$ ,  $y''(5+h) > 0$ . Таким образом,  $(5; 2)$  — точка перегиба.  $\blacktriangle$

1083. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой  $y = xe^x$ .

1084. Найти точки перегиба кривой  $y = (x-4)^5 + 4x + 4$ .

1085. Найти точки перегиба кривой  $y = (x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$ .

1086. Найти точки перегиба кривой  $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$ .

5. Асимптоты. Прямая  $L$  называется *асимптотой* кривой  $y = f(x)$ , если расстояние точки  $M(x; y)$  кривой от прямой  $L$  стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат (т. е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

Прямая  $x = a$  является *вертикальной асимптотой* кривой  $y = f(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

Прямая  $y = b$  является *горизонтальной асимптотой* кривой  $y = f(x)$ , если существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  или  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ .

Прямая  $y = kx + b$  является *наклонной асимптотой* кривой  $y = f(x)$ , если существуют пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$$

или

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx].$$

1087. Найти асимптоты кривой  $y = \sqrt{x^3/(x-2)}$ .

$\Delta$  Функция определена в интервалах  $(-\infty, 0)$  и  $(2, +\infty)$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \sqrt{x^3/(x-2)} = +\infty$ , то прямая  $x = 2$  является вертикальной асимптотой кривой.

Горизонтальных асимптот кривая не имеет, так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3/(x-2)}$  и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^3/(x-2)}$  не являются конечными величинами.

Определим, существуют ли наклонные асимптоты. Находим:

$$\begin{aligned}
 1) \quad k_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1, \\
 b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}} \left( 1 + \sqrt{1-\frac{2}{x}} \right)} = 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, существует правая наклонная асимптота  $y = x + 1$ ;

$$2) \quad k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x/(x-2)}}{-1}$$

(разделили числитель и знаменатель на положительную величину  $-x$ ), т. е.

$$\begin{aligned}
 k_2 &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = -1, \\
 b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2 x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = \\
 &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{-x} - \sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x} + \sqrt{2-x})} = -1.
 \end{aligned}$$

Итак, существует левая наклонная асимптота  $y = -x - 1$  (рис. 36). ▲

1088. Найти асимптоты кривой  $y = x + 2 \operatorname{arctg} x$ .

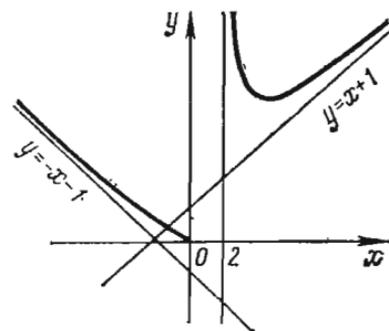


Рис. 36

△ Нетрудно видеть, что вертикальных и горизонтальных асимптот кривая не имеет. Ищем наклонные асимптоты:

$$\begin{aligned}
 1) \quad k_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 \operatorname{arctg} x}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x} \right) = 1, \\
 b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 \operatorname{arctg} x - x) = 2(\pi/2) = \pi; \\
 & y = x + \pi \text{ — правая наклонная асимптота;} \\
 2) \quad k_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2 \operatorname{arctg} x}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x} \right) = 1. \\
 b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 \operatorname{arctg} x - x) = 2(-\pi/2) = -\pi; \\
 & y = x - \pi \text{ — левая наклонная асимптота. } \blacktriangle
 \end{aligned}$$

1089. Найти асимптоты кривой  $y = x^2 e^{-x}$ .

△ Очевидно, вертикальных асимптот нет. Если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y \rightarrow 0$ . Следовательно, ось  $Ox$  является горизонтальной асимптотой данной кривой. Определим, существует ли наклонная асимптота:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Таким образом, имеется только горизонтальная асимптота  $y = 0$ . ▲

1090. Найти асимптоты кривой  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ .

△ Если  $x \rightarrow -2$ , то  $y \rightarrow \infty$ , т. е.  $x = -2$  — вертикальная асимптота. Найдем неvertикальные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right] = -4.$$

Таким образом, наклонная асимптота имеет уравнение  $y = x - 4$ . ▲

Найти асимптоты кривых:

1091.  $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$ . 1092.  $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$ . 1093.  $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$ .

1094.  $y = 0,5x + \operatorname{arctg} x$ . 1095.  $y = -x \operatorname{arctg} x$ .

6. Построение графиков функций по характерным точкам. При построении графика функции  $y = f(x)$  полезно выяснить его характерные особенности. Для этого надо:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на четность и нечетность;
- 3) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
- 4) исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва (если они существуют) и установить характер разрыва; найти асимптоты кривой  $y = f(x)$ ;
- 5) найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы;
- 6) найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба.

1096. Построить график функции  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ .

△ 1) Область определения функции — вся ось  $Ox$ , за исключением точки  $x = 0$ , т. е.  $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

2) Функция не является четной или нечетной.

3) Найдем точки пересечения графика с осью  $Ox$ , имеем  $\frac{x^3 + 4}{x^2} = 0$ ;  $x = -\sqrt[3]{4}$ .

4) Точка разрыва  $x = 0$ , причем  $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$ ; следовательно,  $x = 0$  (ось  $Oy$ ) является вертикальной асимптотой графика.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

Наклонная асимптота имеет уравнение  $y = x$ .

5) Найдем экстремумы функции и интервалы возрастания и убывания. Имеем  $y' = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$ ;  $y' = 0$  при  $x = 2$ ;  $y' = \infty$  при  $x = 0$  (точка разрыва функции). Точки  $x = 0$  и  $x = 2$  разбивают числовую ось на промежутки  $(-\infty, 0)$ ,

(0,2) и  $(2, +\infty)$ , причем  $y' > 0$  в промежутках  $(-\infty, 0)$  и  $(2, +\infty)$  (функция возрастает) и  $y' < 0$  в промежутке  $(0, 2)$  (функция убывает).

Далее, находим  $y'' = 24/x^4$ ;  $y''(2) > 0$ , следовательно,  $x=2$  — точка минимума;  $y_{\min} = 3$ .

6) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба. Так как

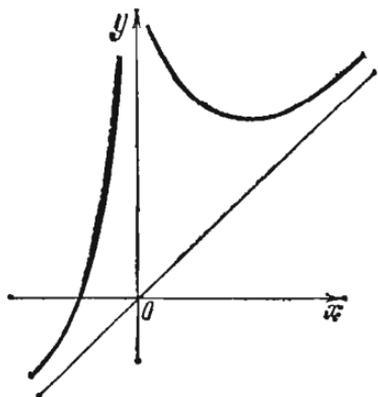


Рис. 37

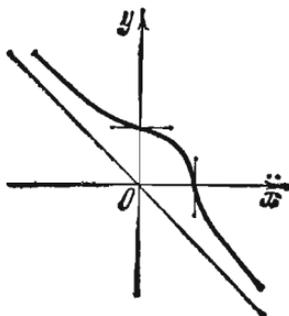


Рис. 38

$y' > 0$ , то график функции всюду вогнут. Точек перегиба кривая не имеет. Используя полученные данные, строим график функции (рис. 37). ▲

1097. Построить график функции  $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ .

△ 1) Область определения — вся ось  $Ox$ , т. е.  $D(y) = (-\infty, +\infty)$ .

2) Функция не является четной или нечетной.

3) Точки пересечения с осями координат: если  $x=0$ , то  $y=1$ ; если  $y=0$ , то  $x=1$ .

4) Точек разрыва и вертикальных асимптот нет. Имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - x \sqrt[3]{1-x^3} + x^2} = 0.$$

Итак, наклонная асимптота  $y = -x$ .

5) Находим  $y' = -x^2/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}$ ;  $y' = 0$  при  $x=0$ ;  $y' = \infty$  при  $x=1$ . В окрестности критических точек производная не меняет знака, экстремумов нет. Так как  $y' < 0$  при всех  $x \neq 0$ , то функция убывает на всей числовой оси.

6) Находим  $y'' = -2x/\sqrt[3]{(1-x^3)^5}$ ;  $y'' = 0$  при  $x=0$ ;  $y'' = \infty$  при  $x=1$ ;  $y''(-h) > 0$ ;  $y''(h) < 0$ ,  $y''(1-h) < 0$ ;  $y''(1+h) > 0$ . Следовательно, в промежутках  $(-\infty, 0)$  и  $(1, +\infty)$  кривая вогнута, а в промежутке  $(0, 1)$  — выпукла. Точки перегиба имеют координаты  $(0; 1)$  и  $(1; 0)$ .

Используя полученные данные, строим искомый график (рис. 38). ▲

Построить графики функций:

1098.  $y = \sin^2 x$ . 1099.  $y = 3\sqrt[2]{x} - x$ .

1100.  $y = \ln x - \ln(x-1)$ . 1101.  $y = \ln \frac{x}{x-1}$ .

1102.  $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ . 1103.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

1104.  $y = 16x(x-1)^3$ . 1105.  $y = (x-1)\sqrt{x}$ .

$$1106. y = x + e^{-x}. \quad 1107. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$1108. y = e^{2x-x^2}. \quad 1109. y = \frac{x^3}{(x-2)^2}.$$

### § 3. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ ЛИНИИ

Углом смежности дуги  $AB$  плоской линии называется угол  $\varphi$  между касательными, проведенными в точках  $A$  и  $B$  этой линии (рис. 39). Отношение угла смежности к длине  $s$  дуги  $AB$  называется *средней кривизной* дуги  $AB$ , т. е.  $k_{\text{ср}} = \varphi/s$ .

Кривизной данной линии в точке  $A$  называется предел средней кривизны дуги  $AB$  при  $B \rightarrow A$ , т. е.  $k = \lim_{s \rightarrow 0} (\varphi/s)$ .

Кривизна окружности  $k_{\text{окр}} = 1/a$ , где  $a$  — радиус окружности; кривизна прямой равна нулю.

Если линия задана уравнением  $y = f(x)$ , то ее кривизна вычисляется по формуле

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Если линия задана параметрическими уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , то

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

где  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ .

Если линия задана в полярных координатах уравнением  $\rho = f(\theta)$ , то

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho\rho'' - \rho\rho'^2|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}},$$

где  $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ ,  $\rho'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}$ .

Радиусом кривизны называется величина, обратная кривизне:  $R = 1/|k|$ .

Окружностью кривизны данной линии в ее точке  $A$  называется предельное положение окружности, проходящей через три точки  $A, B, C$  кривой, когда  $B \rightarrow A$  и  $C \rightarrow A$ .

Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны. Центр окружности кривизны называется *центром кривизны* и находится на нормали к линии, проведенной в точке  $A$  в сторону вогнутости этой линии.

Координаты  $\xi$  и  $\eta$  центра кривизны линии  $y = f(x)$  вычисляются по формулам

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Эволютой линии называется множество ее центров кривизны. Формулы для координат центра кривизны можно рассматривать как параметрические уравнения эволюты (где параметром является абсцисса  $x$  исходной линии).

1110. Найти кривизну линии  $y = -x^3$  в точке с абсциссой  $x = 1/2$ .

△ Имеем  $y' = -3x^2$ ,  $y'' = -6x$ . При  $x = 1/2$  эти производные принимают значения  $y' = -3/4$ ,  $y'' = -3$  и

$$k = \left| \frac{-3}{(1+9/16)^{3/2}} \right| = \frac{3}{125/64} = \frac{192}{125}. \quad \blacktriangle$$

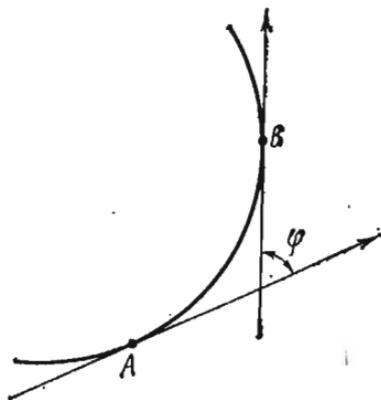


Рис. 39

1111. Найти кривизну в любой точке циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  
 $y = a(1 - \cos t)$ .

$$\begin{aligned} \Delta \quad \dot{x} &= a(1 - \cos t), \quad \ddot{x} = a \sin t, \quad \dot{y} = a \sin t, \quad \ddot{y} = a \cos t, \\ \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} &= a^2(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t) = -a^2(1 - \cos t), \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t), \\ k &= \left| \frac{-a^2(1 - \cos t)}{2^{3/2} a^3 (1 - \cos t)^{3/2}} \right| = \frac{1}{2^{3/2} a (1 - \cos t)^{1/2}}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1112. Найти координаты центра кривизны линии  $x^3 + y^4 = 2$   
 в точке  $M(1; 1)$ .

$\Delta$  Продифференцируем уравнение данной линии дважды:

$$3x^2 + 4y^3 y' = 0 (*), \quad 6x + 12y^2 y'^2 + 4y^3 y'' = 0 (**).$$

Так как  $x=1$ ,  $y=1$ , то из уравнения (\*) находим  $y' = -3/4$ , а из уравнения (\*\*) получаем  $6 + 27/4 + 4y'' = 0$ , т. е.  $y'' = -51/16$ . Тогда

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{(1 + y'^2) y'}{y''} = 1 - \frac{(1 + 9/16)(-3/4)}{-51/16} = \frac{43}{68}, \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} = 1 + \frac{1 + 9/16}{-51/16} = \frac{26}{51}, \end{aligned}$$

т. е.  $C(43/68, 26/51)$ .  $\blacktriangle$

1113. Составить уравнение эволюты параболы  $2y^2 = 2x + 1$ .

$\Delta$  Продифференцируем дважды уравнение параболы:

$$4yy' = 2, \quad y' = \frac{1}{2y}; \quad 4y'^2 + 4yy'' = 0, \quad y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{4y^3}.$$

Определяем координаты центра кривизны:

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{(1 + y'^2) \cdot y'}{y''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{\left(1 + \frac{1}{4y^2}\right) \cdot \frac{1}{2y}}{-1/(4y^3)} = 3y^2, \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y + \frac{1 + \frac{1}{4y^2}}{-1/(4y^3)} = y - 4y^3 - y = -4y^3. \end{aligned}$$

Получаем уравнение эволюты в параметрической форме:  $\xi = 3y^2$ ,  $\eta = -4y^3$ .  
 Исключив параметр  $y$ , найдем уравнение эволюты в явном виде:  $\eta^2 = 16\xi^3/27$ .  $\blacktriangle$

1114. Найти радиус кривизны эллипса  $x^2/25 + y^2/9 = 1$  в точке  $M(0; 3)$ .

1115. Найти радиус кривизны в любой точке кардиоиды  $\rho = a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ ).

1116. Найти кривизну линии  $x = e^t \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$  в точке  $t = 1$ .

1117. Найти координаты центра кривизны линии  $y = 1/x$  в точке  $M(1; 1)$ .

1118. Составить уравнение эволюты кривой  $x = t \sin t + \cos t$ ,  
 $y = t \sin t - \sin t$ .

#### § 4. ПОРЯДОК КАСАНИЯ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Если кривые  $y=f(x)$  и  $y=\varphi(x)$  имеют общую точку  $M(x_0; y_0)$ , т. е.  $y_0 = f(x_0) = \varphi(x_0)$ , и касательные к указанным кривым, проведенные в точке  $M(x_0; y_0)$ , не совпадают, то говорят, что кривые  $y=f(x)$  и  $y=\varphi(x)$  *пересекаются* в точке  $M$ . Условие пересечения этих кривых в точке  $M(x_0; y_0)$  таково:

$$f(x_0) = \varphi(x_0), f'(x_0) \neq \varphi'(x_0).$$

Если же эти кривые имеют общую точку  $M(x_0; y_0)$  и касательные в этой точке к обеим кривым совпадают, то говорят, что кривые *касаются* в точке  $M$ . Условие касания кривых в точке  $M(x_0; y_0)$  таково:

$$f(x_0) = \varphi(x_0), f'(x_0) = \varphi'(x_0).$$

Если, наконец,

$$f(x_0) = \varphi(x_0), f'(x_0) = \varphi'(x_0), f''(x_0) = \varphi''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$

но  $f^{(n+1)}(x_0) \neq \varphi^{(n+1)}(x_0)$ , то принято говорить, что в точке  $M(x_0; y_0)$  кривые  $y=f(x)$  и  $y=\varphi(x)$  имеют *касание  $n$ -го порядка*.

Если  $n \geq 2$ , то кривые  $y=f(x)$  и  $y=\varphi(x)$  в точке  $M(x_0; y_0)$  имеют не только общую касательную, но и одинаковую кривизну.

**1119.** Какой порядок касания имеют кривые  $y=e^{-x}$  и  $xy=1/e$  в точке  $x=1$ ?

$\Delta$  Пусть  $f(x)=e^{-x}$ ,  $\varphi(x)=1/(ex)$ . Найдем последовательные производные этих функций:  $f'(x)=-e^{-x}$ ,  $f''(x)=e^{-x}$ ,  $\varphi'(x)=-1/(ex^2)$ ,  $\varphi''(x)=2/(ex^3)$ , ... Теперь вычислим значения данных функций и их производных в точке  $x=1$ ; имеем  $f(1)=e^{-1}$ ,  $f'(1)=-e^{-1}$ ,  $f''(1)=e^{-1}$ ;  $\varphi(1)=e^{-1}$ ,  $\varphi'(1)=-e^{-1}$ ,  $\varphi''(1)=2e^{-1}$ . Таким образом,  $f(1)=\varphi(1)$ ,  $f'(1)=\varphi'(1)$ , но  $f''(1) \neq \varphi''(1)$ . Следовательно, указанные кривые имеют касание первого порядка.  $\blacktriangle$

**1120.** При каком выборе параметра  $a$  кривая  $y=e^{ax}$  имеет в точке  $x=0$  касание первого порядка с прямой  $y=2x+1$ ?

$\Delta$  Пусть  $f(x)=e^{ax}$  и  $\varphi(x)=2x+1$ . Для того чтобы указанные линии имели в точке  $x=0$  касание первого порядка, необходимо выполнение равенств  $f(0)=\varphi(0)$  и  $f'(0)=\varphi'(0)$ , т. е.  $e^{a \cdot 0}=2 \cdot 0+1$  и  $ae^0=2$ . Отсюда  $a=2$ .  $\blacktriangle$

Определить порядок касания заданных кривых:

**1121.**  $y=1+\cos x$  и  $y=2-x^3$  в точке  $x=0$ .

**1122.**  $y=\sin^2 x$  и оси  $Ox$  в точке  $x=0$ .

**1123.** Цепной линии  $y=(e^x+e^{-x})/2$  и параболы  $y=1+0,5x^2$  в точке  $x=0$ .

**1124.** Окружностей  $x^2+y^2=2y$  и  $x^2+y^2=4y$  в точке  $x=0$ .

**1125.** Параболы  $y=x^4$  и оси  $Ox$  в точке  $x=0$ .

**1126.**  $y=\ln(1+x)$  и параболы  $y=x-x^2$  в точке  $x=0$ .

#### § 5. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА И ЕЕ ПРОИЗВОДНАЯ

Пространственную кривую можно задать параметрическими уравнениями  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$  или векторным уравнением

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Последнее уравнение определяет переменный вектор  $\mathbf{r}$  как *вектор-функцию* скалярного аргумента  $t$ , т. е.  $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ . Кривая, заданная уравнением  $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ , называется *годографом* переменного вектора  $\mathbf{r}$ .

Производной вектор-функции  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  по скалярному аргументу  $t$  называется новая вектор-функция, определяемая равенством

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Производная вектор-функции может быть вычислена по формуле

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}.$$

Производная  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  есть вектор, направленный по касательной к годографу вектора  $\mathbf{r}$  в сторону возрастания параметра  $t$ .

Если  $t$  есть время, то  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  — вектор скорости конца вектора  $\mathbf{r}$ , а  $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$  — вектор ускорения.

Основные правила дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента:

$$1^\circ. \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_3}{dt};$$

$$2^\circ. \frac{d\mathbf{c}}{dt}; \text{ где } \mathbf{c} \text{ — постоянный вектор;}$$

$$3^\circ. \frac{d}{dt} (\lambda \mathbf{r}) = \lambda \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \frac{d\lambda}{dt}; \text{ где } \lambda = \lambda(t) \text{ — скалярная функция от } t;$$

$$4^\circ. \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt};$$

$$5^\circ. \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}.$$

Уравнения касательной к пространственной кривой  $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  в точке  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  записываются в виде

$$(x - x_0)/\dot{x}_0 = (y - y_0)/\dot{y}_0 = (z - z_0)/\dot{z}_0,$$

где  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ ,  $\dot{x}_0 = x'(t_0)$ ,  $\dot{y}_0 = y'(t_0)$ ,  $\dot{z}_0 = z'(t_0)$ .

Нормальной плоскостью называется плоскость, проходящая через точку касания и перпендикулярная касательной. Уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$\dot{x}_0(x - x_0) + \dot{y}_0(y - y_0) + \dot{z}_0(z - z_0) = 0.$$

Дифференциал дуги пространственной кривой вычисляется по формуле

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

1127. Какая линия является годографом вектор-функции  $\mathbf{r} = a\mathbf{i} \cos t + a\mathbf{j} \sin t + ct\mathbf{k}$ ?

△ Эта линия имеет параметрические уравнения  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = ct$ , определяющие винтовую линию. ▲

Найти годографы вектор-функций:

$$1128. \mathbf{r} = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} + \mathbf{k} \sin t. \quad 1129. \mathbf{r} = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

$$1130. \mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}. \quad 1131. \mathbf{r} = \mathbf{i} \operatorname{ch} t + \mathbf{j} \operatorname{sh} t.$$

1132. Найти производную скалярного произведения векторов  $\mathbf{r}_1 = 3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  и  $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

△ Имеем

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{dt} = \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \mathbf{r}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} =$$

$$= (3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot 3\mathbf{i} = -6 + 6 = 0.$$

Полученный результат объясняется тем, что скалярное произведение  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 5$ , т. е. является постоянной величиной.  $\blacktriangle$

1133. Показать, что векторы  $\mathbf{r} = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}$  и  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  перпендикулярны.

$\Delta$  Имеем  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t$ . Находим скалярное произведение:

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\cos t \sin t + \sin t \cos t + 1 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно,  $\mathbf{r} \perp \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ .  $\blacktriangle$

1134. Найти производную вектор-функции  $\mathbf{r} = \mathbf{i} \operatorname{ch}^2 t + \mathbf{j} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \mathbf{k} \operatorname{sh}^2 t$ .

1135.  $\mathbf{r} = \mathbf{i} \operatorname{sh} t + \mathbf{j} \operatorname{ch} t + \mathbf{k} \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 3 \operatorname{sh}^2 t}$ . Найти  $\frac{d(\mathbf{r}^2)}{dt}$ .

1136.  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ ,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}t$ . Найти  $\frac{d(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{dt}$ .

1137. Составить уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой  $x = a \sin^2 t$ ,  $y = b \sin t \cos t$ ,  $z = c \cos^2 t$  в точке  $t = \pi/4$ .

$\Delta$  Находим  $\dot{x} = a \sin 2t$ ,  $\dot{y} = b \cos 2t$ ,  $\dot{z} = -c \sin 2t$ . При  $t = \pi/4$  имеем:  $x_0 = a/2$ ,  $y_0 = b/2$ ,  $z_0 = c/2$ ,  $\dot{x}_0 = a$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ ,  $\dot{z}_0 = -c$ .

Уравнения касательной:

$$(x - a/2)/a = (y - b/2)/0 = (z - c/2)/(-c).$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$a \left( x - \frac{a}{2} \right) - c \left( z - \frac{c}{2} \right) = 0, \text{ или } ax - cz - \frac{a^2 - c^2}{2} = 0. \blacktriangle$$

1138. Составить уравнения касательной и нормальной плоскости к винтовой линии  $\mathbf{r} = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \sqrt{3} t \mathbf{k}$  в точке  $t = \pi/2$ .

1139. На кривой  $x = t + 1$ ,  $y = t^2 - 1$ ,  $z = t^3$  найти точку, к которой касательная параллельна плоскости  $x + 2y + z - 1 = 0$ .

1140. Какой угол образует с плоскостью  $xOy$  касательная в винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 2\sqrt{2}t$  в точке  $t = \pi/4$ ?

1141. Составить уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой  $x = (1/\sqrt{2})e^t \sin t$ ,  $y = 1$ ,  $z = (1/\sqrt{2})e^t \cos t$  в точке  $t = 0$ .

1142. Составить уравнения касательной к кривой  $x = e^t (\cos t + \sin t)$ ,  $y = e^t (\sin t - \cos t)$ ,  $z = e^t$  в точке  $t = 0$ .

1143. Составить уравнения касательной к кривой  $\mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} + t^4 \mathbf{k}$  в точке  $t = 1$ .

1144. Показать, что кривые  $\mathbf{r} = (u + 1)\mathbf{i} + u^2 \mathbf{j} + (2u - 1)\mathbf{k}$  и  $\mathbf{r} = 2v^2 \mathbf{i} + (3v - 2)\mathbf{j} + v^3 \mathbf{k}$  пересекаются, и определить угол между кривыми в точке их пересечения.

1145. Составить уравнения винтовой линии, если радиус основания цилиндра  $R = 4$ , шаг  $h = 6\pi$ , и найти дифференциал ее дуги.

$\Delta$  Уравнения винтовой линии имеют вид  $x = 4 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t$ ,  $z = 3t$ , так как  $z = h$  при  $t = 2\pi$ . Продифференцируем эти уравнения:  $\dot{x} = -4 \sin t$ ,  $\dot{y} = 4 \cos t$ ,

$z=3$ . Следовательно, дифференциал дуги равен

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{16 \sin^2 t + 16 \cos^2 t + 9} dt = \\ = \sqrt{16(\sin^2 t + \cos^2 t) + 9} dt = 5 dt. \blacktriangle$$

1146. Найти дифференциал дуги кривой  $x = a \cos^2 t$ ,  $y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin t \cos t$ ,  $z = b \sin^2 t$ .

1147. При каком шаге  $h$  длина дуги одного витка винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = ct$  равна  $4\pi$ ?

● Воспользоваться тем, что при разворачивании цилиндра на плоскость один виток винтовой линии превращается в отрезок прямой.

1148. Уравнение движения имеет вид  $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} \cos t + 3\mathbf{j} \sin t + 4t\mathbf{k}$ , где  $t$  — время. Определить скорость и ускорение движения в произвольный момент времени.

1149. Уравнение движения имеет вид  $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ . Определить скорость и ускорение движения в момент  $t = 1$ .

## § 6. СОПРОВОЖДАЮЩИЙ ТРЕХГРАННИК ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ. КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ

Во всякой точке  $M(x; y; z)$  пространственной кривой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  можно построить три взаимно перпендикулярных единичных вектора (рис. 40); единичный вектор касательный (тангенциальный единичный вектор)

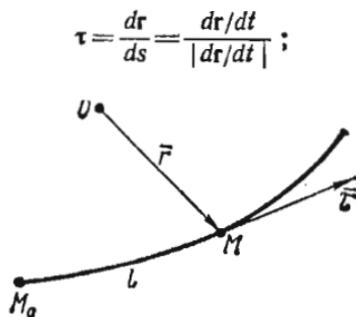


Рис. 40

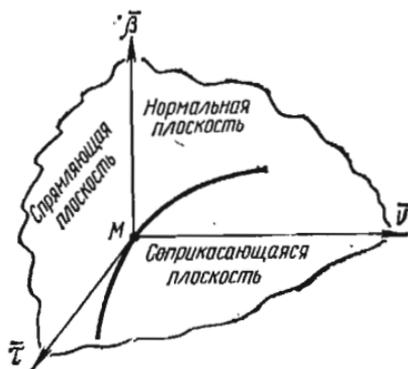


Рис. 41

единичный вектор главной нормали

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{d\boldsymbol{\tau}/ds}{|d\boldsymbol{\tau}/ds|};$$

единичный вектор бинормали

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}.$$

Соответствующие неединичные векторы можно найти по формулам:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ (вектор касательной),}$$

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \text{ (вектор бинормали),}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} \text{ (вектор главной нормали).}$$

Плоскость, содержащая векторы  $\tau$  и  $\nu$ , называется *соприкасающейся* плоскостью; содержащая векторы  $\nu$  и  $\beta$ , — *нормальной* плоскостью; содержащая векторы  $\beta$  и  $\tau$ , — *спрямляющей* плоскостью.

Трехгранник с вершиной в точке  $M$ , образованный соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостями, называется *сопровождающим* трехгранником пространственной кривой (рис. 41).

Кривизной линии в точке  $M$  называется число  $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s}$ , где  $\varphi$  — угол поворота касательной (угол смежности) на дуге  $MN$ ,  $\Delta s$  — длина этой дуги.

Если кривая задана уравнением  $r = r(s)$ , то  $K = \left| \frac{d\tau}{ds} \right|$ .

Если уравнение кривой имеет вид  $r = r(t)$ , то

$$K = \frac{\left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right|}{\left| \frac{dr}{dt} \right|^3}.$$

Кручением кривой в точке  $M$  называется число  $\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta s}$ , где  $\theta$  — угол поворота бинормали (угол смежности второго рода) на дуге  $MN$ .

Если  $r = r(s)$ , то  $\sigma = \mp \left| \frac{d\beta}{ds} \right|$ , где знак «минус» берется в случае одинакового направления векторов  $\frac{d\beta}{ds}$  и  $\nu$ , знак «плюс» — в случае их противоположного направления.

Если  $r = r(t)$ , то

$$\sigma = \frac{\frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} \frac{d^3r}{dt^3}}{\left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right|^2}.$$

1150. Найти тангенциальный вектор  $\tau$  кривой  $r = t^2i + t^3j + t^6k$  в точке  $t = 1$ .

△ Имеем

$$\frac{dr}{dt} = 2ti + 3t^2j + 6t^5k, \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{4t^2 + 9t^4 + 36t^{10}}.$$

При  $t = 1$  находим

$$\frac{dr}{dt} = 2i + 3j + 6k, \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7, \quad \tau = \frac{dr/dt}{|dr/dt|} = \frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k. \quad \blacktriangle$$

1151. Найти тангенциальный единичный вектор кривой  $r = 5ti + 12j \cos t + 12k \sin t$  в произвольной точке.

1152. Найти тангенциальный единичный вектор кривой  $x = t \sin t + \cos t$ ,  $y = t \cos t - \sin t$ ,  $z = t^2 \sqrt{2}$  в точке  $t = \pi/2$ .

1153. Найти вектор  $\tau$  винтовой линии  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = \sqrt{R^2 - a^2}t$ ,  $R > a > 0$  в произвольной точке.

$$\Delta \quad r = a \cos t + a j \sin t + \sqrt{R^2 - a^2}t k, \quad \frac{dr}{dt} = -a i \sin t + a j \cos t + \sqrt{R^2 - a^2} k,$$

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + R^2 - a^2} = R,$$

$$\tau = \frac{dr/dt}{|dr/dt|} = \frac{-a \sin t + a \cos t + \sqrt{R^2 - a^2} k}{R} =$$

$$= -\frac{a \sin t}{R} \mathbf{i} + \frac{a \cos t}{R} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \mathbf{k}. \blacktriangle$$

1154. Найти вектор  $\beta$  винтовой линии в произвольной точке.

$$\Delta \text{ Имеем } \frac{dr}{dt} = -a \sin t + a \cos t + \sqrt{R^2 - a^2} k, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -a \cos t - a \sin t.$$

Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\mathbf{B} = \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2 r}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin t & a \cos t & \sqrt{R^2 - a^2} \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a \sqrt{R^2 - a^2} \sin t \cdot \mathbf{i} - a \sqrt{R^2 - a^2} \cos t \cdot \mathbf{j} + a^2 \mathbf{k};$$

$$|\mathbf{B}| = \left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2 r}{dt^2} \right| = \sqrt{a^2 (R^2 - a^2) \sin^2 t + a^2 (R^2 - a^2) \cos^2 t + a^4} = aR.$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{a \sqrt{R^2 - a^2} \mathbf{i} \sin t - a \sqrt{R^2 - a^2} \mathbf{j} \cos t + a^2 \mathbf{k}}{aR} =$$

$$= \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \sin t \cdot \mathbf{i} - \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \cos t \cdot \mathbf{j} + \frac{a}{R} \mathbf{k}. \blacktriangle$$

1155. Найти вектор  $\nu$  винтовой линии в произвольной точке.

$\Delta$  Так как  $\nu = \beta \times \tau$ , то

$$\nu = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \sin t & -\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \cos t & \frac{a}{R} \\ -\frac{a \sin t}{R} & \frac{a \cos t}{R} & \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \end{vmatrix} = -\mathbf{i} \cos t - \mathbf{j} \sin t. \blacktriangle$$

1156. Найти кривизну  $K$  винтовой линии.

$\Delta$  В задачах 1153 и 1154 было найдено, что  $\left| \frac{dr}{dt} \right| = R$ ,  $\left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2 r}{dt^2} \right| = aR$ ; поэтому

$$K = \frac{\left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2 r}{dt^2} \right|}{\left| \frac{dr}{dt} \right|^3} = \frac{aR}{R^3} = \frac{a}{R^2}. \blacktriangle$$

1157. Найти кручение  $\sigma$  винтовой линии.

$\Delta$  Имеем

$$\frac{dr}{dt} = -a \sin t + a \cos t + \sqrt{R^2 - a^2} k,$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -a \cos t - a \sin t, \quad \frac{d^3 r}{dt^3} = a \sin t - a \cos t.$$

Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} \frac{d^3r}{dt^3} = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & \sqrt{R^2 - a^2} \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 \sqrt{R^2 - a^2}.$$

В задаче 1154 было найдено, что  $\left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right| = aR$ . Следовательно,

$$\left| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right|^2 = a^2 R^2. \text{ Таким образом, } \sigma = \frac{a^2 \sqrt{R^2 - a^2}}{a^2 R^2} = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R^2}. \blacktriangle$$

**1158.** Составить уравнение соприкасающейся плоскости винтовой линии в произвольной точке.

$\Delta$  Эта плоскость проходит через точку  $(a \cos t; a \sin t; \sqrt{R^2 - a^2} t)$  и перпендикулярна вектору бинормали  $\beta = \frac{\sqrt{R^2 - a^2} \sin t}{R} i - \frac{\sqrt{R^2 - a^2} \cos t}{R} j + \frac{a}{R} k$ . Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости таково:

$$\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \sin t (X - a \cos t) - \frac{\sqrt{R^2 - a^2} \cos t}{R} (Y - a \sin t) + \frac{a}{R} (Z - \sqrt{R^2 - a^2} t) = 0,$$

$$\text{или } X \sqrt{R^2 - a^2} \sin t - Y \sqrt{R^2 - a^2} \cos t + aZ - a \sqrt{R^2 - a^2} t = 0. \blacktriangle$$

**1159.** Составить уравнение спрямляющей плоскости винтовой линии в произвольной точке.

$\Delta$  Эта плоскость проходит через точку  $(a \cos t; a \sin t; \sqrt{R^2 - a^2} t)$  перпендикулярно вектору главной нормали  $\nu = -i \cos t - j \sin t$ . Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$-(X - a \cos t) \cos t - (Y - a \sin t) \sin t = 0, \text{ т. е. } X \cos t + Y \sin t - a = 0. \blacktriangle$$

**1160.** Составить уравнение нормальной плоскости винтовой линии в произвольной точке.

$\Delta$  Эта плоскость перпендикулярна вектору касательной  $\tau = -\frac{a \sin t}{R} i + \frac{a \cos t}{R} j + \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} k$  и проходит через точку  $(a \cos t; a \sin t; \sqrt{R^2 - a^2} t)$ .

Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$-\frac{a \sin t}{R} (X - a \cos t) + \frac{a \cos t}{R} (Y - a \sin t) + \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} (Z - \sqrt{R^2 - a^2} t) = 0,$$

$$\text{или } X a \sin t - Y a \cos t - Z \sqrt{R^2 - a^2} + (R^2 - a^2) t = 0. \blacktriangle$$

**1161.** Найти вектор  $\tau$  кривой  $x = 6t, y = 3t^2, z = t^3$  в точке  $t = 1$ .

**1162.** Найти вектор  $\beta$  той же кривой при  $t = 1$ .

**1163.** Найти вектор  $\nu$  той же кривой при  $t = 1$ .

**1164.** Найти кривизну  $K$  той же кривой при  $t = 1$ .

**1165.** Найти кручение  $\sigma$  той же кривой при  $t = 1$ .

**1166.** Составить уравнение соприкасающейся плоскости той же кривой при  $t = 1$ .

**1167.** Составить уравнение спрямляющей плоскости той же кривой при  $t = 1$ .

**1168.** Составить уравнение нормальной плоскости той же кривой при  $t = 1$ .

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ

Пусть даны два непустых множества  $D$  и  $U$ . Если каждой паре действительных чисел  $(x; y)$ , принадлежащей множеству  $D$ , по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент  $u$  из  $U$ , то говорят, что на множестве  $D$  задана функция  $f$  (или отображение) со множеством значений  $U$ . При этом пишут  $D \xrightarrow{f} U$ , или  $f: D \rightarrow U$ , или  $u = f(x, y)$ . Множество  $D$  называется областью определения функции, а множество  $U$ , состоящее из всех чисел вида  $f(x, y)$ , где  $(x; y) \in D$ , — множеством значений функции. Значение функции  $u = f(x, y)$  в точке  $M(x_0; y_0)$  называется частным значением функции и обозначается  $f(x_0, y_0)$  или  $f(M)$ .

Область определения функции  $u = f(x, y)$  в простейших случаях представляет собой либо часть плоскости, ограниченную замкнутой кривой, причем точки этой кривой (границы области) могут принадлежать или не принадлежать области определения, либо всю плоскость, либо, наконец, совокупность нескольких частей плоскости  $xOy$ . Геометрическим изображением функции  $u = f(x, y)$  в прямоугольной системе координат  $Oxuy$  (графиком функции) является некоторая поверхность.

Аналогично определяется функция любого конечного числа независимых переменных  $u = f(x, y, z, \dots, t)$ .

Линией уровня функции  $u = f(x, y)$  называется линия  $f(x, y) = C$  на плоскости  $xOy$ , в точках которой функция сохраняет постоянное значение  $u = C$ .

Поверхностью уровня функции  $u = f(x, y, z)$  называется поверхность  $f(x, y, z) = C$ , в точках которой функция сохраняет постоянное значение  $u = C$ .

**1169.** Найти область определения функции  $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ .

△ Функция  $u$  принимает действительные значения при условии  $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$  т. е.  $x^2 + y^2 \leq a^2$ . Областью определения данной функции является круг радиуса  $a$  с центром в начале координат, включая граничную окружность. ▲

**1170.** Найти область определения функции  $u = \arcsin(x/y^2)$ .

△ Эта функция определена, если  $y \neq 0$  и  $-1 \leq x/y^2 \leq 1$ , т. е.  $-y^2 \leq x \leq y^2$ . Областью определения функции является часть плоскости, заключенная между двумя параболой  $y^2 = x$  и  $y^2 = -x$ , за исключением точки  $O(0; 0)$ . ▲

**1171.** Найти область определения функции  $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$ .

△ Данная функция зависит от трех переменных и принимает действительные значения при  $2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6 > 0$ , т. е.  $x^2/1 + y^2/2 - z^2/3 < -1$ . Областью определения функции является часть пространства, заключенная внутри полостей двуполостного гиперболоида. ▲

**1172.** Найти линии уровня функции  $u = x^2 + y^2$ .

△ Уравнение семейства линий уровня имеет вид  $x^2 + y^2 = C$  ( $C > 0$ ). Придавая  $C$  различные действительные значения, получим концентрические окружности с центром в начале координат. ▲

1173. Найти поверхности уровня функции  $u = x^2 + z^2 - y^2$ .

△ Уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид  $x^2 + z^2 - y^2 = C$ . Если  $C = 0$ , то получаем  $x^2 + z^2 - y^2 = 0$  — конус; если  $C > 0$ , то  $x^2 + z^2 - y^2 = C$  — семейство однополостных гиперболоидов, если  $C < 0$ , то  $x^2 + z^2 - y^2 = C$  — семейство двуполостных гиперболоидов. ▲

Найти области определения функций:

1174.  $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ .

1175.  $u = 1/\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

1176.  $u = \arcsin(x + y)$ .

1177.  $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$ .

1178.  $u = \ln(-x + y)$ .

1179.  $u = y + \sqrt{x}$ .

1180.  $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ .

1181.  $u = \arcsin(z/\sqrt{x^2 + y^2})$ .

1182.  $u = 1/\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$ .

1183.  $u = \sqrt{x + y + z}$ .

Найти линии уровня функций:

1184.  $z = 2x + y$ .

1185.  $z = x/y$ .

1186.  $z = \ln\sqrt{y/x}$ .

1187.  $z = \sqrt{x/y}$ .

1188.  $z = e^{xy}$ .

Найти поверхности уровня функций:

1189.  $u = x + y + 3z$ . 1190.  $u = x^2 + y^2 + z^2$ . 1191.  $u = x^2 - y^2 - z^2$ .

## § 2. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Частные производные первого порядка. Частной производной от функции  $z = f(x, y)$  по независимой переменной  $x$  называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y),$$

вычисленный при постоянном  $y$ .

Частной производной по  $y$  называется конечный предел

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

вычисленный при постоянном  $x$ .

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

1192.  $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$ . Найти  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

△ Рассматривая  $y$  как постоянную величину, получим  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1$ .

Рассматривая  $x$  как постоянную, найдем  $\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2$ . ▲

1193.  $z = e^{x^2 + y^2}$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

△  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)'_x = 2xe^{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)'_y = 2ye^{x^2 + y^2}$ . ▲

1194.  $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$ . Найти  $\frac{\partial \rho}{\partial u}$  и  $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$ .

$$\Delta \frac{\partial \rho}{\partial u} = 4u^3 \cos^2 \varphi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = u^4 \cdot 2 \cos \varphi (-\sin \varphi) = -u^4 \sin 2\varphi. \blacktriangle$$

1195. Показать, что функция  $z = y \ln(x^2 - y^2)$  удовлетворяет уравнению  $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ .

$\Delta$  Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y} \left[ \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \right] = \frac{2y}{x^2 - y^2} - \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} = \frac{z}{y^2}.$$

Получаем тождество, т. е. функция  $z$  удовлетворяет данному уравнению.  $\blacktriangle$

1196. Показать, что функция  $z = y^{y/x} \sin(y/x)$  удовлетворяет уравнению  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = yz$ .

$\Delta$  Находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y^{y/x} \cdot \ln y \left( -\frac{y}{x^2} \right) \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left[ y^{y/x} \cdot \ln y \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot y^{y/x-1} \right] \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} &-x^2 \frac{y}{x^2} \cdot y^{y/x} \cdot \ln y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cdot \frac{y}{x^2} \cdot y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \\ &+ xy \cdot \frac{y}{x} \cdot y^{y/x-1} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot \frac{1}{x} \cdot y^{y/x} \cdot \ln y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \\ &+ xy \cdot \frac{1}{x} \cdot y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) = yy^{y/x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) = yz. \end{aligned}$$

Получаем тождество; следовательно, функция  $z$  удовлетворяет данному уравнению.  $\blacktriangle$

1197.  $u = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$ . Найти  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

1198.  $r = \rho^2 \sin^4 \theta$ . Найти  $\frac{\partial r}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial \theta}$ .

1199.  $u = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}$ . Найти  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

1200.  $z = e^{xy(x^2+y^2)}$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

1201.  $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$ . Найти  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$ .

1202.  $u = e^{x/y} + e^{-z/y}$ . Найти  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$ .

1203.  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x^2}$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

1204.  $z = e^{(x^2+y^2)^2}$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

1205.  $u = (x-y)(x-z)(y-z)$ . Найти  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$ .

1206.  $u = e^{3x^2+2y^2-xy}$ . Найти  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

1207.  $u = e^{xy^2} \cdot \sin \frac{y}{x}$ . Найти  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

1208. Показать, что функция  $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  удовлетворяет уравнению  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}$ .

1209. Найти  $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ , если  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ .

2. Полный дифференциал. Полным приращением функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M(x; y)$  называется разность  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ , где  $\Delta x$  и  $\Delta y$  — произвольные приращения аргументов.

Функция  $z = f(x, y)$  называется дифференцируемой в точке  $(x; y)$ , если в этой точке полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho), \text{ где } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Полным дифференциалом функции  $z = f(x, y)$  называется главная часть полного приращения  $\Delta z$ , линейная относительно приращений аргументов  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , т. е.  $dz = A \Delta x + B \Delta y$ .

