К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н.Федин, Ю.А.Шевченко

Сборник задач по высшей математике

С контрольными работами

1 курс

Допущено Министерством образования РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области техники и технологии

7-е издание

МОСКВА

АЙРИС ПРЕСС

2008

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73-4
Л82

Лунгу, К. Н.

Л82 Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. — 7-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2008. — 576 с.: ил. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-8112-3019-8

Сборник содержит свыше трех с половиной тысяч задач по высшей математике. Ко всем разделам книги даны необходимые теоретические пояснения.

Детально разобраны типовые задачи, приведено изрядное количество разнообразных заданий различных уровней сложности для самостоятельного решения. Наличие в сборнике контрольных работ, устных задач и «качественных» вопросов позволит студенту подготовиться к экзаменационной сессии. Книга охватывает материал по линейной алгебре, аналитической геометрии, основам математического анализа и комплексным числам.

Книга будет полезна студентам младших курсов и преподавателям вузов.

ББК 22.1я73-4
УДК 517(075.8)

ISBN 978-5-8112-3019-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 7. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Глава 8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Глава 9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Глава 10. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Глава 11. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вашему вниманию сборник задач охватывает традиционный курс высшей математики в объеме первого курса технического вуза. Книга подготовлена преподавателями нескольких московских вузов, имеющими многолетний опыт лекционной и семинарской работы со студентами. Опираясь на этот опыт, а также учитывая достоинства и недостатки существующих пособий, авторы попытались создать в каком-то смысле универсальный задачник, пригодный как для самообразования, так и для активной работы с преподавателем на практических занятиях. Этим объясняется специфическая структура книги.

Каждый раздел сборника начинается с необходимого теоретического минимума, включающего важнейшие определения, теоремы и формулы. Затем идет блок задач на эту тему, рассредоточенный следующим образом. Сначала подробно разбираются 1–3 типовые задачи, после чего предлагается для самостоятельного решения (дома или на семинаре) 6–10 аналогичных задач. Далее снова разбираются 1–3 стандартные задачи на определенную узкую тему, после которых опять идут аналогичные задачи для закрепления приобретенного навыка. И так далее. Именно так происходит обучение на практических занятиях в вузах, поэтому мы надеемся, что такое распределение задач будет особенно удобно преподавателям, ведущим семинары по высшей математике.

В конце каждого раздела находится, составляющий наиболее существенную его часть, весьма обширный массив задач для самостоятельной (без преподавателя) работы студентов. Предполагается, что именно из этой части раздела преподаватель будет черпать задачи для домашних заданий студентам.

Мы уделили особое внимание стандартным задачам, достаточного количества которых так не хватает как преподавателям, так и студентам для успешного хода учебного процесса. Тем не менее в сборнике довольно много более сложных заданий и устных вопросов для продвинутых студентов; все они выделены в особый пункт, завершающий почти каждый раздел книги. Среди устных заданий — и в этом одна из особенностей книги — немало качественных вопросов, обычно предлагаемых на экзаменах по высшей математике. Эта часть задачника будет полезна студентам для подготовки к экзаменам и преподавателям для пополнения своего запаса подобных заданий.

Наконец еще одна особенность этой книги — наличие контрольных работ в конце каждой главы. Опять-таки их могут использовать как студенты при подготовке к зачетам или контрольным, так и преподаватели при проведении последних.

К подавляющему большинству задач сборника — а их в книге около

3500 — приведены ответы, а к наиболее трудным из них — решения или подробные указания.

При работе над книгой труд авторов распределился следующим образом: глава 11, а также § 5 из главы 5 написаны Лунгу К. Н., главы 3–5, 9, 10 — Письменным Д. Т., главы 6–8 — Фединым С. Н., а главы 1, 2 — Шевченко Ю. А.

Авторы будут признательны за любые отзывы, пожелания и критические замечания, которые можно присылать по адресу: 141103, Московская обл., г. Щелково-3, а/я 140, Федину С. Н.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В третьем издании были добавлены темы «Дифференциалы высших порядков» и «Формула Тейлора для функций двух переменных». Кроме того были исправлены опечатки и неточности, найденные нашими читателями. Всем им авторы выражают искреннюю благодарность. Особо хочется отметить к.ф.-м.н. Куланина Е. Д. и преподавателя математики из г. Днепропетровска (Украина) Пайкову Л. И., прорешавшую практически весь задачник и сделавшую немало ценных замечаний, способствовавших улучшению книги.

