Вариант 1.

1. Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-y^2}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0\, y\to 0}\dfrac{\sin x^4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.
3. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$, если $u=x\arcsin\left(\sqrt{x}y\right)-z\sqrt{y}$.
4. Дана функция $z=\ln\left(t^2+tx-y\sqrt{x}\right)$, где $x=\cos^2 t,\ y=\sin^2 t$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t},\dfrac{dz}{dt}$.
5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=e^{uv}\ln(u+v)$где $u=x^3\sqrt{y},v=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=F(u,v)$, где $u=x\cos y,\ v=x-y^2$.
7. Вычислить приближённо $\sqrt[3]{1{,}03}\cdot\sqrt{3{,}91}$.
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x,y)=\arccos\dfrac{x}{y}$ в точке $(0,1)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{8}=0$ в точке $M(4,3)$. Построить поверхность.
10. Найти наибольшее наименьшее значение функции $z=x^2-2xy-y^2+4x+1$ в области $D:\{x=-3,\ y=0,\ x+y+1=0\}$.
11. Найти линии уровня функции $z=\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y+2}{16}$.
12. Дана функция $z=x+\ln\left(x^2+y^2\right)$:

    а) найти производную этой функции по направлению вектора $\bar{a}=i-j+k$ в точке $M(1,1,1)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A(1,0,1)$ и $B(0,1,1)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 2.

1. Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{\dfrac{x}{y^2}-1}+\sqrt{x^2-9}$.

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0\; y\to 0}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$.

3. Показать, что $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$, если $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$.

4. Дана функция $z=arctg\dfrac{\sqrt{x}}{y}$, где $x=\sin t,\ y=t\cdot\cos t$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{dz}{dx}$, при $t=\dfrac{\pi}{2}$.

5. Дана функция $z=e^x\cos y$, где $x=u\ln v,\ y=u^2+v^2$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ для функции $z=f\left(u,v\right)$,

   где $u=\dfrac{x}{y},v=4x-y^2$.

7. Вычислить приближённо значение функции $z=\dfrac{x^2-y}{y^2}$ в точке $M\left(2{,}01;\,3{,}98\right)$.

8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{x+y}$

   в точке $M\left(1{,}1\right)$

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+4z=1$ в точке $P_0\left(2{,}3;-\dfrac{1}{4}\right)$. Построить поверхность.

10. Найти наибольшее наименьшее значение функции $z=x^2+3y^2-x+18y-4$ в области $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$.

11. Найти линии уровня функции $e^{x^2+y^2}=4$.

12. Дана функция $u=x\left(\ln y-arctgz\right)$:

    а) найти производную этой функции в точке $M\left(-2,1,-1\right)$ по направлению вектора $\bar{a}=2i+2j-k$

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A\left(1,2,1\right)$ и $B\left(-2,2,-1\right)$.

.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 3.

1. Найти и построить область определения функции $z = \ln(x-1) + \arccos y$ /
2. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0, y \to 0} \dfrac{x^3 - y^3}{1 - \cos x^2 y^2}$.
3. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$, если $u = \sin^2\left(x + y\sqrt{z} + 4z\right)$.
4. Дана функция $z = \cos\left(2t + 4x^2 - y\right)$, где $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{\sqrt{t}}{\ln t}$. Найти $\dfrac{dz}{dt}, \dfrac{\partial z}{\partial t}$..
5. Дана дифференцируемая функция $z = e^{y\cos^2 x - \sin^2 y}$, где $y = \sqrt{v^2 - u^2}$, $x = u^2 v^3$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функции $z = f(u, v)$, где $u = \ln(x - y)$, $v = \dfrac{x}{y}$.
7. Вычислить приближённо $(2{,}97)^{3{,}01}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x, y) = e^{x+y}$ в точке $M_0(0,0)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$ в точке $M(1, 2, -1)$.
10. Найти наибольшее наименьшее значение функции $z = x^2 + 3y^2 - x + 12y - 4$ в квадрате $\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.
11. Найти линии уровня функции $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x}$.
12. Дана функция $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} - xyz$:

    а) найти производную этой функции по направлению вектора $\bar{e} = 2i - j + k$ в точке $M(1, 4, -1)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A(4,1,-1)$ и $B(9,1,1)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 4.