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е.  $dx = \Delta x$  и  $dy = \Delta y$ .

Полный дифференциал функции  $z = f(x, y)$  вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов  $u = f(x, y, z)$  вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

При достаточно малом  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  для дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$  справедливы приближенные равенства

$$\Delta z \approx dz; f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz.$$

1210.  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$ . Найти  $dz$ .

△ Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Следовательно,  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ . ▲

1211.  $u = xy^2z$ . Найдти  $du$ .

$\Delta$  Имеем  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$ , где

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z \cdot xy^2z^{-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xy^2z \cdot \ln x \cdot 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy^2z \cdot \ln x \cdot y^2.$$

Следовательно,

$$du = y^2zx^2z^{-1} dx + 2yz \cdot xy^2z \cdot \ln x dy + y^2xy^2z \cdot \ln x dz. \blacktriangle$$

1212. Вычислить приближенно  $\sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,015}}$ , исходя из значения функции  $z = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$  при  $x = \pi/2 \approx 1,571$ ,  $y = 0$ .

$\Delta$  Искомое число есть наращенное значение функции  $z$  при  $\Delta x = 0,021$ ,  $\Delta y = 0,015$ . Найдём значение  $z$  при  $x = \pi/2$ ,  $y = 0$ ; имеем  $z = \sqrt{\sin^2(\pi/2) + 8e^0} = 3$ . Находим приращение функции:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \frac{\sin 2x \Delta x + 8e^y \Delta y}{2 \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}} = \frac{8 \cdot 0,015}{6} = 0,02.$$

Следовательно,  $\sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,015}} \approx 3,02$ .  $\blacktriangle$

1213. Вычислить приближенно  $\operatorname{arctg}(1,02/0,95)$ , исходя из значения функции  $z = \operatorname{arctg}(y/x)$  при  $x = 1$ ,  $y = 1$ .

$\Delta$  Значение функции  $z$  при  $x = 1$ ,  $y = 1$  есть  $z = \operatorname{arctg}(1/1) = \pi/4 \approx 0,785$ . Найдём приращение функции  $\Delta z$  при  $\Delta x = -0,05$ ,  $\Delta y = 0,02$ :

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = -\frac{y \Delta x}{x^2 + y^2} + \frac{x \Delta y}{x^2 + y^2} = \frac{x \Delta y - y \Delta x}{x^2 + y^2} = \frac{1 \cdot 0,02 + 1 \cdot 0,05}{2} = 0,035.$$

Следовательно,  $\operatorname{arctg}(1,02/0,95) = z + \Delta z \approx 0,785 + 0,035 = 0,82$ .  $\blacktriangle$

1214.  $z = \ln(x^2 + y^2)$ . Найдти  $dz$ .

1215.  $z = \ln \operatorname{tg}(y/x)$ . Найдти  $dz$ .

1216.  $z = \sin(x^2 + y^2)$ . Найдти  $dz$ .

1217.  $z = xy$ . Найдти  $dz$ .

1218.  $u = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ . Найдти  $du$ .

1219.  $z = e^x(\cos y + x \sin y)$ . Найдти  $dz$ .

1220.  $z = e^{x+y}(x \cos y + y \sin x)$ . Найдти  $dz$ .

1221.  $z = \operatorname{arctg} \frac{2(x + \sin y)}{4 - x \sin y}$ . Найдти  $dz$ .

1222.  $u = e^{xy^2}$ . Найдти  $du$ .

1223. Вычислить приближенно  $1,02^{4,05}$ , исходя из значения функции  $z = x^y$  при  $x = 1$ ,  $y = 4$  и заменяя ее приращение дифференциалом.

1224. Вычислить приближенно  $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$ , исходя из значения функции  $z = \ln(x^3 + y^3)$  при  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

1225. Вычислить приближенно  $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$ , исходя из значения функции  $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$  при  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

1226. Вычислить приближенно  $\sqrt{5e^{0,02} + 2,03^2}$ , исходя из значения функции  $z = \sqrt{5e^x + y^2}$  при  $x = 0$ ,  $y = 2$ .

1227. Вычислить приближенно  $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$ , исходя из значения функции  $u = \sqrt{xy} + \ln z$  при  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 1$ .

3. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Частными производными второго порядка от функции  $z = f(x, y)$  называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков, например:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y) \text{ и т. д.}$$

Так называемые «смешанные» производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, например  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

Дифференциалом второго порядка от функции  $z = f(x, y)$  называется дифференциал от ее полного дифференциала, т. е.  $d^2z = d(dz)$ .

Аналогично определяются дифференциалы третьего и высших порядков:  $d^3z = d(d^2z)$ ; вообще  $d^n z = d(d^{n-1}z)$ .

Если  $x$  и  $y$  — независимые переменные и функция  $f(x, y)$  имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2;$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Вообще, имеет место символическая формула

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z,$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону.

1228.  $z = y \ln x$ . Найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

△ Найдем частные производные:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$ . Дифференцируя повторно, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (\ln x) = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x}. \quad \blacktriangle$$

1229.  $z = \ln \operatorname{tg}(y/x)$ . Найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

$$\Delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg}(y/x)} \cdot \sec^2(y/x) \left( -\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{2}{\sin(2y/x)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{\sin(2y/x)} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{-2 \cos(2y/x) \cdot (2/x)}{\sin^2(2y/x)} =$$

$$= \frac{2}{x^3 \sin^2(2y/x)} \cdot (2y \cos(2y/x) - x \sin(2y/x)). \quad \blacktriangle$$

1230.  $z = \sin x \sin y$ . Найти  $d^2z$ .

$$\Delta \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$$
$$d^2z = -\sin x \sin y dx^2 + 2 \cos x \cos y dx dy - \sin x \sin y dy^2. \quad \blacktriangle$$

1231.  $z = x^2 y$ . Найти  $d^3z$ .

$$\Delta \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0;$$
$$d^3z = 0 \cdot dx^3 + 3 \cdot 2 dx^2 dy + 3 \cdot 0 \cdot dx \cdot dy^2 + 0 \cdot dy^3 = 6 dx^2 dy. \quad \blacktriangle$$

1232.  $u = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ . Найти  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

1233.  $u = xy + \sin(x+y)$ . Найти  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

1234.  $u = \ln \operatorname{tg}(x+y)$ . Найти  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

1235.  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ . Найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

1236.  $z = x^2 \ln(x+y)$ . Найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

1237.  $u = x \sin xy + y \cos xy$ . Найти  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

1238.  $u = \sin(x + \cos y)$ . Найти  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ .

1239.  $z = 0,5 \ln(x^2 + y^2)$ . Найти  $d^2z$ .

1240.  $z = \cos(x+y)$ . Найти  $d^2z$ .

1241.  $z = \cos(ax + e^y)$ . Найти  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ .

1242.  $u = \frac{x^4 - 8xy^3}{x - 2y}$ . Найти  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ .

1243.  $z = x^2 y^3$ . Проверить, что  $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial^5 z}{\partial y^3 \partial x^2}$ .

1244.  $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 7$ . Найти  $d^2z$ .

1245. Показать, что функция  $z = \varphi(x) g(y)$  удовлетворяет уравнению  $z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ .

1246. Показать, что функция  $z = g(x) + yg'(x)$  удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

1247. Показать, что функция  $u = ye^{x^2 - y^2}$  удовлетворяет уравнению  $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}$ .

1248. Показать, что функция  $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}$  удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

1249.  $u = e^{xy}$ . Найти  $d^2u$ . 1250.  $u = \ln(x+y)$ . Найти  $d^2u$ .

1251.  $u = y/x$ . Найти  $d^2u$ . 1252.  $u = xyz$ . Найти  $d^2u$ .

1253.  $u = x \ln y$ . Найти  $d^4u$ . 1254.  $u = e^{x+y}$ . Найти  $d^5u$ .

4. Дифференцирование сложных функций. Пусть  $z = f(x, y)$ , где  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  и функции  $f(x, y)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  дифференцируемы. Тогда производная сложной функции  $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$  вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если  $z = f(x, y)$ , где  $y = \varphi(x)$ , то полная производная от  $z$  по  $x$  находится по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Если же  $z = f(x, y)$ , где  $x = \varphi(\xi, \eta)$ ,  $y = \psi(\xi, \eta)$ , то частные производные выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

1255.  $z = e^{x^2+y^2}$ , где  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ . Найти  $\frac{dz}{dt}$ .

△ Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x(-a \sin t) + e^{x^2+y^2} \cdot 2y(a \cos t) = \\ &= 2ae^{x^2+y^2}(y \cos t - x \sin t). \end{aligned}$$

Выразив  $x$  и  $y$  через  $t$ , получим

$$\frac{dz}{dt} = 2ae^{a^2} (a \sin t \cos t - a \cos t \sin t) = 0. \quad \blacktriangle$$

1256.  $z = \ln(x^2 - y^2)$ , где  $y = e^x$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{dz}{dx}$ .

△ Имеем  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2}$ . Используя формулу полной производной, находим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{2ye^x}{x^2 - y^2} = \frac{2(x - ye^x)}{x^2 - y^2}. \quad \blacktriangle$$

1257.  $z = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{v}$ , где  $u = \operatorname{tg}^2 x$ ,  $v = \operatorname{ctg}^2 x$ . Найти  $\frac{dz}{dx}$ .

1258.  $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$ , где  $y = 3x + 1$ . Найти  $\frac{dz}{dx}$ .

1259.  $z = x^2 y$ , где  $y = \cos x$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{dz}{dx}$ .

1260.  $z = \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$ , где  $y = x \cos \alpha$ . Найти  $\frac{dz}{dx}$ .

1261.  $z = x^2 + y^2$ , где  $x = \xi + \eta$ ,  $y = \xi - \eta$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ .

1262.  $u = \ln(x^2 + y^2)$ , где  $x = \xi \eta$ ,  $y = \frac{\xi}{\eta}$ . Найти  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ .

1263. Показать, что функция  $u = \ln(1/r)$ , где  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ , удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

5. Производная в данном направлении. Градиент функции. Производной функции  $z=f(x, y)$  в точке  $M(x, y)$  в направлении вектора  $l=MM_1$  называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{|MM_1| \rightarrow 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\rho}, \text{ где } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Если функция  $f(x, y)$  дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол, образованный вектором  $l$  с осью  $Ox$ .

В случае функции трех переменных  $u=f(x, y, z)$  производная в данном направлении определяется аналогично. Соответствующая формула имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  — направляющие косинусы вектора  $l$ .

Градиентом функции  $z=f(x, y)$  в точке  $M(x, y)$  называется вектор с началом в точке  $M$ , имеющий своими координатами частные производные функции  $z$ :

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j.$$

Градиент функции и производная в направлении вектора  $l$  связаны формулой

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{pr}_l \text{grad } z.$$

Градиент указывает направление наибольшего роста функции в данной точке. Производная  $\frac{\partial z}{\partial l}$  в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{наиб}} = |\text{grad } z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

В случае функции  $u=f(x, y, z)$  градиент функции равен

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

1264. Найти производную функции  $z = x^2 - y^2$  в точке  $M(1; 1)$  в направлении вектора  $l$ , составляющем угол  $\alpha = 60^\circ$  с положительным направлением оси  $Ox$ .

$\Delta$  Найдем значения частных производных в точке  $M$ :  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y,$

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = -2.$  Так как  $\cos \alpha = \cos 60^\circ = 1/2, \sin \alpha = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2,$  то

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - \sqrt{3} \approx -0,7. \blacktriangle$$

1265. Найти производную функции  $u = xy^2z^3$  в точке  $M(3; 2; 1)$  в направлении вектора  $\overline{MN}$ , где  $N(5; 4; 2)$ .

$\Delta$  Найдем вектор  $\overline{MN}$  и его направляющие косинусы:  $\overline{MN} = l = (5-3)i + (4-2)j + (2-1)k = 2i + 2j + k;$   $\cos \alpha = 2/\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 2/3;$   $\cos \beta = 2/3;$

$\cos \gamma = 1/3$ . Вычислим значения частных производных в точке  $M$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy z^3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2 z^2; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 4; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 12; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 36.$$

Следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial l} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = 22 \frac{2}{3}$ .  $\blacktriangle$

**1266.** Найти производную функции  $z = \ln(x^2 + y^2)$  в точке  $M(3; 4)$  в направлении градиента функции  $z$ .

$\Delta$  Здесь вектор  $l$  совпадает с градиентом функции  $z = \ln(x^2 + y^2)$  в точке  $M(3; 4)$  и равен

$$\text{grad } z = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)_M i + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)_M j = \frac{6}{25} i + \frac{8}{25} j.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\text{grad } z| = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5}. \quad \blacktriangle$$

**1267.** Найти величину и направление градиента функции  $u = \text{tg } x - x + 3 \sin y - \sin^3 y + z + \text{ctg } z$  в точке  $M(\pi/4; \pi/3; \pi/2)$ .

$\Delta$  Найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sec^2 x - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3 \cos y - 3 \sin^2 y \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \text{cosec } z$$

и вычислим их значения в точке  $M(\pi/4; \pi/3; \pi/2)$ :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2 - 1 = 1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно,

$$(\text{grad } u)_M = i + \frac{3}{8} j; \quad |\text{grad } u|_M = \sqrt{1^2 + (3/8)^2} = \sqrt{73/8};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{73/8}} = \frac{8}{\sqrt{73}}; \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}. \quad \blacktriangle$$

**1268.** Найти производную функции  $z = x^2 - xy + y^2$  в точке  $M(1; 1)$  в направлении вектора  $l = 6i + 8j$ .

**1269.** Найти производную функции  $u = \arcsin(z/\sqrt{x^2 + y^2})$  в точке  $M(1; 1; 1)$  в направлении вектора  $\overline{MN}$ , где  $N(3; 2; 3)$ .

**1270.** Найти производную функции  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  в точке  $M(1; 2; 1)$  в направлении вектора  $r = 2i + 4j + 4k$ .

**1271.** Найти величину и направление градиента функции  $u = 1/r$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , в точке  $M(x_0; y_0; z_0)$ .

**1272.** Найти величину и направление градиента функции  $u = xyz$  в точке  $M(2; 1; 1)$ .

**1273.** Найти производную функции  $u = x/2 + y/3 + z/6$  в направлении  $l = 6i + 3j - 6k$  в произвольной точке.

**6. Дифференцирование неявных функций.** Производная неявной функции  $y = y(x)$ , заданной с помощью уравнения  $F(x, y) = 0$ , где  $F(x, y)$  — дифференцируемая функция переменных  $x$  и  $y$ , может быть вычислена по формуле

$$y' = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \text{ при условии } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Производные высших порядков неявной функции можно найти последовательным дифференцированием указанной формулы, рассматривая при этом  $y$  как функцию от  $x$ .

Аналогично, частные производные неявной функции двух переменных  $z = \varphi(x, y)$ , заданной с помощью уравнения  $F(x, y, z) = 0$ , где  $F(x, y, z)$  — дифференцируемая функция переменных  $x, y$  и  $z$ , могут быть вычислены по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \quad \text{при условии} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

1274.  $\cos(x+y) + y = 0$ . Найти  $y'$ .

$\Delta$  Здесь  $F(x, y) = \cos(x+y) + y$ . Найдем  $\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin(x+y)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = -\sin(x+y) + 1$ . Следовательно,

$$y' = -\frac{-\sin(x+y)}{1 - \sin(x+y)} = \frac{\sin(x+y)}{1 - \sin(x+y)}. \quad \blacktriangle$$

1275.  $y - \sin y = x$ . Найти  $y'$  и  $y''$ .

$\Delta$  Здесь  $F(x, y) = y - \sin y - x$ . Имеем  $\frac{\partial F}{\partial x} = -1$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \cos y = 2 \sin^2 \frac{y}{2}$ , откуда

$$y' = -\frac{-1}{2 \sin^2(y/2)} = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{y}{2}.$$

Найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{cosec} \frac{y}{2} \left( -\operatorname{cosec} \frac{y}{2} \operatorname{ctg} \frac{y}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} y' = -\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^4 \frac{y}{2} \operatorname{ctg} \frac{y}{2}. \quad \blacktriangle$$

1276.  $z^3 - 3xyz = a^3$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

$\Delta$  Здесь  $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3$ . Находим  $\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = -3xz$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$ . Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}. \quad \blacktriangle$$

1277.  $xyz = x + y + z$ . Найти  $dz$ .

$\Delta$  Как известно,  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ , поэтому найдем сначала  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - 1}{xy - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz - 1}{xy - 1}.$$

Следовательно,

$$dz = -\frac{1}{xy - 1} [(yz - 1) dx + (xz - 1) dy]. \quad \blacktriangle$$

1278.  $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = a^2$ . Найти  $y'$ .

1279.  $(y/x) + \sin(y/x) = a$ . Найти  $y'$ .

1280.  $(xy - \alpha)^2 + (xy - \beta)^2 = r^2$ . Найти  $y'$ ,  $y''$ .

1281.  $x^3 + 2y^3 - 2xy\sqrt{2xy} + 1 = 0$ . Найти  $y'$ .

1282.  $\ln \operatorname{tg}(y/x) - y/x = a$ . Найти  $y'$ .

1283.  $(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ . Найти  $y'$  в точке  $M(b; b)$ .

1284.  $3 \sin(\sqrt{x}/y) - 2 \cos \sqrt{x}/y + 1 = 0$ . Найти  $y'$ .

1285.  $0,5 \ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}(y/x) = 0$ . Найти  $y'$ .  
 1286.  $x^2 - x \cdot 2^{y+1} + 4^y - x + 2^y + 2 = 0$ . Найти  $y'$ .  
 1287.  $x + y - e^{x+y} = 0$ . Найти  $y'$ ,  $y''$ .  
 1288.  $x + y + z = e^z$ . Найти  $z'_x$ ,  $z'_y$ .  
 1289.  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ . Найти  $z'_x$ ,  $z'_y$ .  
 1290.  $x = z \ln(z/y)$ . Найти  $dz$ .  
 1291.  $x \sin y + y \sin x + z \sin x = a$ . Найти  $z'_y$ .  
 1292.  $xy + xz + yz = 1$ . Найти  $dz$ .  
 1293.  $xe^y + ye^x + ze^x = a$ . Найти  $z'_x$ .  
 1294.  $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

### § 3. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

*Касательной плоскостью* к поверхности в точке  $M$  называется плоскость, проходящая через точку  $M$  поверхности, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку  $M$  и любую точку  $M_1$  поверхности, стремится к нулю, когда  $M_1$  стремится к  $M$ .

Касательная плоскость к поверхности в точке  $M$  содержит касательные ко всем кривым, проведенным на поверхности через точку  $M$ .

*Нормалью* к поверхности в точке  $M$  называется прямая, проходящая через  $M$  перпендикулярно касательной плоскости в этой точке.

Если поверхность задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$  и в точке  $M(x_0; y_0; z_0)$  частные производные  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M$ ,  $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M$ ,  $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$  конечны и не обращаются в нуль одновременно, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке  $M(x_0; y_0; z_0)$  записывается в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - z_0) = 0,$$

а уравнения нормали к поверхности в этой же точке — в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

Если же уравнение поверхности задано явным образом:  $z = f(x, y)$ , где частные производные  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$  и  $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M$  в точке  $M(x_0; y_0; z_0)$  конечны (и могут быть равны нулю одновременно), то уравнение касательной плоскости в точке  $M$  записывается в виде

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y - y_0),$$

а уравнения нормали — в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Равенство нулю, например  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$ , означает, что касательная плоскость параллельна оси  $Ox$ , а нормаль лежит в плоскости  $x = x_0$ .

1295. Дана поверхность  $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ . Составить уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности в точке  $M(1; 1; 1)$ .

$\Delta$  Найдем частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1$  и  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$  и их значения в точке  $M(1; 1; 1)$ :  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = -1$ ,  $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2$ .

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1), \text{ или } x - 2y + z = 0.$$

Уравнения нормали:

$$(x - 1)/(-1) = (y - 1)/2 = (z - 1)/(-1). \blacktriangle$$

**1296.** К поверхности  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$  провести касательные плоскости, параллельные плоскости  $x + y + z = 1$ .

$\Delta$  Здесь  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 11$ . Найдем частные производные:  $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z} = 6z$ . Из условия параллельности касательной плоскости и данной плоскости следует, что  $(\partial F/\partial x)/1 = (\partial F/\partial y)/1 = (\partial F/\partial z)/1$ , или  $(2x)/1 = (4y)/1 = (6z)/1$ . Присоединив к этим уравнениям уравнение поверхности  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ , найдем координаты точек касания:  $M_1(\sqrt{6}; \sqrt{6}/2; \sqrt{6}/3)$  и  $M_2(-\sqrt{6}; -\sqrt{6}/2; -\sqrt{6}/3)$ . Следовательно, уравнения касательных плоскостей имеют вид

$$1 \cdot (x \pm \sqrt{6}) + 1 \cdot (y \pm \sqrt{6}/2) + 1 \cdot (z \pm \sqrt{6}/3) = 0,$$

т. е.

$$x + y + z + 11/\sqrt{6} = 0 \text{ и } x + y + z - 11/\sqrt{6} = 0. \blacktriangle$$

**1297.** Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = 1 + x^2 + y^2$  в точке  $M(1; 1; 3)$ .

**1298.** Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  в точке  $M(2; 2; 3)$ .

**1299.** Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = \ln(x^2 + y^2)$  в точке  $M(1; 0; 0)$ .

**1300.** Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = \sin x \cos y$  в точке  $M(\pi/4; \pi/4; 1/2)$ .

**1301.** Составить уравнения касательных плоскостей к поверхности  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ , параллельных плоскости  $x + 4y + 6z = 0$ .

**1302.** Доказать, что касательные плоскости к поверхности  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  ( $a > 0$ ) отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

**1303.** В какой точке эллипсоида  $x^2/4 + y^2/4 + z^2 = 1$  нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

**1304.** Доказать, что  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$ , если  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  — направляющие косинусы нормали к поверхности  $z = f(x, y)$ .

#### § 4. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

**1. Экстремум функции.** Функция  $z = f(x, y)$  имеет максимум (минимум) в точке  $M_0(x_0; y_0)$ , если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке  $M(x; y)$  некоторой окрестности точки  $M_0$ , т. е.  $f(x_0, y_0) > f(x, y)$  [соответственно  $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ ] для всех точек  $M(x; y)$ , удовлетворяющих условию  $|M_0M| < \delta$ , где  $\delta$  — достаточно малое положительное число.

Максимум или минимум функции называется ее экстремумом. Точка  $M_0$ , в которой функция имеет экстремум, называется точкой экстремума.

Если дифференцируемая функция  $z=f(x, y)$  достигает экстремума в точке  $M_0(x_0; y_0)$ , то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

(необходимые условия экстремума).

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются *стационарными точками*. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть  $M_0(x_0; y_0)$  — стационарная точка функции  $z=f(x, y)$ . Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

и составим *дискриминант*  $\Delta = AC - B^2$ . Тогда:

если  $\Delta > 0$ , то функция имеет в точке  $M_0$  экстремум, а именно максимум при  $A < 0$  (или  $C < 0$ ) и минимум при  $A > 0$  (или  $C > 0$ );

если  $\Delta < 0$ , то в точке  $M_0$  экстремума нет (достаточные условия наличия или отсутствия экстремума);

если  $\Delta = 0$ , то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

**1305.** Найти экстремум функции  $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ .

$\Delta$  Находим частные производные первого порядка:  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6$ . Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases} \text{ откуда } x = 0, y = 3; M(0; 3).$$

Находим значения частных производных второго порядка в точке  $M$ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

и составляем дискриминант  $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$ ;  $A > 0$ . Следовательно, в точке  $M(0; 3)$  заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке  $z_{\min} = -9$ .  $\blacktriangle$

**1306.** Найти экстремум функции

$$z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y) \left( \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \right).$$

$\Delta$  Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} = 0, \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4} = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 8x + y = 188, \\ x + 6y = 141. \end{cases}$$

Отсюда  $x = 21$ ,  $y = 20$ ; стационарная точка  $M(21; 20)$ .

Найдем значения вторых производных в точке  $M$ :  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}$ . Тогда  $\Delta = AC - B^2 = (-2/3)(-1/2) - (-1/12)^2 = 1/3 - 1/144 > 0$ .

Так как  $A < 0$ , то в точке  $M(21; 20)$  функция имеет максимум:  $z_{\max} = 282$ .  $\blacktriangle$

Найти экстремумы функций:

1307.  $z = xy^2(1 - x - y)$ .

1308.  $z = x^3 + y^3 - 15xy$ .

1309.  $z = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}$ .

1310.  $z = (x^2 + y^2)(e^{-(x^2 + y^2)} - 1)$ .

1311.  $z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$ .

2. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. Условным экстремумом функции  $z = f(x, y)$  называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные  $x$  и  $y$  связаны уравнением  $\varphi(x, y) = 0$  (уравнение связи).

Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный экстремум так называемой функции Лагранжа  $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ , где  $\lambda$  — определенный постоянный множитель.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы трех уравнений можно найти неизвестные  $x$ ,  $y$  и  $\lambda$ .

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, надо:

- 1) найти стационарные точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;
- 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;
- 3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

1312. Найти экстремум функции  $z = xy$  при условии, что  $x$  и  $y$  связаны уравнением  $2x + 3y - 5 = 0$ .

△ Рассмотрим функцию Лагранжа  $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$ . Имеем  $\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda$ ,

$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda$ . Из системы уравнений (необходимые условия экстремума)

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

находим  $\lambda = -5/12$ ,  $x = 5/4$ ,  $y = 5/6$ . Нетрудно видеть, что в точке  $(5/4; 5/6)$  функция  $z = xy$  достигает наибольшего значения  $z_{\max} = 25/24$ . ▲

1313. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью  $S$  найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

△ Пусть  $x$  и  $y$  — катеты треугольника, а  $z$  — гипотенуза. Так как  $z^2 = x^2 + y^2$ , то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции  $x^2 + y^2$  при условии, что  $x$  и  $y$  связаны уравнением  $xy/2 = S$ , т. е.  $xy - 2S = 0$ . Рассмотрим функцию  $u = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$  и найдем ее частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \lambda y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \lambda x.$$

Так как  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0, \\ 2y + \lambda x = 0, \\ xy/2 = S \end{cases}$$

получаем решение  $\lambda = -2$ ,  $x = y = \sqrt{2S}$ .

Таким образом, гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой. ▲

**1314.** Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x^2 + y^2$  в круге  $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$ .

△ Здесь рассматривается область  $D$ , ограниченная окружностью  $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$ , включая и точки окружности.

Найдем стационарные точки данной функции; имеем  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ ; в силу необходимых условий экстремума находим  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Нетрудно видеть, что в точке  $(0; 0)$  функция  $z = x^2 + y^2$  имеет наименьшее значение  $z_{\text{наим}} = 0$ , причем указанная точка является внутренней точкой области  $D$ .

Исследуем на условный экстремум функцию  $z = x^2 + y^2$ , если  $x$  и  $y$  связаны соотношением  $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$ . Рассмотрим функцию  $u = x^2 + y^2 + \lambda[(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9]$ . Находим частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x - \sqrt{2})$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y - \sqrt{2})$ . Для определения  $x$ ,  $y$  и  $\lambda$  получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + \lambda(x - \sqrt{2}) = 0, \\ y + \lambda(y - \sqrt{2}) = 0, \\ (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:  $x = y = 5\sqrt{2}/2$ ,  $\lambda = -5/3$  и  $z = 25$ ;  $x = y = -\sqrt{2}/2$ ,  $\lambda = -1/3$  и  $z = 1$ . Значит, наибольшее значение функция принимает в точке  $(5\sqrt{2}/2; 5\sqrt{2}/2)$ . Итак,  $z_{\text{наим}} = 0$ ,  $z_{\text{наиб}} = 25$ . ▲

**1315.** Найти экстремум функции  $z = x^2 + y^2$ , если  $x$  и  $y$  связаны уравнением  $x/4 + y/3 = 1$ .

Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

**1316.**  $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$  в замкнутой области, ограниченной прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $2x + 3y - 12 = 0$ .

**1317.**  $z = xy + x + y$  в квадрате, ограниченном прямыми  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $y = 3$ .

**1318.**  $z = xy$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**1319.**  $z = x^2 + 3y^2 + x - y$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $x + y = 1$ .

**1320.**  $z = 1 - x^2 - y^2$  в круге  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ .

**1321.**  $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$  в области  $0 \leq x \leq \pi/2$ ,  $0 \leq y \leq \pi/2$ .

**1322.**  $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$  в области  $0 \leq x \leq 3\pi/2$ ,  $0 \leq y \leq 3\pi/2$ .

**1323.**  $z = \cos x \cos y \cos(x + y)$  в области  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ .

**1324.** Из всех треугольников, вписанных в круг, найти тот, площадь которого наибольшая.

**1325.** Из всех треугольников, имеющих данный периметр, найти наибольший по площади.

**1326.** Из всех прямоугольников с заданной площадью  $S$  найти такой, периметр которого имеет наименьшее значение.

**1327.** Найти размеры прямоугольного параллелепипеда, имеющего при данной полной поверхности  $S$  максимальный объем.

## НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 1. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

## ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

**1. Непосредственное интегрирование.** Функция  $F(x)$  называется *первообразной* для функции  $f(x)$ , если  $F'(x) = f(x)$  или  $dF(x) = f(x) dx$ .

Если функция  $f(x)$  имеет первообразную  $F(x)$ , то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении  $F(x) + C$ , где  $C$  — постоянная.

*Неопределенным интегралом* от функции  $f(x)$  (или от выражения  $f(x) dx$ ) называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение:  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .

Здесь  $\int$  — знак интеграла,  $f(x)$  — подынтегральная функция,  $f(x) dx$  — подынтегральное выражение,  $x$  — переменная интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла называется *интегрированием* функции.

Свойства неопределенного интеграла  
(правила интегрирования)

$$1^\circ. \left( \int f(x) dx \right)' = f(x).$$

$$2^\circ. d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

$$3^\circ. \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$4^\circ. \int af(x) dx = a \int f(x) dx, \text{ где } a \text{ — постоянная.}$$

$$5^\circ. \int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

$$6^\circ. \text{ Если } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ и } u = \varphi(x), \text{ то } \int f(u) du = F(u) + C.$$

Таблица основных интегралов

$$\text{I. } \int dx = x + C.$$

$$\text{VIII. } \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\text{II. } \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \text{ при } m \neq -1.$$

$$\text{IX. } \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$\text{X. } \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\text{IV. } \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$\text{XI. } \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\text{V. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$$

$$\text{XII. } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$\text{VI. } \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\text{XIII. } \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$\text{VII. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$\text{XV. } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

1328. Найти интеграл  $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3) dx$ .

$\Delta$  Используя свойства 4° и 5°, получаем

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3) dx = 2 \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx + 7 \int x dx - 3 \int dx.$$

К первым трем интегралам правой части применим формулу II, а к четвертому интегралу — формулу I:

$$\begin{aligned} \int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3) dx &= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^3}{3} + 7 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x + C = \\ &= \frac{1}{2} x^4 - \frac{5}{3} x^3 + \frac{7}{2} x^2 - 3x + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1329. Найти интеграл  $\int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$ .

$$\begin{aligned} \Delta \int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx &= \int \left( x + 2 \cdot \frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} + \frac{1}{x^{2/3}} \right) dx = \\ &= \int (x + 2x^{1/6} + x^{-2/3}) dx = \int x dx + 2 \int x^{1/6} dx + \int x^{-2/3} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^{7/6}}{7/6} + \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7} x^{6/6} \sqrt{x} + 3 \sqrt[3]{x} + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1330. Найти интеграл  $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} dx$ .

$$\Delta \int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} dx = \int (2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^x dx = \int 2250^x dx = \frac{2250^x}{\ln 2250} + C. \quad \blacktriangle$$

Свойство 6° позволяет значительно расширить таблицу основных интегралов с помощью приема *подведения функции под знак дифференциала*.

1331. Найти интеграл  $\int (1+x^2)^{1/2} x dx$ .

$\Delta$  Этот интеграл можно привести к формуле II, преобразовав его так:

$$\int (1+x^2)^{1/2} x dx = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{1/2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{1/2} d(1+x^2).$$

Теперь переменной интегрирования служит выражение  $1+x^2$  и относительно этой переменной получается интеграл от степенной функции. Следовательно,

$$\int (1+x^2)^{1/2} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} + C. \quad \blacktriangle$$

1332. Найти интеграл  $\int (x^2 - 3x + 1)^{10} (2x - 3) dx$ .

$\Delta$  Здесь, поступая так же, как и в предыдущем примере, имеем

$$\int (x^2 - 3x + 1)^{10} d(x^2 - 3x + 1) = \frac{1}{11} (x^2 - 3x + 1)^{11} + C. \quad \blacktriangle$$

1333. Найти интеграл  $\int (\ln t)^4 \frac{dt}{t}$ .

$\Delta$  Выражение  $\frac{dt}{t}$  можно записать как  $d(\ln t)$ , поэтому

$$\int (\ln t)^4 d(\ln t) = \frac{1}{5} (\ln t)^5 + C. \quad \blacktriangle$$

1334. Найти интеграл  $\int e^{3 \cos x} \sin x dx$ .

$\Delta$  Заданный интеграл можно представить так:

$$\int e^{3 \cos x} \sin x dx = \frac{1}{3} \int e^{3 \cos x} \cdot 3 \sin x dx,$$

но  $3 \sin x dx = -d(3 \cos x)$ , а потому

$$\int e^{3 \cos x} \sin x dx = -\frac{1}{3} \int e^{3 \cos x} d(3 \cos x),$$

т. е. переменной интегрирования является  $3 \cos x$ . Следовательно, интеграл берется по формуле VI:

$$\int e^{3 \cos x} \sin x dx = -\frac{1}{3} e^{3 \cos x} + C. \blacktriangle$$

1335. Найти интеграл  $\int (2 \sin x + 3 \cos x) dx$ .

$\Delta$  Находим

$$\int (2 \sin x + 3 \cos x) dx = 2 \int \sin x dx + 3 \int \cos x dx = -2 \cos x + 3 \sin x + C$$

(см. формулы VIII и IX).  $\blacktriangle$

1336. Найти интеграл  $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx$ .

$\Delta$  Имеем

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}^2 x) dx = \\ &= \int (\operatorname{tg}^2 x + 1 + 1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx + \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx = \\ &= \int \sec^2 x dx + \int \operatorname{cosec}^2 x dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \end{aligned}$$

(см. формулы X и XI).  $\blacktriangle$

Найти интегралы:

1337.  $\int x \sqrt{x} dx$ . 1338.  $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ . 1339.  $\int \frac{2 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

1340.  $\int \frac{2-x^4}{1+x^2} dx$ . 1341.  $\int e^{3x} \cdot 3^x dx$ . 1342.  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ .

1343.  $\int (\operatorname{sh} x - \sin x) dx$ . 1344.  $\int \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$ .

1345.  $\int (2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x)^2 dx$ . 1346.  $\int x \cos(x^2) dx$ .

1347.  $\int \frac{dx}{x \ln x}$ . 1348.  $\int (ax^2 + b)^{1/3} \cdot x dx$ .

1349.  $\int \sqrt{\sin x \cos x} dx$ . 1350.  $\int \sin(a + bx) dx$ .

1351.  $\int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx$ .

2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1)  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  — монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной  $t$ . Формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt;$$

2)  $u = \psi(x)$ , где  $u$  — новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f[\psi(x)] \psi'(x) dx = \int f(u) du.$$

1352. Найти интеграл  $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ .

$\Delta$  Произведем подстановку  $t = \sqrt[3]{x}$ , т. е.  $x = t^3$ . Эта подстановка приведет к тому, что под знаком синуса окажется переменная интегрирования, а не корень из нее. Найдем дифференциал  $dx = 3t^2 dt$ . Отсюда получаем

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{3t^2 \sin t}{t^2} dt = 3 \int \sin t dt = -3 \cos t + C.$$

Ответ должен быть выражен через старую переменную  $x$ . Подставляя в результат интегрирования  $t = \sqrt[3]{x}$ , получим

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = -3 \cos \sqrt[3]{x} + C. \blacktriangle$$

1353. Найти интеграл  $\int (2x+1)^{20} dx$ .

$\Delta$  Этот интеграл можно найти и не производя замены переменной. Здесь достаточно развернуть выражение  $(2x+1)^{20}$  по формуле бинома Ньютона и применить почленное интегрирование. Однако этот прием связан с большим количеством вычислений. С помощью замены переменной можно сразу свести данный интеграл к табличному.

Полагая  $2x+1 = t$ , имеем  $2dx = dt$ , т. е.  $dx = (1/2) dt$ . Отсюда получаем

$$\int (2x+1)^{20} dx = \frac{1}{2} \int t^{20} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{21} t^{21} + C = \frac{1}{42} (2x+1)^{21} + C. \blacktriangle$$

Вообще, если интеграл  $\int f(x) dx$  является табличным, то интеграл  $\int f(ax+b) dx$  может быть легко найден с помощью подстановки  $ax+b = t$ .

Например, применим эту подстановку к интегралу  $\int \sin(ax+b) dx$ . Имеем  $ax+b = t$ ,  $a dx = dt$  и  $dx = (1/a) dt$ . Следовательно,

$$\int \sin(ax+b) dx = \int \sin t \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \int \sin t dt = -\frac{1}{a} \cos t + C.$$

Возвратившись к старой переменной, получаем

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.$$

Аналогично можно показать, что

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C, \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C \text{ и т. д.}$$

При нахождении интеграла  $\int f(ax+b) dx$  записи самой подстановки  $ax+b = t$  можно фактически и не производить. Здесь достаточно принять во внимание, что  $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$ . Таким образом,

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$

где  $F$  — первообразная для  $f$ .

1354. Найти интеграл  $\int x^2 \sqrt{x^3+5} dx$ .

△ Положим  $\sqrt{x^3+5}=t$ ; тогда  $x^3+5=t^2$ . Дифференцируем обе части равенства:  $3x^2 dx = 2t dt$ . Отсюда  $x^2 dx = (2/3)t dt$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^3+5} dx &= \int \sqrt{x^3+5} x^2 dx = \int t \cdot \frac{2}{3} t dt = \frac{2}{3} \int t^2 dt = \\ &= \frac{2}{9} t^3 + C = \frac{2}{9} (\sqrt{x^3+5})^3 + C = \frac{2}{9} (x^3+5) \sqrt{x^3+5} + C. \end{aligned}$$

Данный интеграл можно найти и с помощью подстановки  $x^3+5=t$ . Эта подстановка сразу приводит интеграл к табличному вследствие того, что первый множитель подынтегрального выражения  $x^2$  отличается от производной подкоренного выражения  $x^3+5$  только постоянным множителем  $1/3$ , т. е.  $x^2 = (1/3)(x^3+5)'$ . ▲

Вообще, если подынтегральная функция является произведением двух множителей, один из которых зависит от некоторой функции  $\psi(x)$ , а другой является производной  $\psi'(x)$  (с точностью до постоянного множителя), то целесообразно сделать замену переменной по формуле  $\psi(x)=t$ .

1355. Найти интеграл  $\int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx$ .

△ Перепишем данный интеграл в виде  $\int (2 \ln x + 3)^3 \frac{1}{x} dx$ . Так как производная выражения  $2 \ln x + 3$  равна  $2/x$ , а второй множитель  $1/x$  отличается от этой производной только постоянным коэффициентом  $2$ , то нужно применить подстановку  $2 \ln x + 3 = t$ . Тогда  $2 \cdot \frac{dx}{x} = dt$ ,  $\frac{dx}{x} = \frac{1}{2} dt$ . Следовательно,

$$\int (2 \ln x + 3)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{1}{8} t^4 + C = \frac{1}{8} (2 \ln x + 3)^4 + C. \quad \blacktriangle$$

1356. Найти интеграл  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ .

△ Произведем подстановку  $f(x)=t$ . Тогда  $f'(x) dx = dt$  и

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |f(x)| + C.$$

Например,

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

Здесь знак модуля опущен, так как  $x^2+1 > 0$ . ▲

1357. Найти интеграл  $\int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{f(x)}}$ .

△ Положим  $f(x)=t$ . Тогда  $f'(x) dx = dt$  и

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2} dt = \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = 2 \sqrt{t} + C = 2 \sqrt{f(x)} + C.$$

Заметим, что данный интеграл можно было найти с помощью подстановки  $\sqrt{f(x)}=t$ . ▲

1358. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ , если  $a \neq 0$ .

△ Для того чтобы свести интеграл к табличному (см. формулу IV), разделим числитель и знаменатель подынтегрального выражения на  $a^2$ :

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{(dx)/a^2}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2}.$$

Мы подвели постоянный множитель  $1/a$  под знак дифференциала. Рассматривая  $x/a$  как новую переменную, получим

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

К этому же результату мы пришли бы и с помощью подстановки  $x=at$ . ▲

1359. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ , если  $a > 0$ .

△ Разделив числитель и знаменатель на  $a$ , получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{(dx)/a}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}.$$

Принимая  $x/a$  за новую переменную, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C. \quad \blacktriangle$$

Дополним теперь таблицу основных интегралов следующими формулами

$$\text{XVI. } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

$$\text{XVII. } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

$$\text{XVIII. } \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$\text{XIX. } \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$\text{XX. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$$

$$\text{XXI. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln |x + \sqrt{x^2+\lambda}| + C.$$

$$\text{XXII. } \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C = \ln |\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C.$$

$$\text{XXIII. } \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

$$\text{XXIV. } \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$\text{XXV. } \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

Формулы I—XXV нужно знать наизусть, так как большинство интегралов, используемых на практике, сводится к интегралам, берущимся по этим формулам.

1360. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$ .

△ Произведем подстановку  $\sqrt{2x-9}=t$ ; тогда  $2x-9=t^2$ ,  $x=(t^2+9)/2$  и  $dx=t dt$ . Итак,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \int \frac{t dt}{\frac{t^2+9}{2} \cdot t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+9}.$$

Применив формулу XVIII, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C. \blacktriangle$$

1361. Найти интеграл  $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$ .

△ Произведем подстановку  $\cos^2 x = t$ ; тогда  $-2 \cos x \sin x dx = dt$ , т. е.  $\sin 2x dx = -dt$ . Теперь находим

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}} dx = - \int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = - \operatorname{arcsin} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = - \operatorname{arcsin} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C$$

(мы использовали формулу XX).  $\blacktriangle$

1362. Найти интеграл  $\int \left(2 \sin \frac{x}{2} + 3\right)^2 \cos \frac{x}{2} dx$ .

△ Применим подстановку  $2 \sin(x/2) + 3 = t$ ; тогда  $\cos(x/2) dx = dt$  и

$$\int \left(2 \sin \frac{x}{2} + 3\right)^2 \cos \frac{x}{2} dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} \left(2 \sin \frac{x}{2} + 3\right)^3 + C. \blacktriangle$$

1363. Найти интеграл  $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$ .

△ Применим подстановку  $x^5 = t$ ; тогда  $5x^4 dx = dt$ ,  $x^4 dx = (1/5) dt$  и

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = \frac{1}{5} \ln |t + \sqrt{t^2-2}| + C$$

(см. формулу XXI). Итак,

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \frac{1}{5} \ln |x^5 + \sqrt{x^{10}-2}| + C. \blacktriangle$$

1364. Найти интеграл  $\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5}$ .

△ Преобразуя знаменатель дроби, получим  $x^4 + 2x^2 + 5 = (x^2 + 1)^2 + 4$ . Произведем подстановку  $x^2 + 1 = t$ ; тогда  $x dx = (1/2) dt$ . Отсюда

$$\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C$$

(см. формулу XVIII). Таким образом,

$$\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{2} + C. \blacktriangle$$

1365. Найти интеграл  $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 5} dx$ .

△ Положим  $e^{2x} = t$ , тогда  $e^{2x} dx = (1/2) dt$  и

$$\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} - 5} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{5}}{t + \sqrt{5}} \right| + C$$

(мы применили формулу XIX). Итак,

$$\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x}-5} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}} \right| + C. \blacktriangle$$

1366. Найти интеграл  $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x}+5}$ .

△ Произведя ту же подстановку, что и в предыдущем примере, получим

$$\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x}+5} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{\sqrt{5}} + C. \blacktriangle$$

1367. Найти интеграл  $\int \frac{\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin 2\sqrt{x}} dx$ .