Авторы признательны рецензентам — зав. кафедрой математического анализа МГПУ, профессору Мордковичу А. Г., зав. кафедрой высшей математики РУДН, профессору Михееву В. И., а также доценту кафедры общей математики факультета ВМиК МГУ Будаку А. Б., высказавшим ряд полезных замечаний, большая часть из которых учтена при подготовке настоящего издания книги.

Принятые обозначения

$\Rrightarrow$	определение
◔	начало решения задачи
●	конец решения задачи
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел
$\mathbb{R}^2$	действительная плоскость
$\mathbb{R}^3$	действительное трехмерное пространство
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел
$\cup$	объединение множеств
$\cap$	пересечение множеств
$A \subset B$	A — подмножество множества B ($A \neq B$)
$A \subseteq B$	A — подмножество множества B
$\forall$	любой, для любого
$\exists$	найдется, существует

Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

❏

⇛ *Матрицей* A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений a_{ij} (называемых *элементами матрицы*), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Матрица A с элементами a_{ij} обозначается также (a_{ij}).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ -2y & -5 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица 2×3, ее элементы $a_{11} = 1$, $a_{12} = x$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = -2y$, $\ldots$

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица размера $n \times n$. *Диагональной* называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т. е. с индексами $i \neq j$) равны нулю. *Единичной* (обозначается E) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали. *Нулевой* называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Примеры матриц: а) квадратная; б) диагональная; в) единичная; г) нулевая: а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & x & -1 \\ 0 & 2x & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§ 1. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

⇛ *Суммой матриц* $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\, i, j$.

Свойства операции сложения матриц. Для любых матриц A, B и C одного размера выполняются равенства:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность);

2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность).

⇛ *Произведением* матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, что и матрица A, причем $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall\, i, j$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (ассоциативность);

2) $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);

3) $(\lambda+\mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

⇛ *Линейной комбинацией матриц* A и B одинакового размера называется выражение вида $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α и β — произвольные числа.

⇛ *Произведением* $A \cdot B$ *матриц* A и B (размеров $m \times n$ и $n \times r$ соответственно) называется матрица C размера $m \times r$, такая, что

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Таким образом, каждый элемент c_{ij}, находящийся в i-й строке и j-м столбце матрицы C, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. (Говоря популярным языком, чтобы найти элемент c_{ij}, нужно «приложить» i-ю строку матрицы A к j-му столбцу матрицы B, перемножить соответствующие элементы и полученные произведения сложить). Произведение $A \cdot B$ существует, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства операции умножения матриц:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$ (ассоциативность);

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);

4) вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$ — отсутствует коммутативность.

⇛ *Коммутирующими* (или перестановочными) называются матрицы A и B, для которых $AB = BA$.

Если задан многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то *матричным многочленом* $f(A)$ называется выражение $a_n \cdot A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot E$, где $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}$ для любого натурального n. Значением матричного многочлена $f(A)$ при заданной матрице A является матрица.

⇛ *Транспонированной* к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $A^T = (a_{ij}^T)$ такая, что $a_{ij}^T = a_{ji}$, $\forall\, i, j$ (т. е. все строки которой равны соответствующим столбцам матрицы A).

Элемент строки матрицы назовем *крайним*, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю. Матрица называется *ступенчатой*, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки. В матрицах A и B отмечены крайние элементы каждой строки:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не ступенчатая ступенчатая

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1. Перемена местами двух строк (столбцов).

2. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.

3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице A (обозначается $B \sim A$). В дальнейшем будем рассматривать элементарные преобразования только над строками.

1.1.1. Найти линейную комбинацию матриц $2A + 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

◐ $2A+3B = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} +$
$+ \begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 & 4+9 & 6+0 \\ 0+6 & 2+3 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. ●

Найти линейные комбинации заданных матриц:

1.1.2. $A - \lambda E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1.1.3. $4A - 5B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

1.1.4. $3A + 4B$, $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB и BA (если это возможно).