1. Найти и построить область определения функции $z=\ln\left(\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-1\right)$
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\frac{\sin(x^2+y^2)}{xy}$.
3. Показать, что функция $u=\frac{x-y}{z-t}+\frac{t-x}{y-z}$ удовлетворяет условию $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$.
4. Дана функция $z=\frac{2xy-t}{x+2t}$, где $x=\frac{1}{t}, y=\sqrt{t}$. Найти $\frac{dz}{dt},\frac{\partial z}{\partial t}$.Вычислить $\frac{dz}{dt}$ при $t=1$.
5. Дана дифференцируемая функция $z=\cos^2 xy$, где $x=u\cdot e^v, y=u^2-v^2$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$ для функции $z=f(u,v)$, где $u=x-y,\ v=\frac{x}{y}$.
7. Вычислить приближённо $\sqrt[3]{7,85}\cdot\sqrt{16,05}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$ в точке $(1,0)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $z=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}$ в точке $M(2,1)$. Построить поверхность.
10. Найти наибольшее наименьшее значение функции $z=\sin x+\sin y\sin(x+y)$ в прямоугольнике $0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}$.
11. Найти линии уровня функции $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=0$.
12. Дана функция $u=\sqrt{x^2+y^2}-z$:

    а) найти производную по направлению нормали к поверхности $x^2+y^2=24z$ образующий острый угол с положительным направлением оси $0z$ в точке $M(3,4,1)$

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A(1,1,-1)$ и $B(3,4,-1)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 5.

1. Найти и построить область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}} \cdot \ln\frac{x}{y}$
2. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0, y \to 0} \frac{1 - \cos xy}{xy^3}$.
3. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$, если $u = \ln\left(e^x + e^y + e^z\right)$.
4. Дана функция $z = arctg\left(\frac{y}{x}\right) - tx$, где $x = tgt,\ y = \cos^2 t$. Найти $\frac{dz}{dt}, \frac{\partial z}{\partial t}$.Вычислить $\frac{dz}{dt}$ при $t = \frac{\pi}{4}$.
5. Дана дифференцируемая функция $z = arc\cos\frac{y-1}{x}$, где $x = t^2 + v^2,\ y = \frac{t}{\sqrt{v}}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial t}$ для функции $u = \varphi\left(x, y\right)$, где $x = t\sqrt{v},\ y = t - v$.
7. Вычислить приближённо $\sqrt{\left(5{,}01\right)^2 - \left(3{,}98\right)^2}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x, y\right) = \arcsin xy$ в точке $M\left(0{,}1\right)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2 + 2x + y^2 = 0$ в точке $\left(-1{,}1\right)$. Построить поверхность.
10. Найти наибольшее наименьшее значение функции $z = y^2 + 2xy - 3x^2 + x$ в замкнутой области, ограниченной осями координат $x = 0, y = 0$, и прямой $x + y = 2\ \left(x \geq 0,\ y \geq 0\right)$.

11.Найти линии уровня функции $Z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$.

12 .Дана функция $z = x\sqrt{y} - yz^2$:

а) найти производную по направлению нормали к поверхности $x^2 + y^2 = 4z$ в точке $M\left(2{,}1{,}-1\right)$.

б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A\left(1{,}0{,}\frac{1}{4}\right)$ и $B\left(0{,}1{,}\frac{1}{4}\right)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 6.

1. Найти и построить область определения функции $z = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{e^{x^2-y^2}-1}{\sin xy}$.
3. Показать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(x+y+\ln z\right)z$, если $z = x^y + y^x$.
4. Дана функция $z = \arcsin t\sqrt{xy^3}$, где $x = t^2$, $y = \dfrac{1}{t^3}$. Найти $\dfrac{dz}{dt}, \dfrac{\partial z}{\partial t}$.Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t = 1$.
5. Дана дифференцируемая функция $z = \ln\sin\dfrac{u}{\sqrt{v}}$, где $v = x\cos y, u = y\sin x$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ для функции $z = F\left(u, v\right)$, где $u = x - y,\ v = xy$.
7. Вычислить приближённо $\cos^2 61^\circ + \sin^2 29^\circ$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x, y\right) = e^{x-y}$ в точке $\left(1,1\right)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $y^2 - 4x + 1 = 0$ в точке $\left(1,0\right)$. Построить поверхность.
10. Найти наибольшее наименьшее значение функции $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ в треугольнике $x \le 0,\ y \ge 0,\ x + y = -1$.
11. Найти линии уровня функции $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.
12. Дана функция $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$:

    а) найти производную по направлению вектора $\bar{e} = 2j - 2k$ в точке $\left(1,5,-2\right)$

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A\left(1,0,2\right)$ и $B\left(-1,1,2\right)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 7.