△ Полагая  $\sqrt{x}=t$ ,  $x=t^2$ ,  $dx=2t dt$ , получим

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin 2\sqrt{x}} dx = \int \frac{(\sin t + \cos t) \cdot 2t}{t \sin 2t} dt = \\ & = \int \frac{\sin t + \cos t}{\sin t \cos t} dt = \int \left( \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} \right) dt = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C \end{aligned}$$

(см. формулы XXII и XXIII). Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{(\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x})}{\sqrt{x} \sin 2\sqrt{x}} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x}}{2} \right| + C. \blacktriangle$$

Найти интегралы:

1368.  $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx$ . 1369.  $\int x^3 (1-2x^4)^3 dx$ .

1370.  $\int \sin(2-3x) dx$ . 1371.  $\int x \operatorname{ch}(5x^2+3) dx$ .

1372.  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ . 1373.  $\int x(x^2+1)^{3/2} dx$ .

1374.  $\int \frac{x dx}{x^2-1}$ . 1375.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4-1}}$ . 1376.  $\int \frac{\sin 4x dx}{\cos^4 2x+4}$ .

1377.  $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$ . 1378.  $\int \frac{e^{x/2} dx}{\sqrt{16-e^x}}$ .

1379.  $\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$ .

● Представить интеграл в виде суммы интегралов.

1380.  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-3x^3}}$ . 1381.  $\int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}} dx$ .

1382.  $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$ . 1383.  $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x} dx$ . 1384.  $\int \frac{x dx}{2x^4+5}$ .

3. Интегрирование по частям. Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где  $u = \varphi(x)$ ,  $v = \psi(x)$  — непрерывно дифференцируемые функции от  $x$ . С помощью этой формулы нахождение интеграла  $\int u dv$  сводится к отысканию другого интеграла  $\int v du$ ; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом за  $u$  берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за  $dv$  — та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, например, для интегралов вида  $\int P(x) e^{ax} dx$ ,  $\int P(x) \sin ax dx$ ,  $\int P(x) \cos ax dx$ , где  $P(x)$  — многочлен, за  $u$  следует принять  $P(x)$ , а за  $dv$  — соответственно выражения  $e^{ax} dx$ ,  $\sin ax dx$ ,  $\cos ax dx$ ; для интегралов вида  $\int P(x) \ln x dx$ ,  $\int P(x) \arcsin x dx$ ,  $\int P(x) \arccos x dx$  за  $u$  принимаются соответственно функции  $\ln x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ , а за  $dv$  — выражение  $P(x) dx$ .

1385. Найти интеграл  $\int \ln x dx$ .

△ Положим  $u = \ln x$ ,  $dv = dx$ ; тогда  $v = x$ ,  $du = \frac{dx}{x}$ . Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1386. Найти интеграл  $\int \operatorname{arctg} x dx$ .

△ Пусть  $u = \operatorname{arctg} x$ ,  $dv = dx$ , тогда  $du = \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $v = x$ . По формуле интегрирования по частям находим

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \blacktriangle$$

1387. Найти интеграл  $\int x \sin x dx$ .

△ Положим  $u = x$ ,  $dv = \sin x dx$ ; тогда  $du = dx$ ,  $v = -\cos x$ . Отсюда

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Если бы выражения  $u$  и  $dv$  мы выбрали иначе, например  $u = \sin x$ ,  $dv = x dx$ , то получили бы  $du = \cos x dx$ ,  $v = (1/2)x^2$ , откуда

$$\int x \sin x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \int \frac{1}{2} x^2 \cos x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx,$$

и пришли бы к интегралу более сложному, чем исходный, так как степень множителя при тригонометрической функции повысилась на единицу.  $\blacktriangle$

1388. Найти интеграл  $\int x^2 e^x dx$ .

△ Положим  $u = x^2$ ,  $dv = e^x dx$ ; тогда  $du = 2x dx$ ,  $v = e^x$ . Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Мы добились понижения степени  $x$  на единицу. Чтобы найти  $\int xe^x dx$ , применим еще раз интегрирование по частям. Полагаем  $u = x, dv = e^x dx$ ; тогда  $du = dx, v = e^x$  и

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C. \blacktriangle$$

1389. Найти интеграл  $I = \int e^x \sin x dx$ .

$\Delta$  Пусть  $u = e^x, dv = \sin x dx$ ; тогда  $du = e^x dx, v = -\cos x$ . Следовательно,

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Создается впечатление, что интегрирование по частям не привело к цели, так как интеграл не упростился. Попробуем, однако, еще раз проинтегрировать по частям. Приняв  $u = e^x, dv = \cos x dx$ , откуда  $du = e^x dx, v = \sin x$ , получаем

$$I = -e^x \cos x + (e^x \sin x - I), \text{ т. е. } I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I.$$

Применив дважды операцию интегрирования по частям, мы в правой части снова получили исходный интеграл. Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом  $I$ . Из этого уравнения находим

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x, \text{ т. е. } I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$

В окончательном результате мы прибавили к найденной первообразной функции произвольную постоянную.  $\blacktriangle$

1390. Найти интеграл  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ , если  $a > 0$ .

$\Delta$  Положим  $u = \sqrt{a^2 - x^2}, dv = dx$ , откуда  $du = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, v = x$ . Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

или

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

Отсюда получаем

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a},$$

т. е.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C. \blacktriangle$$

1391. Вывести рекуррентную формулу для интеграла  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ .

$\Delta$  Заданный интеграл можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x \cdot x dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int x \cdot \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^n}. \end{aligned}$$

Положим  $u = x$ ,  $dv = \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^n}$ , тогда  $du = dx$ ,

$$v = \frac{1}{2} \int (x^2 + a^2)^{-n} \cdot d(x^2 + a^2) = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}},$$

откуда

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{a^2} \left[ \frac{x}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \right],$$

или

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} I_{n-1},$$

т. е.

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Пологая  $n=2$ , получаем выражение интеграла  $I_2$  через элементарные функции. Пологая теперь  $n=3$ , находим интеграл  $I_3$  (ведь интеграл  $I_2$  уже найден). Таким образом, можно найти  $I_n$  при любом целом положительном  $n$ . ▲

Найти интегралы:

1392.  $\int x \ln x dx$ . 1393.  $\int \arcsin x dx$ .

1394.  $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$ . 1395.  $\int (x+1) e^x dx$ .

1396.  $\int x^2 \sin x dx$ . 1397.  $\int x^5 e^{x^2} dx$ . 1398.  $\int \sqrt{x^2 + \lambda} dx$ .

● Положить  $x^2 = t$ .

1399.  $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx$ . 1400.  $\int e^{2x} \cos x dx$ .

1401.  $\int \sin \ln x dx$ . 1402.  $\int \sin \sqrt{x} dx$ .

● Положить  $\sqrt{x} = t$ .

## § 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

**1. Интегрирование простейших дробей.** Рациональной дробью называется дробь вида  $P(x)/Q(x)$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена  $P(x)$  ниже степени многочлена  $Q(x)$ ; в противном случае дробь называется *неправильной*.

*Простейшими (элементарными) дробями* называются правильные дроби следующего вида:

I.  $\frac{A}{x-a}$ ;

II.  $\frac{A}{(x-a)^m}$ , где  $m$  — целое число, большее единицы;

III.  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ , где  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , т. е. квадратный трехчлен  $x^2+px+q$  не

имеет действительных корней;

IV.  $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ , где  $n$  — целое число, большее единицы, и квадратный трехчлен  $x^2+px+q$  не имеет действительных корней.

Во всех четырех случаях предполагается, что  $A, B, p, q, a$  — действительные числа. Перечисленные дроби будем соответственно называть простейшими дробями I, II, III и IV типов.

Рассмотрим интегралы от простейших дробей первых трех типов. Имеем

$$I. \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C;$$

$$II. \int \frac{A dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C;$$

$$III. \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Действительно, для этого частного случая простейшей дроби III типа получаем

$$x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}, \text{ или } x^2+px+q = t^2+a^2,$$

где  $t = x + \frac{p}{2}$ ,  $a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$  (здесь  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ ), откуда

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

1403. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$ .

$$\Delta \int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{4} + C. \blacktriangle$$

1404. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$ .

$$\begin{aligned} \Delta \int \frac{dx}{2x^2-2x+3} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{5}/2} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Покажем, как интегрируются в общем виде простейшие дроби III типа.

Требуется найти  $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ ;  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ . Выделим в числителе дроби производную знаменателя. Для этого числитель представим в виде

$$Ax+B = (2x+p) \cdot \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B.$$

Тогда

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

В первом интеграле числитель является производной знаменателя; поэтому

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \ln(x^2+px+q) + C,$$

так как  $x^2+px+q > 0$  для любого значения  $x$ . Второй интеграл, как уже было отмечено, находится по формуле

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Итак,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

1405. Найти интеграл  $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx$ .

$$\begin{aligned} \Delta \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4) - 1 + 6}{x^2-4x+8} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx + 5 \int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{2} \ln(x^2-4x+8) + 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1406. Найти интеграл  $\int \frac{x dx}{2x^2+2x+5}$ .

$$\begin{aligned} \Delta \int \frac{x dx}{2x^2+2x+5} &= \int \frac{\frac{1}{4}(4x+2) - \frac{1}{2}}{2x^2+2x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x^2+2x+5} = \\ &= \frac{1}{4} \ln(2x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{2}} = \frac{1}{4} \ln(2x^2+2x+5) - \\ &- \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \ln(2x^2+2x+5) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3/2} \operatorname{arctg} \frac{x+1/2}{3/2} + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln(2x^2+2x+5) - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{3} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1407. Найти интеграл  $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1} dx$ .

$\Delta$  Предварительно в этом интеграле произведем замену переменной  $x^2=t$ , тогда  $2x dx = dt$ ,  $x dx = (1/2) dt$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x^2+3)x dx}{x^4+x^2+1} &= \frac{1}{2} \int \frac{(2t+3) dt}{t^2+t+1} = \frac{1}{2} \int \frac{(2t+1)+2}{t^2+t+1} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt + \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{1}{2} \ln(t^2+t+1) + \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2+t+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^4+x^2+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь частный случай интеграла от простейшей дроби IV типа.

Для интеграла  $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$  ( $n$  — целое положительное число) имеет место следующая рекуррентная формула:

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}.$$

Эта формула позволяет после  $(n-1)$ -кратного применения свести данный интеграл  $I_n$  к табличному интегралу  $\int \frac{dx}{t^2+a^2}$ .

1408. Найти интеграл  $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ .

△ Здесь  $n=3$ . После первого применения рекуррентной формулы получаем

$$I_3 = \frac{1}{2(3-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{3-1}} + \frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3 - 2} \cdot I_{3-1} = \frac{1}{4} \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2.$$

К интегралу  $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$  снова применяем рекуррентную формулу (здесь полагаем  $n=2$ ):

$$I_2 = \frac{1}{2(2-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{2-1}} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} I_{2-1} = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} I_1 = \\ = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \left[ \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right] + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C. \blacktriangle$$

Покажем теперь в общем виде, как интегрируются простейшие дроби IV типа.

Требуется найти  $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$ ,  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ .

Выделим в числителе производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n} dx = \\ = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Первый интеграл в правой части равенства легко находится с помощью подстановки  $x^2+px+q=t$ , а второй преобразуем так:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.$$

Полагая теперь  $x + \frac{p}{2} = t$ ,  $dx = dt$  и обозначая  $q - \frac{p^2}{4} = a^2$ , получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Таким образом, интегрирование элементарной дроби IV типа может быть выполнено с помощью рекуррентной формулы.

1409. Найти интеграл  $\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx$ .

△ Ищем

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) + (2-3)}{(x^2+2x+10)^2} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx - \int \frac{dx}{[(x+1)^2+9]^2}.$$

В первом интеграле произведем замену  $x^2+2x+10=z$ ,  $(2x+2) dx=dz$ , а во втором интеграле положим  $x+1=t$ ,  $dx=dt$ . Отсюда

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dt}{(t^2+9)^2} = \frac{3}{2} \int z^{-2} dz - \int \frac{dt}{(t^2+9)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2} z^{-1} - \left[ \frac{1}{2(2-1) \cdot 9} \cdot \frac{t}{(t^2+9)^{2-1}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \cdot \int \frac{dt}{t^2+9} \right] =$$

$$= -\frac{3}{2z} - \frac{1}{18} \cdot \frac{t}{t^2+9} - \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} \arctg \frac{t}{3} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получаем

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx = -\frac{3}{2(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18} \cdot \frac{x+1}{(x+1)^2+9} - \frac{1}{54} \arctg \frac{x+1}{3} + C =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x+10} - \frac{1}{54} \arctg \frac{x+1}{3} + C. \blacktriangle$$

Найти интегралы:

1410.  $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$ . 1411.  $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$ . 1412.  $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$ .

1413.  $\int \frac{x^2 dx}{x^6+2x^3+3}$ . 1414.  $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7} dx$ .

1415.  $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29} dx$ . 1416.  $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1} dx$ .

1417.  $\int \frac{dx}{(x^2+2)^3}$ . 1418.  $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+5)^2} dx$ .

2. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби. Перед интегрированием рациональной дроби  $P(x)/Q(x)$  надо сделать следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1) если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из нее целую часть, т. е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где  $M(x)$  — многочлен, а  $P_1(x)/Q(x)$  — правильная рациональная дробь;

2) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x-a)^m \dots (x^2+px+q)^n \dots,$$

где  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , т. е. трехчлен  $x^2+px+q$  имеет комплексные сопряженные корни;

3) правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x-a} + \dots$$

$$+ \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q} + \dots;$$

4) вычислить неопределенные коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_n, C_n, \dots$ , для чего привести последнее равенство к общему знаме-

нателью, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомого коэффициентов. Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной  $x$  произвольные числовые значения. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Случай 1. Знаменатель имеет только действительные различные корни, т. е. разлагается на неповторяющиеся множители первой степени.

1419. Найти интеграл  $\int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$ .

△ Так как каждый из двухчленов  $x-1$ ,  $x-2$ ,  $x-4$  входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей I типа:

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^2 + 2x + 6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2). \quad (*)$$

Следовательно,

$$x^2 + 2x + 6 = A(x^2 - 6x + 8) + B(x^2 - 5x + 4) + C(x^2 - 3x + 2).$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$x^2 + 2x + 6 = (A + B + C)x^2 + (-6A - 5B - 3C)x + (8A + 4B + 2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A + B + C = 1, \\ -6A - 5B - 3C = 2, \\ 8A + 4B + 2C = 6, \end{cases}$$

из которой найдем  $A = 3$ ,  $B = -7$ ,  $C = 5$ .

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4}.$$

Неизвестные  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в разложении можно было определить и иначе. После освобождения от знаменателя можно придать  $x$  столько частных значений, сколько содержится в системе неизвестных, в данном случае — три частных значения.

Особенно удобно придавать  $x$  значения, являющиеся действительными корнями знаменателя. Применим этот прием к решению данного примера. После освобождения от знаменателя мы получили равенство (\*). Действительными корнями знаменателя являются числа 1, 2 и 4. Положим в этом равенстве  $x=1$ , тогда

$$1^2 + 2 \cdot 1 + 6 = A(1-2)(1-4) + B(1-1)(1-4) + C(1-1)(1-2),$$

откуда  $9 = 3A$ , т. е.  $A = 3$ . Полагая  $x=2$ , получаем  $14 = -2B$ , т. е.  $B = -7$ ; полагая  $x=4$ , имеем  $30 = 6C$ , т. е.  $C = 5$ . В результате получились те же значения; что и при первом способе определения неизвестных.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx &= 3 \int \frac{dx}{x-1} - 7 \int \frac{dx}{x-2} + 5 \int \frac{dx}{x-4} = \\ &= 3 \cdot \ln|x-1| - 7 \ln|x-2| + 5 \ln|x-4| + C = \ln \left| \frac{(x-1)^3 (x-4)^5}{(x-2)^7} \right| + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Случай 2. Знаменатель имеет лишь действительные корни, причем некоторые из них кратные, т. е. знаменатель разлагается на множители первой степени и некоторые из них повторяются.

1420. Найти интеграл  $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx$ .

$\Delta$  Множителю  $(x-1)^3$  соответствует сумма трех простейших дробей  $\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$ , а множителю  $x+3$  — простейшая дробь  $\frac{D}{x+3}$ . Итак,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}.$$

Освободимся от знаменателя:

$$x^2+1 = A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) + D(x-1)^3.$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 1 и  $-3$ . Полагая  $x=1$ , получаем  $2=4A$ , т. е.  $A=1/2$ . При  $x=-3$  имеем  $10=-64D$ , т. е.  $D=-5/32$ .

Сравним теперь коэффициенты при старшей степени  $x$ , т. е. при  $x^3$ . В левой части нет члена с  $x^3$ , т. е. коэффициент при  $x^3$  равен 0. В правой части коэффициент при  $x^3$  равен  $C+D$ . Итак,  $C+D=0$ , откуда  $C=5/32$ .

Остается определить коэффициент  $B$ . Для этого необходимо иметь еще одно уравнение. Это уравнение можно получить путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  (например, при  $x^2$ ) или придав  $x$  какое-нибудь числовое значение. Удобнее взять такое значение, при котором вычислений будет возможно меньше. Полагая, например,  $x=0$ , получаем

$$1 = 3A - 3B + 3C - D, \text{ или } 1 = \frac{3}{2} - 3B + \frac{15}{32} + \frac{5}{32}, \text{ т. е. } B = \frac{3}{8}.$$

Окончательное разложение данной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{3}{8(x-1)^2} + \frac{5}{32(x-1)} - \frac{5}{32(x+3)}.$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{5}{32} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{32} \int \frac{dx}{x+3} = \\ &= -\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Случай 3. Среди корней знаменателя имеются простые комплексные корни, т. е. разложение знаменателя содержит квадратичные неповторяющиеся множители.

1421. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$ .

$\Delta$  Разложим знаменатель на множители:

$$x^5-x^2 = x^2(x^3-1) = x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Тогда

$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1).$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 0 и 1. При  $x=0$  имеем  $1=-A$ , т. е.  $A=-1$ ; при  $x=1$  имеем  $1=3C$ , т. е.  $C=1/3$ . Перепишем предыдущее равенство в виде

$$1 = A(x^3 - 1) + B(x^4 - x) + C(x^4 + x^3 + x^2) + Dx^4 + Ex^3 - Dx^3 - Ex^2.$$

Сравнивая коэффициенты при  $x^4$ ,  $x^3$ ,  $x^2$ , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} B + C + D = 0, \\ A + C + E - D = 0, \\ C - E = 0, \end{cases}$$

из которой найдем  $B=0$ ,  $D=-1/3$ ,  $E=1/3$ . Итак,

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^5 - x^2} &= -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1} dx = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

**Случай 4.** Среди корней знаменателя имеются кратные комплексные корни, т. е. разложение знаменателя содержит повторяющиеся квадратичные множители.

**1422.** Найти интеграл  $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$ .

△ Так как  $x^2 + 1$  есть двукратный множитель, то

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^3 - 2x = Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 1).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ :

$$\begin{cases} x^3 & 1 = C, \\ x^2 & 0 = D, \\ x & -2 = A + C; \quad A = -3, \\ x^0 & 0 = B + D; \quad B = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{-3x dx}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = -\frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{3}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

Заметим, что данный интеграл можно было найти проще с помощью подстановки  $x^2 + 1 = t$ . ▲

1423. Найти интеграл  $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} dx$ .

△ Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r} \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} \Big| \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2} \\ \underline{-x^3 + 3x^2 + 5x + 7} \phantom{+ 2} \\ -3x^2 + 3x + 7 \phantom{+ 2} \\ \underline{-3x^2 + 6} \\ 3x + 1 \end{array}$$

Итак,

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} = x + 3 + \frac{3x + 1}{x^2 + 2}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} dx &= \int \left( x + 3 + \frac{3x + 1}{x^2 + 2} \right) dx = \\ &= \int x dx + 3 \int dx + \int \frac{3x + 1}{x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} x^2 + 3x + \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 2} + \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 3x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1424. Найти интеграл  $\int \frac{x + 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} dx$ .

△ Так как подынтегральная функция является правильной дробью, то ее следует сразу представить в виде суммы простейших дробей. Легко видеть, что многочлен  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  обращается в нуль при  $x = -1$ , поэтому он делится без остатка на  $x + 1$ . Выполним деление:

$$\begin{array}{r} \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x^3 + x^2} \Big| \frac{x + 1}{x^2 + 5x + 6} \\ \underline{-x^3 + x^2} \phantom{+ 11x + 6} \\ 5x^2 + 11x \phantom{+ 6} \\ \underline{-5x^2 + 5x} \\ 6x + 6 \\ \underline{-6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

Следовательно,

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x^2 + 5x + 6) = (x + 1)(x + 2)(x + 3);$$

$$\frac{x + 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} = \frac{x + 4}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x + 3}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x + 4 = A(x + 2)(x + 3) + B(x + 1)(x + 3) + C(x + 1)(x + 2).$$

Полагая  $x = -1$ , найдем  $3 = 2A$ , т. е.  $A = 3/2$ . Если  $x = -2$ , то получим  $2 = -B$ , т. е.  $B = -2$ . При  $x = -3$  получим  $1 = 2C$ , т. е.  $C = 1/2$ .

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x + 1} - 2 \int \frac{dx}{x + 2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 3} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x + 1| - 2 \ln|x + 2| + \frac{1}{2} \ln|x + 3| + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1425. Найти интеграл  $\int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx$ .

△ Прежде всего нужно выделить целую часть:

$$\frac{-x^5+1}{8x^3-16x+1} = \frac{x^4-8x^2+16}{x^4-8x^2+16} + \frac{-x^5+1-x^4+8x^2-16}{x^4-8x^2+16}$$

Следовательно,

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Разложим теперь правильную дробь на простейшие:

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}.$$

Освободимся от знаменателей:

$$8x^3-16x+1 = A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x-2)^2(x+2).$$

Полагая  $x=2$ , найдем  $33=16A$ , т. е.  $A=33/16$ ; При  $x=-2$  получим  $-31=16C$ , т. е.  $C=-31/16$ ; Если  $x=0$ , то  $1=4A-8B+4C+8D$ . Заменяя  $A$  и  $C$  их значениями, получаем

$$1 = \frac{33}{4} - 8B - \frac{31}{4} + 8D, \text{ или } -16B + 16D = 1.$$

Для того чтобы найти  $B$  и  $D$ , составим еще одно уравнение. Сравним коэффициенты при  $x^3$ , получим  $8=B+D$ . Решив систему уравнений

$$\begin{cases} B + D = 8, \\ -16B + 16D = 1, \end{cases}$$

находим  $D=129/32$ ,  $B=127/32$ .

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} dx &= \int \left[ x + \frac{33/16}{(x-2)^2} + \frac{127/32}{x-2} - \frac{31/16}{(x+2)^2} + \frac{129/32}{x+2} \right] dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{127}{32} \ln|x-2| + \frac{31}{16(x+2)} + \frac{129}{32} \ln|x+2| + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1426. Найти интеграл  $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^5}$ .

△ Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью и можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной  $x-1=t$ ; тогда  $x=t+1$  и  $dx=dt$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^5} &= \int \frac{(t+1)^2 dt}{t^5} = \int \frac{t^2+2t+1}{t^5} dt = \int \frac{dt}{t^3} + 2 \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^5} = \\ &= -\frac{1}{2t^2} - \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} - \\ &\quad - \frac{1}{4(x-1)^4} + C = -\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1427. Найти интеграл  $\int \frac{x dx}{x^4+6x^2+5}$ .

△ Преобразуем знаменатель:  $x^4+6x^2+5=(x^2+3)^2-4$ . Теперь имеем

$$\int \frac{x dx}{x^4+6x^2+5} = \int \frac{x dx}{(x^2+3)^2-4}.$$

Произведем замену  $x^2 + 3 = t$ , тогда  $2x dx = dt$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^4 + 6x^2 + 5} &= \int \frac{x dx}{(x^2 + 3)^2 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5} + C. \end{aligned}$$

Из последних двух примеров видим, что иногда перед интегрированием рациональной дроби следует произвести замену переменной. ▲

Найти интегралы:

1428.  $\int \frac{x+2}{x(x-3)} dx.$       1429.  $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)} dx.$

1430.  $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)} dx.$       1431.  $\int \frac{dx}{x^3-8}.$

1432.  $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81} dx.$       1433.  $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}.$

1434.  $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx.$       1435.  $\int \frac{(19/16)x^2+x+1}{(x^2+4)(x^2+2x+5)} dx.$

1436.  $\int \frac{x^2+2}{x^4+4} dx.$       1437.  $\int \frac{x^2 dx}{x^2-4x+3}.$

● Представить знаменатель в виде  $x^4+4 = (x^2+2)^2 - 4x^2$ .

1438.  $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5} dx.$       1439.  $\int \frac{x^4}{x^4-16} dx.$

1440.  $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x} dx.$

3. Интегралы вида  $\int R(e^x) dx$ , где  $R$  — рациональная функция. С помощью подстановки  $e^x = t$ , откуда  $e^x dx = dt$ ,  $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$ , интеграл указанного вида преобразуется в интеграл от рациональной функции

1441. Найти интеграл  $\int \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx.$

△ Положим  $e^x = t$ ; тогда  $e^x dx = dt$ ,  $dx = \frac{dt}{t}$ , откуда

$$\int \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx = \int \frac{3t^2 + t + 1}{t(t^2 - 2t - 3)} dt.$$

Так как  $t(t^2 - 2t - 3) = t(t+1)(t-3)$ , то разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{3t^2 + t + 1}{t(t+1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-3}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$3t^2 + t + 1 = A(t+1)(t-3) + Bt(t-3) + Ct(t+1).$$

Если  $t=0$ , то  $1 = -3A$ , т. е.  $A = -1/3$ ; если же  $t=-1$ , то  $2 = 4B$ , т. е.  $B = 1/2$ ; наконец, если  $t=3$ , то  $31 = 12C$ , т. е.  $C = 31/12$ .

Итак,

$$\frac{3t^2 + t + 1}{t(t^2 - 2t - 3)} = -\frac{1}{3t} + \frac{1}{2(t+1)} + \frac{31}{12(t-3)}.$$

и значит,

$$\begin{aligned} \int \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx &= \int \frac{3t^2 + t + 1}{t(t+1)(t-3)} dt = -\frac{1}{3} \ln |t| + \frac{1}{2} \ln |t+1| + \frac{31}{12} \ln |t-3| + C = \\ &= -\frac{1}{3} \ln |e^x| + \frac{1}{2} \ln |e^x + 1| + \frac{31}{12} \ln |e^x - 3| + C = \\ &= -\frac{x}{3} + \frac{1}{2} \ln |e^x + 1| + \frac{31}{12} \ln |e^x - 3| + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Найти интегралы:

1442.  $\int \frac{e^{2x} + 3e^x + 16}{e^{4x} - 16} dx.$

1443.  $\int \frac{2e^x + 3}{(2e^{2x} - e^x - 1)(e^{2x} + 1)} dx.$

### § 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Интегралы вида  $\int R(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \dots) dx$ , где  $R$  — рациональная функция;  $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$  — целые числа. С помощью подстановки  $ax+b = t^s$ , где  $s$  — наименьшее общее кратное чисел  $n_1, n_2, \dots$ , указанный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

1444. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{(2x+1)^{2/3} - (2x+1)^{1/2}}.$

$\Delta$  Здесь  $n_1 = 3, n_2 = 2$ ; поэтому  $s = 6$ . Применим подстановку  $2x+1 = t^6$ ; тогда  $x = (t^6 - 1)/2, dx = 3t^5 dt$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt = \\ &= 3 \int \left( t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{3}{2} t^2 + 3t + 3 \ln |t-1| + C. \end{aligned}$$

Возвратимся к старой переменной. Так как  $t = (2x+1)^{1/6}$ , то

$$I = \frac{3}{2} (2x+1)^{1/3} + 3(2x+1)^{1/6} + 3 \ln \left| \sqrt[6]{2x+1} - 1 \right| + C. \blacktriangle$$

2. Интегралы вида  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ . Такие интегралы путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена приводятся к табличным интегралам XX или XXI.

1445. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$

$\Delta$  Преобразуем квадратный трехчлен к виду  $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$ . Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} = \ln |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + C. \blacktriangle$$

1446. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}}.$

$$\begin{aligned} \Delta: \int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(x - \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x - 2/3}{1/3} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin (3x - 2) + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

3. Интегралы вида  $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ . Для нахождения этого интеграла выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня, и разложим интеграл на сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + B - \frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left( B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{aligned}$$

Первый из полученных интегралов есть табличный интеграл XVII, а второй рассмотрен в п. 2 § 3.

1447. Найти интеграл  $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx$ .

△ Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx &= \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8) - 13}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx = \\ &= \frac{5}{4} \int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx - 13 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = \\ &= \frac{5}{2} \sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{5}{2} \sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}} \ln \left| x+2 + \sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}} \right| + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1448. Найти интеграл  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}} dx$ .

$$\begin{aligned} \triangle \int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}} dx &= \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6) + 13}{\sqrt{-x^2+6x-8}} dx = \\ &= -\frac{3}{2} \int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}} dx + 13 \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = \\ &= -3 \sqrt{-x^2+6x-8} + 13 \arcsin(x-3) + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

4. Интегралы вида  $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ . С помощью подстановки  $x - \alpha = 1/t$  этот интеграл приводится к рассмотренному в п. 2.

1449. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$ .

△ Положим  $x = 1/t$ , тогда  $dx = -(1/t^2) dt$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} &= - \int \frac{(dt)/t^2}{(1/t)\sqrt{5/t^2-2/t+1}} = \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} = - \ln \left| t-1 + \sqrt{t^2-2t+5} \right| + C = \\ &= - \ln \left| \frac{1}{x} - 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 5} \right| + C = - \ln \left| \frac{1-x + \sqrt{5x^2-2x+1}}{x} \right| + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1450. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$ .

△ Полагаем  $x-1=1/t$ , тогда  $x=1/t+1$  и  $dx=-(1/t^2)dt$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} &= -\int \frac{(dt)/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}} = \\ &= -\int \frac{dt}{t\sqrt{-1-\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} = \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|+C = \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+C = \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right|+C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1451. Найти интеграл  $I=\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} dx$ .

△ Записав числитель подынтегральной функции в виде  $3x+2=3(x+1)-1$ , получим

$$I=\int \frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} dx.$$

Представим данный интеграл как разность двух интегралов:

$$I=3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

К первому интегралу применим формулу XXI, а ко второму — подстановку  $x+1=1/t$ :

$$\begin{aligned} I &= 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \int \frac{(dt)/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}} = \\ &= 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \\ &= 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right| + C = \\ &= 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right| + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

5. Интегралы вида  $\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ , где  $P_n(x)$  — многочлен  $n$ -й степени.

Интеграл такого вида находится с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где  $Q_{n-1}(x)$  — многочлен  $(n-1)$ -й степени с неопределенными коэффициентами,  $\lambda$  — число.

Дифференцируя указанное тождество и приводя результат к общему знаменателю, получим равенство двух многочленов, из которого можно определить коэффициенты многочлена  $Q_{n-1}(x)$  и число  $\lambda$ .

1452. Найти интеграл  $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$ .

$\Delta$  Здесь  $n=3$ , поэтому соответствующее тождество имеет вид

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (b_0x^2 + b_1x + b_2) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Дифференцируя обе его части, получаем

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} &= (2b_0x + b_1) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \\ &+ (b_0x^2 + b_1x + b_2) \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + \lambda \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}. \end{aligned}$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (2b_0x + b_1)(x^2 + 2x + 2) + (b_0x^2 + b_1x + b_2)(x+1) + \lambda,$$

или

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 3b_0x^3 + (5b_0 + 2b_1)x^2 + (4b_0 + 3b_1 + b_2)x + (2b_1 + b_2 + \lambda).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим

$$\begin{cases} 3b_0 = 1, \\ 5b_0 + 2b_1 = 2, \\ 4b_0 + 3b_1 + b_2 = 3, \\ 2b_1 + b_2 + \lambda = 4. \end{cases}$$

Решая систему, найдем  $b_0 = 1/3$ ,  $b_1 = 1/6$ ,  $b_2 = 7/6$ ,  $\lambda = 5/2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx &= \left( \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \\ &+ \frac{5}{2} \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \right| + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Найти интегралы:

1453.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}$ . 1454.  $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$ .

1455.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}}$ . 1456.  $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$ .

1457.  $\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx$ . 1458.  $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}} dx$ .

1459.  $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$ . 1460.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$ .

1461.  $\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} dx$ . 1462.  $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}} dx$ .

6. Интегралы от дифференциальных биномов  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ , где  $m, n, p$  — рациональные числа. Как доказал П. Л. Чебышев, интегралы от дифференциальных биномов выражаются через элементарные функции только в трех случаях:

1)  $p$  — целое число, тогда данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки  $x = t^s$ , где  $s$  — наименьшее общее кратное знаменателей дробей  $m$  и  $n$ ;

2)  $(m+1)/n$  — целое число, в этом случае данный интеграл рационализируется с помощью подстановки  $a + bx^n = t^s$ ;

3)  $(m+1)/n + p$  — целое число, в этом случае к той же цели ведет подстановка  $ax^{-n} + b = t^s$ , где  $s$  — знаменатель дроби  $p$ .

1463. Найти интеграл 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[4]{x} + 1)^{10}}.$$

$\Delta$  Здесь подынтегральную функцию можно записать в виде  $x^{-1/2} (x^{1/4} + 1)^{-10}$ , т. е.  $p = -10$  — целое число. Значит, имеем первый случай интегрируемости дифференциального бинома. Поэтому следует применять подстановку  $x = t^4$ ; тогда  $dx = 4t^3 dt$  и искомый интеграл принимает вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[4]{x} + 1)^{10}} = \int \frac{4t^3 dt}{t^2 (t+1)^{10}} = 4 \int \frac{t dt}{(t+1)^{10}}.$$

Последний интеграл находится так:

$$\begin{aligned} \int \frac{t dt}{(t+1)^{10}} &= \int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}} dt = \int \frac{dt}{(t+1)^9} - \int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = \\ &= \int (t+1)^{-9} d(t+1) - \int (t+1)^{-10} d(t+1) = -\frac{1}{8(t+1)^8} + \frac{1}{9(t+1)^9} + C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[4]{x} + 1)^{10}} = -\frac{1}{2(\sqrt[4]{x} + 1)^8} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x} + 1)^9} + C. \blacktriangle$$

1464. Найти интеграл 
$$\int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$\Delta$  Переписав подынтегральную функцию в виде  $x^3 (a^2 - x^2)^{-3/2}$ , имеем  $m=3$ ,  $n=2$ ,  $p=-3/2$ . Так как  $(m+1)/n = (3+1)/2 = 2$  — целое число, то имеет место второй случай интегрируемости. Используя подстановку  $a^2 - x^2 = t^2$ , получим  $-2x dx = 2t dt$ ,  $x dx = -t dt$ ,  $x^2 = a^2 - t^2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int x^3 (a^2 - x^2)^{-3/2} dx &= - \int (a^2 - t^2) t^{-3} \cdot t dt = - \int \frac{a^2 - t^2}{t^2} dt = \\ &= \int dt - a^2 \int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{a^2}{t} + C = \frac{t^2 + a^2}{t} + C = \frac{2a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1465. Найти интеграл 
$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}.$$

$\Delta$  Здесь  $m=-4$ ,  $n=2$ ,  $p=-1/2$  и  $(m+1)/n + p = (-4+1)/2 - 1/2 = -2$  — целое число. Поэтому имеет место третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Полагаем  $x^{-2} + 1 = t^2$ ; тогда  $-2x^{-3} dx = 2t dt$ ,  $x^{-3} dx = -t dt$ . Преобразуем данный интеграл таким образом:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4} (1+x^2)^{-1/2} dx = \\ &= \int x^{-4} [x^2(x^{-2} + 1)]^{-1/2} dx = \int x^{-2} (x^{-2} + 1)^{-1/2} x^{-3} dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= - \int (t^2 - 1) t^{-1} t dt = - \int (t^2 - 1) dt = \\ &= t - \frac{t^3}{3} + C = \sqrt{x^{-2} + 1} - \frac{\sqrt{(x^{-2} + 1)^3}}{3} + C = \\ &= \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1 + x^2)^3}}{3x^3} + C = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{3x^3} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Найти интегралы:

$$1466. \int \frac{dx}{x (\sqrt[3]{x+1})^2} \quad 1467. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx.$$

$$1468. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} \quad 1469. \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}.$$

$$1470. \int \sqrt[3]{x} \sqrt{5x \sqrt[3]{x} + 3} dx. \quad 1471. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2-x^2}}.$$

#### § 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Интегралы вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , где  $R$  — рациональная функция.

Интегралы указанного вида приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью так называемой *универсальной тригонометрической подстановки*  $\operatorname{tg}(x/2) = t$ . В результате этой подстановки имеем:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \\ x &= 2 \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

1472. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$ .

$\Delta$  Подынтегральная функция рационально зависит от  $\sin x$  и  $\cos x$ ; применим подстановку  $\operatorname{tg}(x/2) = t$ , тогда  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2) + 2} + C. \blacktriangle$$

1473. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) \cos x}$ .

△ Полагая  $\operatorname{tg}(x/2) = t$ , получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a^2+b^2) - (a^2-b^2) \cos x} &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{(a^2+b^2) - (a^2-b^2) \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= 2 \int \frac{dt}{(a^2+b^2)(1+t^2) - (a^2-b^2)(1-t^2)} = \int \frac{dt}{a^2 t^2 + b^2} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{d(at)}{(at)^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{at}{b} + C = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left( \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Универсальная подстановка  $\operatorname{tg}(x/2) = t$  во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при ее применении  $\sin x$  и  $\cos x$  выражаются через  $t$  в виде рациональных дробей, содержащих  $t^2$ .

В некоторых частных случаях нахождение интегралов вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  может быть упрощено.

1. Если  $R(\sin x, \cos x)$  — нечетная функция относительно  $\sin x$ , т. е. если  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , то интеграл рационализируется подстановкой  $\cos x = t$ .

2. Если  $R(\sin x, \cos x)$  — нечетная функция относительно  $\cos x$ , т. е. если  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , то интеграл рационализируется с помощью подстановки  $\sin x = t$ .

3. Если  $R(\sin x, \cos x)$  — четная функция относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ , т. е. если  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , то к цели приводит подстановка  $\operatorname{tg} x = t$ .

1474. Найти интеграл  $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x) dx}{\cos 2x}$ .

△ Так как подынтегральная функция нечетна относительно синуса, то полагаем  $\cos x = t$ . Отсюда  $\sin^2 x = 1 - t^2$ ,  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$ ,  $dt = -\sin x dx$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sin x + \sin^3 x) dx}{\cos 2x} &= \int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1} = \int \frac{(t^2-2) dt}{2t^2-1} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t^2-4}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2t^2-1} = \\ &= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{2t^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x) dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае интеграл всегда может быть записан в виде  $\int R^*(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx$ .  $\blacktriangle$

1475. Найти интеграл  $\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x) dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}$ .

△ Здесь подынтегральная функция является нечетной относительно косинуса. Поэтому применяем подстановку  $\sin x = t$ ; тогда  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ ,  $\cos x dx = dt$ . Следовательно,

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x) dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{\cos^2 x (1 + \cos^2 x) \cos x dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2) dt}{t^2+t^4}.$$

Так как  $\frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1+t^2)} = 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}$ , то

$$\int \frac{(1-t^2)(2-t^2) dt}{t^2(1+t^2)} = t - \frac{2}{t} - 6 \operatorname{arctg} t + C.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x) dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \operatorname{arctg}(\sin x) + C.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае интеграл всегда может быть записан в виде  $\int R^*(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx$ .  $\blacktriangle$

**1476.** Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$ .

$\triangle$  Подынтегральная функция четна относительно синуса и косинуса. Полагая  $\operatorname{tg} x = t$ ; тогда  $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ;  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ;  $x = \operatorname{arctg} t$ ;  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1}. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C.$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

Заметим, что нахождение интеграла можно упростить, если в исходном интеграле разделить числитель и знаменатель на  $\cos^2 x$ :

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1}. \quad \blacktriangle$$

**2. Интегралы вида  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ .** Выделим здесь два случая, имеющие особенно важное значение.

**Случай 1.** По крайней мере один из показателей  $m$  или  $n$  — нечетное положительное число.

Если  $n$  — нечетное положительное число, то применяется подстановка  $\sin x = t$ ; если же  $m$  — нечетное положительное число, — подстановка  $\cos x = t$ .

**1477.** Найти интеграл  $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$ .

$\triangle$  Полагая  $\sin x = t$ ,  $\cos x dx = dt$ , получим

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^5 x dx &= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \\ &= \int t^4 dt - 2 \int t^6 dt + \int t^8 dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C = \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1478. Найти интеграл  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt{\cos x}}$ .

△ Имеем

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt{\cos x}} = \int \sin^3 x \cos^{-4/3} x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^{-4/3} x \sin x dx.$$

Полагая  $\cos x = t$ ,  $-\sin x dx = dt$ , получим

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt{\cos x}} &= - \int (1 - t^2) t^{-4/3} dt = - \int t^{-4/3} dt + \int t^{2/3} dt = \\ &= 3t^{-1/3} + \frac{3}{5} t^{5/3} + C = \frac{3}{\sqrt{\cos x}} + \frac{3}{5} \cos x \cdot \sqrt{\cos^2 x} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Случай 2. Оба показателя степени  $m$  и  $n$  — четные положительные числа. Здесь следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad (1)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \quad (2)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x). \quad (3)$$

1479. Найти интеграл  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ .

△ Из формулы (1) следует, что

$$\sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x.$$

Применив теперь формулу (2), получаем

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x).$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1480. Найти интеграл  $\int \cos^6 x dx$ .

△ Используя формулу (3), получим

$$\begin{aligned} \int \cos^6 x dx &= \int (\cos^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int dx + \frac{3}{8} \int \cos 2x dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx = \\ &= \frac{1}{8} x + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx = \frac{1}{8} x + \frac{3}{16} \sin 2x + \\
& + \frac{3}{16} \int dx + \frac{3}{16} \int \cos 4x \, dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x \, dx - \\
& - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) = \frac{1}{8} x + \frac{3}{16} \sin 2x + \\
& + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C = \\
& = \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \blacktriangle
\end{aligned}$$

1481. Найти интеграл  $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ .

$$\begin{aligned}
\Delta \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx = \int \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \\
&= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \\
&= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) = \\
&= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x \, dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, d(\sin 2x) = \\
&= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \blacktriangle
\end{aligned}$$

3. Интегралы вида  $\int \operatorname{tg}^m x \, dx$  и  $\int \operatorname{ctg}^m x \, dx$ , где  $m$  — целое положительное число. При нахождении таких интегралов применяется формула  $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$  (или  $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$ ), с помощью которой последовательно понижается степень тангенса или котангенса.

1482. Найти интеграл  $\int \operatorname{tg}^7 x \, dx$ .

$$\begin{aligned}
\Delta \int \operatorname{tg}^7 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^5 x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \operatorname{tg}^5 x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x \, dx = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x (\sec^2 x - 1) \, dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1) \, dx = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C. \blacktriangle
\end{aligned}$$

1483. Найти интеграл  $\int \operatorname{ctg}^6 x \, dx$ .

$$\begin{aligned}
\Delta \int \operatorname{ctg}^6 x \, dx &= \int \operatorname{ctg}^4 x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx = - \int \operatorname{ctg}^4 x \, d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^4 x \, dx = \\
&= - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} - \int \operatorname{ctg}^2 x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx = \\
&= - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx = - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x - x + C. \blacktriangle
\end{aligned}$$

4. Интегралы вида  $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$  и  $\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx$ , где  $n$  — четное положительное число. Такие интегралы находятся аналогично рассмотренным в п. 3 с помощью формулы  $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$  (или  $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ ).

1484. Найти интеграл  $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x dx$ .

$$\begin{aligned} \Delta \int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x dx &= \int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x \cdot \sec^2 x dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^4 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) + 2 \int \operatorname{tg}^6 x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^8 x d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^9 x + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1485. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ .

$$\begin{aligned} \Delta \int \frac{dx}{\sin^4 x} &= \int \operatorname{cosec}^4 x dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \operatorname{cosec}^2 x dx = \\ &= \int \operatorname{cosec}^2 x dx - \int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

5. Интегралы вида  $\int \sec^{2n+1} x dx$  и  $\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x dx$ . Интегралы от нечетной положительной степени секанса или косеканса проще всего находятся по рекуррентным формулам:

$$\int \sec^{2n+1} x dx = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \sec^{2n-1} x dx, \quad (1)$$

$$\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x dx = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \operatorname{cosec}^{2n-1} x dx. \quad (2)$$

1486. Найти интеграл  $\int \operatorname{cosec}^5 x dx$ .