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 1 \quad 0 \quad -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{3} & 4 & 5 \\ \boxed{6} & 0 & -2 \\ \boxed{7} & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{1-я строка матрицы } A \text{ прикладывается} \\ \text{к первому столбцу матрицы } B, \\ \text{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \text{а произведения складываются} \end{array} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8 \\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A $(3 \neq 2)$. ●

Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют):

1.1.6. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.1.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.1.9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.11. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = -2x^2 + 5x + 9$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot3 & 3\cdot2+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = -2A^2 + 5A + 9E = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$ ●

Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

1.1.12. $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1.1.13. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.14. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.15. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Проверить, коммутируют ли матрицы A и B:

1.1.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.20. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

◐ Записывая первую и вторую строки матрицы A как первый и, соответственно, второй столбец матрицы A^T, получим матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. ●

1.1.21. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

◐ Так как у матрицы A две строки и три столбца, то у матрицы A^T будет три строки и два столбца: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. ●

Транспонировать следующие матрицы:

1.1.22. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

1.1.23. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Вычислить произведения AA^T и A^TA при заданной матрице A:

1.1.24. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.1.25. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.26. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.27. Привести к ступенчатому виду матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

◐ Первый этап. Сделаем нулевыми все элементы матрицы под крайним элементом первой строки. Для этого вычтем из второй строки первую, умноженную на 3, и запишем результат во вторую строку. После этого к третьей строке прибавим первую, умноженную на 5, и запишем результат в третью строку. Получим матрицу A_1.

Второй этап. Теперь сделаем равными нулю все элементы матрицы под крайним элементом второй строки. Для этого умножим вторую строку на 3, третью строку — на 2, получившиеся строки сложим и результат запишем в третью строку. Получим ступенчатую матрицу A_2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 5 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2 \cdot \mathrm{III} + 3 \cdot \mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ — ступенчатая матрица.}$$ ●

1.1.28. Привести к ступенчатому виду матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

○ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{III} - 5 \cdot \mathrm{I} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & -10 & -30 \end{pmatrix} \mathrm{III} - 10 \cdot \mathrm{II} \sim$$

$$\sim B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ — ступенчатая матрица. ●

1.1.29. Привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

○ $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \cdot \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ 3 \cdot \mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{I} \\ 3 \cdot \mathrm{IV} - 7 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 19 & -20 \\ 0 & 17 & -19 & 20 \\ 0 & -34 & 38 & -40 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III} - 17 \cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} + 2 \cdot \mathrm{III} \end{matrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -342 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ — ступенчатая матрица. ●

Привести к ступенчатому виду матрицы:

1.1.30. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

1.1.31. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.32. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.33. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -18 \\ 5 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix}$.

1.1.34. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

1.1.35. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задачи

Найти линейные комбинации матриц:

1.1.36. $3A - 2B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.1.37. $2B - 5A$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.38. $A - \lambda E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1.1.39. $4A - 7B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.40. $5A - 3B + 2C$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти произведения матриц AB и BA (если это возможно):

1.1.41. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.42. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1.43. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1.1.44. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.45. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти произведения матриц $(AB) \cdot C$ и $A \cdot (BC)$:

1.1.46. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.47. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.48. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.49. $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу A^n:

1.1.50. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.51. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.52. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

1.1.53. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.54. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.55. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.56. $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.57. $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.58. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.59. $f(x) = x^3 - x^2 + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.60. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Проверить, коммутируют ли матрицы A и B:

1.1.61. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1.1.62. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.63. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.64. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

1.1.65. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

1.1.66. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$.

1.1.67. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 8 \\ -9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -9 \\ 8 & 7 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.68. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу A^T:

1.1.69. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.70. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.71. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти произведения матриц AA^T и A^TA:

1.1.72. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.73. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.74. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.75. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.76. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.77. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Привести матрицу A к ступенчатому виду:

1.1.78. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$.

1.1.79. $A=\begin{pmatrix}2&-1&5\\1&1&3\\1&-5&1\end{pmatrix}$.

1.1.80. $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&1\\3&2&-4&2\\5&-2&2&4\end{pmatrix}$.

1.1.81. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1&8\\2&-1&-4&3&1\\4&-7&-18&11&-13\\3&1&-1&2&9\end{pmatrix}$.