1. Найти и построить область определения функции $z = \ln\cos x + \sqrt{y^2 - 1}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{\sqrt{x^3y^3+1}-1}{x^3 - y^3}$.
3. Показать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$, если $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$.
4. Дана функция $u = \dfrac{y}{x} + \dfrac{t}{y} + 2t$, где $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{du}{dt}$ при $t = 4$.
5. Дана дифференцируемая функция $z = \ln^2\left(x - y\right)$, где $x = u\sqrt{v}$, $y = u^2v^2$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ для функции $z = f\left(u, v\right)$, где $u = \cos\left(x - y\right)$, $v = \sin xy$.
7. Вычислить приближённо $\sqrt{\left(4{,}09\right)^2 + \left(3{,}03\right)^2}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x, y\right) = xe^y$ в точке $\left(1, 0\right)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $z = \dfrac{\left(x-1\right)^2}{4} - \dfrac{\left(y-2\right)^2}{4}$ в точке $\left(3, 4, 0\right)$. Построить поверхность.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = \left(x-1\right)^2 + 2y^2$ в области $\left\{x > 0,\ y > 0,\ x + y \le 1\right\}$.
11. Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2 4x - 2y$.
12. Дана функция $u = \sqrt{(x^2 + y^2)^3} + z$:

    а) найти производную функции в точке $M\left(1, 2, 1\right)$ по направлению вектора $\overline{a} = -i + j + 3k$

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A\left(1, -2, 1\right)$ и $B\left(2, 1, -1\right)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 8.

1. Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{2x-y}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\dfrac{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}{\cos\left(x-y\right)-1}$.
3. Показать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, если $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$.
4. Дана функция $u=\sin\left(t^2+x^2\right)-y\sqrt{x}$, где $x=tgt, y=\cos^2 t$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{du}{dt}$.

   Вычислить $\dfrac{du}{dt}$ при $t=\dfrac{\pi}{4}$.
5. Дана дифференцируемая функция $z=arctgx\sqrt{y}$, где $x=tg\dfrac{u}{v}, y=u^2+v^2$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}, \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$ для функции $z=\varphi\left(x,y\right)$, где $x=u\ln v, y=u-2v$.
7. Вычислить приближённо $\dfrac{1,01}{\left(2,96\right)^2+1,01}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{xy}$ в точке $\left(1,1\right)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $9x^2+y^2-18x+16y-47=0$ в точке $\left(3,-5,1\right)$. Построить поверхность.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^3y^2\left(6-x-y\right)$ в области $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$.
11. Найти линии уровня функции $z=\ln\sqrt{\dfrac{\left(x-1\right)^2+y^2}{\left(x+1\right)^2+y^2}}$.
12. Дана функция $u=x+\ln\left(x^2+y^2\right)$:

    а) найти производную функции в точке $M\left(2,1,1\right)$ по направлению вектора $\overline{a}=2i-2j=k$

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A\left(0,1,1\right)$ и $B\left(1,-1,-1\right)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 9.

1. Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{x-y^2}+\sqrt{-y^2+4-x}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$.
3. Показать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$, если $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$.
4. Дана функция $z=xe^{t^2-y^2}$, где $x=\ln t,\ y=t^2$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$. Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t=1$.
5. Дана дифференцируемая функция $z=\dfrac{e^{x^2-y^2}}{x}$, где $x=u^2v,\ y=uv^2$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ для функции $z=y\sin x$, где $x=t\sqrt{u},\ y=\dfrac{\sqrt{t}}{u}$.
7. Вычислить приближённо $\dfrac{(2{,}95)^2-7{,}97}{(2{,}95)^3}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x,y)=\dfrac{x^2}{1-y}$ в точке $(1,0)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2-2x+y^2-2z=1$ в точке $M(2,1)$. Построить поверхность.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+3y^2-x+18y-4$ в области $\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$.
11. Найти линии уровня функции $z=x^2-y^2$.
12. Дана функция $u=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$:

    а) найти производную функции в точке $M(1,1,1)$ в направлении вектора $\bar{e}=4i+3j$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A(-1,1,1)$ и $B(1,0,-2)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 10.