$\Delta$  Применяя рекуррентную формулу (2) при  $2n+1=5$ , т. е. при  $n=2$ , получим

$$\int \operatorname{cosec}^5 x dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4} \int \operatorname{cosec}^3 x dx;$$

полагая теперь  $2n+1=3$ , т. е.  $n=1$ , по той же формуле имеем

$$\int \operatorname{cosec}^3 x dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} x dx.$$

Так как  $\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$ , то

$$\int \operatorname{cosec}^3 x dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$$

$$\int \operatorname{cosec}^5 x dx = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \blacktriangle$$

6. Интегралы вида  $\int \sin mx \cos nx dx$ ,  $\int \cos mx \cos nx dx$ ,  $\int \sin mx \sin nx dx$ . Тригонометрические формулы

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \quad (1)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad (2)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (3)$$

дают возможность произведение тригонометрических функций представить в виде суммы.

1487. Найти интеграл  $\int \sin 2x \cos 5x dx$ .

△ Используя формулу (1), получим

$$\begin{aligned} \int \sin 2x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin 7x + \sin (-3x)] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 7x dx - \frac{1}{2} \int \sin 3x dx = -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{6} \cos 3x + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

1488. Найти интеграл  $\int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx$ .

△ Применим к произведению  $\cos x \cos \frac{x}{2}$  формулу (2):

$$\begin{aligned} \int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx &= \frac{1}{2} \int \left( \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \cos \frac{x}{4} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{4} dx + \frac{1}{2} \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx. \end{aligned}$$

Снова используя ту же формулу, находим

$$\begin{aligned} \int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx &= \frac{1}{4} \int \left( \cos \frac{7x}{4} + \cos \frac{5x}{4} \right) dx + \frac{1}{4} \int \left( \cos \frac{3x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right) dx = \\ &= \frac{1}{7} \sin \frac{7x}{4} + \frac{1}{5} \sin \frac{5x}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{3x}{4} + \sin \frac{x}{4} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Найти интегралы:

1489.  $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$ .

1490.  $\int \frac{dx}{1-\sin x}$ .

1491.  $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x+4\sin x \cos x}$ .

1492.  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x+\sin x}$ .

● Положить  $\operatorname{ctg} x = t$ .

1493.  $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1}$ .

1494.  $\int \sin^3 x dx$ .

1495.  $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin x}$ .

1496.  $\int \sin^2(x/4) \cos^3(x/4) dx$ .

1497.  $\int \cos^4 x dx$ .

1498.  $\int \operatorname{tg}^4(x/2) dx$ .

1499.  $\int \operatorname{ctg}^3 3x dx$ .

1500.  $\int \sec^6 x dx$ .

1501.  $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$ .

1502.  $\int \sec^3 x dx$ .

1503.  $\int \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{cosec} x dx$ .

1504.  $\int \sin 3x \sin x dx$ .

1505.  $\int \cos(x/2) \cos(x/3) dx$ .

7. Тригонометрические подстановки. Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$ ,

$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$ ,  $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx$  приводятся к интегралам от рациональной относительно  $\sin t$  и  $\cos t$  функции с помощью надлежащей тригонометрической подстановки: для первого интеграла  $x = a \sin t$  (или  $x = a \cos t$ ), для второго  $x = a \operatorname{tg} t$  (или  $x = a \operatorname{ctg} t$ ) и для третьего  $x = a \sec t$  (или  $x = a \operatorname{cosec} t$ ).

1506. Найти интеграл  $I = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx$ .

△ Положим  $x = a \sin t$ , тогда  $dx = a \cos t dt$  и заданный интеграл примет вид

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}}{a \sin t} a \cos t dt = \\ &= a \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = a \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} dt = a \int \frac{dt}{\sin t} - a \int \sin t dt = \\ &= a \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + a \cos t + C. \end{aligned}$$

Для нахождения интеграла  $\int \frac{dt}{\sin t}$  мы воспользовались формулой  $\int \frac{dt}{\sin t} = \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + C$ , так как с ее помощью легче перейти к прежней переменной  $x$ .

Таким образом, получаем

$$I = a \ln \left| \frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t} \right| + a \cos t + C,$$

где  $\sin t = x/a$ ,  $\cos t = \sqrt{a^2 - x^2}/a$ . Следовательно,

$$I = a \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + \sqrt{a^2 - x^2} + C. \blacktriangle$$

1507. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 + x^2}}$ .

△ Применим подстановку  $x = a \operatorname{tg} t$ , откуда  $dx = a \sec^2 t dt$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{a \sec^2 t dt}{a \operatorname{tg} t \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1}{a} \int \frac{\sec^2 t dt}{\operatorname{tg} t \sec t} = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{\sec t}{\operatorname{tg} t} dt = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + C, \end{aligned}$$

где  $\operatorname{tg} t = x/a$  и, следовательно,  $\operatorname{ctg} t = a/x$ ,  $\operatorname{cosec} t = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = \sqrt{a^2 + x^2}/x$ . Итак,

$$I = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x} \right| + C. \blacktriangle$$

1508. Найти интеграл  $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ .

△ Применим подстановку  $x = a \sec t$ , откуда  $dx = a \sec t \operatorname{tg} t dt$ . Тогда получим

$$I = \int \frac{a^2 \sec^2 t \cdot a \sec t \operatorname{tg} t}{\sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2}} dt = a^2 \int \sec^3 t dt.$$

Далее применим рекуррентную формулу (1) п. 5 при  $n=1$ :

$$\begin{aligned} \int \sec^3 t dt &= \frac{1}{2} \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{2} \int \sec t dt = \frac{\sin t}{2 \cos^2 t} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\cos t} = \\ &= \frac{\sin t}{2 \cos^2 t} + \frac{1}{2} \ln |\sec t + \operatorname{tg} t| + C, \end{aligned}$$

где  $\sec t = x/a$ ,  $\cos t = a/x$ ,  $\sin t = \sqrt{x^2 - a^2}/x$ ,  $\operatorname{tg} t = \sqrt{x^2 - a^2}/a$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^2 \sin t}{2 \cos^2 t} + \frac{a^2}{2} \ln |\sec t + \operatorname{tg} t| + C = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Найти интегралы:

$$1509. \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

$$1510. \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}. \quad 1511. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-1}}.$$

### § 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

Найти интегралы:

$$1512. \int \sin^2 x \sin 3x dx.$$

$$1513. \int (2x^2 - 2x + 1) e^{-x/2} dx.$$

$$1514. \int \frac{\ln x}{x^3} dx.$$

$$1515. \int \frac{x^2-2}{x^2+1} \operatorname{arctg} x dx.$$

$$1516. \int (2x^2-1) \cos 2x dx.$$

$$1517. \int x \ln^2 x dx.$$

$$1518. \int \frac{2e^{2x}-e^x-3}{e^{2x}-2e^x-3} dx.$$

$$1519. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$1520. \int \sqrt{2^x-1} dx.$$

$$1521. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

$$1522. \int \sqrt{6+4x-2x^2} dx.$$

$$1523. \int e^{2x} \sin e^x dx.$$

$$1524. \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{2+5 \operatorname{tg}^2 x}}.$$

$$1525. \int \sin 2x \ln \cos x dx.$$

$$1526. \int (x+2) \cos(x^2+4x+1) dx. \quad 1527. \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$$

$$1528. \int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx.$$

$$1529. \int \ln(x^2+x) dx.$$

$$1530. \int \frac{dx}{x^4+x^8}.$$

$$1531. \int \cos \ln x dx.$$

$$1532. \int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$1533. \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx.$$

$$1534. \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx.$$

$$1535. \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}.$$

$$1536. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$1537. \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

## ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Разделим отрезок  $[a, b]$  на  $n$  произвольных частей точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , выберем на каждом элементарном отрезке  $[x_{k-1}, x_k]$  произвольную точку  $\xi_k$  и найдем длину каждого такого отрезка:  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ . *Интегральной суммой* для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  называется сумма вида  $\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ , причем эта сумма имеет конечный предел  $I$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что при  $\max \Delta x_k < \delta$  неравенство  $|\sigma - I| < \varepsilon$  выполняется при любом выборе чисел  $\xi_k$ .

*Определенным интегралом* от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  (или в пределах от  $a$  до  $b$ ) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков ( $\max \Delta x_k$ ) стремится к нулю:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка  $[a, b]$  на элементарные отрезки и от выбора точек  $\xi_k$  (теорема существования определенного интеграла).

Числа  $a$  и  $b$  соответственно называются *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Если  $f(x) > 0$  на  $[a, b]$ , то определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  геометрически представляет собой площадь *криволинейной трапеции* — фигуры, ограниченной линиями  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  (рис. 42).

Основные свойства определенного интеграла

$$1^{\circ} \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

$$2^{\circ} \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$3^{\circ} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$4^{\circ} \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

$$5^{\circ} \int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx, \text{ где } C \text{ — постоянная.}$$

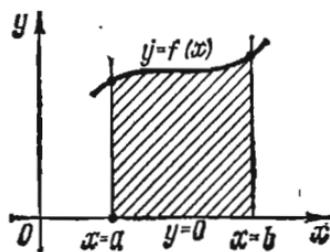


Рис. 42

6°. Оценка определенного интеграла: если  $m \leq f(x) \leq M$  на  $[a, b]$ , то

$$m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a).$$

Правила вычисления определенных интегралов

1. Формула Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$ —первообразная для  $f(x)$ , т. е.  $F'(x) = f(x)$ .

2. Интегрирование по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ —непрерывно дифференцируемые функции на отрезке  $[a, b]$ .

3. Замена переменной:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,$$

где  $x = \varphi(t)$ —функция, непрерывная вместе со своей производной  $\varphi'(t)$  на отрезке  $\alpha \leq t \leq \beta$ ,  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ ;  $f[\varphi(t)]$ —функция, непрерывная на  $[\alpha, \beta]$ .

4. Если  $f(x)$ —нечетная функция, т. е.  $f(-x) = -f(x)$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Если  $f(x)$ —четная функция, т. е.  $f(-x) = f(x)$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

1538. Вычислить интеграл  $\int_0^1 x^2 dx$  как предел интегральной суммы.

△ Здесь  $f(x) = x^2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ; разделим отрезок  $[0, 1]$  на  $n$  равных частей, тогда  $\Delta x_k = (b-a)/n = 1/n$ ; выберем  $\xi_k = x_k$ . Имеем:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1;$$

$$f(\xi_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2; f(\xi_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, f(\xi_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2; f(\xi_k) \Delta x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Здесь использована формула суммы квадратов натуральных чисел. ▲

1539. Вычислить  $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$  по формуле Ньютона—Лейбница.

$$\Delta \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}. \blacktriangle$$

1540. Оценить интеграл  $\int_{10}^{18} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+x^4}}$ .

$\Delta$  Так как  $|\cos x| \leq 1$ , то при  $x > 10$  получим неравенство  $\left| \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} \right| < 10^{-2}$ .

Следовательно,

$$\left| \int_{10}^{18} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+x^4}} \right| < 8 \cdot 10^{-2} < 10^{-1}, \text{ т. е. } \left| \int_{10}^{18} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+x^4}} \right| < 0,1. \blacktriangle$$

1541. Оценить интеграл  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$ .

$\Delta$  Поскольку  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ , имеем

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{5+3\cos^2 x} < \frac{1}{5} \text{ и } \frac{\pi}{16} < \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{10}. \blacktriangle$$

1542. Вычислить  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ .

$\Delta$  Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим  $u = x$ ,  $dv = e^{-x} dx$ , откуда  $du = dx$ ,  $v = -e^{-x}$ . Тогда

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}. \blacktriangle$$

1543. Вычислить  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ .

$\Delta$  Положим  $\ln x = t$ ; тогда  $\frac{dx}{x} = dt$ ; если  $x=1$ , то  $t=0$ ; если  $x=e$ , то  $t=1$ .

Следовательно,

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}. \blacktriangle$$

1544. Вычислить  $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ .

△ Положим  $x=r \sin t$ ; тогда  $dx=r \cos t dt$ ; если  $x=0$ , то  $t=0$ ; если  $x=r$ , то  $t=\pi/2$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2-r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} r^2 \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{r^2}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left( 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right] = \frac{\pi r^2}{4}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1545. Вычислить  $I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$ .

△ Подынтегральная функция — четная, а потому  $I = 2 \int_0^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$ . Интегрируем по частям, полагая  $u = x$ ,  $dv = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$ ; тогда  $du = dx$ ,  $v = \frac{1}{\cos x}$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx &= \frac{x}{\cos x} \Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi}{3 \cos(\pi/3)} - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= \frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $I = 2 \left( \frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} \right)$ . ▲

1546. Вычислить  $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

△ Подынтегральная функция — нечетная, следовательно,  $I = 0$ . ▲

1547. Вычислить  $\int_0^1 x dx$  как предел интегральной суммы.

1548. Вычислить  $\int_0^1 e^x dx$  как предел интегральной суммы.

1549. Оценить интеграл  $\int_0^1 x(1-x)^2 dx$ .

1550. Оценить интеграл  $\int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} dx$ .

1551. Оценить интеграл  $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ .

Вычислить интегралы:

$$1552. \int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx. \quad 1553. \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}.$$

$$1554. \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx. \quad 1555. \int_0^1 e^{x+e^x} dx.$$

$$1556. \int_1^{e^{\pi/2}} \cos \ln x dx. \quad 1557. \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx.$$

$$1558. \int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{dx}{e^x-1}. \quad 1559. \int_0^{2\pi} \cos 5x \cos x dx.$$

$$1560. \int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx. \quad 1561. \int_0^{\pi/4} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx.$$

$$1562. \int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}. \quad 1563. \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx.$$

$$1564. \int_{-3}^3 \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1} dx. \quad 1565. \int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx.$$

● Использовать свойство нечетной функции.

● Использовать свойство четной функции.

1566. Доказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n \end{cases}$$

( $m$  и  $n$  — целые положительные числа).

## § 2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

**1. Основные понятия.** Несобственными интегралами называются: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственный интеграл от функции  $f(x)$  в пределах от  $a$  до  $+\infty$  определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если же предел не существует или равен бесконечности, — *расходящимся*.

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx.$$

Если функция  $f(x)$  имеет бесконечный разрыв в точке  $c$  отрезка  $[a, b]$  и непрерывна при  $a \leq x < c$  и  $c < x \leq b$ , то по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^{c-\alpha} f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{c+\beta}^b f(x) dx.$$

Несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  (где  $f(c) = \infty$ ,  $a < c < b$ ) называется *сходящимся*, если существуют оба предела в правой части равенства, и *расходящимся*, если не существует хотя бы один из них.

1567. Вычислить несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} \cos x dx$  (или установить его расходимость).

△ Имеем

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b,$$

т. е. предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл расходится. ▲

1568. Вычислить  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ .

△ Найдем

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^{-1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{a} \right) = 1,$$

т. е. несобственный интеграл сходится. ▲

1569. Найти  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

△ Подынтегральная функция — четная, поэтому  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ . Тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ , т. е. несобственный интеграл сходится. ▲

1570. Найти  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ .

△ Подынтегральная функция  $f(x) = 1/x$  в точке  $x=0$  неограничена, а потому имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0} \ln x \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln a) = +\infty,$$

т. е. несобственный интеграл расходится. ▲

1571. Найти  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ .

△ Имейм

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b xe^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-b^2} \right) = \frac{1}{2},$$

т. е. несобственный интеграл сходится. ▲

Вычислить несобственные интегралы:

1572.  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ . 1573.  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$ .

1574.  $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ . 1575.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ . 1576.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ .

1577.  $\int_0^1 x \ln^2 x dx$ . 1578.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ .

2. Признаки сравнения. При исследовании сходимости несобственных интегралов пользуются одним из признаков сравнения.

1. Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  определены для всех  $x \geq a$  и интегрируемы на отрезке  $[a, A]$ , где  $A \geq a$ , и если  $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$  для всех  $x \geq a$ , то из сходимости интеграла  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  вытекает сходимость интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , причем

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

2. (а) Если при  $x \rightarrow +\infty$  функция  $f(x) \geq 0$  является бесконечно малой порядка  $p > 0$  по сравнению с  $1/x$ , то интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

(б) Если функция  $f(x) \geq 0$  определена и непрерывна в промежутке  $a \leq x < b$  и является бесконечно большой порядка  $p$  по сравнению с  $1/(b-x)$  при  $x \rightarrow b-0$ , то интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится при  $p < 1$  и расходится при  $p \geq 1$ .

1579. Исследовать сходимость интеграла  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ .

△ По определению

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A x^{-p} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_a^A = \\ &= \frac{1}{-p+1} \lim_{A \rightarrow +\infty} A^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} a^{-p+1}. \end{aligned}$$

Допустим, что  $p > 1$ ; тогда  $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{-p+1} = 0$ . Значит, при  $p > 1$  интеграл сходится. Пусть  $p \leq 1$ ; тогда  $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{-p+1} = \infty$ , т. е. интеграл  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  при  $p \leq 1$  расходится.  $\blacktriangle$

**1580.** Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$  (интеграл Френеля).

$\Delta$  Пусть  $x = \sqrt{\tau}$ ; тогда  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau$ . Представим стоящий справа интеграл в виде суммы:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau.$$

Первое слагаемое есть собственный интеграл, так как  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} = 0$ ; а ко второму применим интегрирование по частям, полагая  $u = 1/\sqrt{\tau}$ ,  $dv = \sin \tau d\tau$ :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau = -\frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau}} \Big|_{\pi/2}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau^3}} d\tau = -\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos \tau}{\tau^{3/2}} d\tau.$$

Последний интеграл сходится, так как  $\frac{\cos \tau}{\tau^{3/2}} \leq \frac{1}{\tau^{3/2}}$ , а интеграл  $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{3/2}}$  сходится.

Поэтому  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau$  сходится на основании признака (2а), а следовательно, данный интеграл также сходится.  $\blacktriangle$

**1581.** Исследовать сходимость интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$ .

$\Delta$  Подынтегральная функция  $f(x) = 1/(1+x^{10})$  в промежутке интегрирования меньше, чем  $\varphi(x) = 1/x^{10}$ , а интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}}$  является сходящимся. Следовательно, данный интеграл также сходится.  $\blacktriangle$

**1582.** Исследовать сходимость интеграла  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$  ( $a < b$ ).

$\Delta$  По определению

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p} = -\frac{1}{-p+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (b-x)^{-p+1} \Big|_a^{b-\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{p-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-p+1} + \frac{1}{-p+1} (b-a)^{-p+1}. \end{aligned}$$

Если  $p < 1$ , то  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-p+1} = 0$ ; если же  $p > 1$ , то  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-p+1} = \infty$ ; если, наконец,  $p = 1$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(b-x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \infty.$$

Следовательно, при  $p < 1$  интеграл  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$  сходится, а при  $p \geq 1$  — расходится. ▲

1583. Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ .

△ Подынтегральная функция является бесконечно большой при  $x \rightarrow 1$ . Представим ее в следующем виде:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}},$$

т. е. порядок этой бесконечно большой функции при  $x \rightarrow 1$  по сравнению с  $1/(1-x)$  равен  $p = 1/3 < 1$ . Поэтому данный интеграл сходится на основании признака (26). ▲

1584. Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x} - 1} dx$ .

△ Подынтегральная функция  $f(x)$  в промежутке интегрирования положительна и  $f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ . Пользуясь теоремой об эквивалентных бесконечно малых, преобразуем числитель и знаменатель подынтегральной дроби; имеем  $\ln(1+\sqrt[3]{x}) \sim x^{1/3}$ , а  $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x$  при  $x \rightarrow 0$ , откуда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \infty,$$

т. е.  $f(x)$  является бесконечно большой порядка  $p = 2/3$  по сравнению с  $1/x$ . Следовательно, по признаку (26) заданный интеграл сходится. ▲

Исследовать сходимость следующих несобственных интегралов:

1585.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ . 1586.  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$ . 1587.  $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^3}} dx$ .

1588.  $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$ . 1589.  $\int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3} dx$ .

1590.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ . 1591.  $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$ .

### § 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y=f(x)$  [ $f(x) \geq 0$ ], прямыми  $x=a$  и  $x=b$  и отрезком  $[a, b]$  оси  $Ox$ , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y=f_1(x)$  и  $y=f_2(x)$  [ $f_1(x) \leq f_2(x)$ ] и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ , находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ , то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми  $x=a$ ,  $x=b$  и отрезком  $[a, b]$  оси  $Ox$ , выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt,$$

где  $t_1$  и  $t_2$  определяются из уравнений  $a=x(t_1)$ ,  $b=x(t_2)$  [ $y(t) \geq 0$  при  $t_1 < t < t_2$ ].

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением  $\rho=\rho(\theta)$  и двумя полярными радиусами  $\theta=\alpha$ ,  $\theta=\beta$  ( $\alpha < \beta$ ), находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta.$$

1592. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой  $y=4x-x^2$  и осью  $Ox$ .

△ Парабола пересекает ось  $Ox$  в точках  $O(0; 0)$  и  $M(4; 0)$ . Следовательно,

$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[ 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangle$$

1593. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой  $y=(x-1)^2$  и гиперболой  $x^2 - y^2/2 = 1$ .

△ Найдем точки пересечения параболы и гиперболы, для чего решим совместно уравнения этих кривых:

$$x^2 - \frac{(x-1)^4}{2} = 1, \text{ или } x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Левую часть последнего уравнения можно разложить на множители:  $(x-1)(x-3)(x^2+1)=0$ , откуда  $x_1=1$ ,  $x_2=3$  и  $y_1=0$ ,  $y_2=4$ . Таким образом, заданные кривые пересекаются в точках  $A(1; 0)$  и  $B(3; 4)$  (рис. 43). Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 [\sqrt{2(x^2-1)} - (x-1)^2] dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} [x\sqrt{x^2-1} + \ln|x + \sqrt{x^2-1}|]_1^3 - \frac{1}{3} [(x-1)^3]_1^3 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} [3\sqrt{8} + \ln(3 + \sqrt{8})] - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(3 + \sqrt{8}) \approx 4,58 \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangle \end{aligned}$$

1594. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды  $x=2(t-\sin t)$ ,  $y=2(1-\cos t)$  (см. рис. 5) и осью  $Ox$ .

△ Здесь  $dx = 2(1 - \cos t) dt$ , а  $t$  изменяется от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 2\pi$ . Следовательно,

$$S = \int_0^{2\pi} 2^2 (1 - \cos t)^2 dt = 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\ = 4 \left[ t - 2 \sin t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 12\pi \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangle$$

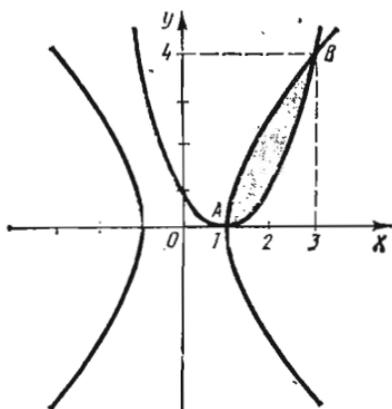


Рис. 43

1595. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной лемниска-  
той  $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$  (см. рис. 2).

△ Четвертой части искомой площади соответствует изменение  $\theta$  от 0 до  $\pi/4$ , а потому

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\theta d\theta = 2 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = 2 \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangle$$

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1596.  $y = -x^2$ ,  $x + y + 2 = 0$ .

1597.  $y = 16/x^2$ ,  $y = 17 - x^2$  (I четверть).

1598.  $y^2 = 4x^3$ ,  $y = 2x^2$ .

1599.  $xy = 20$ ,  $x^2 + y^2 = 41$  (I четверть).

1600.  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $x = 0$ .

1601.  $y = 0,25x^2$ ,  $y = 3x - 0,5x^2$ .

1602.  $xy = 4\sqrt{2}$ ,  $x^2 - 6x + y^2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ .

1603.  $x = 12 \cos t + 5 \sin t$ ,  $y = 5 \cos t - 12 \sin t$ .

1604.  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

1605.  $\rho = 4/\cos(\theta - \pi/6)$ ,  $\theta = \pi/6$ ,  $\theta = \pi/3$ .

1606.  $\rho = a \cos \theta$ ,  $\rho = 2a \cos \theta$ .

1607.  $\rho = \sin^2(\theta/2)$  (справа от луча  $\theta = \pi/2$ ).

1608.  $\rho = a \sin 3\theta$  (площадь одной петли).

1609.  $\rho = 2 \cos \theta$ ,  $\rho = 1$  (вне круга  $\rho = 1$ ).

#### § 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Если кривая  $y=f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  — гладкая (т. е. производная  $y'=f'(x)$  непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx.$$

При параметрическом задании кривой  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  [ $x(t)$  и  $y(t)$  — непрерывно дифференцируемые функции] длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра  $t$  от  $t_1$  до  $t_2$ , вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением  $\rho=\rho(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , то длина дуги равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta.$$

1610. Найти длину дуги кривой  $y^3 = x^3$  от  $x=0$  до  $x=1$  ( $y \geq 0$ ).

△ Дифференцируя уравнение кривой, найдем  $y' = (3/2)x^{1/2}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} = \\ &= \frac{8}{27} \left(\frac{13}{8} \sqrt{13} - 1\right). \blacktriangle \end{aligned}$$

1611. Найти длину дуги кривой  $x = \cos^5 t$ ,  $y = \sin^5 t$  от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = \pi/2$ .

△ Найдем производные по параметру  $t$ :  $\dot{x} = -5 \cos^4 t \sin t$ ,  $\dot{y} = 5 \sin^4 t \cos t$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-5 \cos^4 t \sin t)^2 + (5 \sin^4 t \cos t)^2} dt = 5 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\sin^8 t + \cos^8 t} dt = \\ &= \frac{5}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2t} dt = -\frac{5}{8} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} d(\cos 2t) = \\ &= -\frac{5}{8\sqrt{3}} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2t \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{3} \cdot \cos 2t + \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t}) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{5}{8} \left[ 2 - \frac{\ln(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}} \right]. \blacktriangle \end{aligned}$$

1612. Найти длину дуги кривой  $\rho = \sin^3(\theta/3)$  от  $\theta_1 = 0$  до  $\theta_2 = \pi/2$ .

△ Имеем  $\rho' = \sin^2(\theta/3) \cos(\theta/3)$ . Следовательно,

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^6 \frac{\theta}{3} + \left(\sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3}\right)^2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta = \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos \frac{2\theta}{3}\right) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{3}{2} \sin \frac{2\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} (2\pi - 3\sqrt{3}). \blacktriangle$$

Вычислить длины дуг кривых:

1613.  $y = \ln \sin x$  от  $x = \pi/3$  до  $x = \pi/2$ .

1614.  $y = (2/5)x \sqrt[4]{x} - (2/3)\sqrt[4]{x^3}$  между точками пересечения с осью  $Ox$ .

1615.  $y = x^2/2$  от  $x = 0$  до  $x = 1$ .

1616.  $y = 1 - \ln \cos x$  от  $x = 0$  до  $x = \pi/6$ .

1617.  $y = \operatorname{ch} x$  от  $x = 0$  до  $x = 1$ .

1618.  $x = t^3/3 - t$ ,  $y = t^2 + 2$  от  $t = 0$  до  $t = 3$ .

1619.  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$  от  $t = 0$  до  $t = \ln \pi$ .

1620.  $x = 8 \sin t + 6 \cos t$ ,  $y = 6 \sin t - 8 \cos t$  от  $t = 0$  до  $t = \pi/2$ .

1621.  $x = 9(t - \sin t)$ ,  $y = 9(1 - \cos t)$  (длину дуги одной арки циклоиды).

1622.  $\rho = \theta^2$  от  $\theta = 0$  до  $\theta = \pi$ .

1623.  $\rho = a \sin \theta$ .

1624.  $\rho = a \cos^3(\theta/3)$  от  $\theta = 0$  до  $\theta = \pi/2$ .

1625.  $\rho = 1 - \cos \theta$ .

## § 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА

1. Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений. Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ , может быть выражена как функция от  $x$ , т. е. в виде  $S = S(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), то объем части тела, заключенной между перпендикулярными оси  $Ox$  плоскостями  $x = a$  и  $x = b$ , находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

2. Вычисление объема тела вращения. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой  $y = f(x)$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ , вращается вокруг оси  $Ox$ , то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Если фигура, ограниченная кривыми  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$  [ $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ ] и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , вращается вокруг оси  $Ox$ , то объем тела вращения

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx.$$

1626. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной кривой  $y^2 = (x-1)^3$  и прямой  $x=2$  (рис. 44).

$$\Delta \quad V = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x-1)^3 dx = \frac{1}{4} \pi (x-1)^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \pi \text{ (куб. ед.)}. \blacktriangle$$

1627. Найти объем тела, в основании которого лежит равнобедренный треугольник с высотой  $h$  и основанием  $a$ . Поперечное

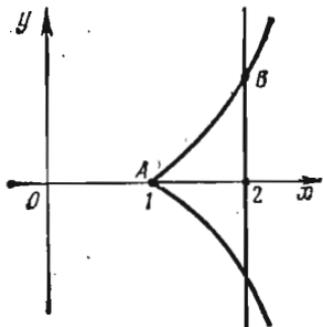


Рис. 44

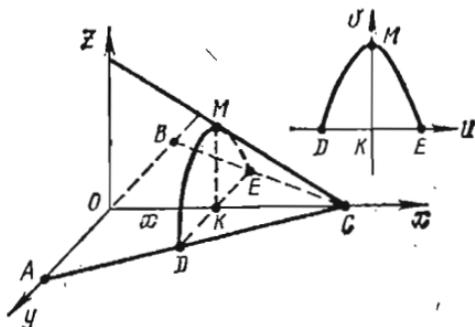


Рис. 45

сечение тела есть сегмент параболы с хордой, равной высоте сегмента (рис. 45).

$\Delta$  Имеем  $|AB|=a$ ,  $|OC|=h$ ,  $|MK|=|DE|$ ,  $|OK|=x$ . Выразим площадь поперечного сечения как функцию от  $x$ , для чего предварительно найдем уравнение параболы. Длину хорды  $DE$  можно найти из подобия соответствующих треугольников, а именно:  $|DE|/a = (h-x)/h$ , т. е.  $|DE| = a(h-x)/h = |MK|$ .

Положим  $|DE|=m$ , тогда уравнение параболы в системе координат  $uKu$  примет вид  $v = m - \frac{4}{m} u^2$ . Отсюда находим площадь поперечного сечения данного тела:

$$S = 2 \int_0^{m/2} \left( m - \frac{4}{m} u^2 \right) du = \frac{2}{3} m^2, \text{ или } S(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 (h-x)^2}{h^2}.$$

Таким образом,

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{h^2} (h-x)^2 dx = \frac{2}{9} a^2 h. \blacktriangle$$

Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси  $Ox$  фигур, ограниченных линиями:

1628.  $y = \frac{64}{x^2+16}$ ,  $x^2 = 8y$ .

1629.  $y^2 = x$ ,  $x^2 = y$ .

1630.  $y = \sqrt{x} e^x$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ .

1631.  $y = x^2/2$ ,  $y = x^3/8$ .

1632. Найти объем тела, ограниченного плоскостями  $x=1$ ,  $x=3$ , если площадь его поперечного сечения обратно пропорциональна квадрату расстояния сечения от начала координат, а при  $x=2$  площадь сечения равна 27 (кв. ед.).

1633. Найти объем цилиндрического клина по его размерам, указанным на рис. 46 (задача Архимеда).

1634. В цилиндрический стакан с водой вложен параболоид вращения вершиной вниз. Основание и высота параболоида совпадают с основанием и высотой цилиндра. Найти объем оставшейся в стакане воды, если радиус основания равен  $r$ , а высота равна  $h$ .

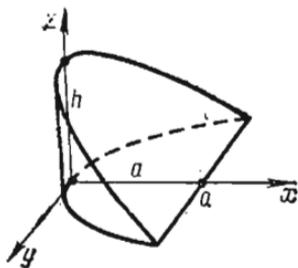


Рис. 46

## § 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Если дуга гладкой кривой  $y=f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) вращается вокруг оси  $Ox$ , то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ), то

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

1635. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  дуги синусоиды  $y = \sin 2x$  от  $x=0$  до  $x=\pi/2$ .

△ Находим  $y' = 2 \cos 2x$ ; тогда

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1+4 \cos^2 2x} dx.$$

Произведем замену переменной:  $2 \cos 2x = t$ ,  $-4 \sin 2x dx = dt$ ;  $\sin 2x dx = (-1/4) dt$ . Найдем пределы интегрирования по  $t$ : если  $x=0$ , то  $t=2$ ; если  $x=\pi/2$ , то  $t=-2$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2} \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_{-2}^2 = \\ &= \frac{\pi}{2} \left( 2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} \right) = \frac{\pi}{2} [2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)] \text{ (кв. ед.). } \blacktriangle \end{aligned}$$

Найти площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси  $Ox$  дуг кривых:

1636.  $y = 2 \operatorname{ch}(x/2)$  от  $x=0$  до  $x=2$ .

1637.  $y = x^3$  от  $x=0$  до  $x=1/2$ .

$$1638. x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

1639.  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  (площадь, образованную вращением одной арки).

## § 7. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ И МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ДУГ И ФИГУР

Пусть на плоскости  $xOy$  задана система материальных точек  $A_1(x_1; y_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2)$ , ...,  $A_n(x_n; y_n)$  с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Статическим моментом  $M_x$  этой системы относительно оси  $Ox$  называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты:

$$M_x = \sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k.$$

Аналогично (как сумма произведений масс точек на их абсциссы) определяется статический момент системы относительно оси  $Oy$ :

$$M_y = \sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k.$$

Моментами инерции  $I_x$  и  $I_y$  системы относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  называются суммы произведений масс точек на квадраты их расстояний от соответствующей оси. Таким образом,

$$I_x = \sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k^2; \quad I_y = \sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k^2.$$

За статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур принимаются соответствующие моменты условных масс, равномерно распределенных вдоль этих дуг и фигур с плотностью (линейной или плоскостной), равной единице.

Статические моменты и моменты инерции дуги плоской кривой  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) вычисляются по формулам

$$M_x = \int_a^b y dL; \quad M_y = \int_a^b x dL; \quad I_x = \int_a^b y^2 dL; \quad I_y = \int_a^b x^2 dL,$$

где  $dL = \sqrt{1 + y'^2} dx$  — дифференциал дуги кривой.

Статические моменты и моменты инерции криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , осью  $Ox$  и двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y dS = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b x dS = \int_a^b xy dx,$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 dS = \int_a^b x^2 y dx.$$

В этих формулах  $dS = y dx$  — дифференциал площади криволинейной трапеции.

1640. Найти статический момент и момент инерции полуокружности  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  ( $-r \leq x \leq r$ ) относительно оси  $Ox$ .

Δ Статический момент  $M_x$  будем вычислять по формуле  $M_x = \int_a^b y dL$ , где

$dL = \sqrt{1+y'^2} dx$ ,  $y' = -x/\sqrt{r^2-x^2}$ . Тогда получим

$$M_x = \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}} dx = r \int_{-r}^r dx = 2r^2.$$

Находим момент инерции относительно оси  $Ox$ :

$$\begin{aligned} I_x &= \int_a^b y^2 dL = \int_{-r}^r (r^2-x^2) \sqrt{1+\frac{r^2}{r^2-x^2}} dx = \\ &= r \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} dx = 2r \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx. \end{aligned}$$

Введем подстановку  $x=r \sin t$ ,  $dx=r \cos t dt$ ; если  $x=0$ , то  $t=0$ ; если  $x=r$ , то  $t=\pi/2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} I_x &= 2r \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2-r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = \\ &= r^3 \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) dt = r^3 \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{2}. \blacktriangle \end{aligned}$$

1641. Найти момент инерции площади эллипса  $x=a \cos t$ ,  $y=b \sin t$  относительно оси  $Oy$ .

$\triangle$  Момент инерции площади эллипса относительно оси  $Oy$  равен  $I_y = \int_{-a}^a x^2 dS$ ,

где  $dS=2y dx$ . Из параметрических уравнений эллипса находим  $dS=2b \sin t \times \times a (-\sin t) dt = -2ab \sin^2 t dt$ , откуда

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \int_{\pi/2}^0 a^2 \cos^2 t (-2ab \sin^2 t) dt = -4a^3b \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} a^3b \int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t) dt = \frac{\pi a^3b}{4}. \blacktriangle \end{aligned}$$

1642. Найти статические моменты и моменты инерции дуги астроиды  $x=a \cos^3 t$ ,  $y=a \sin^3 t$ , лежащей в I четверти (рис. 47).

$\triangle$  В силу симметрии астроиды относительно координатных осей  $M_x=M_y$ ,  $I_x=I_y$ . Поэтому достаточно вычислить моменты относительно оси  $Ox$ . Для I четверти имеем  $0 \leq t \leq \pi/2$ . Находим

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = 3a \sin t \cos t dt, \\ M_x &= \int_a^b y dL = \int_0^{\pi/2} a \cdot \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt = \frac{3a^2}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} a^2, \\ I_x &= \int_a^b y^2 dL = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^6 t \cdot 3a \sin t \cos t dt = \frac{3}{8} a^3 \sin^8 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8} a^3. \end{aligned}$$

Итак,  $M_x=M_y=(3/5) a^2$ ;  $I_x=I_y=(3/8) a^3$ .  $\blacktriangle$

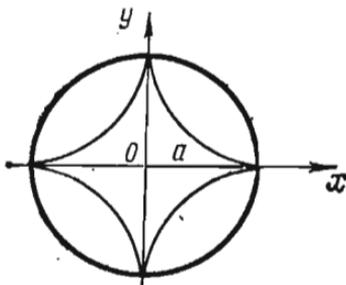


Рис. 47

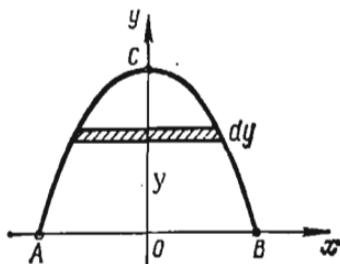


Рис. 48

1643. Найти момент инерции параболического сегмента, у которого хорда равна  $a$ , а стрелка относительно хорды равна  $h$  (рис. 48).

△ Имеем  $|AB|=a$ ,  $|OC|=h$ . Уравнение параболы записывается в виде  $y=h-Nx^2$ , где неопределенный коэффициент  $N$  можно найти, пользуясь тем, что точка  $B(a/2; 0)$  принадлежит параболе:  $0=h-Na^2/4$ , или  $N=4h/a^2$ ; следовательно,  $y=h-4hx^2/a^2$ . Теперь находим искомый момент инерции:

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{-a/2}^{a/2} y^3 dx = \frac{2}{3} \int_0^{a/2} \left( h - \frac{4h}{a^2} x^2 \right)^3 dx = \frac{16}{105} ah^3. \blacktriangle$$

1644. Найти статический момент и момент инерции дуги цепной линии  $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ , где  $0 \leq x \leq a$ , относительно оси  $Ox$ .

1645. Найти статический момент и момент инерции треугольника с основанием  $a$  и высотой  $h$  относительно его основания.

1646. Найти момент инерции параболического сегмента, ограниченного параболой  $y=4-x^2$  и прямой  $y=3$ , относительно оси  $Ox$ .

1647. Найти момент инерции прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  относительно осей симметрии прямоугольника.

1648. Найти полярный момент инерции круга диаметра  $d$ , т. е. момент инерции относительно оси, проходящей через центр круга и перпендикулярной его плоскости.

## § 8. НАХОЖДЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ. ТЕОРЕМЫ ГУЛЬДЕНА

Координаты центра тяжести однородной дуги плоской кривой  $y=f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) выражаются формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x dL, \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b y dL,$$

где  $dL = \sqrt{1+y'^2} dx$ , а  $L$  — длина дуги.

Координаты центра тяжести криволинейной трапеции вычисляются по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x dS = \frac{1}{S} \int_a^b xy dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2S} \int_a^b y dS = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx,$$

где  $dS = y dx$ , а  $S$  — площадь фигуры.

Теоремы Гульдена

Теорема 1. Площадь поверхности, полученной при вращении дуги плоской

кривой вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой и не пересекающей ее, равна длине дуги кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести дуги.

**Теорема 2.** Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг оси, не пересекающей ее и расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры.

**1649.** Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии  $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ ,  $-a \leq x \leq a$ .

△ Так как кривая симметрична относительно оси  $Oy$ , то ее центр тяжести лежит на оси  $Oy$ , т. е.  $\bar{x} = 0$ . Остается найти  $\bar{y}$ . Имеем  $y' = \operatorname{sh}(x/a)$ ; тогда  $dL = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(x/a)} dx = \operatorname{ch}(x/a) dx$ ; длина дуги

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = 2 \int_0^a \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = 2a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^a = 2a \operatorname{sh} 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{2a \operatorname{sh} 1} \int_{-a}^a a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{1}{\operatorname{sh} 1} \int_0^a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2 \operatorname{sh} 1} \int_0^a \left( 1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{sh} 1} \left[ x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \right]_0^a = \frac{a}{2 \operatorname{sh} 1} \left( 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 \right) = \frac{a(2 + \operatorname{sh} 2)}{4 \operatorname{sh} 1} \approx 1,18a. \blacktriangle \end{aligned}$$

**1650.** Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной дугой эллипса  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , расположенной в I четверти, и осями координат.

△ В I четверти при возрастании  $x$  от 0 до  $a$  величина  $t$  убывает от  $\pi/2$  до 0; поэтому

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{S} \int_0^a xy dx = \frac{1}{S} \int_{\pi/2}^0 a \cos t \cdot b \sin t (-a \sin t) dt = \\ &= \frac{a^2 b}{S} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt = \frac{a^2 b}{S} \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2 b}{3S}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой площади эллипса  $S = \pi ab$ , получим  $\bar{x} = (4a^2 b)/(3\pi ab) = (4a)/(3\pi)$ .

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{2S} \int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2S} \int_{\pi/2}^0 b^2 \sin^2 t (-a \sin t) dt = \\ &= \frac{2ab^2}{\pi ab} \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = \frac{2b}{\pi} \left[ \cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{\pi/2}^0 = \frac{4b}{3\pi}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\bar{x} = 4a/(3\pi)$ ,  $\bar{y} = 4b/(3\pi)$ .  $\blacktriangle$

**1651.** Найти площади поверхностей и объемы колец (торов), образованных вращением круга  $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$  вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  ( $a \geq r$ ,  $b \geq r$ ).

△ Если круг вращается вокруг оси  $Ox$ , то центр тяжести круга отстоит от оси вращения на расстоянии  $b$ ; поэтому площадь поверхности, согласно первой

теореме Гульдена, равна  $S_x = 2\pi r \cdot 2\pi b = 4\pi^2 br$ , а объем, согласно второй теореме Гульдена, равен  $V_x = \pi r^2 \cdot 2\pi b = 2\pi^2 br^2$ .

Если же вращение производится вокруг оси  $Oy$ , то расстояние центра тяжести круга от оси  $Oy$  равно  $a$ . Тогда  $S_y = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar$ ,  $V_y = \pi r^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 ar^2$ . ▲

**1652.** Пользуясь теоремой Гульдена, найти координаты центра тяжести четверти круга  $x^2 + y^2 \leq r^2$ .

△ При вращении четверти круга вокруг оси  $Ox$  получим полушар, объем которого равен  $V = (1/2) \cdot (4\pi r^3/3) = 2\pi r^3/3$ . Согласно второй теореме Гульдена,  $V = (\pi r^2/4) \cdot (2\pi \bar{y})$ . Отсюда  $\bar{y} = 2V/(\pi^2 r^2) = 2 \cdot 2\pi r^3/(3\pi^2 r^2) = 4r/(3\pi)$ . Центр тяжести четверти круга лежит на оси симметрии, т. е. на биссектрисе I координатного угла, а потому  $\bar{x} = \bar{y} = 4r/(3\pi)$ . ▲

**1653.** Найти координаты центров тяжести полуокружности  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  и полукруга, ограниченного этой полуокружностью и осью  $Ox$ .

**1654.** Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями  $x=0$ ,  $x=\pi/2$ ,  $y=0$ ,  $y=\cos x$ .

**1655.** Найти координаты центра тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями  $y=4-x^2$ ,  $y=0$ .

**1656.** Найти координаты центра тяжести дуги астроида  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  (в I четверти).