1. Найти и построить область определения функции $z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \frac{\sin^2(x-y)}{x^2+y^2}$.
3. Доказать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$, если $z = \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.
4. Дана функция $u = \ln\sin\left(x^2+y^2-\sqrt{t}\right)$, где $x = \cos t,\ y = \sin t$. Найти $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{du}{dt}$. Вычислить $\frac{du}{dt}$ при $t = \frac{\pi}{4}$.
5. Дана дифференцируемая функция $z = \frac{x}{y}e^{xy}$, где $x = u\ln v,\ y = \frac{\sqrt{v}}{u}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ для функции $z = f(x,y)$, где $x = v\cdot arctgu$, $y = u+v$
7. Вычислить приближённо $\ln\left(4,2-\sqrt{9,04}\right)$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x,y) = \frac{y}{x-1}$ в точке $M(2,1)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} = \frac{y^2}{9}$ в точке $(3,-5,1)$. Построить поверхность.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = xy(1-x-y)$ в области $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$.
11. Найти линии уровня функции $z = 2x^2+y^2+y$.
12. Дана функция $u = \sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$:

    а) найти производную по направлению вектора $\bar{e} = -2i+2j-k$ в точке $M(1,-3,4)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A(1,1,1)$ и $B(4,1,0)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 11.

1. Найти и построить область определения функции $z=\ln\sin x+\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{e^{\sin\left(x^2+y^2\right)}-1}{xy}$.

3. Доказать, что $\dfrac{x\partial z}{\partial x}+\dfrac{y\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{2}$, если $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$.

4. Дана функция $u=\dfrac{x^2}{yt}+\dfrac{yt}{x}$, где $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\sqrt{t}$ ..Вычислить $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{du}{dt}$ при $t=1$.

5. Дана дифференцируемая функция $z=\sin^2\left(x-y\right)$, где $x=tg\dfrac{u}{\sqrt{v}}$, $y=\sqrt{uv}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t\partial v}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ для функции $z=\Phi\left(x,y\right)$, где $x=t\cdot v$, $y=\dfrac{t}{\sqrt{v}}$.

7. Вычислить приближённо $\dfrac{1,05\cdot 4,95}{\left(1,05\right)^2-\left(4,95\right)^2}$

8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x,y\right)=\sin^2\left(x+y\right)$ в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$.

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2-4z^2-16y^2=15$ в точке $M\left(1,1,6\right)$. Построить поверхность. Определить вид поверхности.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+2xy-y^2+4x$ в области $D:\left\{\begin{matrix}x\le 0\\ y\le 0\\ x+y+2<0\end{matrix}\right\}$.

11. Найти линии уровня функции $z=\dfrac{x^2+y^2}{x}$.

12. Дана функция $u=x^2\sqrt{y}-y^2z+1$:

    а) найти производную по направлению вектора $\bar{e}=-i+4j+k$ в точке $M\left(1,4,-1\right)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A\left(-1,1,-1\right)$ и $B\left(0,1,2\right)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 12.

1. Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{x^2+y^2-9}+\sqrt{\dfrac{y}{2x}-1}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}{xy}$.
3. Доказать, что $2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+t\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$, если $u=e^{\frac{x}{t^2}}$.
4. Дана функция $z=\dfrac{t}{x^2-y^2}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$ при $t=1$.
5. Дана дифференцируемая функция $u=x^2\cos x\sqrt{y}$, где $x=\arcsin\left(t-v\right)$, $y=t^2-v^2$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z=f\left(u,v\right)$, где $u=xe^y$, $v=x^2-y^2$.
7. Вычислить приближённо $\dfrac{1{,}06+2\cdot\left(2{,}08\right)}{2{,}08+2\cdot\left(1{,}06\right)}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x,y\right)=\cos^2\left(x-y\right)$ в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2+4z^2-16y^2=16$ в точке $\left(3,-5,1\right)$. Определить вид поверхности. Построить поверхность.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+xy-2$ в области $D:\begin{Bmatrix} y\le 0 \\ y\le 4x^2-4 \end{Bmatrix}$.
11. Найти линии уровня функции $z=\ln\sqrt{x^2+y^2-x}$.
12. Дана функция $u=y\sqrt{x}+x\sqrt{z}$:

    а) найти производную по направлению вектора $\bar{e}=-i+2j-k$ в точке $M\left(1,-4,4\right)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках M и $A\left(4,-1,16\right)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 13.

1. Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{xy-1}+\sqrt{1-y^2}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$.
3. Доказать, что $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u$, если $z=x^y$.
4. Дана функция $u=\ln\left(\sin x-y\cos t\right)$, где $x=arc\sin t,\, y=\dfrac{1}{\cos t}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и. вычислить $\dfrac{du}{dt}$ при $t=\dfrac{\pi}{4}$.
5. Дана дифференцируемая функция $z=4^{\sin xy}$, где $x=\arcsin\dfrac{u}{v},\, y=\dfrac{u}{\sqrt{v}}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u},\, \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=\Phi\left(u,v\right)$, где $u=x\cos y,\, v=x^2+y^2$.
7. Вычислить приближённо $\dfrac{3,04}{\sqrt[3]{0,85}\cdot\sqrt[3]{7,95}}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{x+y}$ в точке $\left(1,1\right)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $4z^2-16y^2=1$ в точке $\left(1,0,2\right)$. Определить вид поверхность и построить чертёж.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+2xy+2y^2$ в области $D:\begin{Bmatrix}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le 2\end{Bmatrix}$.
11. Найти линии уровня функции $z=\dfrac{\left(x+2\right)^2}{4}-\left(y-1\right)^2$.
12. Дана функция $u=arctg\dfrac{y}{x}+xz$:
    а) найти производную по направлению вектора $\bar{e}=-2i+4j-k$ в точке $M\left(2,2,-1\right)$.
    б) найти угол между градиентами этой функции в точках M и $A\left(-1,1,1\right)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 14.

1. Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt{y-x}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\dfrac{\sin x^3y^3}{x^2-y^2}$.
3. Доказать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, если $z=e^{\frac{x}{y}}$.
4. Дана функция $z=ye^{\cos^2 t-\sin^2 x}$, где $x=\arcsin t,\ y=t^2$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$. Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t=\dfrac{\pi}{4}$.
5. Дана дифференцируемая функция $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$, где $x=u\cdot\ln v,\ y=\sqrt{\dfrac{u}{v}}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z=\phi(t,u)$, где $t=x\ln y,\ u=\dfrac{x}{y}$.
7. Вычислить приближённо $(1{,}05)^3\cdot(2{,}04)^2\cdot(2{,}95)$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ в точке $M_0(1,0)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2+4z^2-4y^2=0$ в точке $M_0(2,1,0)$. Определить вид поверхности и построить.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+2y^2+x-y+1$ в области $D:\left\{\begin{array}{l} y\ge 0\\ x\le 0\\ -x+y\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$
11. Найти линии уровня функции $z=\dfrac{x}{x^2+4y^2}$.
12. Дана функция $u=\ln\left(1+x^2+y^2\right)\dfrac{z}{y}$:

    а) найти производную по направлению вектора $\bar{e}=2i+j-k$ в точке $M(1,1,2)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках M и $A(-1,-1,1)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 15.

1. Найти и построить область определения функции $z = \arccos x + \sqrt{(x-1)y}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{arc\sin xy}{x^2+y^2}$.
3. Доказать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3z$, если $z = \dfrac{1}{x^3 - y^3}$.
4. Дана функция $u = xy^{\cos t}$, где $x = \sin t,\ y = \sqrt{t}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{du}{dt}$. Вычислить $\dfrac{du}{dt}$ при $t = \dfrac{\pi}{2}$.
5. Дана дифференцируемая функция $z = \dfrac{1}{\cos^2 xy}$, где $x = t \cdot \ln v,\ y = \dfrac{t}{v}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z = f(u, v, w)$, где $u = x - y, v = x + y, w = xy$.
7. Вычислить приближённо $\sqrt[3]{(1,95)^2 + (2,05)}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x, y) = \cos\left(x^2 - y^2\right)$ в точке $M_0\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2 + 4z^2 - 4y = 0$ в точке $M\left(1, \dfrac{1}{2}, 1\right)$. Определить вид поверхности и построить.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x^2 + xy - y^2 + 4x$ в области $D: \begin{Bmatrix} y \ge 0 & -x + y \le 1 \\ x \le 0 & \end{Bmatrix}$
11. Найти линии уровня функции $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.
12. Дана функция $z = \sqrt{y} - \sqrt{x^2 + y^2}$:

    а) найти производную по направлению нормали к поверхности $x^2 - y^2 = 2z$ в точке $M(1,1,0)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A(1,0,-1)$ и $B(4,0,-2)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 16.

1. Найти и построить область определения функции $u = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0, y \to 0} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$.
3. Доказать, что $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$.
4. Дана функция $u = y^2 \cdot e^{\frac{x^2}{t}}$, где $x = \ln t,\ y = e^t$. Найти $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{du}{dt}$. Вычислить $\frac{du}{dt}$ при $t = 1$.
5. Дана дифференцируемая функция $z = x\sin y + y\cos x$, где $x = \frac{u}{v},\ y = u \cdot v$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z = \phi\left(t, u\right)$, где $t = x\ln y$, $u = x - y$
7. Вычислить приближённо $\sqrt{1,08} \cdot 2,97 \cdot 1,95^2$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x, y\right) = tg\left(x + y\right)$ в точке $M_0\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2 - 4z^2 - 4y = 0$ в точке $M\left(2, 0, 1\right)$. Определить вид поверхности и построить.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 - 8xy + 16$ в области $D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$
11. Найти линии уровня функции $\sqrt{4 + x^2 - 4y^2}$.
12. Дана функция $z = x\sqrt{y} + \sqrt{x} \cdot y$:

    а) найти производную по направлению вектора $\overline{a} = 4i - j + 2k$ в точке $M\left(4,1,6\right)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A\left(1,1,2\right)$ и $B\left(1,4,6\right)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 17.

1. Найти и построить область определения функции $u = \dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2-1\right)\left(4-x^2-y^2\right)}}$.

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to0,\,y\to0} \dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}$.

3. Доказать, что $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$, если $z = e^{\frac{x}{y}}$.

4. Дана функция $u = x\ln\left(y\sqrt{t}\right)$, где $x = \dfrac{1}{t^2}$, $y = \sqrt{t}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{du}{dt}$. Вычислить $\dfrac{du}{dt}$ при $t = 4$.

5. Дана дифференцируемая функция $z = x^y + y^x$, где $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z = f\left(u, v, w\right)$, где $u = x\cos y$, $v = \sin\left(x-y\right)$, $w = xy$.

7. Вычислить приближённо $\left(2,85\right)^{2,97} \cdot \left(3,05\right)$

8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x,y\right) = \arcsin\left(x+y\right)$ в точке $M_0\left(0,0\right)$.

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2 - 10y + 2z^2 = 2$ в точке $M\left(2,1,2\right)$. Определить вид поверхности и построить.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 + 2x + 2$ в области $D: \left\{\begin{matrix} y \ge 0 & -x + y \le 1 \\ x \le 0 & \end{matrix}\right\}$.

11. Найти линии уровня функции $z = 2^{\frac{x-y}{x^2+y^2}}$.

12. Дана функция $z = \dfrac{x}{y} + ye^x$:

    а) найти производную по направлению вектора $\overline{a} = -i + j + 2k$ в точке $A(0,1,1)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках A и $B(0,2,2)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 18.

1. Найти и построить область определения функции $u = \arccos\frac{y}{x}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\frac{arc\sin xy}{x^2+y^2}$.
3. Доказать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}$, если $z = e^{\frac{x}{y}}\ln y$.
4. Дана функция $u = \frac{x+t}{y^2}$, где $x = t^3, y = \sqrt{t}$. Найти $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{du}{dt}$. Вычислить $\frac{du}{dt}$ при $t = 4$.
5. Дана дифференцируемая функция $z = x^2 - y^2$, где $x = \arcsin\frac{u}{v}, y = \sqrt{v^2-u^2}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z = F(u,v)$, где $u = \ln(x-y), v = x^2 - y^2$.
7. Вычислить приближённо $\frac{4,08}{\sqrt[3]{1,09}+\sqrt{8,85}}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ в точке $M_0(0,1)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 2z$ в точке $M(1,2,0)$. Определить вид поверхности и построить.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x^2 + 4x + y^2 + 2y + 4$ в области D, ограниченной прямыми: $x=-1, x=0, y=-1, y=0$.
11. Найти линии уровня функции $z = x^2 + 2x - 2y$.
12. Дана функция $u = \ln(x-5) + x^2yz$:

    а) найти производную по направлению вектора $\bar{e} = 2ij + 2k$ в точке. $A(3,1,1)$

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A(3,1,1)$ и $B(4,-1,1)$

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 19.

1. Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{9x^2-4y^2-36}+\sqrt{x-1}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{arctg^2xy}{\sqrt{x^2y^2-1}}$.
3. Доказать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$, если $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.
4. Дана функция $z=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}+\dfrac{1}{y}\right)$, где $x=t^3$, $y=\dfrac{1}{t}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$. Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t=1$.
5. Дана дифференцируемая функция $z=\ln\left(x\cos y\right)$, где $x=\arccos u,\ y=\dfrac{u}{\sqrt{1-v^2}}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=\phi\left(u,v\right)$, где $u=x^2+y^2,\ v=xy$.
7. Вычислить приближённо $\dfrac{5,91\cdot 4,02}{5,91-4,02}$
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f\left(x,y\right)=e^{xy}$ в точке $M_0\left(1,2\right)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1$ в точке $M\left(3,4,3\right)$. Определить вид поверхности и построить.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2x+y-2$ в области, ограниченной прямыми $2x+y=2,\ x=0,\ y=0$.
11. Найти линии уровня функции $z=y-\sqrt{x-1}$.
12. Дана функция $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$:

    а) найти производную по направлению вектора $\bar{e}=i+2j-2k$ в точке $M\left(1,5,-2\right)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A\left(-1,1,4\right)$ и $B\left(2,-1,2\right)$

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 20.