**1657.** Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями  $y=2x-x^2$ ,  $y=0$ .

**1658.** Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями  $x=0$ ,  $x=\pi/2$ ,  $y=0$ ,  $y=\sin x$ .

**1659.** Пользуясь теоремой Гульдена, найти объем тела, образованного вращением полукруга радиуса  $r$  вокруг касательной, параллельной диаметру.

**1660.** Пользуясь теоремой Гульдена, доказать, что центр тяжести треугольника отстоит от его основания на одну треть высоты.

● Найти объем тела, полученного вращением треугольника вокруг основания.

**1661.** Пользуясь теоремой Гульдена, найти объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 и 8 вокруг оси, проходящей через его вершину перпендикулярно диагонали.

## § 9. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ И ДАВЛЕНИЯ

Работа переменной силы  $X=f(x)$ , действующей в направлении оси  $Ox$  на отрезке  $[x_0, x_1]$ , вычисляется по формуле

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx.$$

Для вычисления силы давления жидкости используют закон Паскаля, согласно которому давление жидкости на площадку равно ее площади  $S$ , умноженной на глубину погружения  $h$ , на плотность  $\rho$  и ускорение силы тяжести  $g$ , т. е.

$$P = \rho ghS.$$

**1662.** Какую работу надо совершить, чтобы растянуть

пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растягивается на 1 см?

△ Согласно закону Гука, сила  $X$  Н, растягивающая пружину на  $x$  м, равна  $X = kx$ . Коэффициент пропорциональности  $k$  найдем из условия: если  $x = 0,01$  м, то  $X = 1$  Н; следовательно,  $k = 1/0,01 = 100$  и  $X = 100x$ . Тогда

$$A = \int_0^{0,04} 100x \, dx = 50x^2 \Big|_0^{0,04} = 0,08 \text{ Дж. } \blacktriangle$$

1663. С помощью подъемного крана извлекают железобетонную надолбу со дна реки глубиной 5 м. Какая работа при этом совершается, если надолба имеет форму правильного тетраэдра с ребром 1 м (рис. 49)? Плотность железобетона  $2500 \text{ кг/м}^3$ , плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

△ Высота тетраэдра  $h = \sqrt{6}/3$  м, объем тетраэдра  $V = \sqrt{2}/12 \text{ м}^3$ . Вес надолбы в воде с учетом действия архимедовой силы равен

$$P = (1/12) \cdot \sqrt{2} \cdot 2500 \cdot 9,8 - (1/12) \cdot \sqrt{2} \cdot 1000 \cdot 9,8 = 1225 \sqrt{2} \text{ (Н)},$$

потому работа при извлечении надолбы до момента появления на поверхности воды ее вершины составляет

$$A_0 = 1225 \sqrt{2} (5 - h) = 1225 \sqrt{2} (5 - \sqrt{6}/3) \approx 7227,5 \text{ (Дж)}.$$

Теперь найдем работу  $A_1$  при извлечении надолбы из воды. Пусть вершина тетраэдра вышла на высоту  $5 + y$ ; тогда объем малого тетраэдра, вышедшего из воды, равен  $3\sqrt{3}y^3/8$ , а вес тетраэдра

$$P(y) = \frac{2500 \cdot 9,8}{12} \sqrt{2} - \left( \frac{1}{12} \sqrt{2} - \frac{1}{8} y^3 3 \sqrt{3} \right) \cdot 1000 \cdot 9,8.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^h \left( \frac{24\,500}{12} \sqrt{2} - \frac{9\,800}{12} \sqrt{2} + \frac{9\,800}{8} 3y^3 \sqrt{3} \right) dy = \\ &= \int_0^{\sqrt{6}/3} (1225 \sqrt{2} + 3675 \sqrt{3} y^3) dy = \\ &= \left[ 1225 \sqrt{2} y + \frac{3675}{4} \sqrt{3} y^4 \right]_0^{\sqrt{6}/3} \approx 2082,5 \text{ (Дж)}. \end{aligned}$$

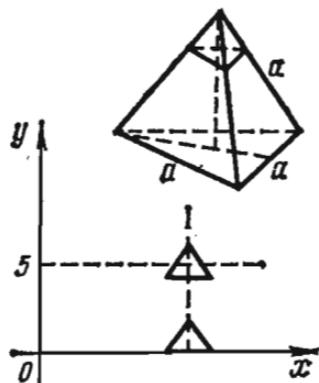


Рис. 49

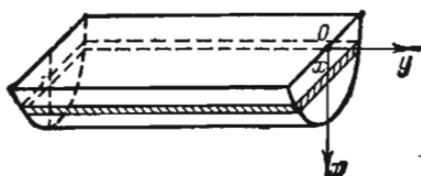


Рис. 50

Отсюда  $A = A_0 + A_1 = 7227,5 \text{ Дж} + 2082,5 \text{ Дж} = 9310 \text{ Дж} = 9,31 \text{ кДж. } \blacktriangle$

**1664.** Найти работу, совершенную при выкачивании воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого  $a$ , радиус  $r$  (рис. 50).

△ Объем элементарного слоя воды, находящегося на глубине  $x$  и имеющего длину  $a$ , ширину  $m = 2\sqrt{r^2 - x^2}$  и толщину  $dx$ , равен

$$dV = am dx = 2a\sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Элементарная работа, совершаемая при поднятии этого слоя воды на высоту  $x$ , равна  $dA = 2\rho g a x \sqrt{r^2 - x^2} dx$ , где  $\rho$  — плотность воды. Следовательно,

$$A = 2\rho g a \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = -\rho g a \left[ \frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^r = \frac{2}{3} \rho g a r^3. \blacktriangle$$

**1665.** Водопроводная труба имеет диаметр 6 см; один конец ее соединен с баком, в котором уровень воды на 1 м выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку.

△ Заслонка представляет собой круг радиуса 0,03 м. Разобьем площадь этого круга на элементы — полоски, параллельные поверхности воды. Площадь одного такого элемента, находящегося на расстоянии  $y$  от центра, равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка)  $dS = 2\sqrt{9 - y^2} dy$ . Найдем силу давления, испытываемую этим элементом:

$$dP = 2\rho g (1,03 - y) \sqrt{9 - y^2} dy = 19600 (1,03 - y) \sqrt{9 - y^2} dy$$

(здесь  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ). Следовательно,

$$\begin{aligned} P &= 19600 \int_{-3}^3 (1,03 - y) \sqrt{9 - y^2} dy = \\ &= 19600 \left[ 1,03 \left( \frac{y}{2} \sqrt{9 - y^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{y}{3} \right) + \frac{1}{3} (9 - y^2)^{3/2} \right]_{-3}^3 = \\ &= 9800 \cdot 9,27\pi \approx 0,09\pi \text{ Н. } \blacktriangle \end{aligned}$$

**1666.** Найти силу давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которого 6 м и находится на поверхности воды (рис. 51). Плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

△ Дифференциал силы давления на элементарную площадку выразится так:

$$dP = 2\rho g x \sqrt{9 - x^2} dx = 19600x \sqrt{9 - x^2} dx.$$

Отсюда

$$P = 19600 \int_0^3 x \sqrt{9 - x^2} dx = -\frac{19600}{3} (9 - x^2)^{3/2} \Big|_0^3 = 176400 \text{ Н} = 176,4 \text{ кН. } \blacktriangle$$

**1667.** Найти силу давления бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой  $h = 3,5$  м и радиусом основания  $r = 1,5$  м, на его стенки, если  $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ .

△ Элемент силы давления на поверхность стенки в выделенной полоске выразится так:  $dP = \rho g \cdot 2\pi r x dx$ . Отсюда

$$P = 2\pi r \rho g \int_0^h x dx = \pi \rho g r h^2 = 9,8\pi \cdot 1,5 \cdot 3,5^2 \cdot 900 \text{ Н} = 161700\pi \text{ Н} = 161,7\pi \text{ кН. } \blacktriangle$$

1668. Какую силу давления испытывает прямоугольная пластинка длиной  $a$  и шириной  $b$  ( $a > b$ ), если она наклонена к горизонтальной

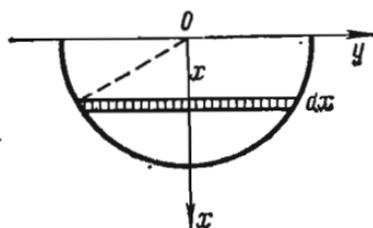


Рис. 51

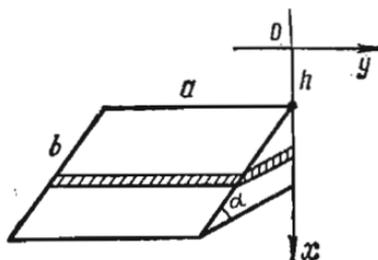


Рис. 52

поверхности жидкости под углом  $\alpha$  и ее большая сторона находится на глубине  $h$  (рис. 52)?

$\Delta$  Площадь выделенной на глубине  $x$  элементарной полоски равна  $dS = (a/\sin \alpha) dx$ . Следовательно, элемент силы давления  $dP = (ax\rho g/\sin \alpha) dx$  ( $\rho$  — плотность жидкости). Отсюда находим

$$P = a\rho g \int_h^{h+b \sin \alpha} \frac{x dx}{\sin \alpha} = \frac{a\rho g}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_h^{h+b \sin \alpha} =$$

$$= \frac{a\rho g}{2 \sin \alpha} [(h^2 + 2bh \sin \alpha + b^2 \sin^2 \alpha) - h^2] =$$

$$= ab\rho g \left( h + \frac{1}{2} b \sin \alpha \right). \blacktriangle$$

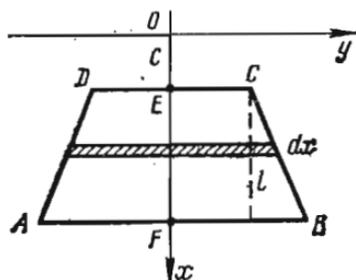


Рис. 53

1669. Найти силу давления на пластинку, имеющую форму равнобочной трапеции с основаниями  $a$  и  $b$  и высотой  $h$ , погруженную в жидкость на глубину  $c$  (рис. 53).

$\Delta$  Площадь элементарной полоски выражается так:  $dS = (a + 2l) dx$ , где  $l = (b-a)(x-c)/(2h)$  ( $l$  определяется из подобия треугольников). Следовательно,

$$P = \rho g \int_c^{c+h} \left[ a + \frac{b-a}{h}(x-c) \right] x dx = \rho g \left[ \frac{ax^2}{2} + \frac{b-a}{h} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{cx^2}{2} \right) \right]_c^{c+h} =$$

$$= \left[ \frac{a+b}{2} ch + \frac{h^3}{6} (a+2b) \right] \rho g. \blacktriangle$$

1670. Найти работу, совершаемую при выкачивании воды из конического сосуда, основание которого горизонтально и расположено ниже вершины, если радиус основания равен  $r$  и высота равна  $h$ .

1671. Из цилиндрической цистерны выкачивается жидкость. Какую работу надо совершить при этом, если длина цистерны равна  $a$ , а диаметр равен  $d$ ?

1672. С помощью каната подъемным краном из воды поднимают камень конической формы. Найти работу, совершаемую при полном извлечении камня из воды, если вершина конуса находилась на

поверхности воды. Радиус основания конуса 1 м, высота 3 м, плотность 2500 кг/м<sup>3</sup>.

● Здесь  $P(y) = 14700 + (9800/27) \pi y^3$ , где  $P$  выражается в ньютонах.

1673. Чугунный прямой конус высотой 0,4 м и радиусом основания 0,4 м находится на дне бассейна, наполненного до краев нефтяным маслом. Найти работу, которую надо совершить при извлечении этого конуса из бассейна, если плотность чугуна  $\rho_1 = 7220$  кг/м<sup>3</sup>, а плотность нефтяного масла  $\rho_2 = 890$  кг/м<sup>3</sup>.

● Здесь  $P(y)$  равна весу конуса без веса нефтяного масла, вытесненного частью конуса, т. е.  $P(y) = \frac{1}{3} \pi \cdot 0,4^3 \rho_1 g - \left( \frac{1}{3} \pi \cdot 0,4^3 - \frac{1}{3} \pi y^3 \right) \rho_2 g$ , где  $P$  выражается в ньютонах.

1674. Цилиндрический баллон диаметром 0,24 м и длиной 0,8 м наполнен газом под давлением 2 кПа. Какую работу надо совершить при изотермическом сжатии газа до объема, в два раза меньшего?

1675. В жидкость с плотностью  $\rho$  погружена треугольная пластинка вершиной вверх. Найти силу давления жидкости на пластинку, если основание треугольника равно  $a$ , высота равна  $h$ . Вершина треугольника расположена на поверхности.

1676. Найти силу давления бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой  $h = 4$  м и радиусом  $r = 2$  м ( $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup>), на стенки бака на каждом метре глубины.

1677. В жидкость с плотностью  $\rho$  погружена круглая пластинка диаметром  $d$ , касающаяся поверхности жидкости. Найти силу давления жидкости на пластинку.

Составляя соответствующие интегральные суммы и производя предельный переход, решить следующие задачи:

1678. Найти массу стержня длины 1 м, если линейная плотность стержня меняется по закону  $\delta = 20x + 0,15x^2$ , где  $x$  — расстояние от одного из концов стержня, в м;  $\delta$  — в кг/м.

1679. Скорость точки меняется по закону  $v = 100 + 8t$  (где  $v$  выражается в м/с). Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени  $[0, 10]$ ?

1680. Точка движется по оси  $Ox$ , начиная от точки  $M(1; 0)$ , так, что скорость ее равна абсциссе. Где она будет через 10 с от начала движения?

1681. Скорость точки изменяется по закону  $v = 2(6 - t)$  (где  $v$  выражается в м/с). Каково наибольшее удаление точки от начала движения?

## § 10. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

1. Гиперболические функции. Гиперболическими функциями называются функции, определяемые следующими равенствами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический синус,}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический косинус,}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ — гиперболический тангенс,}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ — гиперболический котангенс.}$$

Гиперболический косинус является четной функцией, т. е.  $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$ , а гиперболические синус, тангенс и котангенс являются нечетными функциями:  $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$ .

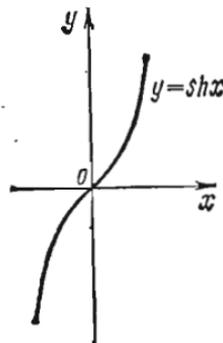


Рис. 54

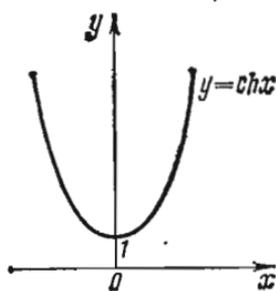


Рис. 55

Полезно иметь в виду, что  $\operatorname{sh} 0 = 0$ ,  $\operatorname{ch} 0 = 1$ ,  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ ,  $\operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1$ .

Графики гиперболических функций  $y = \operatorname{sh} x$ ,  $y = \operatorname{ch} x$  и  $y = \operatorname{th} x$  изображены соответственно на рис. 54—56.

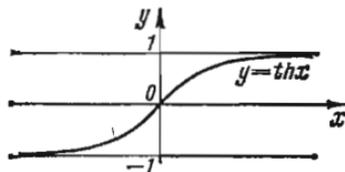


Рис. 56

График гиперболического косинуса называется *цепной линией*. Цепная линия является линией провисания тяжелой нити, подвешенной в двух точках.

Производные гиперболических функций находятся по формулам

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x, \quad (\operatorname{cth} x)' = -1/\operatorname{sh}^2 x.$$

При интегрировании гиперболических функций используются формулы

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

**2. Обратные гиперболические функции.** Для гиперболических функций  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{cth} x$  обратные гиперболические функции определяются с помощью следующих формул:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (-\infty < x < +\infty) \text{ — гиперболический арка-синус,}$$

$$\operatorname{arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1) \text{ — гиперболический арка-косинус,}$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1) \text{ — гиперболический арка-тангенс,}$$

$$\operatorname{arch} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1) \text{ — гиперболический арка-котангенс.}$$

Производные обратных гиперболических функций находятся по формулам

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (\operatorname{arch} x)' = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\operatorname{arch} x)' = -\frac{1}{x^2-1}.$$

Обратные гиперболические и обратные тригонометрические функции связаны между собой следующими соотношениями (в комплексной плоскости):

$$\operatorname{arsh} x = -i \operatorname{arc} \sin xi; \quad \operatorname{arch} x = i \operatorname{arccos} x,$$

$$\operatorname{arth} x = -i \operatorname{arc} \operatorname{tg} xi; \quad \operatorname{arch} x = i \operatorname{arctg} xi.$$

1682. Доказать справедливость равенства

$$\operatorname{sh}(x+a) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} a.$$

△ По определению гиперболического синуса имеем

$$\operatorname{sh}(x+a) = \frac{e^{x+a} - e^{-(x+a)}}{2} = \frac{e^x \cdot e^a - e^{-x} \cdot e^{-a}}{2}.$$

Так как  $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ ,  $e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ ,  $e^a = \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a$ ,  $e^{-a} = \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a$ , то

$$\operatorname{sh}(x+a) = \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a) - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)}{2}.$$

Выполнив алгебраические преобразования, получаем

$$\operatorname{sh}(x+a) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} a. \blacktriangle$$

1683. Выразить  $\operatorname{ch}(x+a)$  через гиперболические функции аргументов  $x$  и  $a$ .

△ Продифференцировав по  $x$  равенство

$$\operatorname{sh}(x+a) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} a,$$

получаем

$$\operatorname{ch}(x+a) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} a. \blacktriangle$$

1684. Выразить  $\operatorname{sh} 2x$  и  $\operatorname{ch} 2x$  через  $\operatorname{sh} x$  и  $\operatorname{ch} x$ .

△ Имеем

$\operatorname{sh} 2x = \operatorname{sh}(x+x) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}(x+x) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x$ ,  
т. е.  $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ ;  $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ .  $\blacktriangle$

1685. Выразить  $\operatorname{ch}^2 x$  и  $\operatorname{sh}^2 x$  через  $\operatorname{ch} 2x$ .

△ Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x, \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \end{cases}$$

относительно  $\operatorname{ch}^2 x$  и  $\operatorname{sh}^2 x$ , получаем

$$\operatorname{ch}^2 x = (\operatorname{ch} 2x + 1)/2, \quad \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} 2x - 1)/2. \blacktriangle$$

1686. Выразить гиперболические функции  $\operatorname{ch} xi$  и  $\operatorname{sh} xi$  мнимого аргумента через  $\sin x$  и  $\cos x$ .

△ Находим

$$\operatorname{sh} xi = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2} = i \cdot \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = i \sin x, \quad \operatorname{ch} xi = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \cos x.$$

Итак,  $\operatorname{sh} xi = i \sin x$ ,  $\operatorname{ch} xi = \cos x$ .  $\blacktriangle$

1687. Выразить тригонометрические функции  $\sin xi$  и  $\cos xi$  мнимого аргумента через  $\operatorname{sh} x$  и  $\operatorname{ch} x$ .

△ Подставив в формулы  $\operatorname{sh} xi = i \sin x$  и  $\operatorname{ch} xi = \cos x$  (см. задачу 1686)  $xi$  вместо  $x$ , получим  $\operatorname{sh} xi^2 = i \sin xi$ ,  $\operatorname{ch} xi^2 = \cos xi$ , т. е.  $\sin xi = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{i} = i \operatorname{sh} x$ ,  $\cos xi = \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$ . Итак,  $\sin xi = i \operatorname{sh} x$ ,  $\cos xi = \operatorname{ch} x$ .  $\blacktriangle$

1688. Какая линия определяется параметрическими уравнениями  $x = a \operatorname{ch} t$ ,  $y = a \operatorname{sh} t$  при  $a > 0$ ?

△ Исключим из этих уравнений  $t$ , для чего из  $x^2$  вычтем  $y^2$ :

$$x^2 - y^2 = a^2 (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t), \quad \text{т. е. } x^2 - y^2 = a^2.$$

Кривая  $x^2 - y^2 = a^2$  является равнобочной гиперболой, асимптотами которой служат прямые  $y = \pm x$ . Данная кривая является правой ветвью этой гиперболы, так как  $x = a \operatorname{ch} t > 0$  при любом  $t$  (рис. 57).  $\blacktriangle$

1689. Точка  $M$  лежит на правой ветви равнобочной гиперболы  $x = a \operatorname{ch} t$ ,  $y = a \operatorname{sh} t$ . Из точки  $M$  опущен перпендикуляр  $MN$  на ось абсцисс и эта же точка соединена отрезком  $OM$  с началом координат. Из вершины  $A$  гиперболы восстановлен перпендикуляр  $AK$  до пересечения в точке  $K$  с отрезком  $OM$  (рис. 58). Доказать, что  $|NM| : a = \operatorname{sh} t$ ,  $|ON| : a = \operatorname{ch} t$ ,  $|AK| : a = \operatorname{th} t$ .

$$\begin{aligned} \triangle |NM| : a = y : a = \operatorname{sh} t, \quad |ON| : a = x : a = \operatorname{ch} t, \\ |AK| : a = |NM| : |ON| = (|NM| : a) / (|ON| : a) = \operatorname{sh} t / \operatorname{ch} t = \operatorname{th} t. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1690. Точка  $M$  лежит на правой ветви равнобочной гиперболы  $x = a \operatorname{ch} t$ ,  $y = a \operatorname{sh} t$ . Вычислить площадь гиперболического сектора, ограниченного ветвью гиперболы, осью абсцисс и отрезком  $OM$  (рис. 59).

$$\triangle \text{Имеем } S = S_{ONM} - S_{ANM} = \frac{1}{2} xy - \int_a^x y dx. \text{ Так как } x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t, \text{ то}$$

$dx = a \operatorname{sh} t dt$ , откуда

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t - a^2 \int_0^t \operatorname{sh}^2 t dt = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t - \frac{a^2}{2} \int_0^t (\operatorname{ch} 2t - 1) dt = \\ &= \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sh} 2t - \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sh} 2t + \frac{a^2}{2} t = \frac{a^2 t}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $t = 2S/a^2$ . Итак, аргумент  $t$  гиперболических функций можно рассматривать как частное от деления удвоенной площади гиперболического сектора  $OAM$  на квадрат действительной полуоси.  $\blacktriangle$

1691. Найти производные функций:

- 1)  $y = \ln(\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch}^2 x + 1})$ ; 2)  $y = 5 \operatorname{sh}^3(x/15) + 3 \operatorname{sh}^5(x/15)$ ;
- 3)  $y = 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{th}(x/2))$ ; 4)  $y = \operatorname{th} x - \frac{2}{3} \operatorname{th}^5 x + \frac{1}{5} \operatorname{th}^5 x$ ;
- 5)  $y = \operatorname{arccotg}(1/\operatorname{sh} x)$ ; 6)  $y = \ln \operatorname{th}(x^2/4)$ .

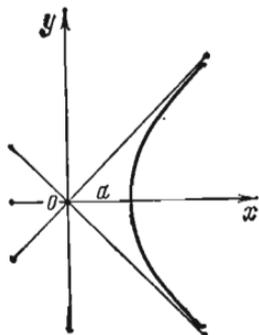


Рис. 57

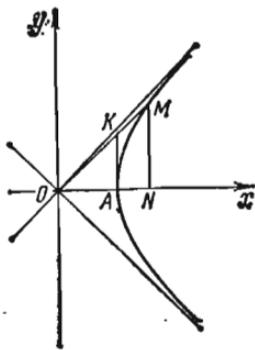


Рис. 58

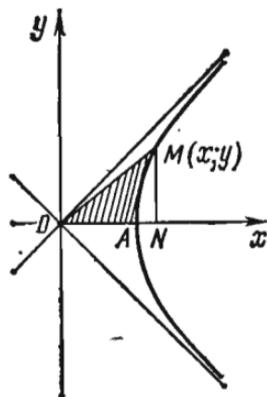


Рис. 59

1692. В какой точке цепной линии  $y = \operatorname{ch} x$  касательная образует с осью абсцисс угол  $\alpha = \pi/4$ ?

1693. Исследовать на экстремум функцию  $y = \operatorname{ch}(x/2) - 1$ .

1694. Найти: 1)  $\int x^2 \operatorname{ch} x dx$ ; 2)  $\int \operatorname{sh}^4 x dx$ ; 3)  $\int \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}} dx$ ;  
4)  $\int \operatorname{sh} x \sin x dx$ ; 5)  $\int \frac{\operatorname{sh}(x/2)}{\operatorname{ch}^3(x/2)} dx$ ; 6)  $\int \operatorname{sh}^3(x/3) \operatorname{ch}^2(x/3) dx$ .

1695. Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\operatorname{ch} x dx}{\sqrt{4 - \operatorname{sh}^2 x}}; \quad 2) \int_0^{\ln 2} \operatorname{th}^2 x dx; \quad 3) \int_0^{\ln 3} x \operatorname{ch} x dx.$$

1696. Выразить  $\operatorname{sh}(x-a)$  и  $\operatorname{ch}(x-a)$  через гиперболические функции аргументов  $x$  и  $a$ .

1697. Выразить  $\operatorname{th}(x+a)$  и  $\operatorname{th}(x-a)$  через  $\operatorname{th} x$  и  $\operatorname{th} a$ . Найти  $\operatorname{th} 2x$ .

1698. Выразить через  $\operatorname{ch} x$  гиперболические функции половины аргумента  $\operatorname{sh}(x/2)$ ,  $\operatorname{ch}(x/2)$  и  $\operatorname{th}(x/2)$ .

1699. Привести к виду, удобному для логарифмирования, выражения  $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y$ ,  $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{ch} y$ ,  $\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y$ .

1700. Выразить  $\operatorname{sh} x$  и  $\operatorname{ch} x$  через  $\operatorname{th}(x/2)$ .

1701. Представить произведения гиперболических функций  $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$ ,  $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ ,  $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$  в виде сумм.

1702. Вычислить площадь, ограниченную кривой  $y = \operatorname{sh} x$  и прямыми  $x = \ln 5$ ,  $y = 0$ .

1703. Найти длину дуги кривой  $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ , заключенной между прямыми  $x = 0$ ,  $x = a$ .

1704. На кривой  $x = a \operatorname{ch} t$ ,  $y = a \operatorname{sh} t$  даны точки  $M$  и  $N$ , соответствующие значениям  $t = t_1$  и  $t = t_2$  ( $t_1 < t_2$ ). Вычислить площадь сектора  $OMN$ .

1705. Какая линия определяется уравнениями  $x = a/\operatorname{ch} t$ ,  $y = b \operatorname{th} t$ , если  $a > 0$ ,  $b > 0$ ?

1706. Какая линия определяется уравнениями  $x = \operatorname{ch}^2 t$ ,  $y = \operatorname{sh}^2 t$ ?

1707. Дано  $\sin \alpha = \operatorname{th} t$ . Выразить  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$  через  $t$ .

1708. Упростить выражение

$$(\cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \operatorname{sh} y + i \sin x \operatorname{ch} y)^2.$$

1709. Упростить выражение  $(x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t)^2 - (x \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t)^2$ .

1710. Доказать тождества:

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx; \quad \operatorname{ch} nx = \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n + (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n}{2};$$

$$\operatorname{sh} nx = \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n}{2}.$$

1711. Используя равенства  $\operatorname{sh}^n x = \frac{(e^x - e^{-x})^n}{2^n}$ ;  $\operatorname{ch}^n x = \frac{(e^x + e^{-x})^n}{2^n}$ ,

доказать, что

$$\operatorname{ch}^3 x = \frac{1}{4} \operatorname{ch} 3x + \frac{3}{4} \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}^3 x = \frac{1}{16} \operatorname{sh} 5x - \frac{5}{16} \operatorname{sh} 3x + \frac{5}{8} \operatorname{sh} x.$$



△ Заменяя знак неравенства на знак точного равенства, получим уравнение прямой  $2x_1 + 3x_2 - 12 = 0$  или  $x_2 = (-2/3)x_1 + 4$  (рис. 60). Приведем данное неравенство к виду  $x_2 \leq (-2/3)x_1 + 4$ . Следовательно, искомая полуплоскость расположена ниже прямой  $x_2 = (-2/3)x_1 + 4$ . ▲

1713. Какую полуплоскость определяет неравенство  $2x_1 - 3x_2 \geq 0$ ?

△ Заменяя знак неравенства на знак точного равенства, получим уравнение прямой  $2x_1 - 3x_2 = 0$  или  $x_2 = (2/3)x_1$ , проходящей через начало координат. Из неравенства  $2x_1 - 3x_2 \geq 0$ , т. е.  $x_2 \leq (2/3)x_1$ , вытекает, что искомая полуплоскость расположена ниже прямой  $x_2 = (2/3)x_1$  (рис. 61). ▲

1714. Найти область решений системы неравенств  $x_1 - 1 \geq 0$ ,  $x_2 - 1 \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 - 3 \geq 0$ ,  $-6x_1 - 7x_2 + 42 \geq 0$ .

△ Заменяя знаки неравенств на знаки точных равенств, получим уравнения четырех прямых:  $x_1 - 1 = 0$ ,  $x_2 - 1 = 0$ ,  $x_1 + x_2 - 3 = 0$  и  $6x_1 + 7x_2 - 42 = 0$ , изобра-

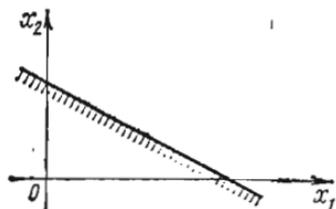


Рис. 60

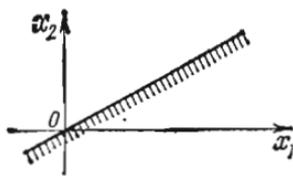


Рис. 61

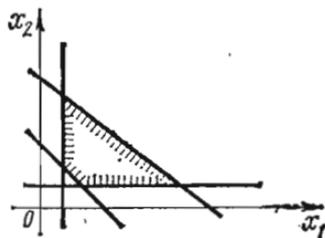


Рис. 62

женных на рис. 62. Приведем данные неравенства к виду  $x_1 \geq 1$ ,  $x_2 \geq 1$ ,  $x_2 \geq -x_1 + 3$ ,  $x_2 \leq (-6/7)x_1 + 6$ . Штриховка показывает те из полуплоскостей, которые служат областями решений соответствующих неравенств. Областью решений системы неравенств является выпуклый четырехугольник. ▲

1715. Найти область решений системы неравенств  $x_1 \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 - 2 \geq 0$ ,  $x_1 - x_2 + 1 \leq 0$ ,  $x_1 \leq 2$ .

△ Заменяя знаки неравенств на знаки точных равенств, получим уравнения четырех прямых:  $x_1 = 0$ ,  $x_1 + x_2 - 2 = 0$ ,  $x_1 - x_2 + 1 = 0$ ,  $x_1 = 2$ , изображенных на рис. 63. Приведем данные неравенства к виду  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq -x_1 + 2$ ,  $x_2 \geq x_1 + 1$ ,  $x_1 \leq 2$ . Областью решений системы неравенств является неограниченная выпуклая фигура. ▲

1716. Найти область решений системы неравенств  $x_1 \geq 2$ ,  $x_1 + 3x_2 \leq 3$ ,  $x_1 - x_2 + 1 \leq 0$ .

△ Построим соответствующие прямые. Из рис. 64 видно, что не существует ни одной точки, общей для всех трех полуплоскостей. Это означает, что область решений «пустая» и заданная система неравенств несовместна. ▲

1717. Найти область решений системы неравенств  $2x_1 - x_2 \geq -2$ ,  $x_1 - x_2 \geq -2$ ,  $x_1 \leq 1$ ,  $2x_1 - x_2 \geq 3$ .

△ Эта система неравенств не имеет решений. Геометрически это означает, что не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяют всем неравенствам данной задачи (рис. 65). ▲

1718. Найти область решений системы неравенств  $3x_1 - x_2 \geq 0$  (а),  $x_1 - x_2 \leq 0$  (б),  $2x_1 + x_2 \leq 6$  (в),  $x_1 \leq 2$  (г),  $3x_1 - x_2 \geq -4$  (д).

△ Пяти заданным неравенствам соответствует множество точек плоскости, образующее треугольник  $AOB$  (рис. 66). Неравенства (г) и (д) могут быть исключены, так как неравенство (д) определяет граничную прямую, не имеющую с треугольником  $AOB$  общих точек, а прямая, определяемая неравенством (г), имеет одну общую точку с треугольником и является опорной. ▲

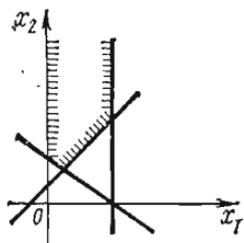


Рис. 63

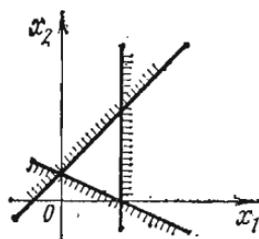


Рис. 64

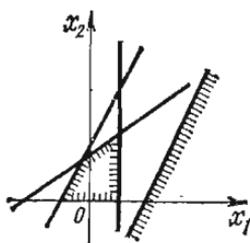


Рис. 65

1719. Найти область решений системы неравенств  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 - 1 \leq 0$ ,  $3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 0$ .

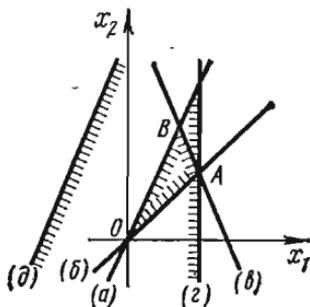


Рис. 66

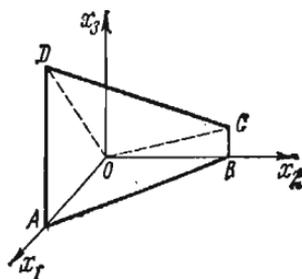


Рис. 67

△ Заменяя знаки неравенств на знаки точных равенств, получим уравнения плоскостей  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_1 + x_2 - 1 = 0$ ,  $3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ , которые изображены на рис. 67. Областью решений системы неравенств служит выпуклый четырехгранник  $ABOCD$ . ▲

1720. Как расположена полуплоскость, координаты точек которой удовлетворяют неравенству  $x_1 - x_2 - 10 \geq 0$ ?

Найти область решений системы неравенств:

1721.  $x_1 + x_2 - 5 \geq 0$ ,  $x_1 - x_2 - 5 \geq 0$ ,  $x_1 \leq 7$ .

1722.  $x_1 - 5x_2 + 5 \geq 0$ ,  $x_1 + 3x_2 - 3 \leq 0$ ,  $x_1 \leq 5$ .

1723.  $x_1 \geq 3$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 \leq 0$ .

1724.  $x_1 - x_2 + 1 \geq 0$ ,  $2x_1 + x_2 - 7 \geq 0$ ,  $x_1 - 2x_2 + 4 \geq 0$ .

1725.  $x_2 \geq 0$  (а),  $4x_1 - x_2 \geq 0$  (б),  $x_2 \leq 6$  (в),  $4x_1 + x_2 \leq 40$  (г),  $x_1 - x_2 + 8 \geq 0$  (д).

1726.  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 1$ ,  $x_3 \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leq 0$ .

1727.  $x_1 \leq 4$ ,  $2x_2 - x_3 \geq 0$ ,  $x_2 + x_3 \leq 3$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ .



Областью решений неравенств является треугольник  $MNP$ . Построим вектор  $C(2; 2)$ . Тогда опорная прямая при выходе из треугольника решений пройдет через точку  $P(3; 15/2)$ , а потому в точке  $P$  линейная функция  $L=2x_1+2x_2$  принимает наибольшее значение, т. е. максимизируется, и  $L_{\max}=2 \cdot 3 + 2 \cdot (15/2) = 21$ . ▲

**1729.** Минимизировать линейную функцию  $L=12x_1+4x_2$  при ограничениях:  $x_1+x_2 \geq 2$ ,  $x_1 \geq 1/2$ ,  $x_2 \leq 4$ ,  $x_1-x_2 \leq 0$ .

△ Заменяя знаки неравенств на знаки точных равенств, построим область решений, ограниченную прямыми  $x_1+x_2=2$ ,  $x_1=1/2$ ,  $x_2=4$ ,  $x_1-x_2=0$ . Область

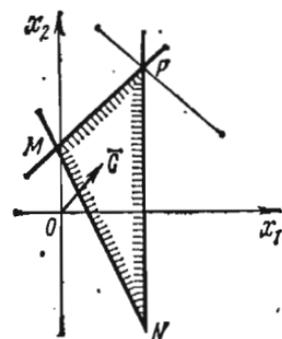


Рис. 68

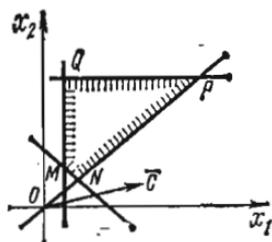


Рис. 69

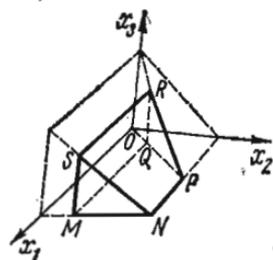


Рис. 70

решений — многоугольник  $MNPQ$  (рис. 69). Строим вектор  $C(12; 4)$ . Опорная прямая проходит через точку  $M(1/2; 3/2)$  — это первая точка пересечения многоугольника решений с прямой  $L$  при перемещении этой прямой в положительном направлении вектора  $C$ . В точке  $M$  линейная функция  $L=12x_1+4x_2$  принимает наименьшее значение  $L_{\min}=12 \cdot (1/2) + 4 \cdot (3/2) = 12$ . ▲

**1730.** Найти наибольшее значение функции  $L=x_1+3x_2+3x_3$  при ограничениях:  $x_2+x_3 \leq 3$ ,  $x_1-x_2 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 1$ ,  $3x_1+x_2 \leq 15$ .

△ Построим область решений системы неравенств по уравнениям плоскостей:  $x_2+x_3=3$ ,  $x_1-x_2=0$ ,  $x_2=1$ ,  $3x_1+x_2=15$ . Областью решений является многогранник  $MNPQRS$  (рис. 70).

Построим вектор  $C(1; 3; 3)$ . При перемещении опорной плоскости в положительном направлении вектора  $C$  она выйдет из многогранника решений в точке  $N(4; 3; 0)$ . Поэтому в точке  $N$  линейная функция  $L=x_1+3x_2+3x_3$  примет наибольшее значение, т. е.  $L_{\max}=4+3 \cdot 3+3 \cdot 0=13$ . ▲

**1731.** Найти наибольшее значение функции  $L=3x_1-6x_2+2x_3$  при ограничениях:  $3x_1+3x_2+2x_3 \leq 6$ ,  $x_1+4x_2+8x_3 \leq 8$ .

△ Построим область решений системы линейных неравенств, взяв плоскости  $3x_1+3x_2+2x_3=6$ ,  $x_1+4x_2+8x_3=8$ ,  $x_1=0$ ,  $x_2=0$ ,  $x_3=0$ . Эта область есть многогранник  $MNOPR$  (рис. 71). Построим вектор  $C(3; -6; 2)$ . При перемещении опорной плоскости в положительном направлении вектора  $C$  она выйдет из многогранника решений в точках ребра  $MR$ . Следовательно, наибольшее значение данной функции принимается в точках отрезка  $MR$ . Убеждаемся в этом, подставив координаты точек  $M(2; 0; 0)$  и  $R(16/11; 0; 9/11)$  в линейную форму  $L$ ; получим  $L(M)=6$ ,  $L(R)=6$ . ▲

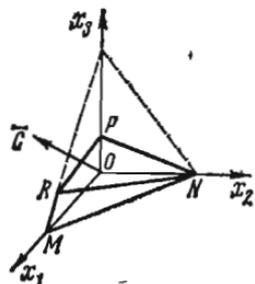


Рис. 71

1732. Найти наибольшее значение функции  $L = x_1 + 3x_2$  при ограничениях:  $x_1 + 4x_2 \geq 4$ ,  $x_1 + x_2 \leq 6$ ,  $x_2 \leq 2$ .

1733. Минимизировать функцию  $L = x_1 - x_2$  при ограничениях:  $3 \leq x_1 + x_2 \leq 7$ ,  $1 \leq x_2 \leq 4$ ,  $x_1 \leq 4$ .

1734. Найти наибольшее значение функции  $L = 3x_1 - 4x_2$  при ограничениях:  $x_1 - 2x_2 \geq 6$ ,  $x_1 + 2x_2 \geq 0$ ,  $x_1 \leq 6$ .

1735. Найти наибольшее значение функции  $L = -x_1 + 2x_2$  при ограничениях:  $x_1 - 8x_2 \leq 10$ ,  $x_1 + x_2 \geq 1$ ,  $x_1 - 5x_2 \geq -5$ ,  $3x_1 + 10x_2 \leq 30$ .

1736. Найти наибольшее значение функции  $L = 8x_1 - 2x_2$  при ограничениях:  $3x_1 + 4x_2 \geq 18$ ,  $3x_1 - x_2 \geq 3$ ,  $x_2 \leq 6$ ,  $2x_1 + x_2 \leq 18$ ,  $4x_1 - x_2 \leq 24$ .

1737. Минимизировать линейную форму  $L = -2x_1 - x_2 + 3x_3$  при ограничениях:  $x_1 + x_2 \geq 2$ ,  $3x_1 + x_2 \leq 6$ ,  $x_3 \leq 3$ .

1738. Найти наибольшее значение функции  $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3$  при ограничениях:  $x_1 + x_2 \leq 3$ ,  $x_1 + x_2 - x_3 \leq 0$ ,  $3x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 0$ .

1739. Найти наибольшее значение функции  $L = 10x_1 + x_3$  при ограничениях:  $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$ ,  $3x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 6$ ,  $x_3 \leq 3$ .

### § 3. СИМПЛЕКС-МЕТОД

1. Понятие о симплекс-методе. Решение основной задачи линейного программирования геометрическим методом является наглядным в случае двух и даже трех переменных. Для случая же большего числа переменных геометрический метод становится невозможным. Так называемый *симплекс-метод* принадлежит к числу аналитических методов решения основной задачи линейного программирования. Система ограничений в вычислительных методах обычно задается системой линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

и среди неотрицательных решений системы уравнений (1) надо найти такие, которые максимизировали бы линейную функцию

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_0.$$

Выразим  $x_1, x_2, \dots, x_r$  ( $r \leq m$ ) через остальные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{1n}x_n + b'_1, \\ x_2 = a'_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{2n}x_n + b'_2, \\ \dots \\ x_r = a'_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{rn}x_n + b'_r, \end{cases} \quad (2)$$

где  $b'_1 \geq 0$ ,  $b'_2 \geq 0$ , ...,  $b'_r \geq 0$ . Если ограничительные условия заданы неравенствами, то их можно преобразовать в равенства путем введения новых неотрицательных переменных, так называемых *балансовых* (выравнивающих). Например, в неравенстве  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$  достаточно добавить к левой части некоторую величину  $x_{n+i} \geq 0$  и получится равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+i} = b.$$

Ограничительные условия могут задаваться и смешанным образом, т. е. неравенствами и уравнениями, тогда указанным путем их можно свести только к уравнениям. Переменные (неизвестные)  $x_1, x_2, \dots, x_r$  называются *базисными*, а

весь набор  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  — базисом, остальные переменные называются свободными, система ограничений (2) называется системой, приведенной к единичному базису. Подставляя в линейную форму  $L$  вместо базисных переменных их выражения через свободные из системы (2), получим

$$L = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \dots + \gamma_n x_n.$$

Теперь, полагая все свободные переменные равными нулю, найдем значения базисных переменных:  $x_1 = b'_1, x_2 = b'_2, \dots, x_r = b'_r$ . Таким образом, решение  $(b'_1, b'_2, \dots, b'_r, 0, \dots, 0)$  системы является допустимым — оно называется *базисным*. Для полученного базисного решения значение линейной формы  $L_B = \gamma_0$ . Решение задачи с помощью симплекс-метода распадается на ряд шагов, заключающихся в том, что от данного базиса  $B$  мы переходим к другому базису  $B'$  с таким расчетом, чтобы значение  $L_B$  уменьшалось или, по крайней мере, не увеличивалось, т. е.  $L_{B'} \leq L_B$ .

Идею метода проследим на конкретных примерах.

**1740.** Максимизировать линейную форму  $L = -x_4 + x_5$  при ограничениях:  $x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$ .