1. Найти и построить область определения функции $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$
3. Доказать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$, если $z = \ln\left(x^2+xy+y^2\right)$.
4. Дана функция $z = t\arcsin x\sqrt{y}$, где $x = \sqrt[3]{t}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$. Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t = 1$.
5. Дана дифференцируемая функция $z = x^y$, где $x = u^2 - v^2$, $y = e^{uv}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функции $z = \phi(u, v)$, где $u = x^2 + y^2, v = xy$.
7. Вычислить приближённо значение функции $z = \sqrt{x^2 + xy^2 + 4}$ в точке $M(1{,}02;1{,}98)$.
8. Разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x, y) = \dfrac{1}{x-y}$ в точке $M_0(1{,}0)$.
9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^3y + zx - z^2y + 1 = 0$ в точке $(-1{,}1)$.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 1 + x + 2y$ в области $\{x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$..
11. Найти линии уровня функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
12. Дана функция $u = x\sqrt{y} + y\sqrt[3]{x}\cdot z$:

    а) найти производную по направлению вектора $\bar{e} = i - 2k$ в точке $M(1{,}4{,}-1)$.

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках $A(-1{,}1{,}0)$ и $B(1{,}1{,}1)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 21.

1. Найти и построить область определения функции $z=\log_3\left(x^2+y^2-1\right)+\sqrt{16-x^2-y^2}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1, y\to 2}\dfrac{2(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$.
3. Доказать, что $\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{t}+\dfrac{\partial z}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial t}\cdot\dfrac{1}{u}=0$, если $z=arctg\dfrac{u}{t}$.
4. Дана функция $z=t\sqrt{x+y}$, где $x=tgt,\ y=ctgt$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$. Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t=\dfrac{\pi}{4}$.
5. Дана дифференцируемая функция $z=x^2e^{y-x}$, где $x=\ln(u-v),\ y=\dfrac{u}{v^2}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z=\Phi(u,v)$, где $u=\sin xy,\ v=y\cos x$.
7. Вычислить приближённо $\sqrt{\left(\sin^2 1{,}55+8e^{0{,}015}\right)^5}$
8. Представить в виде многочлена Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x,y)=tgx\cdot\sin y$ в точке $M_0\left(45^\circ, 30^\circ\right)$.
9. К поверхности: $x^2+2y^2+3z^2=21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x+4y+6z=0$.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^3y^2(12-x-y)$ в области D, ограниченной прямыми $x=6,\ y=x,\ y=0$.
11. Найти линии уровня функции $z=\sqrt{x^2+2x+y^2}$.
12. Дана функция $z=x^2+3y^3-xy$:

    а) найти производную по направлению вектора $\overline{a}=2i-j+k$ в точке. $A(1,1)$

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках A и $M(1,2)$

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 22.

1. Найти и построить область определения функции $z = \arccos\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 2} \dfrac{e^{y(x+y-2)}-1}{3(1+x)(x+y-2)}$.
3. Дана функция $z = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$. Показать, что функция удовлетворяет соотношению $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{1}{y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{1}{x}=0$.
4. Дана функция $z = tg\dfrac{x}{t}+t^2 y$, где $x=\ln t,\ y=\dfrac{1}{t}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$. Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t=1$.
5. Дана дифференцируемая функция $z=\arccos^2 xy$, где $x=u-2v,\ y=\dfrac{u^2}{v}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z=F(u,v)$, где $u=\ln(x-y),\ v=\dfrac{1}{x+y}$.
7. Вычислить приближённо $\ln\left(0{,}09^3+0{,}99^3\right)$
8. Представить в виде многочлена Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2-y^2}$ в точке $M_0(6,3)$.
9. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+3y^2-4z^2=15$ в точке $P_0(2,-3,2)$.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=6x^2-7xy+2y^2+6x-3y$ в области $D:\{|x|\le 1,\ |y\le 2|\}$.
11. Найти линии уровня функции $z=(1+x+y)^2$.
12. Дана функция $z=x^4+3x^3y+9x^2y-8xy^2+5y^3$:
    а) найти производную по направлению вектора $\bar{a}=2i-j+k$ в точке. $A(1,1)$
    б) найти угол между градиентами этой функции в точках A и M

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 23.

1. Найти и построить область определения функции $z = \sqrt{1 + y - x^2} - \sqrt{1 - y - x^2}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x \to 1, y \to 2} \dfrac{x - y^2}{\sqrt{4 - x + y^2} - 2}$.
3. Доказать, что $x \ln x \dfrac{\partial z}{\partial x} - y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $z = x^y + xy$.
4. Дана функция $z = x^2 + y^2 + tx - 2t$, где $x = \sqrt[3]{t},\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{du}{dt}$. Вычислить $\dfrac{du}{dt}$ при $t = 1$.
5. Дана дифференцируемая функция $z = x^2 \ln y - y^2 \ln x$, где $x = u\sqrt{v},\ y = u^2 - v^2$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z = \phi(u, v)$, где $u = x \cos y,\ v = y \sin x$.
7. Вычислить приближённо $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98}\sqrt[4]{1{,}05^3}}$
8. Представить в виде многочлена Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка по степеням $(x-1), (y+2)$. $f(x, y) = 2x^3 + x^2 y - 4xy^2 + 4y^2$
9. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2 + y^2 - z^2 = 2x$ в точке $M_0(1,1,0)$.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в области D , ограниченной осями координат и прямой $x + y = -5$.
11. Найти линии уровня функции $z = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$.
12. Дана функция $u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$:

    а) найти производную скалярного поля по направлению вектора $\bar{a} = -2i + j - k$ в точке. $M(1,-3,4)$

    б) найти угол между градиентами этой функции в точках M и $A(-1,3,-4)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 24.

1. Найти и построить область определения функции $z = \sqrt{y \sin x}$.
2. Найти предел $\lim\limits_{x \to 1, y \to 2} \dfrac{(x-1)^5 (y+2)}{(x-1)^2 + (y+2)^2}$.
3. Доказать, что $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = z$, если $z = e^{x^2 + y^2}$.
4. Дана функция $z = \arcsin(tx) - yx$, где $t = \dfrac{1}{x}$, $y = x^2$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$. Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t = 1$.
5. Дана дифференцируемая функция $z = \cos\dfrac{x}{y}$, где $x = u \cdot e^{v}$, $y = v \ln u$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z = \Phi(u, v)$, где $u = \sin xy$, $v = y \cos x$.
7. Вычислить приближённо $arctg\dfrac{7{,}02}{6{,}97}$.
8. Представить в виде многочлена Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка функцию $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y}$ в точке $M_0(1{,}1)$.
9. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности: $x(y+z)(xy-z)+8$ в точке $M(2{,}1{,}3)$.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в области D, прямоугольнике $ABCD$ с вершинами в точках $A(4,-3)$, $B(4{,}2)$, $C(1{,}2)$, $D(1,-3)$.
11. Найти линии уровня функции $z = \dfrac{x}{\sqrt{y}}$.
12. Дана функция $u = x(\ln y - z)$:
    а) найти производную функции в точке $M(1{,}1,-1)$ по направлению вектора $a = i + 4j + k$;
    б) найти угол между градиентами этой функции в точках M и $A(-1{,}1{,}2)$.

Составила: Никольская Г.А.

Вариант 25.

1. Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{\left(x^2+y^2-4\right)\left(9-x^2-y^2\right)}$..
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1, y\to -1}\dfrac{tg(x+y)e^{x-y}}{x^2-y^2}$.
3. Доказать, что $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, если $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.
4. Дана функция $z=\cos\dfrac{xy}{t}$, где $x=tnt$, $y=\dfrac{1}{t}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$. Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t=1$.
5. Дана дифференцируемая функция $z=arctg\dfrac{x}{y}$, где $x=\sqrt{u^2+v^2}$, $y=u-v$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.
6. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ для функции $z=F(u,v)$, где $u=x-\sin y$, $v=y^2+\cos x$.
7. Вычислить приближённо $\sqrt{5e^{0,02}+2{,}03^2}$
8. Представить в виде многочлена Тейлора, ограничиваясь членами второго порядка $f(x,y)=xy-\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0(1,1)$.
9. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2-2x+6y=4$ параллельной прямой $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=-x^2+xy-y^2-9y+6x-35$ в области D $|x|\le 1, |y|\le 1$.
11. Найти линии уровня функции $z=\sqrt{\cos(x^2+y^2)}$.
12. Дана функция $u=\ln\left(x^2+y^2\right)+xyz$:
    а) найти производную по направлению вектора $\bar{a}=i-j+5k$ в точке. $M(1,-1,2)$
    б) найти угол между градиентами этой функции в точках M и $A(1,1,-2)$.

Составила: Никольская Г.А.