△ Данная система уравнений-ограничений совместна, так как ранги матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

совпадают и равны 3. Следовательно, система уравнений совместна и три переменные (базисные) можно линейно выразить через две свободные переменные. Выразим, например  $x_1, x_2$  и  $x_3$  через  $x_4$  и  $x_5$ , т. е. приведем систему к единичному базису:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5. \end{cases} \quad (*)$$

Линейную форму  $L = -x_4 + x_5$  выразим через свободные переменные  $x_4$  и  $x_5$  (в данном примере  $L$  уже выражена через  $x_4$  и  $x_5$ ). Теперь при  $x_4 = 0, x_5 = 0$  найдем значения базисных переменных:  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ . Таким образом, первое допустимое решение системы уравнений есть  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 0$ , или  $(1, 2, 3, 0, 0)$ . При найденном допустимом решении линейная форма  $L$  имеет значение 0, т. е.  $L_1 = 0$ .

Теперь попытаемся увеличить значение  $L_1$ ; увеличение  $x_4$  уменьшит  $L_1$ , так как перед  $x_4$  стоит отрицательный коэффициент, а увеличение  $x_5$  дает увеличение и  $L_1$ . Увеличим поэтому  $x_5$  так, чтобы  $x_1, x_2, x_3$  не стали отрицательными, оставив  $x_4 = 0$ . Из второго уравнения системы (\*) следует, что  $x_5$  можно увеличить до 2. Таким образом, получаем следующие значения переменных:  $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 2$  или  $(5, 0, 1, 0, 2)$ .

Значение линейной формы  $L$  при этом допустимом решении равно  $L_2 = 2$ , т. е. при втором шаге оно увеличилось.

Далее, примем за свободные переменные  $x_2$  и  $x_4$ , т. е. именно те переменные, которые в новом решении имеют нулевые значения. С этой целью из второго уравнения системы (\*) выразим  $x_5$  через  $x_2$  и  $x_4$  и получим  $x_5 = 2 - x_2 + 2x_4$ .

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_3 + 3x_4, \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4, \\ L = 2 - x_2 + x_4. \end{cases} \quad (**)$$

Для увеличения значения  $L$  будем увеличивать  $x_4$ . Из второго уравнения системы (\*\*) видно, что при условии неотрицательности  $x_3$  значение  $x_4$  можно довести до  $x_4 = 1/5$ . При этом условии новое допустимое решение есть  $x_1 = 28/5$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1/5$ ,  $x_5 = 12/5$  или  $(28/5, 0, 0, 1/5, 12/5)$ . Значение линейной формы при этом  $L_3 = 11/5$ .

Выразим теперь  $x_1$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  через свободные переменные  $x_2$  и  $x_3$ :

$$\begin{cases} x_1 = 28/5 - (3/5)x_3 - (7/5)x_2, \\ x_4 = 1/5 - (1/5)x_3 + (1/5)x_2, \\ x_5 = 12/5 - (2/5)x_3 - (3/5)x_2, \\ L = 11/5 - (1/5)x_3 - (4/5)x_2. \end{cases} \quad (***)$$

Так как в последней линейной форме обе свободные переменные входят с отрицательными коэффициентами, то наибольшее значение  $L$  достигается при  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ . Это означает, что решение  $(28/5, 0, 0, 1/5, 12/5)$  является оптимальным и  $L_{\max} = 11/5$ .  $\blacktriangle$

**1741.** Максимизировать линейную форму  $L = x_2 + x_3$  при ограничениях:  $x_1 - x_2 + x_3 = 1$ ,  $x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$ .

$\Delta$  Система уравнений-ограничений совместна, так как ранги матрицы системы уравнений и расширенной матрицы одинаковы и равны 2. Следовательно, две базисные переменные можно выразить линейно через другие две свободные. Примем за свободные переменные  $x_2$  и  $x_3$ . Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - x_3, \\ x_4 = 2 - x_2 + 2x_3, \\ L = x_2 + x_3. \end{cases}$$

При  $x_2 = 0$  и  $x_3 = 0$  базисные переменные  $x_1 = 1$ ,  $x_4 = 2$ , т. е. имеем первое допустимое решение  $(1, 0, 0, 2)$  и  $L_1 = 0$ . Увеличение  $L$  можно осуществить при увеличении  $x_3$  до 1. Тогда при  $x_3 = 1$ ,  $x_2 = 0$  значения базисных переменных  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = 4$ . Новое допустимое решение  $(0, 0, 1, 4)$  и  $L_2 = 1$ .

Выразим теперь  $x_3$  и  $x_4$  через  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1 + x_2, \\ x_4 = 4 - 2x_1 + x_2, \\ L = 1 - x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Увеличение  $L$  возможно при увеличении  $x_2$ . Увеличение же  $x_2$  не ограничено, судя по последней системе уравнений. Таким образом,  $L$  будет принимать все большие положительные значения, т. е.  $L_{\max} = +\infty$ . Итак, форма  $L$  не ограничена сверху, а потому оптимального решения не существует.  $\blacktriangle$

**1742.** Задана система ограничений:  $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$ ,  $x_2 + 2x_4 = 1$  и линейная форма  $L = 5x_1 - x_3$ . Найти оптимальное решение, минимизирующее линейную форму.

$\Delta$  Эту задачу можно было бы свести к задаче нахождения максимума функции  $L_1 = -L$ , т. е.  $L_1 = -5x_1 + x_3$ , но это не обязательно. Рассуждая аналогично предыдущему, ее можно решить, не сводя к максимизации. Данная система уравнений совместна, так как ранги матрицы системы и расширенной матрицы одинаковы и равны 2. Следовательно, систему уравнений можно, например, пе-

реписать так:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_4, \\ L = 10 - 11x_3 + 15x_4. \end{cases}$$

Здесь за базисные переменные приняты  $x_1$  и  $x_2$ , а за свободные  $x_3$  и  $x_4$ . При  $x_3=0$  и  $x_4=0$  первое базисное решение есть  $x_1=2$ ,  $x_2=1$ ,  $x_3=0$ ,  $x_4=0$  или  $(2, 1, 0, 0)$ , а  $L_1=10$ . Уменьшение линейной формы  $L$  вызывается увеличением  $x_3$ , так как перед  $x_3$  в форме  $L$  стоит отрицательный коэффициент, причем увеличение  $x_3$  возможно только до 1, а значение  $x_4=0$  остается. Если примем  $x_3=1$ , то  $x_1=0$ ,  $x_2=1$ ,  $x_3=1$ ,  $x_4=0$  или  $(0, 1, 1, 0)$ —второе базисное решение, при котором  $L_2=-1$ .

Выразим  $x_2$  и  $x_3$  через новые свободные переменные  $x_1$  и  $x_4$ :

$$\begin{cases} x_2 = 1 - 2x_4, \\ x_3 = 1 - (1/2)x_1 + (3/2)x_4, \\ L = -1 + (11/2)x_1 - (3/2)x_4. \end{cases}$$

Теперь уменьшение значения формы  $L$  зависит от увеличения  $x_4$  до  $x_4=1/2$  (при этом  $x_2$  неотрицательно), а значение  $x_1=0$  остается. В этом случае имеем новое допустимое решение  $x_1=0$ ,  $x_2=0$ ,  $x_3=7/4$ ,  $x_4=1/2$  или  $(0, 0, 7/4, 1/2)$ , при котором  $L=-7/4$ .

Выразим  $x_3$  и  $x_4$  через свободные переменные  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{cases} x_3 = 7/4 - (1/2)x_1 - (3/4)x_2, \\ x_4 = 1/2 - (1/2)x_2, \\ L = -7/4 + (11/2)x_1 + (3/4)x_2. \end{cases}$$

Так как дальнейшее уменьшение значения формы  $L$  невозможно из-за положительности коэффициентов при  $x_1$  и  $x_2$ , то допустимое решение задачи  $(0, 0, 7/4, 1/2)$  является оптимальным. Наименьшее значение  $L$  равно  $-7/4$ . ▲

**1743.** Максимизировать линейную форму  $L=2x_1-x_4$  при следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20, \\ x_2 + 2x_4 \geq 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 8. \end{cases}$$

△ Так как система ограничений задана смешанно, то приведем ее к системе уравнений, введя новую неотрицательную переменную  $x_5$  в левую часть второго условия с отрицательным коэффициентом, а  $x_6$ —в третье условие с положительным коэффициентом. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 8. \end{cases}$$

Приведем эту систему к единичному базису, выбрав за базисные переменные  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  (в силу того, что ранг матрицы системы равен 3):

$$x_1 = 15 + 2x_4 - x_5, \quad x_2 = 5 - 2x_4 + x_5, \quad x_3 = 28 - x_6. \quad (*)$$

Линейная форма тогда примет вид  $L=30+3x_4-2x_5$ . При  $x_4=0$ ,  $x_5=0$ ,  $x_6=0$  базисные переменные имеют значения  $x_1=15$ ,  $x_2=5$ ,  $x_3=28$ , т. е. первое допустимое решение  $(15, 5, 28, 0, 0, 0)$ ; при этом  $L_1=30$ .

Для того чтобы значение  $L$  увеличилось, необходимо увеличивать  $x_4$ , так как эта переменная входит в выражение для  $L$  с положительным коэффициентом. Увеличение же  $x_4$  возможно до  $x_4=5/2$ —это видно из второго условия системы ограничений (\*). При  $x_4=5/2$ ,  $x_5=0$ ,  $x_6=0$  значения других переменных таковы:  $x_1=20$ ,  $x_2=0$ ,  $x_3=28$  т. е. получим второе допустимое решение  $(20, 0,$

28, 5/2, 0, 0), и линейная функция  $L$  примет вид  $L = 75/2 - (3/2)x_2 - (1/2)x_5$ , а при втором допустимом решении ее значение равно  $L_2 = 75/2$ .

Теперь, поскольку коэффициенты при переменных в  $L$  отрицательны, увеличение значения  $L$  невозможно. Следовательно,  $L_{\max} = 75/2 = 37,5$ . ▲

**1744.** Для изготовления изделий двух видов имеется 100 кг металла. На изготовление одного изделия I вида расходуется 2 кг металла, а изделия II вида — 4 кг. Составить план производства, обеспечивающий получение наибольшей прибыли от продажи изделий, если отпускная стоимость одного изделия I вида составляет 3 ден. ед., а изделия II вида — 2 ден. ед., причем изделий I вида требуется изготовить не более 40, а изделий II вида — не более 20.

△ Пусть изготовлено  $x_1$  изделий I вида и  $x_2$  — II вида. Тогда имеем следующие ограничения на переменные  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{cases} x_1 \leq 40, \\ x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + 4x_2 = 100. \end{cases}$$

Целевая функция имеет вид  $L = 3x_1 + 2x_2$ . Преобразуем смешанную систему ограничений в систему ограничений в виде уравнений, введя новые переменные  $x_3$  и  $x_4$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 20, \\ x_1 + 2x_2 = 50. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 3. Выберем за базисные переменные  $x_1, x_2, x_3$  и перейдем к единичному базису:

$$\begin{cases} x_1 = 10 + 2x_4, \\ x_2 = 20 - x_4, \\ x_3 = 30 - 2x_4. \end{cases}$$

Первое допустимое решение получится при  $x_4 = 0, x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30$ . При этих значениях переменных  $L = 70$ . Увеличения значения целевой функции можно достигнуть путем увеличения  $x_4$  до  $x_4 = 15$ , судя по третьему уравнению. Тогда при  $x_4 = 15, x_1 = 40, x_2 = 5, x_3 = 0$  имеем  $L = 130$ . Второе допустимое решение (40, 5, 0, 15);  $x_1 = 40 - x_3, x_2 = 5 + (1/2)x_3, x_4 = 15 - (1/2)x_3, L = 130 - 2x_3$ . Коэффициент при  $x_3$  в целевой функции отрицателен, а потому дальнейшее увеличение  $L$  невозможно. Следовательно, оптимальное решение  $x_1 = 40, x_2 = 5$  и  $L_{\max} = 130$ . ▲

**2. Симплексные таблицы.** Систему ограничений сведем к единичному базису:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ x_i + \dots + a_{i,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots \\ x_r + \dots + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases}$$

а линейную форму  $L$  — к виду

$$L + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \dots + \gamma_jx_j + \dots + \gamma_nx_n = \gamma_0. \quad (1)$$

В виде таблицы эти данные можно представить так:

Базисные переменные	Свободные члены	$x_1$	...	$x_i$	...	$x_r$	$x_{r+1}$	...	$x_j$	...	$x_n$
$x_i$	$b_i$	1	...	0	...	0	$a_{i,r+1}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{in}$
.....	.....	...	...	...	...	...	.....	...	...	...	...
$x_i$	$b_i$	0	...	1	...	0	$a_{i,r+1}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{in}$
.....	.....	...	...	...	...	...	.....	...	...	...	...
$x_r$	$b_r$	0	...	0	...	1	$a_{r,r+1}$	...	$a_{rj}$	...	$a_{rn}$
$L$	$\gamma_0$	0	...	0	...	0	$\gamma_{r+1}$	...	$\gamma_j$	...	$\gamma_n$

Равенство (1) будем называть *приведенным* (к свободным переменным) *выражением* для функции  $L$ , а коэффициенты  $\gamma_j$  — *оценками* (индексами) соответствующих свободных переменных  $x_j$ .

1. Выбирают разрешающий столбец  $a_p$  из условия: оценка  $\gamma_p < 0$  и хотя бы один элемент  $a_{ip} > 0$ .

2. Выбирают  $q$ -ю разрешающую строку из условия

$$b_q/a_{qp} = \min \{b_i/a_{ip}\} \text{ для } a_{ip} > 0.$$

3. Производят пересчет элементов разрешающей  $q$ -й строки по формуле

$$a'_{qk} = a_{qk}/a_{qp} \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

4. Вычисляют элементы всех остальных строк (при  $k \neq p$ ) по формуле

$$a'_{ik} = a_{ik} - a'_{qk} a_{ip} \quad (i=0, 1, \dots, q-1, q+1, \dots, r).$$

Следует иметь в виду основную теорему симплексного метода, которую приведем без доказательства.

**Теорема.** Если после выполнения очередной итерации:

1) найдется хотя бы одна отрицательная оценка и в каждом столбце с такой оценкой окажется хотя бы один положительный элемент, т. е.  $\gamma_k > 0$  для некоторых  $k$ , и  $a_{ik} > 0$  для тех же  $k$  и некоторого  $i$ , то можно улучшить решение, выполнив следующую итерацию;

2) найдется хотя бы одна отрицательная оценка, столбец которой не содержит положительных элементов, т. е.  $\gamma_k < 0$ ,  $a_{ik} < 0$ , для какого-то  $k$  и всех  $i$ , то функция  $L$  не ограничена в области допустимых решений ( $L_{\max} \rightarrow \infty$ );

3) все оценки окажутся неотрицательными, т. е.  $\gamma_k \geq 0$  для всех  $k$ , то достигнуто оптимальное решение.

**1745.** Найти наибольшее значение линейной функции  $L = 7x_1 + 5x_2$  на множестве неотрицательных решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18. \end{cases}$$

$\Delta$  Ранг матрицы системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

равен 4. Ранг расширенной матрицы также равен 4. Следовательно, четыре переменные (базисные) можно выразить через две (свободные), т. е.

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 = 15 - 3x_2, \\ x_6 = 18 - 3x_1. \end{cases}$$

Кстати, линейная форма  $L = 7x_1 + 5x_2$ , или  $L - 7x_1 - 5x_2 = 0$  уже выражена через эти же свободные переменные. Имеем исходную таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Базисные переменные	Свободные члены	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_3$	19	2	3	1	0	0	0
$x_4$	13	2	1	0	1	0	0
$x_5$	15	0	3	0	0	1	0
$x_6$	18	3	0	0	0	0	1
$L$	0	-7	-5	0	0	0	0

Таблица 2

Базисные переменные	Свободные члены	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_3$	4	2	0	1	0	-1	0
$x_4$	8	2	0	0	1	-1/3	0
$x_2$	5	0	1	0	0	1/3	0
$x_6$	18	3	0	0	0	0	1
$L$	25	-7	0	0	0	5/3	0

Таблица 3

Базисные переменные	Свободные члены	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	2	1	0	1/2	0	-1/2	0
$x_4$	4	0	0	-1	1	2/3	0
$x_2$	5	0	1	0	0	1/3	0
$x_6$	12	0	0	-3/2	0	3/2	1
$L$	39	0	0	7/2	0	-11/6	0

Таблица 4

Базисные переменные	Свободные члены	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	5	1	0	-1/4	3/4	0	0
$x_6$	6	0	0	-3/2	3/2	1	0
$x_2$	3	0	1	1/2	-1/2	0	0
$x_6$	3	0	0	3/4	-9/4	0	1
$L$	50	0	0	3/4	11/4	0	0

Выясняем, имеются ли в последней строке (индексной) отрицательные оценки. Таких чисел два:  $-7$  и  $-5$ . Берем, например,  $-5$  и просматриваем столбец для  $x_2$ , в этом столбце имеем три положительных элемента 3, 1, 3. Делим на эти числа соответствующие свободные члены:  $19/3$ ,  $13/1$ ,  $15/3$ , из полученных частных наименьшее есть  $15/3$ . Следовательно, разрешающим является элемент 3, стоящий на пересечении строки для  $x_5$  и столбца для  $x_2$ . Выделим эту строку и этот столбец рамками. Новый базис состоит из  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_2$ ,  $x_6$ . Для составления следующей таблицы умножим выделенную строку табл. 1 на  $1/3$ , чтобы получить на месте разрешающего элемента 1, и полученную таким образом строку пишем на месте прежней. К каждой из остальных строк прибавляем вновь полученную, умноженную на такое число, чтобы в клетках столбца для  $x_2$  появились нули, и пишем преобразованные строки на месте прежних. Этим завершается I итерация.

Теперь все рассуждения повторяются применительно к табл. 2, т. е. выполняем II итерацию. Новый разрешающий элемент, находящийся на пересечении строки для  $x_3$  и столбца для  $x_1$ , есть 2. Переходим к следующей таблице.

То же повторим применительно к табл. 3. Здесь разрешающим является элемент  $2/3$ , находящийся на пересечении строки для  $x_4$  и столбца для  $x_5$ . Переходим к табл. 4.

Поскольку в индексной строке нет отрицательных оценок, мы получили оптимальный план (5, 3, 0, 0, 6, 3) и наибольшее значение линейной формы  $L$  есть  $L_{\max} = 50$ . ▲

Найти оптимальные неотрицательные решения, минимизирующие линейную форму:

$$1746. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \\ L = x_1 - x_3. \end{cases}$$

$$1747. \begin{cases} x_1 = 2 + 2x_3 - x_4, \\ x_2 = 1 + x_3 - 2x_4, \\ x_5 = 5 - x_3 + x_4, \\ L = x_1 + x_2. \end{cases}$$

$$1748. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 - x_4 = 1, \\ L = 2x_3 - x_2. \end{cases}$$

$$1749. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 900, \\ L = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

$$1750. \begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_5 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \\ L = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6. \end{cases}$$

Найти оптимальные неотрицательные решения, максимизирующие линейную форму:

$$1751. \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_2 + 2x_4 \geq 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 8, \\ L = 2x_1 + x_4. \end{cases}$$

$$1752. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq -1, \\ L = -x_1 - 2x_2 - 3x_3. \end{cases}$$

1753. Производственная мощность цеха сборки составляет 120 изделий типа  $A$  и 360 изделий типа  $B$  в сутки. Технический контроль пропускает в сутки 200 изделий того или другого типа (безразлично). Изделия типа  $A$  вчетверо дороже изделий типа  $B$ . Требуется спланировать выпуск готовой продукции так, чтобы предприятию была обеспечена наибольшая прибыль.

1754. Для изготовления изделий двух видов склад может отпустить металла не более 80 кг, причем на изделие I вида расходуется 2 кг, а на изделие II вида — 1 кг металла. Требуется спланировать производство так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль, если изделий I вида требуется изготовить не более 30 шт., а изделий II вида не более 40 шт., причем одно изделие I вида стоит 5 ден. ед., а II вида — 3 ден. ед.

1755. Для откорма животных употребляют два вида кормов; стоимость 1 кг корма I вида — 5 ден. ед., а корма II вида — 2 ден. ед. В каждом килограмме корма I вида содержится 5 ед. питательного вещества  $A$ , 2,5 ед. питательного вещества  $B$  и 1 ед. питательного

вещества  $B$ , а в каждом килограмме корма II вида соответственно 3, 3 и 1,3 ед. Какое количество корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на откорм были минимальными, если суточный рацион предусматривает питательных единиц типа  $A$  не менее 225 ед., типа  $B$  — не менее 150 ед. и типа  $B$  — не менее 80 ед.?

**3. Понятие о вырожденном решении.** При рассмотрении симплексного метода предполагалось, что  $b_i > 0$  (см. с. 276) как в исходной системе, так и в системах, получаемых после очередных итераций. Если же в некоторых уравнениях свободные члены  $b_i = 0$ , то в соответствующем этой системе опорном решении базисные переменные, относительно которых эти уравнения разрешены, принимают нулевые значения. Опорное решение, в котором хотя бы одна из базисных переменных принимает нулевое значение, называется *вырожденным решением*, а задача линейного программирования, имеющая хотя бы одно вырожденное решение, — *вырожденной задачей*. Применяя в этом случае последовательные итерации, мы можем вернуться к ранее встречавшемуся набору базисных и свободных переменных, т. е. появляется так называемое *заикливание* в схеме расчета. Приведем правило для устранения заикливания (мы не касаемся теоретического обоснования этого правила, являющегося специальным вопросом так называемой проблемы вырождения).

Если на каком-либо этапе расчета возникает неопределенность в выборе разрешающей строки, т. е. оказывается несколько равных минимальных отношений  $b_i/a_{ip}$ , то следует выбирать ту строку, для которой отношение элементов следующего столбца к разрешающему является наименьшим. Если при этом снова оказываются равные минимальные отношения, то составляют отношения элементов следующего столбца, и так до тех пор, пока разрешающая строка не определится однозначно.

**1756.** Максимизировать линейную форму  $L = 4x_5 + 2x_6$  при ограничениях:  $x_1 + x_5 + x_6 = 12$ ,  $x_2 + 5x_5 - x_6 = 30$ ,  $x_3 + x_5 - 2x_6 = 6$ ,  $2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 18$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ ,  $x_4 \geq 0$ ,  $x_5 \geq 0$ ,  $x_6 \geq 0$ .

△ Исходной системе соответствует опорное решение (12, 30, 6, 9, 0, 0) и значение  $L = 0$ . Ниже приводится последовательность итераций симплексного метода:

Исходная таблица

$x_i$	$b_i$					4	2	$b_i/a_{ip}$	$a_{i1}/a_{ip}$
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$		
$x_1$	12	1				1	1	12	
$x_2$	30		1			5	-1	6	-1/5
$x_3$	6			1		1	-2	6	-2
$x_4$	18				2	3	-2	6	-2/3
$L$	0					-4	-2		

I итерация

$x_1$	6	1		-1			-3	2	
$x_2$	0		1	-5			9	0	-5/9
$x_5$	6			1		1	-2		
$x_4$	0			-3	2		4	0	-3/4
$L$	24			4			-10		

II итерация

$x_1$	6	1		5/4	-3/2			24/5	
$x_2$	0		1	7/4	-9/2			0	
$x_5$	6			-1/2	1	1			
$x_6$	0			-3/4	1/2				
$L$	24			-7/2	5				

III итерация

$x_1$	6	1	-5/7		12/7				
$x_3$	0		4/7	1	-18/7				
$x_5$	6		2/7		-2/7	1			
$x_6$	0		3/7		-10/7		1		
$L$	24		2		-4				



составленные из коэффициентов при переменных, получаются друг из друга транспонированием. В правых частях системы ограничений каждой задачи стоят коэффициенты линейной функции, взятой из другой задачи. В системе ограничений задачи I (минимизация) все неравенства типа « $\geq$ », а в системе ограничений задачи I' (максимизация) все неравенства типа « $\leq$ ». Понятие двойственности является взаимным, т. е. если задачу I' записать в форме, аналогичной задаче I, то двойственной к ней окажется исходная задача I. Поэтому задачи I и I' называются взаимно двойственными или взаимно сопряженными. Доказывается, что  $L_{\min} = T_{\max}$ , а также, что необходимым и достаточным условием оптимальности решений любой пары двойственных задач является равенство  $L(\bar{x}) = T(\bar{y})$ , где  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  — допустимые решения задач I и I'.

1758. Дать геометрическую интерпретацию следующих взаимно двойственных задач:

Исходная задача (I): найти неотрицательные значения  $(x_1, x_2)$  из условий  $x_1 + 2x_2 \geq 4$ ,  $x_1 - x_2 \geq -1$  и минимизации линейной функции  $L = 3x_1 + 2x_2$ .

Двойственная задача (I'): найти неотрицательные значения  $(y_1, y_2)$  из условий  $y_1 + y_2 \leq 3$ ,  $2y_1 - y_2 \leq 2$  и максимизации линейной функции  $T = 4y_1 - y_2$ .

Δ Построим систему ограничений задач I и I'. В точке  $P(2/3; 5/3)$  достигается минимум линейной функции  $L$ , т. е.  $L_{\min} = 3 \cdot (2/3) + 2 \cdot (5/3) = 16/3$ , а в точке  $P'(5/3; 4/3)$  — максимум линейной функции  $T$ , т. е.  $T_{\max} = 4 \cdot (5/3) - 4/3 = 16/3$  (рис. 72). ▲

1759. Исходная задача (I): найти неотрицательные значения  $(x_1, x_2)$ , минимизирующие линейную функцию  $L = 3x_1 + 2x_2$ , если

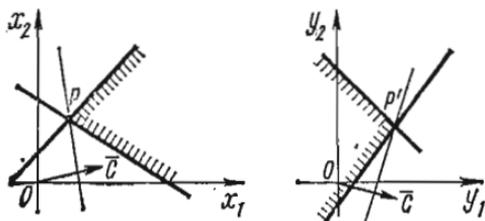


Рис. 72

дана система ограничений  $7x_1 + 2x_2 \geq 14$ ,  $4x_1 + 5x_2 \geq 20$ . Составить двойственную задачу и решить ее.

1760. Исходная задача (I): найти неотрицательные значения  $(x_1, x_2)$ , максимизирующие линейную функцию  $L = 5x_1 + 4x_2$  при системе ограничений  $4x_1 + 3x_2 \leq 24$ ,  $3x_1 + 4x_2 \leq 24$ . Составить двойственную задачу и решить ее.

1761. Исходная задача (I): найти неотрицательные значения  $(x_1, x_2)$ , минимизирующие линейную функцию  $L = 3x_1 + 3x_2$  при системе ограничений  $5x_1 - 4x_2 \geq -2$ ,  $x_1 + 2x_2 \geq 6$ . Составить двойственную задачу и решить ее.

## § 5. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Одной из типичных задач линейного программирования является так называемая *транспортная задача*. Она возникает при планировании наиболее рациональных перевозок грузов. В одних случаях это означает определение таксо

плана перевозок, при котором стоимость последних была бы минимальна, а в других — более важным является выигрыш во времени. Первая задача получила название *транспортной задачи по критерию стоимости*, а вторая — *транспортной задачи по критерию времени*.

Первая задача является частным случаем задачи линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако в силу особенностей этой задачи она решается проще.

Пусть в  $p$  пунктах отправления находятся соответственно  $a_1, a_2, \dots, a_p$  единиц однородного груза, который должен быть доставлен  $q$  потребителям в количествах  $b_1, b_2, \dots, b_q$  единиц. Заданы стоимости  $c_{ik}$  перевозок единицы груза из  $i$ -го пункта отправления  $k$ -му пункту потребления. Обозначим через  $x_{ik} \geq 0$  ( $i=1, 2, \dots, p; k=1, 2, \dots, q$ ) количество единиц груза, перевозимого из  $i$ -го склада  $k$ -му потребителю; тогда переменные  $x_{ik}$  должны удовлетворять следующим

ограничительным условиям: 1)  $\sum_{k=1}^q x_{ik} = a_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ); 2)  $\sum_{i=1}^p x_{ik} = b_k$  ( $k=1, 2, \dots, q$ ); 3)  $x_{ik} \geq 0$ . Суммарные затраты на перевозки равны  $L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{pq}x_{pq}$ . Следовательно, требуется найти  $pq$  переменных  $x_{ik}$ , удовлетворяющих указанным условиям и минимизирующих целевую функцию  $L$ .

Решение такой задачи разбивается на два этапа:

- 1) определение исходного опорного решения;
- 2) построение последовательных итераций, т. е. приближение к оптимальному решению.

**1. Определение исходного опорного решения.** Пусть мы имеем таблицу исходных данных задачи. Исходное опорное решение будем строить по так называемому правилу «северо-западного угла».

$a_i \backslash b_k$	$b_1$	$b_2$	...	$b_k$	...	$b_q$
$a_1$	$x_{11}$ $\frac{c_{11}}$	$x_{12}$ $\frac{c_{12}}$	...	$x_{1k}$ $\frac{c_{1k}}$	...	$x_{1q}$ $\frac{c_{1q}}$
$a_2$	$x_{21}$ $\frac{c_{21}}$	$x_{22}$ $\frac{c_{22}}$	...	$x_{2k}$ $\frac{c_{2k}}$	...	$x_{2q}$ $\frac{c_{2q}}$
⋮	....	....	....	....	....	....
$a_i$	$x_{i1}$ $\frac{c_{i1}}$	$x_{i2}$ $\frac{c_{i2}}$	...	$x_{ik}$ $\frac{c_{ik}}$	...	$x_{iq}$ $\frac{c_{iq}}$
⋮	....	....	....	....	....	....
$a_p$	$x_{p1}$ $\frac{c_{p1}}$	$x_{p2}$ $\frac{c_{p2}}$	...	$x_{pk}$ $\frac{c_{pk}}$	...	$x_{pq}$ $\frac{c_{pq}}$

Заполним вышеуказанную таблицу, начиная с левого верхнего угла, двигаясь далее или по строке вправо, или по столбцу вниз. В клетку (1, 1) занесем меньшее из чисел  $a_1$  и  $b_1$ , т. е.  $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$ .

Если  $a_1 > b_1$ , то  $x_{11} = b_1$  и первый столбец «закрит», т. е. потребности первого потребителя удовлетворены полностью. Двигаемся далее по первой строке,

записывая в соседнюю клетку (1, 2) меньшее из чисел  $a_1 - b_1$  и  $b_2$ , т. е.  $x_{12} = \min \{a_1 - b_1, b_2\}$ .

Если же  $b_2 > a_1$ , то аналогично «закрывается» первая строка и далее переходим к заполнению соседней клетки (2, 1), куда заносим  $x_{21} = \min \{a_2, b_1 - a_1\}$ . Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока на каком-то этапе не исчерпываются ресурсы  $a_p$  и потребности  $b_q$ .

1762. В двух пунктах отправления  $A$  и  $B$  находится соответственно 150 и 90 т горючего. В пункты 1, 2, 3 требуется доставить соответственно 60, 70 и 110 т горючего. Стоимости перевозки тонны горючего из пункта  $A$  в пункты 1, 2, 3 составляют соответственно 6, 10 и 4 ден. ед., а из пункта  $B$  — 12, 2 и 8 ден. ед. Составить оптимальный план перевозок горючего так, чтобы общая сумма транспортных расходов была наименьшей.

Таблица 1

		1	2	3
$b_k$		60	70	110
$a_i$				
A	150	60	70	20
B	90			90

△ Запишем исходные данные в табл. 1. Заполнение начнем с клетки (1, 1):  $x_{11} = \min \{150, 60\} = 60$ , первый столбец закрыт. Переходим к клетке (1, 2):  $x_{12} = \min \{150 - 60, 70\} = 70$ , второй столбец закрыт; далее, переходим к клетке (1, 3):  $x_{13} = \min \{150 - 60 - 70, 110\} = 20$ . Так как в третьем столбце оказался остаток, равный 90, то переходим к заполнению клетки (2, 3), куда заносим  $x_{23} = \min \{90, 90\} = 90$ . Поскольку остатки по строке и столбцу равны нулю, опорное исходное решение построено. Этому плану соответствуют затраты в количестве  $L = 6 \cdot 60 + 10 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 90 = 1860$  ден. ед.

В правиле «северо-западного угла» не учитывается величина затрат  $c_{ik}$ , а потому исходное опорное решение часто может быть далеким от оптимального. Применяют также прием «минимального элемента», в котором учитывается величина  $c_{ik}$ . В этом случае построение исходного опорного решения начинают с клетки с наименьшей величиной  $c_{ik}$ , в данном примере — с клетки (2, 2), где  $c_{22} = 2$  (табл. 2). В эту клетку заносим  $x_{22} = \min \{a_2, b_2\} = \min \{90, 70\} = 70$ .

Таблица 2

		1	2	3	
$b_k$		60	70	110	Остаток
$a_i$					
A	150	60	70	90	60,0
B	90		70	20	20,0
Остаток		0	0	20,0	

Остатки по строке и столбцу записываем в соответствующие клетки строки и столбца остатков. Столбец  $b_2$  закрыт. Теперь переходим к клетке (1, 3), так как после  $c_{22}=2$  наименьшим является  $c_{13}=4$ . В клетку (1, 3) заносим  $x_{13} = \min\{a_1 - b_1, b_3\} = \min\{150 - 60, 110\} = 90$ . Затем переходим к клетке (1, 1):  $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{150, 60\} = 60$ . Наконец, переходим к клетке (2, 3), в которую заносим  $x_{23} = \min\{a_2 - b_2, b_3\} = \min\{90 - 70, 110\} = 20$ .

Применяя это правило, мы получили другой вариант исходного опорного решения, при котором затраты  $L = 6 \cdot 60 + 4 \cdot 90 + 2 \cdot 70 + 8 \cdot 20 = 1020$  ден. ед., т. е. сумма затрат ближе к оптимальному плану.

**2. Построение последовательных итераций.** Получив исходное опорное решение, перейдем теперь к построению новых опорных решений, улучшающих друг друга: для этого применим метод потенциалов.

Итак, после построения исходного опорного решения все переменные разбиты на две группы:  $x_{kl}$  — базисные и  $x_{pq}$  — свободные; линейные функции стоимости перевозок выразятся через свободные переменные так:

$$L = \sum_{pq} \gamma_{pq} x_{pq} + \gamma_0. \quad (1)$$

Для нахождения коэффициентов  $\gamma_{pq}$  при свободных переменных сопоставим каждому пункту отправления  $A_i$  некоторую величину  $u_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), которую назовем потенциалом пункта  $A_i$ , и каждому пункту назначения  $B_j$  величину  $v_j$  — потенциал пункта  $B_j$ . Свяжем эти величины равенством  $u_k + v_l = c_{kl}$ , где  $c_{kl}$  — стоимость перевозки одной тонны груза из пункта  $A_k$  в пункт  $B_l$ . Доказывается, что совокупность уравнений  $u_k + v_l = c_{kl}$ , составленных для всех базисных переменных, составляет совместную систему линейных уравнений, причем значение одной из переменных можно задавать произвольно, и тогда значения остальных переменных находятся из системы однозначно. Обозначим для свободных переменных сумму соответствующих потенциалов через  $c'_{pq}$ , т. е.  $u_p + v_q = c'_{pq}$ , и назовем ее косвенной стоимостью (в отличие от данной стоимости  $c_{pq}$ ). Тогда коэффициенты при свободных переменных в соотношении (1) определяются с помощью равенства  $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$ .

Если все величины  $\gamma_{pq}$  неотрицательны, то исходное решение является оптимальным. Если же среди них имеются отрицательные, то переходим к следующему базису путем увеличения члена с отрицательным коэффициентом, оставляя другие переменные равными нулю.

Воспользуемся изложенными общими понятиями и продолжим решение задачи 1762. Мы получили исходное опорное решение (следуя правилу «минимального элемента»):  $x_{11} = 60$ ,  $x_{12} = 0$ ,  $x_{13} = 90$ ,  $x_{21} = 0$ ,  $x_{22} = 70$ ,  $x_{23} = 20$ ,  $L = 1020$ . Для нахождения потенциалов необходимо решить систему

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 6, \quad u_1 + v_3 = c_{13} = 4, \quad u_2 + v_2 = c_{22} = 2, \quad u_2 + v_3 = c_{23} = 8.$$

Значение одного из неизвестных зададим произвольно, например  $u_1 = 1$ . Тогда  $v_1 = 5$ ,  $v_3 = 3$ ,  $u_2 = 5$ ,  $v_2 = -3$ . Далее вычисляем косвенные стоимости  $c'_{pq}$ :

$$c'_{12} = u_1 + v_2 = -2, \quad c'_{21} = u_2 + v_1 = 10.$$

Подсчитаем теперь разности  $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$ :

$$\gamma_{12} = c_{12} - c'_{12} = 10 - (-2) = 12, \quad \gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2.$$

Следовательно, выражение  $L$  через свободные переменные имеет вид  $L = 1020 + 12x_{12} + 2x_{21}$ . Среди коэффициентов при переменных в правой части нет отрицательных. Значит, исходное опорное решение является оптимальным. Таким образом, правило «минимального элемента» сразу дает оптимальное решение.

Решим теперь эту же задачу при условии, что исходное решение получено по правилу «северо-западного угла», т. е.  $x_{11} = 60$ ,  $x_{12} = 70$ ,  $x_{13} = 20$ ,  $x_{23} = 90$ ,

$L = 1860$ . Для нахождения потенциалов необходимо решить систему

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 6, \quad u_1 + v_2 = c_{12} = 10, \quad u_1 + v_3 = c_{13} = 4, \quad u_2 + v_3 = c_{23} = 8.$$

Полагая  $u_1 = 1$ , получим  $v_1 = 5, v_2 = 9, v_3 = 3, u_2 = 5$ .

Вычисляем косвенные стоимости  $c'_{pq}$ :

$$c'_{21} = u_2 + v_1 = 10, \quad c'_{22} = u_2 + v_2 = 14.$$

Подсчитаем теперь разности  $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$ :

$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2, \quad \gamma_{22} = c_{22} - c'_{22} = 2 - 14 = -12.$$

Следовательно, выражение  $L$  через свободные переменные имеет вид  $L = 1860 + 2x_{21} - 12x_{22}$ . Среди коэффициентов при переменных в правой части есть отрицательный при  $x_{22}$ , следовательно, можно попытаться уменьшить  $L$ , увеличив  $x_{22}$  (сохранив нулевое значение  $x_{21}$ ). Положим  $x_{22} = \lambda$ . Поскольку суммы значений неизвестных по строкам и столбцам должны остаться неизменными, нужно произвести следующий балансировочный пересчет:

60	$70 - \lambda \dots$	$\rightarrow 20 + \lambda$
	$\uparrow$	$\downarrow$
	$\vdots$	$\vdots$
	$\lambda \dots \leftarrow$	$\dots 90: -\lambda$

Добавление  $\lambda$  к  $x_{22}$  компенсируется вычитанием  $\lambda$  из  $x_{12}$ , а это в свою очередь — прибавлением  $\lambda$  к  $x_{13}$  и т. д. до тех пор, пока мы не вернемся обратно к  $x_{22}$ . Обходя клетки по пунктирной ломаной линии, в одной из вершин которой находится свободная переменная  $x_{22}$ , а в остальных вершинах — базисные переменные (причем не обязательно все), мы получим так называемый *цикл пересчета* (ломаная называется *циклом*), отвечающий свободной клетке  $x_{22}$ . Как видно из таблицы, для неотрицательности переменных  $\lambda$  можно увеличить до  $\lambda = 70$ , тогда получим второе опорное решение:

60	0	90
0	70	20

т. е.  $x_{11} = 60, x_{12} = 0, x_{13} = 90, x_{21} = 0, x_{22} = 70, x_{23} = 20$ .

Значение функции  $L$  для него составляет  $L = 1860 - 12 \cdot 70 = 1020$ , т. е. получили оптимальное решение (судя по предыдущему решению).  $\blacktriangle$

Таким образом, правила вычислений по методу потенциалов сводятся к следующему.

1. Находят потенциалы  $u_k$  и  $v_l$  всех пунктов отправления  $A_k$  и назначения  $B_l$ .

2. Выбирают какую-нибудь свободную переменную, для которой сумма потенциалов строго больше соответствующей стоимости, это соответствует элементу с отрицательным коэффициентом при свободной переменной в правой части функции  $L$ .

3. Для выбранной в п. 2 переменной находят соответствующий ей цикл пересчета и производят сдвиг по этому циклу. Этот сдвиг приводит к новому допустимому решению.

4. Вышеуказанные операции 1—3 повторяют до тех пор, пока не получат оптимальный базис, т. е. неотрицательные коэффициенты при свободных переменных в правой части линейной функции  $L$ .

1763. На двух складах *A* и *B* находится по 90 т горючего. Перевозка одной тонны горючего со склада *A* в пункты 1, 2, 3 соответственно стоит 1, 3 и 5 ден. ед., а перевозка одной тонны со склада *B* в те же пункты — соответственно 2, 5 и 4 ден. ед. В каждый пункт надо доставить по одинаковому количеству тонн горючего. Составить такой план перевозки горючего, при котором транспортные расходы будут наименьшими.

1764. В резерве трех железнодорожных станций *A*, *B* и *C* находятся соответственно 60, 80 и 100 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки хлеба, если пункту № 1 необходимо 40 вагонов, № 2—60 вагонов, № 3—80 вагонов и № 4—60 вагонов. Стоимости перегонов одного вагона со станции *A* в указанные пункты соответственно равны 1, 2, 3, 4 ден. ед., со станции *B* — 4, 3, 2, 0 ден. ед. и со станции *C* — 0, 2, 2, 1 ден. ед.

1765. Завод имеет три цеха *A*, *B*, *C* и четыре склада № 1, 2, 3, 4. Цех *A* производит 30 тыс. шт. изделий, цех *B*—40 тыс. шт., цех *C*—20 тыс. шт. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад № 1—20 тыс. шт., склад № 2—30 тыс. шт., склад № 3—30 тыс. шт., склад № 4—10 тыс. шт. Стоимости перевозки 1 тыс. шт. изделий из цеха *A* в склады № 1, 2, 3, 4 соответственно равны 2, 3, 2, 4 ден. ед.; из цеха *B* — 3, 2, 5, 1 ден. ед., а из цеха *C* — 4, 3, 2, 6 ден. ед. Составить такой план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. шт. изделий были бы наименьшими.

1766. На трех складах *A*, *B*, *C* находится сортовое зерно соответственно 10, 15, 25 т, которое надо доставить в четыре пункта: пункту № 1—5 т, № 2—10 т, № 3—20 т и № 4—15 т. Стоимости доставки одной тонны со склада *A* в указанные пункты соответственно равны 8, 3, 5, 2 ден. ед.; со склада *B* — 4, 1, 6, 7 ден. ед. и со склада *C* — 1, 9, 4, 3 ден. ед. Составить оптимальный план перевозки зерна в четыре пункта, минимизирующий стоимость перевозок.

Глава I

4. 1) 8; 2) 3. 5. 1)  $1/2$ ; 2)  $-9/4$ . 6.  $M(7)$ . 7.  $C(1), D(3)$ . 8.  $C(-9), D(-1)$ .  
 16. 1) 13; 2) 3. 19. 5. 20.  $(-1; 8), (1; 9), (3; 10)$ . 21.  $S=0$ , т. е. точки  $A, B, C$  лежат на одной прямой. 22.  $D(17; 12)$ . 23.  $C(-10; -7)$ . 24.  $\sqrt{53}, \sqrt{82}, \sqrt{185}$ .  
 25. 24 кв. ед. 29.  $A(4; \pi/6); B(3; -\pi/2); C(4\sqrt{2}; 3\pi/4); D(2; -\pi/4); E(2\sqrt{2}; 4\pi/3); F(7; \pi)$ . 30.  $A(0; 10); B(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}); C(0; 0); D(\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2); E(-\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2); F(-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$ .  
 31.  $\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$ . 32. 5. 33.  $M_i(\rho; -\theta)$ . 34.  $M_i(\rho; \pi + \theta)$ .  
 35. 1)  $(3; 7\pi/6), (5; -\pi/3)$  и  $(2; 5\pi/6)$ ; 2)  $(3; -\pi/6), (5; -2\pi/3)$  и  $(2; \pi/6)$ .  
 36.  $M_1(\rho; \pi - \theta)$ . 44.  $y = 2x - 1,5$ . 45. Биссектриса I и III координатных углов.  
 46. Биссектриса II и IV координатных углов. 47.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ . 48.  $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$ . 49.  $\rho = a$ . 50.  $\theta = \alpha$ . 51.  $\rho = a \cos \theta$ . 57. Прямая  $y = 2x$ .  
 58.  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  (кривая называется эллипсом). 59.  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  (кривая называется гиперболой). 60. Отрезок прямой  $AB$ , где  $A(1; 0), B(0; 1)$ .  
 61.  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ . 62.  $x = a(t \sin t + \cos t), y = a(\sin t - t \cos t)$  (кривая называется эвольвентой круга). 67. 1)  $x + 2y - 2\sqrt{5} = 0$ ; 2)  $y = (-1/2)x + \sqrt{5}$ ; 3)  $x/(2\sqrt{5}) + y/\sqrt{5} = 1$ ; 4)  $(1/\sqrt{5})x + (2/\sqrt{5})y - 2 = 0$ . 68.  $135^\circ$ . 69. 54 кв. ед.  
 70. Нег. 72.  $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ . 73.  $x + y - 4 = 0$ . 74.  $3x - 2y = 0$ . 75.  $x + y - 7 = 0$ .  
 76.  $x + 3 = 0, y + 4 = 0$ . 77.  $x + y - 5 = 0, x + y + 5 = 0$ . 99.  $\operatorname{tg} \alpha = 27/11$ .  
 100.  $x - y = 0, 5x + 3y - 26 = 0, 3x + 5y - 26 = 0$ . 101.  $14x + 14y - 45 = 0, 2x - 2y + 35 = 0$ . 102.  $3x - y + 14 = 0, x - 5y - 14 = 0, x + 2y = 0$ . 103.  $x - 2 = 0, y - 7 = 0$ .  
 104. 4.4. 105. 2.4. 106.  $m = 4$ . 107.  $x - y = 0, x + 5y - 14 = 0, 5x + y - 14 = 0$ .  
 108.  $\pi/6$ . 109.  $(0; 5)$  и  $(4; 3)$ . 110.  $(7/8; 0)$  и  $(-27/8; 0)$ . 111.  $13x + 6y - 82 = 0, 3x + 4y - 23 = 0, S = 31,5$  кв. ед. 112.  $3x - 2y = 0, 5x + y + 6 = 0$ . 113.  $5x + 4 = 0$ .  
 114.  $5x + 8y + 11 = 0$ . 115.  $5y + 2 = 0$ . 116.  $17x + 11y = 0$ . 117.  $x + y + 1 = 0$ .  
 118.  $x = a, y = b$ . 119.  $x = 1; y = x$ . 120.  $30^\circ$ . 121.  $\varphi = 53^\circ 8'$ . 122.  $5x - 3y + 2 = 0$ .  
 123.  $\sqrt{3}$  кв. ед. 125.  $B(1; 3), C(11; 6)$ . 126. 1)  $x/4 + y/6 = 1$ ; 2)  $x/4(\sqrt{2} - 1) + y/(-6)(\sqrt{2} + 1) = 1$ ; 3)  $x/(-4)(\sqrt{2} + 1) + y/6(\sqrt{2} - 1) = 1$ . 127.  $3x - 4y - 9 = 0, 3x - 4y + 16 = 0, 4x + 3y - 37 = 0$  или  $4x + 3y + 13 = 0$ . 134. 1)  $a = 4, b = -3, r = 5$ ; 2)  $a = -5, b = 2, r = 0$ ; уравнение определяет точку; 3)  $a = 2, b = -7, r^2 = -1$ ; уравнение не имеет геометрического смысла (мнимая окружность). 135.  $\operatorname{tg} \varphi = -2,4$ . 136.  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ . 137.  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ .  
 138.  $x = 3,2$ . 139.  $3x - 4y + 8 = 0, 4x - 3y + 7 = 0$ . 140.  $(x - 2)^2 + y^2 = 16$ .  
 142.  $(4; 1,8)$ ;  $(4; -1,8)$ ;  $(-4; 1,8)$ ;  $(-4; -1,8)$ . 143.  $b^2/a$ . 144.  $4x + 3y + 12 = 0$ .  
 145.  $16x^2 + 25y^2 = 41$ . 146. Точка  $M$  — вне эллипса; точка  $N$  — на эллипсе; точка  $P$  — внутри эллипса. 147.  $e = \sin(\alpha/2)$ . 148.  $M(-5; 7)$ . 149.  $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$ . 150.  $x^2/3 + y^2/4 = 1$ . 151. Искомая кривая — эллипс. Если направить оси координат по сторонам прямого угла (точка  $A$  лежит на оси  $Ox$ ), то уравнение этого эллипса  $9x^2 + 36y^2 = 4a^2$ . 155.  $x^2/9 - y^2/8 = 1$ . 156.  $x^2/3 - y^2/5 = 1$ .  
 157.  $(-4; -3)$ . 158.  $x^2/64 + y^2/48 = 1$ . 159.  $x^2 - y^2 = 8/225$ . 160.  $e = 2/\sqrt{3}$ .  
 161.  $(-8, 0)$ . 162.  $x^2/4 - y^2/12 = 1$ . 163. 6 и 14. 166. Правая ветвь гиперболы  $x^2 - y^2/3 = 1$ . 169.  $y^2 = 4x$ . 170.  $M_1(2; 4)$  и  $M_2(2; -4)$ . 171.  $y^2 = 4x, y^2 = -4x$ .  
 172.  $y = \pm 2\sqrt{2}x$ . 173.  $y^2 = \sqrt{2}x$ . 174.  $M(0; 0), M_i(18; -24)$ . 175.  $y^2 = x, \operatorname{tg} \alpha = 8/15$ . 179.  $(3; 2)$ . 180.  $(8; -6)$ . 183. 1)  $O_1(1; 2), p = -1/4; x'^2 = -(1/2)y'$ ; 2)  $O_1(1; 3), p = -1/2; x'^2 = -y'$ ; 3)  $O_1(1/16; 1/8), p = -1/8; y'^2 = (-1/4)x'$ ; 4)  $O_1(1; -2), p = 1/2; y'^2 = x'$ . 184. 1)  $x'y' = 1/8$ ; 2)  $x'y' = 13/9$ ; 3)  $x'y' = -6/5$ ; 4)  $x'y' = 1/2$ . 187. Окружность  $(x - 1/2)^2 + (y - 1/3)^2 = 1$ . 188. Эллипс  $x'^2/25 + y'^2/16 = 1$ ; новое начало  $O'(1; -1)$ . 189. Гипербола  $x'^2/4 - y'^2/9 = 1$ ; новое начало  $O'(2; 3)$ .  
 190. Точка  $O'(2; 1)$ . 191. Мнимый эллипс  $x'^2/(-1) + y'^2/(-1/4) = 1; x' = x,$

$y' = y + 1$ . 192. Гипербола  $y'^2 - x'^2 = 1$ ; новое начало  $O'$  (3; 0). 193. Парабола  $x'^2 = -y'$ ; новое начало  $O'$  (1; 5/2). 194. Прямые  $x = 2$  и  $x = 4$ . 195. Мнимые прямые. 205. Совокупность двух параллельных прямых  $5x + y + 1 = 0$  и  $5x + y - 1 = 0$ . 203. Совокупность двух слившихся прямых  $x + y + 1 = 0$ . 204. Совокупность двух пересекающихся прямых  $2x - 3y + 1 = 0$ ,  $4x - 3y - 1 = 0$ . 205.  $x'^2/30 + y'^2/5 = 1$ . 206.  $x'^2/9 - y'^2/36 = 1$ . 207.  $y'^2 = -2x''$ . 210.  $x = 1/2$ ,  $y = 1/2$ . 211. Система противоречива (решений не имеет). 212.  $x = a + b$ ,  $y = a - b$ . 213. Система неопределенная (имеет бесчисленное множество решений:  $x$  остается произвольным, а  $y = -(3/2)x + 1/12$ ). 214.  $x = y = z = t$ . 215.  $x = \cos \alpha$ ,  $y = \sin \alpha$ . 216.  $x = 2t$ ,  $y = t$ ,  $z = 2t$ . 222. 0. 223. 2. 224.  $2(ad - bc)$ . 225.  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$ . 226.  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = -2$ . 227.  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . 228.  $x = t$ ,  $y = 2t$ ,  $z = -3t$ . 229.  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $z = 0$ . 230.  $x = t$ ,  $y = t$ ,  $z = -t$ .

## Глава II

234.  $C(5/3; 11/3; 13/3)$ ,  $D(1/3; 13/3; 17/3)$ . 236.  $M(3; 1; 3)$ . 237. Пополом. 238.  $M(0; 0; 17/8)$ . 239.  $M(16; -5; 0)$ . 246.  $AM = (b + \lambda c)/(1 + \lambda)$ . 248.  $a_x = 0$ ,  $a_y = 2$ ,  $a_z = -2$ . 249.  $m^2 + m + 1$ . 251.  $a = 3/5$ ;  $\cos \alpha = 1/3$ ,  $\cos \beta = \cos \gamma = 2/3$ . 252.  $|\overline{M_1 M_2}| = 7$ ;  $\cos \alpha = 2/7$ ,  $\cos \beta = -6/7$ ,  $\cos \gamma = 3/7$ . 253.  $b = -2j + 5k$  или  $b = -2j - 5k$ . 254.  $M(-4; 4; 4\sqrt{2})$ . 255.  $a_0 = (1/3)i - (2/3)j - (2/3)k$ . 268.  $-96$ . 269.  $\arccos(17/50)$ . 270.  $m = 1$ . 271. 547. 272.  $A = Fs = Fs \cos \varphi = 5\sqrt{3}$ . 273.  $(\pm 1/\sqrt{11})(i - 3j + k)$ . 274.  $c = i + k$  или  $c = (1/3)(-i + 4j - k)$ . 275.  $20/3$  и  $20/7$ . 276.  $rD = 7i + 7j + 7k$ . 279. Нет, так как компланарные векторы не могут быть попарно перпендикулярными. 280.  $a \times b = -17i + 7j - k$ . 281.  $\sqrt{65}/2$  кв. ед. 282. 4. 284. 20 куб. ед.;  $4\sqrt{510}/17$ .

## Глава III

296. 1)  $(x + y - z - 2)/\sqrt{3} = 0$ ; 2)  $-3/(5\sqrt{2})x - (1/\sqrt{2})y + 4/(5\sqrt{2})z - 7/(5\sqrt{2}) = 0$ . 297.  $d = 13/\sqrt{29}$ ; начало координат и точка  $M_0$  лежат по разные стороны от плоскости. 298.  $d = 7\sqrt{5}/3$ . 299. 1)  $x + y + z - 5 = 0$ , 2)  $2x + 2y + z - 6 = 0$ . 300.  $7x - 11y - z - 15 = 0$ . 301.  $M(5; 5; 5)$ . 302.  $4x - 3y + 12z - 169 = 0$ . 303.  $5y + 4z = 0$ ;  $5x - 3z = 0$ ;  $4x + 3y = 0$ . 304.  $6x + 5y - 7z - 27 = 0$ . 305.  $x/2 + y/2 + z/(\pm\sqrt{2}) = 1$ . 306.  $60^\circ$ . 307.  $x + 7y + 10z = 0$ . 308.  $x - z = 0$ . 309.  $x + y + z - 3 = 0$ . 310.  $5x + 2y + 5z - 9 = 0$ . 311.  $\sqrt{2}x + y + z - 5 = 0$ . 312.  $4x + 3y - 2z - 1 = 0$ . 313.  $(A_1D_2 - A_2D_1)x + (B_1D_2 - B_2D_1)y + (C_1D_2 - D_1C_2)z = 0$ . 314.  $x - y + 2 = 0$ . 315.  $\arcsin(5/6)$ . 327.  $5y + 5z - 64 = 0$ ,  $x = 0$  ( $yOz$ );  $5x + 5z - 2 = 0$ ,  $y = 0$  ( $xOz$ );  $5x - 5y + 62 = 0$ ,  $z = 0$  ( $xOy$ ). 328.  $(x + 1)/5 = (y - 3)/2 = z/1$ . 329.  $\cos \alpha = 6/7$ ,  $\cos \beta = 3/7$ ,  $\cos \gamma = 2/7$ . 330.  $(x - 1)/\sqrt{2} = (y + 2)/1 = (z - 3)/(\pm 1)$ . 331.  $(x - 5)/1 = (y + 1)/3 = (z + 3)/(-1)$ . 332.  $M(0; 7; -2)$ . 333.  $(x - 3)/(-1) = y/5 = (z + 1)/2$ ;  $x/2 = (y - 7)/(-2) = (z + 2)/3$ . 334.  $x = -3t - 1$ ,  $y = 6t + 1$ ,  $z = t + 2$ . 335.  $5\sqrt{30}/6$ . 336.  $(x - 3)/3 = (y + 1)/(-5) = (z - 2)/(-2)$ . 337.  $\cos \varphi = 20/21$ . 338.  $x/0 = y/1 = z/2$ . 339.  $(x - 4)/2 = (y - 1)/1 = (z + 2)/(-2)$ . 340.  $x/2 = (y - 2)/(-1) = (z - 1)/0$ . 341.  $(x - 1)/2 = (y - 1)/(-3) = (z - 1)/2$ . 342.  $x/1 = (y - 2)/(-1) = (z - 1)/(-1)$ . 343.  $x - 5y - 2z + 11 = 0$ . 344.  $x/(-10) = (y - 3, 4)/13 = (z - 5, 2)/19$ . 348. 1)  $C(-1; -2; 0)$ ,  $r = 5$ ; 2)  $C(2; -3; -1)$ ,  $r = 4$ ; 3)  $C(0; -1; 3/4)$ ,  $r = 3/4$ ; 4)  $C(1; 0; 0)$ ,  $r = 1$ ; 5)  $C(0; 0; 2)$ ,  $r = 1$ . 349. 1) Внутри сферы; 2) вне сферы; 3) на сфере. 350.  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$ . 351.  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$ ,  $z = 0$ . 352.  $C(4; 4; -2)$ ;  $r = 8$ . 356. 1) Круговой цилиндр; 2) эллиптический цилиндр; 3) гиперболический цилиндр; 4) параболический цилиндр; 5) параболический цилиндр; 6) параболический цилиндр; 7) круговой цилиндр; 8) ось аппликаты  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; 9) биссектральные плоскости  $x = z$  и  $x = -z$ ; 10) плоскости  $y = 0$  и  $y = x$ . 357. 1)  $x^2 + z^2 = 9$ ,  $y = 3$  (окружность); 2)  $y^2 - x^2 = 1$ ,  $z = 1$  (гипербола); 3)  $z^2 - y^2 = 0$ ,  $x = 0$  (две прямые). 358. 1)  $y^2/b^2 + z^2/b^2 - x^2/a^2 = 0$ ; 2)  $x^2/a^2 + z^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ ; 3)  $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ .

361.  $4x^2 + 4y^2 - (z-2)^2 = 0$ . 362.  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $z=1$ ;  $z+1=x^2$ ,  $y=1$ ;  $y^2=1-z$ ,  $x=1$ ;  $y^2-x^2=1$ ,  $z=-1$ . 363. 1) Гиперболический параболоид; 2) конус с вершиной в начале координат. 364.  $3z=2x^2+y^2$ . 365.  $x^2/9+y^2/5+z^2/1=1$ . 366.  $x^2+y^2=1$ ,  $z=1$  (окружность). 367. 1) Ось ординат; 2) конус с осью  $Oy$  и вершиной в начале координат; 3) конус с осью  $Ox$  и вершиной в начале координат; 4) начало координат; 5) пара плоскостей, пересекающихся по оси  $Oz$ . 374. Две плоскости  $x=y$  и  $x=z$ . 375. Круговой цилиндр  $(x-2)^2+(z-2)^2=4$ . 376. Прямая  $x=y=z$ . 377. Конус второго порядка  $x^2+(y-1)^2-(z-1)^2=0$  с вершиной  $S(0; 1; 1)$ . 378. Точка  $(0; 1; -1)$ . 379. Однополостный гиперболоид с каноническим уравнением  $x'^2+y'^2/4-z'^2/4=1$ . 380. Двуполостный гиперболоид с каноническим уравнением  $x'^2+y'^2-z'^2=-1$ . 381. Параболоид вращения с каноническим уравнением  $x'^2+y'^2=4z'$ . 382. Гиперболический параболоид с каноническим уравнением  $x'^2-z'^2/9=2y'$ .

#### Глава IV

387. 900. 388. 12. 389. 21 280. 390.  $a^2b^2$ . 391.  $x=1, y=2, z=1, t=-1$ . 392.  $x=1, y=1, z=0, t=-2$ . 393.  $x=1, y=2, z=3, u=4, v=5$ . 394.  $x=1, y=-1, z=0, t=2$ . 410.  $(t; 2t; 3t)$ , где  $t$  — произвольное действительное число. 411.  $(2t; 2t; t)$ , где  $t$  — произвольное действительное число.

412.  $(0; 0)$ . 413. Прямая  $x' \cos \alpha - y' (1 + \sin \alpha) = 0$ . 414.  $B = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -3 & -1 & -5 \\ -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ .

415.  $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ . 416.  $\begin{pmatrix} 0,1 & -0,2 & 0,7 \\ 0 & 0,1 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$ . 417.  $x=1, y=2, z=3$ . 418.  $\lambda_1=2$ ,

$\lambda_2=11$ ;  $e_1 = (4/\sqrt{41})i - (5/\sqrt{41})j$ ,  $e_2 = (1/\sqrt{2})i + (1/\sqrt{2})j$ . 419.  $\lambda_1=-2$ ,  $\lambda_2=3$ ,  $\lambda_3=6$ ;  $r_1 = \alpha(i-k)$ ,  $r_2 = \beta(i-j+k)$ ,  $r_3 = \gamma(i+2j+k)$ . 423.  $x'^2/16+y'^2/4=1$ . 424.  $x'^2/25-y'^2/9=1$ . 425.  $y'^2=2\sqrt{2}x'$ . 426.  $x'^2+y'^2/1-z'^2/3=1$  (однополостный гиперболоид). 427.  $2y'^2+3z'^2=\sqrt{6}x'$  (эллиптический параболоид). 434.  $r(A)=0$ , если  $\lambda=0$ ;  $r(A)=2$ , если  $\lambda \neq 0$ . 435.  $r(A)=3$ . 436.  $r(A)=3$ , базисные миноры

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ . 437.  $r(A)=2$ ; базисные миноры  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ ,

$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ . 441. Система совместна,  $r(A)=r(A_1)=2$ ;

$x_1=1, x_2=1/2$ . 442.  $r(A)=1, r(A_1)=2$ . Система несовместна. 443. Система совместна,  $r(A)=r(A_1)=2$ . 446.  $x_1=1, x_2=5, x_3=2$ . 447.  $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$ . 448.  $x_1=5, x_2=4, x_3=3, x_4=1, x_5=2$ . 449. Система несовместна. 450.  $x=1,96, y=2,96, z=5,04$ . 451.  $x=1,50; y=1,16, z=1,40$ . 457.  $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$ . 458.  $x_1=u, x_2=\bar{u}+1, x_3=u+2, x_4=u+3$ . 459. Система несовместна. 460.  $r(A)=3$ .

#### Глава V

463. Да. 464. Нет, так как сумма двух элементов множества не является элементом этого множества. 465. Нет, так как сумма двух многочленов второй степени может быть многочленом первой степени или постоянной величиной. 466. Да. 467. 1) Да; 2) да; 3) да; 4) нет. 468. Да. 469. 1) Лишь в том случае, если это нуль-вектор; 2) нет, так как в этом пространстве, кроме векторов  $x$  и  $y$ , должны быть и другие векторы вида  $\lambda x + \mu y$ . 470. Нет, так как в полученном множестве векторов найдутся векторы, сумма которых равна  $x$ , например векторы  $(x-y)/2$  и  $(x+y)/2$ . 471. Может. Например, исключив из множества геометрических векторов векторы, не перпендикулярные оси  $Oz$ , получим множество векторов  $\lambda i + \mu j$ , образующее линейное пространство. 473. Нет, так как  $\lambda(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$  не принадлежит этой совокупности, если  $\lambda$  — не целое число. 474. Нет. 475. Нет, так как противоположные векторы расположены не в I октанте. 488. Множество

всех многочленов не выше  $n$ -й степени. 501.  $x = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$ . 502.  $x = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n$ . 504.  $\xi_1 = e\xi_5$ ,  $\xi_2 = \alpha\xi_1$ ,  $\xi_3 = \beta\xi_2$ ,  $\xi_4 = \gamma\xi_3$ ,  $\xi_5 = \delta\xi_4$ . 505. Нет, так как имеет место равенство  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ , которое невозможно в силу линейной независимости базисных векторов  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ . 506. Может лишь в том случае, если этим элементом является нуль-вектор. 508. Пересечением является множество элементов  $x_{12} = (0; 0; \xi_3; \xi_4)$ ,  $y_{12} = (0; 0; \eta_3; \eta_4)$ ,  $z_{12} = (0; 0; \zeta_3; \zeta_4)$ , ... Сумма совпадает с пространством  $R$ . 509.  $d(R_1) = 3$ ,  $d(R_2) = 3$ ,  $d(R_3) = 2$ ,  $d(R_4) = 4$ . 510. Нет. 513.  $R_3$  — множество постоянных величин,  $R_4$  — множество многочленов вида  $c_0t^4 + c_1t^2 + c_2t + c_3$ . 514.  $R_3$  — множество всех векторов, параллельных оси  $Ox$ , а  $R_4 = R$ . 516. Множество всех четных функций образует подпространство, а множество нечетных — нет, так как произведение двух нечетных функций есть четная функция. 517. Нет, так как любой вектор  $\lambda a$  не принадлежит этому множеству, если  $\lambda$  — иррациональное число. 522.  $k = 3$ ;  $f_1 = (-1; 0; 1; 0; 0)$ ,  $f_2 = (-1; 0; 0; 1; 0)$ ,  $f_3 = (0; -1/2; 0; 0; 1)$ ,  $f = (-c_1 - c_2; -0,5c_3; c_1; c_2; c_3)$ . 526. Да. 527. Нет, так как равенство  $|a + b| \cdot (a + b) = a \cdot a + b \cdot b$  не выполняется, если  $ab \neq 0$ . 528. Лишь в том случае, если  $x_0 = 0$ . 529. Лишь при  $a = 0$ .

530. Да. 533. 
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$
 536. 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 538.  $3A - 2B = E$ .

544.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . 545.  $A^{-1} = A$ . 546.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . 547.  $B = 2E \cos \alpha$ .

548. Линейное преобразование  $A$  не имеет обратного, так как  $|A| = 0$ .

549.  $A^{-2} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . 550. При  $\lambda = -2$ . 552. 1) Если  $\alpha \neq \beta$ , то  $\lambda_1 = \alpha$ ,

$u = c_1 e_1$ ,  $\lambda_2 = \beta$ ,  $v = c_2 e_2$ ; 2) если  $\alpha = \beta$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ ,  $u = c_1 e_1 + c_2 e_2$ . 553.  $\lambda_1 =$

$= \lambda_2 = 2$ ,  $u = c_1 (e_1 + e_2)$ . 554. 1) Если  $b \neq 0$ , то линейное преобразование не имеет

собственных векторов; 2) если  $b = 0$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ ,  $u = c_1 e_1 + c_2 e_2$ . 556.  $\lambda = 2$ ,

$u = c_1 (e_1 - e_3)$ ;  $\lambda = 3$ ,  $v = c_2 (e_1 - e_2 + e_3)$ ;  $\lambda = 6$ ,  $w = c_3 (e_1 + 2e_2 + e_3)$ . 558.  $\lambda = -1$ ,

$u = c_1 (e_1 + c_2)$ . 560.  $\lambda = 1$ ,  $u = c_1 (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ ;  $\lambda = -1$ ,  $v = c_2 (e_1 - e_2 + e_3 - e_4)$ .

561.  $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$ ,  $u = c (e_1 + e_2 + e_3)$ . 563.  $(x, y)$  — общая стоимость всех изделий,

выпускаемых заводом. 565. Да. 566. Нет, так как не выполняются условия 2<sup>о</sup>

и 3<sup>о</sup>, если  $\lambda < 0$ . 567. Да. 569.  $\arccos(1/n)$ . 573. Да. 576.  $|x| = 5$ . 577.  $x/|x| =$

$= (1/15)e_1 + (2\sqrt{2}/15)e_2 + (\sqrt{3}/5)e_3 + (8/15)e_4 + (\sqrt{5}/3)e_5$ . 579.  $x$  — нормиро-

ванный вектор. 580.  $\varphi = \pi/3$ . 581.  $\pm 0,5 (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ . 582.  $\lambda = \pm 1$ . 587. Да.

588. Да. 589. При  $\lambda = \pm 1$ . 590. Да, так как векторы  $Ae_1$ ,  $Ae_2$  и  $Ae_3$  образуют

ортономмированный базис. 591. Да. 598.  $x'^2/21 + y'^2/3 = 1$ . 599.  $x'^2/16 - y'^2/4 = 1$ .

600.  $x'^2/44 + y'^2/4 = 1$ .

## Глава VI

606.  $n = 4$ . 607.  $\delta = 0,16\%$ . 608.  $\delta = 0,0005\%$ . 609.  $\delta = 0,022\%$ ;  $n = 4$ ;  $S =$

$= 8765 \pm 0,1 \text{ м}^2$ . 617. 1)  $[-2, 0) \cup (0, 2]$ ; 2)  $[0, 4]$ ; 3)  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ;

4)  $x \neq \pi(2n+1)/4$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 5)  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ; 6)  $(1/3, +\infty)$ ; 7)  $[0, 2)$ .

618. 1)  $[1, +\infty)$ ; 2)  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ; 3)  $[-4, 4]$ ; 4)  $(-\infty, 3]$ ; 5)  $[-2, 4]$ ;

6)  $(0, 1]$ . 619. 1) Нечетная; 2) четная; 3) ни четная, ни нечетная; 4) четная;

5) ни четная, ни нечетная; 6) четная; 7) нечетная. 620. 1)  $2\pi/5$ ; 2)  $6\pi$ ; 3)  $\pi$ ;

4) л. 657. 1/2. 658.  $-1$ . 659. 1/6. 660.  $-2$ . 661.  $-\sin a$ . 662.  $m/n$ . 663.  $\sec^2 x_0$ .

664.  $-\sqrt{2}/4$ . 665. 1/2. 666.  $\infty$ . 667. 2. 668. 3/4. 669.  $-1/4$ . 670. 1/2. 671. 3.

672.  $\sqrt{7}/4$ . 673. 25/9. 674. 1/2. 675.  $m$ . 676. 1, если  $x \rightarrow +\infty$ ;  $-1$ , если

$x \rightarrow -\infty$ . 677.  $(a-c)/2$ . 678. 0. 679. 0. 680.  $\ln 5$ . 681.  $\ln(8/7) : \ln(6/5)$ . 682. 2.

683.  $\ln 5$ . 684. 1/4. 685. 1, если  $x \rightarrow +0$ ;  $-1$ , если  $x \rightarrow -0$ . 686.  $+\infty$ . 687. 2.

688. 0. 689. Не существует. 690. 5/4. 691.  $\ln a$ . 692.  $e$ . 693.  $e^3$ . 694. 1/6.

695.  $\ln(5/4)$ . 696. 1. 697.  $-3$ . 698. 0. 699. 1/2. 700.  $e^{10}$ . 701.  $\sqrt{e}$ . 702.  $e^{a-b}$ .

703.  $\sqrt{e}$ . 704.  $y \sim x$ . 709. 2. 710. 1/2. 711.  $\alpha = o(\beta)$ . 712.  $\alpha \sim \beta$ . 713.  $\alpha \sim \beta$ .

714. 1/3. 715. 9/4. 716.  $-1/2$ . 717.  $-1/2$ . 718.  $-1/2$ . 719. 1. 720. 9/25.

721.  $(\ln 5 \cdot \ln 4) / (\ln 3 \cdot \ln 6)$ . 722. 1, 6. 726.  $x=2$ —точка скачка. 727.  $x=1$ ,  $x=5$ —точки разрыва II рода. 728. Разрыв II рода. 729.  $x=0$ —точка устранимого разрыва. 730.  $x=3$ —точка скачка;  $x=5$ —точка разрыва II рода;  $x=0$ —точка устранимого разрыва;  $x=\pi/2 + \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )—точки разрыва II рода. 731.  $x=1$ ,  $x=2$ —точки устранимого разрыва. 732.  $x=-2$ ,  $x=-3$ —точки разрыва II рода;  $x=-1$ —точка устранимого разрыва. 733. Функция непрерывна в бесконечном промежутке  $(-\infty, +\infty)$ . 734. 1) Функция непрерывна; 2) имеет одну точку разрыва II рода; 3) имеет две точки разрыва II рода. 735. 1) Функция непрерывна; 2) имеет две точки разрыва II рода; 3) имеет четыре точки разрыва II рода.

### Глава VII

739.  $y' = -2/x^3$ . 740.  $y' = 2/(3\sqrt[3]{x})$ . 741.  $y' = 5 \cos x - 3 \sin x$ . 742.  $y' = 5 \operatorname{tg}^2 x$ . 743.  $y' = -e^x/(e^x + 1)^2$ . 744.  $y' = 2x^2 \cdot 2x \cdot \ln 2$ . 771.  $y' = -21/x^4$ . 772.  $y' = \sqrt[3]{x}$ . 773.  $y' = x^2 \sqrt{x} (1-x^2)^2$ . 774.  $y' = -x^2 e^{-x}$ . 775.  $y' = 9x^2 \ln x$ . 776.  $y' = (8/9)^x \ln(8/9)$ . 777.  $y' = x^2 \cos x$ . 778.  $y' = 6(x+1)/(2x^2+3x)$ . 779.  $y' = -3x/\sqrt{1-3x^2}$ . 780.  $y' = \arccos(x/2)$ . 781.  $y' = 1/(2\sqrt{x}) \arcsin \sqrt{x}$ . 782.  $y' = -\cos x$ . 783.  $y' = -\cos^2(x/3) \sin(x/3)$ . 784.  $y' = \operatorname{cosec}(2x+1)/2$ . 785.  $y' = 1/\cos x$ . 786.  $y' = 2 \sec^6 2x$ . 787.  $y' = 1/(2\sqrt{x}) \sin^2 \sqrt{x} \cos^5 \sqrt{x}$ . 788.  $y' = 6x/\sqrt{9x^4+1}$ . 789.  $y' = \sqrt{a^2-x^2}$ . 790.  $y' = -2 \sec^2 x / \sqrt{\operatorname{tg} x} (4 \operatorname{tg} x + 1)$ . 791.  $y' = \operatorname{ctg}^3(x/2)$ . 792.  $y' = 1/(x\sqrt{4x^2-1})$ . 793.  $y' = 1/\sqrt{a^2-x^2}$ . 794.  $y' = 1/(2\sqrt{1-x^2})$ . 795.  $y' = 6x^2/(1+x^6)$ . 796.  $y' = 6 \operatorname{sgn} x/(x^2+9)$ . 797.  $y' = -2e^{-x} \sin^2 e^{-x}$ . 798.  $y' = -1/(2\sqrt{1-x^2})$ . 799.  $y' = -6/[(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)]$ . 800.  $y' = 3e^{\sin^2 3x} \sin 6x \sin^2 3x$ . 801.  $y' = -24 \ln \sin x \cdot \operatorname{ctg} x / (4 \ln^4 \sin x - 9)$ . 802.  $y' = \sec x$ . 803.  $y' = \operatorname{cosec} x$ . 804.  $y' = e^{\sqrt{2x}}$ . 805.  $y' = 10/[x(x^5+2)]$ . 806.  $y' = 2 \sin x / (1 + \cos x)^2$ . 807.  $y' = \cos x / (1 + \sin^2 x)$ . 808.  $y' = \operatorname{cosec}^2(x/2) \operatorname{ctg}(x/2)$ . 809.  $y' = (2/x) \cos^2(\ln x)$ . 810.  $y' = 5x^4 \ln(x^5+3)$ . 811.  $y' = -x/(|x|\sqrt{5-x^2})$ . 812.  $y' = \sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}$ . 813.  $y' = 0$ . 814.  $y' = (mx+n)/\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}$ . 815.  $y' = 1/(1-mx^2)^{3/2}$ . 816.  $y' = 4x \cos^2 x$ . 817.  $y' = -2 \operatorname{cosec}^3 x$ . 818.  $y' = \frac{\cos x \ln \sin x}{(1 + \ln \sin x)^2}$ . 819.  $y' = 9x \sin^2 x \cos x$ . 820.  $y' = 2/(x\sqrt{1+x^2})$ . 821.  $y' = 2e^x \sin^2 e^x$ . 822.  $y' = 2/(x^2+2x+2)^2$ . 823.  $y' = \ln^3 x$ . 824.  $y' = (\ln \sin \sqrt{x}) / (2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x})$ . 825.  $y' = 2(1+\ln x)/(x^x+x^{-x})$ . 826.  $y' = 1/\sin^5 x$ . 827.  $y' = \cos^4 x/\sin x$ . 828.  $y' = 1/(3 \sin x + 4 \cos x + 5)$ . 829.  $y' = \cos x \operatorname{tg}^3 \sin x$ . 830.  $y' = 1/[x^2(x-1)]$ . 831.  $y' = 1/[x(x+1)(x+2)]$ . 832.  $y' = 4x \operatorname{tg}^2 2x$ . 833.  $y' = -2e^x/\sqrt{1-e^{2x}}$ . 834.  $y' = (\ln \ln \ln x)/(x \ln x)$ . 835.  $y' = 2e^{2x}(1-2x)/(x+e^{2x})^2$ . 836.  $y' = 2(\ln x+1)/(x^2 \ln^2 x - 1)$ . 837.  $y' = 3/(1+x^2)$ . 838.  $y' = (e^{2 \sin x} \cos x) \cdot \sin(e^{2 \sin x}/2)$ . 839.  $y' = a \sin 2x$ . 840.  $y' = 3 \sec^2 x \sec^4 \operatorname{tg} x$ . 841.  $y' = (-1/x^2) \operatorname{arctg} x$ . 842.  $y' = (-5/x^6) \ln x$ . 843.  $y' = (1/\sqrt{2x+1}) \ln(2x+1)$ . 844.  $y' = \sec x \operatorname{tg} x \ln \sec x$ . 845.  $y' = -2e^{3x}/\sqrt{1-e^{2x}}$ . 846.  $y' = 3 \cdot 2^{\cos x} x^{-3 \cos x} \cdot \sin^3 x \cdot \ln 2$ . 847.  $y' = (e^x \cdot 2^{5x/34x}) \times \ln(32e/81)$ . 848.  $y' = 0$ . 849.  $y' = x \cos 2x$ . 850.  $y' = 2e^{x^2} x (x^4+x^2+1)/(x^2+1)^2$ . 851.  $y' = x \cos x/\sin^2 x$ . 852.  $y' = (1/\sqrt{x}) \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}$ . 853.  $y' = x^2/(x^4-a^4)$ . 854.  $y' = -4x/\sqrt{x^4+1}$ . 855.  $y' = e^{0.5 \operatorname{tg}^2 x} \sin x \operatorname{tg}^2 x$ . 856.  $y' = 8x^3/(1+x^8)$ . 857.  $y' = xe^{x^2} (2x^2 \ln x + 2 \ln x + 1)$ . 858.  $y' = 0,5 \ln 2 \sqrt{2^x/(1-2^x)}$ . 859.  $y' = -\ln 2/(2x \ln^2 x)$ . 860.  $y' = (mx+n)/\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta}$ . 861.  $y' = (2/\ln 2) \operatorname{ctg} x$ . 862.  $y' = 1/(\sqrt{x^2+9} \ln a)$ . 863.  $y' = x^{\arcsin x} \left( \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x} \right)$ . 864.  $y' = 8(x-1)^3/(x+1)^5$ . 865.  $y' = \frac{2x(x+1)^3}{(x-1)^2 \sqrt{2x+1}} \left( \ln 2 + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2x+1} \right)$ . 866.  $y' = -1/(|x|\sqrt{1+x^2})$ . 867.  $y' = x^m \cos(n \ln x)$ . 868.  $y' = (x \operatorname{tg} x + \ln \cos x) \sec^2(x \operatorname{tg} x + \ln \cos x) x \sec^2 x$ . 869.  $y' = -x \sin x \cdot \ln(x \cos x - \sin x)$ . 870.  $y' = 3 \cos^3(xe^x - e^x) \cdot xe^x$ . 871.  $y' = -2(1-2x^2)/(|1-2x^2|\sqrt{1-x^2})$ . 872.  $y' = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$  873.  $y' =$

$$= \begin{cases} f'(x) & \text{при } f(x) > 0, \\ -f'(x) & \text{при } f(x) < 0. \end{cases} \quad 874. y' = \begin{cases} 3 & \text{при } x > 5/3, \\ -3 & \text{при } x < 5/3. \end{cases} \quad 875. y' = \begin{cases} e^x & \text{при } x > 0, \\ -e^{-x} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

$$876. y' = \begin{cases} -2 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < 2, \\ 2 & \text{при } x > 2. \end{cases} \quad 877. y' = 2xe^x \sin x. \quad 878. y' = (x \cos x):$$

$$: \sqrt{(x \sin x + \cos x)^2 + 1}. \quad 879. y' = x^{x+1} \ln x (\ln x - 1) / e^x. \quad 880. y' = (\operatorname{ctg} x \cdot \ln \cos x + \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x) / \ln^2 \cos x. \quad 881. y' = nx^{n-1} / (2 \sqrt{x^{2n} + 1}). \quad 882. y' = -(\log_x e)^2 / x. \quad 883. y' = 0. \quad 884. y' = 1/2. \quad 885. y' = 0. \quad 886. y' = x^x (1 + \ln x). \quad 887. y' = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2 \times$$

$$\times (\ln 2 + 2x^{-1} - 1 - \ln x). \quad 888. y' = 2x^{\ln x - 1} \ln x. \quad 889. y' = \frac{x^2 \sqrt{x+1}}{(x-1)^3 \sqrt[5]{5x-1}} \times$$

$$\times \left[ \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1} \right]. \quad 893. (\operatorname{arcsec} x)' = 1/(x \sqrt{x^2-1}), (\operatorname{arccosec} x)' =$$

$$= -1/(x \sqrt{x^2-1}). \quad 894. 4 \operatorname{cosec}^2 x. \quad 898. y' = (x^2 - y)/(x - y^2). \quad 899. y' = -(Ax + By + D)/(Bx + Cy + E). \quad 900. y' = x/(3y). \quad 901. y' = y(y - x \ln y)/x(x - y \ln x).$$

$$902. y' = -(y \cos x + \sin y)/(x \cos y + \sin x). \quad 903. y' = -(e^x - y \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2)/(e^y - x \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2). \quad 904. y' = 2x. \quad 905. y' = y/x. \quad 906. y' = -y/(2x \ln x). \quad 907. y' = -(2x \sin y - y^3 \sin x - 2):$$

$$:(x^2 \cos y + 3y^2 \cos x - 3). \quad 909. -\operatorname{ctg} t. \quad 910. e^{2t}. \quad 911. 2\sqrt{\alpha} e^{-\sqrt{\alpha}}. \quad 912. \operatorname{cth} t. \quad 914. \alpha = \pi/4; \quad y = x + 1. \quad 917. y - y_0 = (-y_0/p)(x - x_0). \quad 918. x - y + 1 = 0.$$

$$919. x + y - 1 = 0; \quad x - y = 0. \quad 920. x - y + 2 - \pi/2 = 0; \quad x + y - \pi/2 = 0. \quad 921. 3x - y - 4 = 0; \quad x + 3y - 28 = 0. \quad 923. \pi/4. \quad 924. 3x - 8y + 10 - 6 \ln 2 = 0; \quad 32x + 12y - 15 - 64 \ln 2 = 0. \quad 925. x \operatorname{ch} t_0 - 1 = 0. \quad 926. \operatorname{tg} \varphi = 2/3. \quad 927. \pi/4. \quad 928. \pi/4; \quad 3\pi/4. \quad 929. \operatorname{tg} \varphi_1 = 3, \operatorname{tg} \varphi_2 = -3. \quad 930. \pi/2. \quad 933. 1,76 \text{ м/с}. \quad 934. x'_i = \sqrt[3]{a}. \quad 939. \pi - \operatorname{arctg}(1/3). \quad 940. \operatorname{tg} \omega = \varphi;$$

$$\text{если } \varphi \rightarrow \infty, \text{ то } \omega \rightarrow \pi/2. \quad 941. \pi/2 + \varphi. \quad 942. 0. \quad 943. \operatorname{arctg}(1/m). \quad 944. \pi - \operatorname{arctg}(125/64). \quad 950. y'' = -44/(x+5)^3. \quad 951. y'' = \ln x. \quad 952. y'' = 2\sqrt{1-\lambda^2}. \quad 953. y'' = x \sin 3x.$$

$$954. y'' = 1/\sqrt{x^2+a^2}. \quad 955. \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a} \operatorname{cosec}^4 \frac{t}{2}. \quad 956. \frac{d^2y}{dx^2} = -4\sqrt{t-t^2}.$$

$$959. -1/3 \text{ м/с}^2. \quad 960. y''' = 1/(x+1)^4. \quad 961. y''' = (2 \ln x - 3)/x^3. \quad 962. y''' = 105\sqrt{2x+3}. \quad 963. y''' = 4 \operatorname{sh} 2x. \quad 964. y^{(n)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2^n} \sqrt{-x}. \quad 965. y^{(n)} = \frac{n! (-2)^n}{(2x+1)^{n+1}}.$$

$$966. y^{(n)} = -1,5 \cdot 2^n \cdot \cos(2x + \pi n/2). \quad 967. y^{(n)} = [2^x + (-1)^n \cdot 2^{-x}] \ln^n 2. \quad 968. y^{(n)} = \frac{n! (ad-bc)(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}. \quad 969. y^{(n)} = k^n e^{kx}. \quad 970. y^{(n)} = \cos(x + \pi n/2). \quad 971. \frac{d^ny}{dx^n} =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{t}. \quad 972. y^{\text{III}} = y^{\text{IV}} = \dots = 0. \quad 982. dy = \sqrt{49-x^2} dx. \quad 983. dy = \frac{dx}{x^2-36}.$$

$$984. dy = \operatorname{th}(x/2) dx. \quad 985. dy = \frac{2e^{2x} dx}{1+e^{4x}}. \quad 986. dy = \ln x dx, \quad d^2y = \frac{(dx)^2}{x}, \quad d^3y = -\frac{(dx)^3}{x^2}.$$

$$987. d^2y = \frac{-x(dx)^2}{(x^2+4)^{3/2}}. \quad 988. \Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}, \quad dy = -\frac{\Delta x}{x^2}. \quad 989. \Delta y = 0, \quad 0401;$$

$$dy = 0,04. \quad 990. 34,04 \text{ м}^3. \quad 991. \pi/4 + 1/13. \quad 992. 0,811. \quad 993. 1,035. \quad 994. 0,078.$$

$$995. 1,9938. \quad 1007. \xi = 5/2. \quad 1008. \frac{1}{x_0} - \frac{x-x_0}{x_0^2} + \frac{(x-x_0)^2}{x_0^3} - \frac{(x-x_0)^3}{x_0^4} + R_3, \text{ где}$$

$$R_3 = \frac{(x-x_0)^4}{\xi^5} \quad (x_0 \leq \xi \leq x). \quad 1009. M(\sqrt{3}; 0). \quad 1010. 0,754. \quad 1011. 4,946. \quad 1012. 1,395.$$

$$1013. 2,002. \quad 1014. 0,587. \quad 1024. 3/5. \quad 1025. 2. \quad 1026. 2/3. \quad 1027. 1/3. \quad 1028. 0,18. \quad 1029. 18. \quad 1030. 1. \quad 1031. 0. \quad 1032. 1/2. \quad 1033. \infty. \quad 1034. 0. \quad 1035. 1/\pi. \quad 1036. 1. \quad 1037. 0. \quad 1038. -1/2. \quad 1039. (p-q)/2. \quad 1040. 2/3. \quad 1041. 1. \quad 1042. e^{-6}. \quad 1043. 2.$$

$$1044. e^{1/3}. \quad 1055. \text{Возрастает на } (-\infty, -1) \text{ и на } (1, +\infty), \text{ убывает на } (-1, 1). \quad 1056. \text{Убывает на } (-\infty, -1), \text{ возрастает на } (-1, +\infty). \quad 1057. \text{Возрастает на } (-\infty, 1), \text{ убывает на } (1, +\infty). \quad 1058. \text{Убывает на } (-\infty, -1) \text{ и на } (1, +\infty), \text{ воз-}$$

$$\text{растает на } (-1, 1). \quad 1059. y_{\min} = y(0) = 0, \quad y_{\max} = y(2\sqrt[3]{2/49}) = (12/49)\sqrt[3]{4/7}. \quad 1060. y_{\max} = y(11/4) = 13/4. \quad 1061. y_{\min} = y(0) = 0. \quad 1062. y_{\min} = y(0) = 1. \quad 1063. y_{\min} =$$

$= y(e) = e$ . 1064.  $y_{\max} = y(1) = 1/\sqrt{e}$ ,  $y_{\min} = y(-1) = -1/\sqrt{e}$ . 1065.  $y_{\min} = y(1) = 0$ .  
 1066.  $y_{\min} = y(3) = 0$ ,  $y_{\max} = y(2) = 3$ . 1067.  $y_{\min} = y(1) = -1$ . 1068.  $y_{\max} =$   
 $= (\pi - 12 + 6\sqrt{3})/12$ ,  $y_{\min} = (5\pi - 12 - 6\sqrt{3})/12$ . 1069.  $y_{\max} = e^{3/2}$ ,  $y_{\min} = e^{-3/2}$ .  
 1070.  $y_{\text{наим}} = 2$ ,  $y_{\text{наиб}} = 66$ . 1071. (0; 4) и (0; -4). 1072. 25 км; 8 ч 15 мин.  
 1073.  $5\sqrt{2}$ ,  $3\sqrt{2}$ . 1074.  $1/4$ ,  $1/4$ . 1075.  $V = 2\pi l^3 \sqrt{3}/27$ . 1076.  $V = (S/3)\sqrt{S/(6\pi)}$ .  
 1077. На расстоянии 9 км от А. 1078. 125 м. 1079.  $a/\sqrt{2}$ . 1083. Выпукла на  
 $(-\infty, -2)$ , вогнута на  $(-2, +\infty)$ . 1084. (4; 20). 1085. (1; 0). 1086. Точек пере-  
 гиба нет. 1091.  $x=0$ ;  $y=2x$ . 1092.  $x=0$ ;  $y=-3x$ . 1093.  $y=x-6$ . 1094.  $y =$   
 $= 0,5x + \pi$  и  $y = 0,5x$ . 1095.  $y = 0,5\pi x + 1$  и  $y = -0,5\pi x + 1$ . 1098.  $D(y) = (-\infty,$   
 $+\infty)$ ; функция четная и периодическая с периодом  $\pi$ . Возрастает на  $(\pi k,$   
 $\pi/2 + \pi k)$ , убывает на  $(\pi/2 + \pi k, \pi + \pi k)$ ;  $y_{\min} = y(\pi k) = 0$ ,  $y_{\max} = y(\pi/2 + \pi k) = 1$ ;  
 $k \in \mathbb{Z}$ . Кривая вогнута на  $(-\pi/4 + \pi k, \pi/4 + \pi k)$  и выпукла на  $(\pi/4 + \pi k, 3\pi/4 + \pi k)$ ;  
 точки перегиба  $(-\pi/4 + \pi k; 1/2)$  и  $(\pi/4 + \pi k; 1/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 1099.  $D(y) = (-\infty, +\infty)$ ,  
 функция нечетная. Убывает на  $(-\infty, -1)$  и на  $(1, +\infty)$ , возрастает на  $(-1, 1)$ ;  
 $y_{\min} = y(-1) = -2$ ,  $y_{\max} = y(1) = 2$ . Кривая вогнута на  $(-\infty, 0)$  и выпукла на  
 $(0, +\infty)$ ; точка перегиба (0; 0). 1100.  $D(y) = (1, +\infty)$ ; асимптоты  $x=1$ ,  $y=0$ .  
 Убывает во всей области определения. Кривая всюду вогнута. Экстремумов и  
 точек перегиба нет. 1101.  $D(y) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ ; асимптоты  $x=0$ ,  $x=1$ ,  
 $y=0$ . Возрастает на  $(-\infty, 0)$ , убывает на  $(1, +\infty)$ . Кривая всюду вогнута.  
 Экстремумов и точек перегиба нет. 1102.  $D(y) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ ;  
 функция нечетная; асимптоты  $x=-2$ ,  $x=2$ ,  $y=x$ . Возрастает на  $(-\infty, -2\sqrt{3})$   
 и на  $(2\sqrt{3}, +\infty)$ , убывает на  $(-2\sqrt{3}, -2)$ ,  $(-2, 2)$  и на  $(2, 2\sqrt{3})$ ;  $y_{\min} =$   
 $= y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$ ,  $y_{\max} = y(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$ . Кривая выпукла на  $(-\infty, -2)$   
 и на  $(0, 2)$ , вогнута на  $(-2, 0)$  и на  $(2, +\infty)$ ; точка перегиба (0; 0). 1103.  $D(y) =$   
 $= (0, +\infty)$ ; асимптота  $y=0$ . Возрастает на  $(0, e^2)$ , убывает на  $(e^2, +\infty)$ ;  $y_{\max} =$   
 $= y(e^2) = 2/e$ . Кривая выпукла на  $(0, e^{8/3})$  и вогнута на  $(e^{8/3}, +\infty)$ ; точка пере-  
 гиба  $(e^{8/3}, 8e^{-4/3}/3)$ . 1104.  $D(y) = (-\infty, +\infty)$ . Убывает на  $(-\infty, 1/4)$ , возраст-  
 ает на  $(1/4, +\infty)$ ;  $y_{\min} = y(1/4) = -27/16$ . Кривая вогнута на  $(-\infty, 1/2)$  и на  
 $(1, +\infty)$ , выпукла на  $(1/2, 1)$ ; точки перегиба  $(1/2; -1)$  и  $(1; 0)$ . 1105.  $D(y) =$   
 $= [0, +\infty)$ . Убывает на  $(0, 1/3)$ , возрастает на  $(1/3, +\infty)$ ;  $y_{\min} = y(1/3) =$   
 $= -2/(3\sqrt{3})$ . Кривая всюду вогнута. 1106.  $D(y) = (-\infty, +\infty)$ ; асимптота  $y=x$ .  
 Убывает на  $(-\infty, 0)$ , возрастает на  $(0, +\infty)$ ;  $y_{\min} = y(0) = 1$ . Кривая всюду  
 вогнута. 1107.  $D(y) = (-\infty, +\infty)$ ; функция нечетная; асимптоты  $y=-1$  и  $y=1$ .  
 Возрастает на  $(-\infty, +\infty)$ . Кривая вогнута на  $(-\infty, 0)$  и выпукла на  $(0, +\infty)$ ;  
 точка перегиба (0; 0). 1108.  $D(y) = (-\infty, +\infty)$ , асимптота  $y=0$ . Возрастает на  
 $(-\infty, 1)$ , убывает на  $(1, +\infty)$ ;  $y_{\max} = y(1) = e$ . Кривая вогнута на  $(-\infty, 1 - \sqrt{2}/2)$   
 и на  $(1 + \sqrt{2}/2, +\infty)$ , выпукла на  $(1 - \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2)$ ; точки перегиба  
 $(1 + \sqrt{2}/2; \sqrt{e})$  и  $(1 - \sqrt{2}/2; \sqrt{e})$ . 1109.  $D(y) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ; асимп-  
 тоты  $x=2$  и  $y=x+4$ . Возрастает на  $(-\infty, 2)$  и на  $(6, +\infty)$ , убывает на  $(2, 6)$ ;  
 $y_{\min} = y(6) = 27/2$ . Кривая выпукла на  $(-\infty, 0)$ , вогнута на  $(0, 2)$  и на  $(2, +\infty)$ ;  
 точка перегиба (0; 0). 1114.  $R = 25/3$ . 1115.  $R = (4a/3) \cos(\theta/2)$ . 1116.  $k = 1/(e\sqrt{2})$ .  
 1117. (2; 2). 1118. Окружность  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ . 1121. Первый. 1122. Первый. 1123. Тре-  
 тий. 1124. Первый. 1125. Третий. 1126. Второй. 1128. Окружность  $x^2 + z^2 = 1$ ,  
 $y=1$ . 1129. Прямая, проходящая через начало координат и образующая с осями  
 координат равные углы. 1130. Прямая, параллельная оси  $Oz$  и проходящая через  
 точку (1; 1; 0). 1131. Равнобочная гипербола, лежащая в плоскости  $xOz$ .  
 1134.  $(i+k) \operatorname{sh} 2t + j \operatorname{ch} 2t$ . 1135. 0. 1136.  $3(t^2 - 2t^5)i + (5t^4 - 2t)j$ . 1138.  $x/(-1) =$   
 $= (y-1)/0 = (z - \pi\sqrt{3}/2)/\sqrt{3}$ ,  $2x - 2z\sqrt{3} + 3\pi = 0$ . 1139.  $M_1(0; 0; -1)$  и  
 $M_2(2/3; -8/9; -1/27)$ . 1140.  $70^\circ 23'$ . 1141.  $x/1 = (y-1)/0 = (z - \sqrt{2}/2)/1$ ,  $x+z -$   
 $-\sqrt{2}/2 = 0$ . 1142.  $(x-1)/2 = (y+1)/0 = (z-1)/1$ . 1143.  $(x-1)/2 = (y-1)/3 = (z-1)/4$ .  
 1144.  $\arccos(14/(3\sqrt{29}))$ . 1146.  $ds = \sqrt{a^2 + b^2} dt$ . 1147.  $h = 2\sqrt{3}\pi$ . 1148.  $v =$   
 $= \frac{dr}{dt} = -3i \sin t + 3j \cos t + 4k$ ,  $w = \frac{d^2r}{dt^2} = -3i \cos t - 3j \sin t$ . 1149.  $v|_{t=1} = i +$   
 $+ 2j + 3k$ ,  $w|_{t=1} = 2j + 6k$ . 1151.  $\tau = (5/13)i - (12/13)j \sin t + (12/13)k \cos t$ .

1152.  $\tau = -(1/3)j + (2\sqrt{2}/3)k$ . 1161.  $(2/3)i + (2/3)j + (1/3)k$ . 1162.  $(1/3)i - (2/3)j + (2/3)k$ . 1163.  $(-2/3)i + (1/3)j + (2/3)k$ . 1164.  $2/27$ . 1165.  $2/27$ . 1166.  $X - 2Y + 2Z - 2 = 0$ . 1167.  $2X - Y - 2Z - 7 = 0$ . 1168.  $2X + 2Y + Z - 19 = 0$ .

## Глава VIII

1174.  $x^2 + y^2 \geq 1$  — часть плоскости вне единичного круга с центром в начале координат. 1175. Часть плоскости внутри круга  $x^2 + y^2 < 1$ . 1176. Полоса между параллельными прямыми  $x + y \leq 1$  и  $x + y \geq -1$ . 1177. Концентрические кольца  $\pi/2 \geq x^2 + y^2 \geq 0$ ,  $5\pi/2 \geq x^2 + y^2 \geq 3\pi/2, \dots$ . 1178.  $y > x$  — полуплоскость, лежащая выше биссектрисы  $y = x$ . 1179. Полуплоскость  $x \geq 0$ . 1180. Шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ . 1181. Часть пространства вне конуса  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . 1182. Часть пространства внутри шара  $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ , за исключением начала координат. 1183. Часть пространства над плоскостью  $x + y + z = 0$ , включая эту плоскость. 1184. Семейство параллельных прямых  $2x + y = C$ . 1185. Семейство прямых  $y = Cx$ . 1186. Семейство прямых  $y = e^{2C}x$ , или  $y = C_1x$  ( $C > 0$ ). 1187. Семейство парабол  $y = C\sqrt{x}$ . 1188. Семейство равнобочных гипербол  $xy = C$  (при  $C \neq 0$ ); совокупность координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  (при  $C = 0$ ). 1189. Семейство плоскостей  $x + y + 3z = C$ . 1190. Семейство сфер  $x^2 + y^2 + z^2 = C$ . 1191. Семейство двуполостных гиперboloидов  $x^2 - y^2 - z^2 = C$  (при  $C > 0$ ); семейство однополостных гиперboloидов  $x^2 - y^2 - z^2 = C$  (при  $C < 0$ ); конус  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$  (при  $C = 0$ ). 1197.  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 4$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y - 3x + 2$ . 1198.  $\frac{\partial r}{\partial \rho} = 2\rho \sin^4 \theta$ ,  $\frac{\partial r}{\partial \theta} = 4\rho^2 \sin^3 \theta \cos \theta$ . 1199.  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}$ . 1200.  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy(x^2+y^2)}(3x^2y+y^3)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy(x^2+y^2)}(x^3+3xy^2)$ . 1201.  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x}}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt{z^2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2y^2}{\sqrt{z}}$ . 1202.  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}e^{x/y}$ ;  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}e^{x/y} + \frac{z}{y^2}e^{-z/y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{y}e^{-z/y}$ . 1203.  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}$ . 1204.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2(x^3+y^2)e^{(x^3+y^2)^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y(x^3+y^2)e^{(x^3+y^2)^2}$ . 1205.  $\frac{\partial u}{\partial x} = (y-z)(2x-y-z)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = (x-z)(x-2y+z)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = (x-y)(-y+2z-x)$ . 1206.  $\frac{\partial u}{\partial x} = (6x-y)e^{3x^2+2y^2-xy}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = (4y-x)e^{3x^2+2y^2-xy}$ . 1207.  $\frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xyz} \sin \frac{y}{x} + \frac{1}{x}e^{xyz} \cos \frac{y}{x}$ . 1209.  $\rho$ . 1214.  $dz = \frac{2(x dx + y dy)}{x^2 + y^2}$ . 1215.  $dz = \frac{2(x dy - y dx)}{x^2 \sin(2y/x)}$ . 1216.  $2(x dx + y dy) \cos(x^2 + y^2)$ . 1217.  $dz = x^y \left( \frac{y}{x} dx + \ln x dy \right)$ . 1218.  $du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( dx + \frac{y dy}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ . 1219.  $dz = e^x [(x \cos y - \sin y) dy + (\sin y + \cos y + x \sin y) dx]$ . 1220.  $dz = e^{x+y} \{ [(x+1) \cos y + y(\sin x + \cos x)] dx + [x(\cos y - \sin y) + (y+1) \sin x] dy \}$ . 1221.  $dz = \frac{2dx}{x^2+4} + \frac{2 \cos y dy}{\sin^2 y + 4}$ . 1222.  $du = e^{xyz} (yz dx + xz dy + xy dz)$ . 1223. 1,08. 1224. -0,03. 1225. 1,013. 1226. 3,037. 1227. 1,05. 1232.  $6(x+y)$ . 1233.  $-\sin(x+y)$ . 1234.  $-4 \cos(2x+2y)/\sin^2(2x+2y)$ . 1235. 0. 1236.  $x(x+2y)/(x+y)^2$ . 1237.  $y(2-y^2) \cos xy - xy^2 \sin xy$ . 1238.  $\sin y \times \cos(x+\cos y)$ . 1239.  $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} [(dy)^2 - (dx)^2] - \frac{4xy dx dy}{(x^2+y^2)^2}$ . 1240.  $-\cos(x+y)(dx+dy)^2$ . 1241.  $ae^y [e^y \sin(ax+e^y) - \cos(ax+e^y)]$ . 1242. 4. 1244.  $2[(dx)^2 - dx dy + (dy)^2]$ . 1249.  $e^{xy} [(y dx + x dy)^2 + 2 dx dy]$ . 1250.  $-\left( \frac{dx+dy}{x+y} \right)^2$ . 1251.  $-\frac{6}{x^4} (y dx - x dy) (dx)^2$ .

1252.  $6 dx dy dz$ . 1253.  $\frac{2}{y^4} (4y dx - 3x dy)^3 (dy)^3$ . 1254.  $e^{x+y} (dx + dy)^5$ . 1257.  $4/\sin 2x$ .
1258.  $2x(3x+2)/(x^2+3x+1)^2$ . 1259.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos x$ ,  $\frac{dz}{dx} = x(2 \cos x - x \sin x)$ .
1260. 0. 1261.  $\frac{\partial z}{\partial \xi} = 4\xi$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 4\eta$ . 1262.  $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{2}{\xi}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{2(\eta^4 - 1)}{\eta(\eta^4 + 1)}$ . 1268.  $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_M = \frac{7}{5}$ .
1269.  $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M = \frac{1}{6}$ . 1270.  $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M = \frac{7}{9}$ . 1271.  $|\text{grad } u|_M = 1/r_0^2$ ;  $\cos \alpha = -x_0/r_0$
- $\cos \beta = -y_0/r_0$ ,  $\cos \gamma = -z_0/r_0$ , где  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ . 1272.  $|\text{grad } u|_M = 3$ ,  $\cos \alpha = 1/3$ ,  $\cos \beta = \cos \gamma = 2/3$ . 1273.  $1/3$ . 1278.  $-x/y$ . 1279.  $y/x$ . 1280.  $y' = -y/x$ ,  $y'' = 2y/x^2$ . 1281.  $(y \sqrt{2xy - x^2})/(2y^3 - x \sqrt{2xy})$ . 1282.  $y/x$ . 1283.  $(a^2 - b^2)/(2b^2 - a^2)$ .
1284.  $y/(2x)$ . 1285.  $(x+y)/(x-y)$ . 1286.  $1/(2^y \ln 2)$ . 1287.  $y' = -1$ ,  $y'' = 0$ .
1288.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1}$ . 1289.  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 - xz}{z^2 - xy}$ .
1290.  $\frac{dx + (z/y) dy}{1 + \ln(z/y)}$ . 1291.  $-\frac{x \cos y + \sin x}{\sin x}$ . 1292.  $-\frac{(y+z) dx + (x+z) dy}{x+y}$ .
1293.  $-y - z - e^{y-x}$ . 1294. 1. 1297.  $2x + 2y - z = 1$ ,  $(x-1)/2 = (y-1)/2 = (z-3)/(-1)$ . 1298.  $2x + 2y - 3z + 1 = 0$ ,  $(x-2)/2 = (y-2)/2 = (z-3)/(-3)$ . 1299.  $z - 2x + 2 = 0$ ,  $(x-1)/2 = y/0 = z/(-1)$ . 1300.  $x - y - 2z + 1 = 0$ ,  $(x - \pi/4)/1 = (y - \pi/4)/(-1) = (z - 1/2)/(-2)$ . 1301.  $x + 4y + 6z \pm 21 = 0$ . 1303.  $(4/3; 4/3; 1/3)$  и  $(-4/3; -4/3; -1/3)$ . 1307.  $z_{\max} = 1/64$ . 1308.  $z_{\min} = -125$ . 1309.  $z_{\max} = 4$ ; 1310.  $z_{\min} = 0$ .
1311.  $z_{\max} = a \sqrt{3}/9$  при  $x = y = 2a/3$ . 1315.  $z_{\min} = 144/25$  в точке  $(36/25; 48/25)$ . 1316.  $z_{\text{наим}} = -16/3$ ,  $z_{\text{наиб}} = 16$ . 1317.  $z_{\text{наим}} = 5$ ,  $z_{\text{наиб}} = 11$ . 1318.  $z_{\text{наим}} = -1/2$ ,  $z_{\text{наиб}} = 1/2$ . 1319.  $z_{\text{наим}} = 1$ ,  $z_{\text{наиб}} = 4$ . 1320.  $z_{\text{наим}} = -2(\sqrt{2} + 1) \approx -4,8$ ,  $z_{\text{наиб}} = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0,8$ . 1321.  $z_{\text{наим}} = 0$ ,  $z_{\text{наиб}} = 3\sqrt{3}/2$ . 1322.  $z_{\text{наим}} = -3$  при  $x = y = 3\pi/2$ ,  $z_{\text{наиб}} = 1 + \sqrt{3}/2$  при  $x = y = 5\pi/6$ . 1323.  $z_{\text{наим}} = -1/8$ ,  $z_{\text{наиб}} = 1$ .
1324. Равносторонний. 1325. Равносторонний. 1326. Квадрат;  $P_{\text{наим}} = 4\sqrt{5}$ .
1327. Куб;  $V_{\max} = (S/6)\sqrt{5/6}$ .

### Глава IX

1337.  $(2/5)x^2 \sqrt{-x} + C$ . 1338.  $(5/4) \int \sqrt{x^4} + C$ . 1339.  $2 \arcsin x - x + C$ .
1340.  $\text{arctg } x + x - x^3/3 + C$ . 1341.  $e^{3x} \cdot 3^x / (3 + \ln 3) + C$ . 1342.  $\text{tg } x - x + C$ .
1343.  $\text{ch } x + \cos x + C$ . 1344.  $x^2/2 - 2x + \ln|x| + C$ . 1345.  $4 \text{tg } x - 9 \text{ctg } x - x + C$ .
1346.  $(1/2) \sin(x^2) + C$ . 1347.  $\ln|\ln x| + C$ . 1348.  $3(ax^2 + b)^{4/3} / (8a) + C$ .
1349.  $(2/3) \sin x \sqrt{\sin x} + C$ . 1350.  $-(1/b) \cos(a + bx) + C$ . 1351.  $\sin(\sin x) + C$ .
1368.  $e^{\sqrt{2x-1}} + C$ . 1369.  $-(1/32)(1 - 2x^4)^4 + C$ . 1370.  $(1/3) \cos(2 - 3x) + C$ .
1371.  $(1/10) \text{sh}(5x^2 + 3) + C$ . 1372.  $2 \text{arctg } \sqrt{x} + C$ . 1373.  $(1/5)(x^2 + 1)^{5/2} + C$ .
1374.  $(1/2) \ln|x^2 - 1| + C$ . 1375.  $(1/2) \ln|x^2 + \sqrt{x^4 - 1}| + C$ . 1376.  $(-1/4) \times \text{arctg}(0,5 \cos^2 2x) + C$ . 1377.  $(1/\sqrt{7}) \ln|(\sqrt{x} - \sqrt{7})/(\sqrt{x} + \sqrt{7})| + C$ .
1378.  $2 \arcsin(e^{x/2}/4) + C$ . 1379.  $\ln|x + \sqrt{2+x^2}| + \arcsin(x/\sqrt{2}) + C$ .
1380.  $(-2/9) \sqrt{2 - 3x^3} + C$ . 1381.  $-5\sqrt{3 - x^2} + 3 \arcsin(x/\sqrt{3}) + C$ . 1382.  $(1/4) \times \text{arctg}(x-3)/4 + C$ . 1383.  $2\sqrt{3x+5} + \sqrt{5} \ln|(\sqrt{3x+5} - \sqrt{5})/(\sqrt{3x+5} + \sqrt{5})| + C$ .
1384.  $1/(2\sqrt{10}) \text{arctg}(x^2 \sqrt{2/5}) + C$ . 1392.  $(x^2/4)(2 \ln x - 1) + C$ . 1393.  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ . 1394.  $(x^2/3) \text{arotg } x - (1/6)x^2 + (1/6) \ln(x^2 + 1) + C$ . 1395.  $xe^x + C$ .
1396.  $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$ . 1397.  $(1/2)e^{x^2}(x^4 - 2x^2 + 2) + C$ .
1398.  $0,5(x \sqrt{x^2 + \lambda} + \lambda \ln|x + \sqrt{x^2 + \lambda}|) + C$ . 1399.  $(x+1)^2 \sin x + 2(x+1) \cos x + C$ .
1400.  $(e^{2x}/5)(\sin x + 2 \cos x) + C$ . 1401.  $(x/2)(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$ . 1402.  $-2\sqrt{x} \times \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$ . 1410.  $-1/[3(x-1)^3] + C$ . 1411.  $-1/[4(2x+3)^2] + C$ .
1412.  $(1/3) \text{arctg}(x-3)/3 + C$ . 1413.  $1/(3\sqrt{2}) \text{arctg}(x^3 + 1)/\sqrt{2} + C$ . 1414.  $(1/2) \times \ln(x^2 - 4x + 7) + C$ . 1415.  $(5/2) \ln(x^2 + 10x + 29) - 11 \text{arctg}(x+5)/2 + C$ .
1416.  $(1/10) \ln(5x^2 + 2x + 1) + (2/5) \text{arctg}(5x+1)/2 + C$ . 1417.  $x/[8(x^2 + 2)^2] + 3x/[32(x^2 + 1)] + (3\sqrt{2}/64) \text{arctg}(x/\sqrt{2}) + C$ . 1418.  $(x-7)/[8(x^2 + 2x + 5)] + (1/16) \text{arotg}(x+1)/2 + C$ . 1428.  $-(2/3) \ln|x| + (5/3) \ln|x-3| + C$ . 1429.

- $-(1/2) \ln(x^2+x+1)+3 \ln|x+2|+(1/\sqrt{3}) \operatorname{arctg}(2x+1)/\sqrt{3}+C$ . 1430.  $1/2(x-1)^2+2 \ln|x-1|+3 \ln|x-2|+C$ . 1431.  $(1/12) \ln|x-2|-(1/24) \ln(x^2+2x+4)-1/(4\sqrt{3}) \operatorname{arctg}(x+1)/\sqrt{3}+C$ . 1432.  $(31/108) \ln|x-3|+(29/108) \ln|x+3|+(2/9) \ln(x^2+9)-(1/54) \operatorname{arotg}(x/3)+C$ . 1433.  $(1/4) \ln|x/(x-2)|-(x-1)/[2x(x-2)]+C$ . 1434.  $(1/16) [\ln(x^2+1)/(x^2+9)]+(1/8) \operatorname{arctg} x-(1/24) \operatorname{arctg}(x/3)+C$ . 1435.  $(1/4) \ln[(x^2+4)/(x^2+2x+5)]+(1/8) \operatorname{arctg}(x/2)+(7/32) \operatorname{arotg}(x+1)/2+C$ . 1436.  $(1/2) [\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arotg}(x+1)]+C$ . 1437.  $x+(9/2) \ln|x-3|-(1/2) \times \ln|x-1|+C$ . 1438.  $x^2/2+7x+(75/2) \ln|x-5|-(1/2) \ln|x-1|+C$ . 1439.  $x+(1/2) \ln|x(x-2)/(x+2)|-\operatorname{arctg}(x/2)+C$ . 1440.  $3x+\ln|x+2 \operatorname{arctg} x+C$ . 1442.  $(1/32) \ln|e^x-2|^{13}(e^x+2)^7+(3/16) \ln(e^{2x}+4)-(3/16) \operatorname{arctg}(e^x/2)-x+C$ . 1443.  $(5/6) \ln|e^x-1|+(16/5) \ln(2e^x+1)+(11/20) \ln(e^{2x}+1)-(7/5) \operatorname{arctg} e^x-3x+C$ . 1453.  $-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2 \ln|\sqrt[4]{1-2x}-1|+C$ . 1454.  $(6/5)\sqrt[6]{x^5-2}\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6 \operatorname{arotg}\sqrt[6]{x}+C$ . 1455.  $\ln|x-0,5+\sqrt{x^2-x-1}|+C$ . 1456.  $\arcsin(x+1):3+C$ . 1457.  $-5\sqrt{-x^2+4x+5}+13 \arcsin(x-2)/3+C$ . 1458.  $3\sqrt{x^2+x+2}+0,5 \ln|x+0,5+\sqrt{x^2+x+2}|+C$ . 1459.  $\sqrt{x/(x+2)}+C$ . 1460.  $-\arcsin[(x+1):(x\sqrt{3})]+C$ . 1461.  $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+\sqrt{2} \ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{2(x+1)}\right|+C$ . 1462.  $-(x/2+5)\sqrt{-x^2+4x}+13 \arcsin(x-2)/2+C$ . 1466.  $3/(\sqrt[3]{x+1})+\ln[x/(\sqrt[3]{x+1})^3]+C$ . 1467.  $4\sqrt{\sqrt{x+1}}[(1/5)(\sqrt{x+1})^2-(2/3)(\sqrt{x+1})+1]+C$ . 1468.  $(1/6) \ln[(t^2+t+1)/(t^2-2t+1)]-(1/\sqrt{3}) \operatorname{arctg}(2t+1)/\sqrt{3}+C$ , где  $t=\sqrt[3]{1+x^3}/x$ . 1469.  $(1/3) \ln[(\sqrt{1+x^3}-1)^2/x^3]+C$ . 1470.  $(1/10) \times (5x^{4/3}+3)^{3/2}+C$ . 1471.  $-(2-x^3)^{2/3}/(4x^2)+C$ . 1489.  $(1/5) \ln|5 \operatorname{tg}(x/2)+3|+C$ . 1490.  $-2/[ \operatorname{tg}(x/2)-1]+C$ . 1491.  $-(1/17) x+(1/4) \ln|\sin x|-(1/68) \ln|\sin x+4 \cos x|+C$ . 1492.  $\ln|\sin x|-\sin x+C$ . 1493.  $-(2/5) \ln(1-\cos x)+ (1/5) \ln(\cos^2 x+2 \cos x+2)-(6/5) \operatorname{arctg}(1+\cos x)+C$ . 1494.  $(1/3) \cos^3 x-\cos x+C$ . 1495.  $\ln|\sin x|-\sin^2 x+(1/4) \sin^4 x+C$ . 1496.  $(1/8) x-(1/8) \sin x+C$ . 1497.  $(3/8) x+(1/4) \sin 2x+(1/32) \sin 4x+C$ . 1498.  $(2/3) \operatorname{tg}^3(x/2)-2 \operatorname{tg}(x/2)+x+C$ . 1499.  $(-1/6) \operatorname{ctg}^2 3x-(1/3) \ln|\sin 3x|+C$ . 1500.  $\operatorname{tg} x+(2/3) \operatorname{tg}^3 x+(1/5) \operatorname{tg}^5 x+C$ . 1501.  $-(1/3) \operatorname{ctg}^3 x+C$ . 1502.  $(1/2) \operatorname{tg} x \sec x+(1/2) \ln|\operatorname{tg}(x/2+\pi/4)|+C$ . 1503.  $-(1/2) \operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x-(1/2) \ln|\operatorname{tg}(x/2)|+C$ . 1504.  $(1/4) \sin 2x-(1/8) \sin 4x+C$ . 1505.  $(3/5) \sin(5x/6)+3 \sin(x/6)+C$ . 1509.  $x/\sqrt{1-x^2}+C$ . 1510.  $x/(a^2\sqrt{a^2+x^2})+C$ . 1511.  $(1/2) (\arccos(1/x)+\sqrt{x^2-1}/x^2)+C$ . 1512.  $-(1/6) \cos 3x+(1/20) \cos 5x+(1/4) \cos x+C$ . 1513.  $-2(2x^2+6x+13)e^{-x/2}+C$ . 1514.  $-(2 \ln x+1)/(4x^2)+C$ . 1515.  $x \operatorname{arctg} x-(3/2) (\operatorname{arctg} x)^2-(1/2) \ln(1+x^2)+C$ . 1516.  $(x^2-1) \sin 2x+x \cos 2x+C$ . 1517.  $(1/4) x^2(2 \ln^2 x-2 \ln x+1)+C$ . 1518.  $x+\ln|e^x-3|+C$ . 1519.  $(x+1) \operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$ . 1520.  $(2/\ln 2) (\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arotg}\sqrt{2^x-1})+C$ . 1521.  $(1/4) \ln|(t+1)/(t-1)|-(1/2) \operatorname{arctg} t+C$ , где  $t^4=1+x^{-4}$ . 1522.  $\sqrt{2} [0,5(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}+2 \arcsin(x-1)/2]+C$ . 1523.  $\sin e^x-e^x \cos e^x+C$ . 1524.  $(1/\sqrt{5}) \ln|\operatorname{tg} x+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+0,4}|+C$ . 1525.  $0,5 \cos^2 x(1-2 \ln \cos x)+C$ . 1526.  $0,5 \sin(x^2+4x+1)+C$ . 1527.  $-0,5(x/\sin^2 x+\operatorname{ctg} x)+C$ . 1528.  $2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2 \ln[(\sqrt{1+e^x}-1)/(\sqrt{1+e^x}+1)]+C$ . 1529.  $x \ln(x^2+x)+\ln|x+1|-x+C$ . 1530.  $-1/x-\operatorname{arotg} x+C$ . 1531.  $(x/2) (\cos \ln x+\sin \ln x)+C$ . 1532.  $12\sqrt[12]{x}+\ln[(\sqrt[12]{x}-1)^2/\sqrt{x}]+C$ . 1533.  $e^{\alpha x}/(\alpha^2+\beta^2) (\alpha \sin \beta x-\beta \cos \beta x)+C$ . 1534.  $[e^{\alpha x}/(\alpha^2+\beta^2)] (\beta \sin \beta x+\alpha \cos \beta x)+C$ . 1535.  $[1/(ab)] \operatorname{arctg} [(b/a) \operatorname{tg} x]+C$ . 1536.  $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$ . 1537.  $0,5 [\operatorname{arctg} x+x/(1+x^2)]+C$ .

#### Глава X

1547.  $1/2$ . 1548.  $e-1$ . 1549.  $0 < I \leq 4/27$ . 1550.  $\pi/2 \leq I \leq e\pi/2$ . 1551.  $0 < I < 1$ . 1552.  $464\sqrt{2}/15$ . 1553.  $\pi/8$ . 1554.  $e-\sqrt{e}$ . 1555.  $e^e-e$ . 1556.  $(e^{\pi/2}-1)/2$ . 1557.  $(\ln 3-1)/2$ . 1558.  $\ln 1,5$ . 1559.  $0$ . 1560.  $2/5$ . 1561.  $\pi/2$ . 1562.  $\ln(4/3)$ . 1563.  $(e^{\pi/2}-1)/2$ . 1564.  $0$ . 1565.  $\pi/2-1$ . 1572.  $\pi^2/8$ . 1573.  $\pi/4$ . 1574.  $256/15$ . 1575.  $\pi$ . 1576.  $+\infty$ . 1577.  $1/4$ . 1578.  $\pi/6$ . 1585. Расходится.

1586. Сходится. 1587. Расходится. 1588. Сходится. 1589. Расходится. 1590. Сходится. 1591. Расходится. 1596.  $4,5$  (кв. ед.). 1597.  $18$  (кв. ед.). 1598.  $2/15$  (кв. ед.). 1599.  $(41/2) \arcsin(9/41) + 20 \ln 0,8$  (кв. ед.). 1600.  $\sqrt{2}-1$  (кв. ед.). 1601.  $8$  (кв. ед.). 1602.  $(9\pi/4) - \sqrt{2} + 4\sqrt{2} \ln 2 - (9/2) \arcsin(1/3)$  (кв. ед.). 1603.  $169\pi$  (кв. ед.). 1604.  $(3/8)\pi a^2$ . 1605.  $8\sqrt{3/3}$  (кв. ед.). 1606.  $(3/2)\pi a^2$ . 1607.  $(3\pi-8)/32$  (кв. ед.). 1608.  $\pi a^2/12$ . 1609.  $\pi/3 + \sqrt{3}/2$  (кв. ед.). 1613.  $(1/2) \ln 3$ . 1614.  $(20/9)\sqrt{5/3}$ . 1615.  $0,5 [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$ . 1616.  $(1/2) \ln 3$ . 1617.  $\text{sh } 1 \approx 1,17$ . 1618.  $12$ . 1619.  $\sqrt{2}(\pi-1)$ . 1620.  $5\pi$ . 1621.  $72$ . 1622.  $[(\pi^2 + 4)\sqrt{\pi^2 + 4} - 8]/3$ . 1623.  $\pi a$ . 1624.  $a(2\pi + 3\sqrt{3})/8$ . 1625.  $8$ . 1628.  $16\pi(5\pi + 8)/5$  (куб. ед.). 1629.  $0,3\pi$  (куб. ед.). 1630.  $\pi(e^2 + 1)/4$  (куб. ед.). 1631.  $4\pi/35$  (куб. ед.). 1632.  $72$  (куб. ед.). 1633.  $2a^2h/3$ . 1634.  $\pi r^2h/2$ . 1636.  $\pi(e^2 - e^{-2} + 4)$  (кв. ед.). 1637.  $61\pi/1728$  (кв. ед.). 1638.  $2\pi b [b + (a^2/c^2) \times \arcsin(c/a)]$ , где  $c^2 = a^2 - b^2$ . 1639.  $64\pi/3$  (кв. ед.). 1644.  $M_x = a^2(e^2 - e^{-2} + 4)/8$ ;  $I_x = a^3(e - e^{-1})(e^2 + e^{-2} + 10)/24$ . 1645.  $M_a = ah^2/6$ ;  $I_a = ah^3/12$ . 1646.  $I_x = 1628/105$ . 1647.  $I_x = ab^3/12$ ;  $I_y = a^3b/12$ . 1648.  $I_0 = \pi d^4/32$ . 1653.  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = 2r/\pi$  (для полуокружности);  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = 4r/(3\pi)$  (для полукруга). 1654.  $\bar{x} = (\pi - 2)/2$ ,  $\bar{y} = \pi/8$ . 1655.  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = 8/5$ . 1656.  $\bar{x} = \bar{y} = 2a/5$ . 1657.  $\bar{x} = 1$ ,  $\bar{y} = 2/5$ . 1658.  $\bar{x} = 1$ ,  $\bar{y} = \pi/8$ . 1659.  $\pi r^3(3\pi - 4)/3$ . 1661.  $480\pi$  (куб. ед.). 1670.  $\pi \rho g r^2 h^2/4$ . 1671.  $\pi \rho g a d^3/8$ . 1672.  $51450\pi$  Дж. 1673.  $547,8\pi$  Дж. 1674.  $50,7$  Дж. 1675.  $\rho g a h^2/3$ . 1676.  $17,64\pi$  кН;  $70,56\pi$  кН;  $158,76\pi$  кН;  $282,24\pi$  кН. 1677.  $\rho g \pi d^3/8$ . 1678.  $150$  кг. 1679.  $1400$  м. 1680.  $x = e^{20}$ . 1681.  $36$  м. 1691. 1)  $y' = \text{sh } x/\sqrt{\text{ch}^2 x + 1}$ ; 2)  $y' = \text{sh}^2(x/15) \text{ch}^3(x/15)$ ; 3)  $y' = 1/\text{ch } x$ ; 4)  $y' = 1/\text{ch}^6 x$ ; 5)  $y' = 1/\text{ch } x$ ; 6)  $y' = x/\text{sh}(x^2/2)$ . 1692.  $M[\ln(1 + \sqrt{2}); \sqrt{2}]$ . 1693.  $y_{\min} = 0$  при  $x = 0$ . 1694. 1)  $x^2 \text{sh } x - 2x \text{ch } x + 2 \text{sh } x + C$ ; 2)  $(1/32) \text{sh } 4x - (1/4) \text{sh } 2x + 6x + C$ ; 3)  $2 \arctg \sqrt{\text{ch } x - 1} + C$ ; 4)  $(1/2)(\text{ch } x \sin x - \text{sh } x \cos x) + C$ ; 5)  $\text{th}^2(x/2) + C$ ; 6)  $(3/5) \text{ch}^5(x/3) - \text{ch}^3(x/3) + C$ . 1695. 1)  $\pi/6$ ; 2)  $\ln 2 - 0,6$ ; 3)  $2(2 \ln 3 - 1)/3$ . 1696.  $\text{sh}(x-a) = \text{sh } x \text{ch } a - \text{ch } x \text{sh } a$ ;  $\text{ch}(x-a) = \text{ch } x \text{ch } a - \text{sh } x \text{sh } a$ . 1697.  $\text{th}(x+a) = (\text{th } x + \text{th } a)/(1 + \text{th } x \text{th } a)$ ;  $\text{th}(x-a) = (\text{th } x - \text{th } a)/(1 - \text{th } x \text{th } a)$ ;  $\text{th } 2x = 2 \text{th } x/(1 + \text{th}^2 x)$ . 1698.  $\text{sh}(x/2) = \pm \sqrt{(\text{ch } x - 1)/2}$ ;  $\text{ch}(x/2) = \sqrt{(\text{ch } x + 1)/2}$ ;  $\text{th}(x/2) = \pm \sqrt{(\text{ch } x - 1)/(\text{ch } x + 1)}$ . 1699.  $2 \text{sh } 0,5(x \pm y) \cdot \text{ch } 0,5(x \mp y)$ ,  $2 \text{ch } 0,5(x+y) \times \text{ch } 0,5(x-y)$ ,  $2 \text{sh } 0,5(x+y) \text{sh } 0,5(x-y)$ ,  $\text{sh}(x \pm y)/(\text{ch } x \text{ch } y)$ . 1700.  $\text{sh } x = 2 \text{th}(x/2)/[1 - \text{th}^2(x/2)]$ ;  $\text{ch } x = [1 + \text{th}^2(x/2)]/[1 - \text{th}^2(x/2)]$ . 1701.  $0,5[\text{sh}(x+y) + \text{sh}(x-y)]$ ;  $0,5[\text{ch}(x+y) + \text{ch}(x-y)]$ ;  $0,5[\text{ch}(x+y) - \text{ch}(x-y)]$ . 1702.  $8/5$  (кв. ед.). 1703.  $1,17a$ . 1704.  $a^2(t_2 - t_1)/2$ . 1705. Дуга эллипса, расположенная над осью абсцисс. 1706. Луч прямой  $x - y - 1 = 0$ , расположенный в I четверти. 1707.  $\cos \alpha = \pm 1/\text{ch } t$ ;  $\text{tg } \alpha = \pm \text{sh } t$ . 1708. 1. 1709.  $x^2 - y^2$ .

## Глава XI

1720. Ниже прямой  $x_1 - x_2 - 10 = 0$ . 1721. Треугольник. 1722. Неограниченная область. 1723. Пустая область. 1724. Точка (2; 3). 1725. Областью решений является трапеция, неравенство (д) можно исключить. 1726. Треугольная пирамида. 1727. Трехгранная призма. 1732.  $L_{\max} = 10$  при  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 2$ . 1733.  $L_{\min} = -4$  при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$ . 1734.  $L_{\max} = 18$  при  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 0$ . 1735.  $L_{\max} = 2$  при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . 1736.  $L_{\max} = 48$  в каждой точке отрезка  $AB$ , где  $A(6; 0)$ ,  $B(7; 4)$ . 1737.  $L_{\min} = -4$  при  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ . 1738.  $L_{\max} = 33$  при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 9$ . 1739.  $L_{\max} = 20$  при  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ . 1746. (0, 1, 3, 0);  $L = -3$ . 1747. (3/2, 0, 0, 1/2, 11/2);  $L = 3/2$ . 1748. (0, 3, 1, 0);  $L = -1$ . 1749. (0, 50, 30, 215/6);  $L = 340$ . 1750. (0, 5, 3/2, 0, 0, 3/2);  $L = -5$ . 1751.  $L = \infty$ . 1752. (0, 4/5, 1/5);  $L = -11/5$ . 1753. (80, 120);  $L_{\max} = 440$ . 1754. (20, 40);  $L_{\max} = 220$ . 1755. 15 кг корма I вида; 50 кг корма II вида. 1757. (5, 7, 9, 7/2, 0, 0);  $L_{\max} = 38$ . 1759.  $L_{\min} = 86/9$ ; (10/9, 28/9);  $T_{\max} = 86/9$ ; (7/27, 8/27). 1760.  $L_{\max} = 216/7$ ; (24/7, 24/7);  $T_{\min} = 216/7$ ; (8/7, 1/7). 1761.  $L_{\min} = 78/7$ ; (10/7, 16/7);  $T_{\max} = 78/7$ ; (27/14, 3/14). 1763.  $L_{\min} = 510$  ден. ед.;  $x_{11} = 30$ ,  $x_{12} = 60$ ,  $x_{21} = 30$ ,  $x_{23} = 60$ . 1764.  $L_{\min} = 280$  ден. ед. Оптимальный план:  $x_{12} = x_{24} = x_{33} = 60$ ,  $x_{23} = 20$ ,  $x_{31} = 40$ . 1765.  $L_{\min} = 395$  ден. ед. Оптимальный план:  $x_{11} = 25$ ,  $x_{13} = x_{32} = 20$ ,  $x_{12} = x_{21} = 5$ ,  $x_{23} = 35$ . 1766.  $L_{\min} = 140$  ден. ед. Оптимальный план:  $x_{14} = x_{22} = 10$ ,  $x_{23} = x_{31} = x_{34} = 5$ ,  $x_{33} = 15$ .

П. Е. ДАНКО, А. Г. ПОПОВ, Т. Я. КОЖЕВНИКОВА

# Высшая математика в упражнениях и задачах

Часть  
1

с решениями