1.1.82. $A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-3&4\\1&2&-7&0&7\\2&-1&2&3&-11\\1&0&1&-2&5\end{pmatrix}$.

1.1.83. $A=\begin{pmatrix}1&1&-1&0&4\\3&-1&-7&-4&7\\7&-1&-15&-8&-11\\1&-1&-3&-2&5\end{pmatrix}$.

1.1.84. $A=\begin{pmatrix}1&5&3&-10\\3&-1&1&10\\2&1&-1&0\\7&10&6&-10\end{pmatrix}$.

1.1.85. $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\8&3&-6\\-4&-1&3\end{pmatrix}$.

1.1.86. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\3&-1&2&2\\2&5&-1&0\\1&-1&0&2\end{pmatrix}$.

1.1.87. $A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1&3\\3&-2&0&-4&7\\2&2&10&-1&8\\1&-2&-4&5&2\end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

1.1.88. Если матрицы A и B можно умножать, следует ли из этого, что их можно складывать?

1.1.89. Если матрицы A и B можно складывать, следует ли из этого, что их можно умножать?

1.1.90. Можно ли умножить квадратную матрицу на неквадратную?

1.1.91. Может ли произведение неквадратных матриц быть квадратной матрицей?

1.1.92. Может ли при умножении ненулевых матриц получиться нулевая матрица?

1.1.93. Могут ли совпадать матрицы A и A^T?

1.1.94. Как выглядит матрица $(A^T)^T$?

1.1.95. Верно ли равенство $(A+B)^T=A^T+B^T$?

1.1.96. Верно ли равенство $(A+E)(A-E)=A^2-E$?

1.1.97. Верно ли равенство $(A+E)^2=A^2+2A+E$?

1.1.98. Верно ли равенство $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$?

1.1.99. Верно ли равенство $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$?

1.1.100. Могут ли быть эквивалентными матрицы с различным количеством строк? столбцов?

1.1.101. Обязательно ли существует произведение BA, если $AB=E$?

1.1.102. Может ли нулевая матрица быть эквивалентной ненулевой матрице?

1.1.103. Может ли произведение матриц быть числом?

1.1.104. Как изменится произведение матриц A и B, если переставить i-ю и j-ю строки матрицы A?

1.1.105. Как изменится произведение матриц A и B, если к i-й строке матрицы A прибавить j-ю строку, умноженную на число c?

1.1.106. Как изменится произведение матриц A и B, если переставить i-й и j-й столбцы матрицы B?

1.1.107. Как изменится произведение матриц A и B, если к i-му столбцу матрицы B прибавить j-й столбец, умноженный на число c?

1.1.108*. Найти все квадратные матрицы A размера 2×2, если $A^2 = E$.

1.1.109*. Найти все квадратные матрицы A размера 2×2, если A^2 — нулевая матрица.

1.1.110*. Найти матрицу A^{n-1}, если A — квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.111*. Найти матрицу $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

1.1.112*. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.113*. Доказать, что если A и B — квадратные матрицы n-го порядка, то суммы всех элементов главной диагонали у матриц AB и BA равны.

1.1.114*. Матрица называется стохастической, если сумма элементов любой ее строки равна 1. Доказать, что произведение стохастических матриц — тоже стохастическая матрица.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Любой квадратной матрице n-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можно поставить в соответствие выражение, которое называется *определителем (детерминантом)* матрицы A, и обозначается так:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ или } |A| \text{ или } \det A.$$

⇛ Определитель 2-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (-a_{12}a_{21}).$$

Таким образом, определитель 2-го порядка есть сумма $2 = 2!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 2-х сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одно из слагаемых берется со знаком «+», другое — со знаком «−».

⇛ Определитель 3-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$
$$+ (-a_{13}a_{22}a_{31}) + (-a_{12}a_{21}a_{33}) + (-a_{11}a_{23}a_{32}). \quad (2.1)$$

Таким образом, определитель 3-го порядка есть сумма $6 = 3!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 3-х сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая — со знаком «−». Правило, по которому выбираются эти знаки, задается с помощью формулы (2.1) или другими методами, приведенными ниже.

Определитель n-го порядка задается равенством:

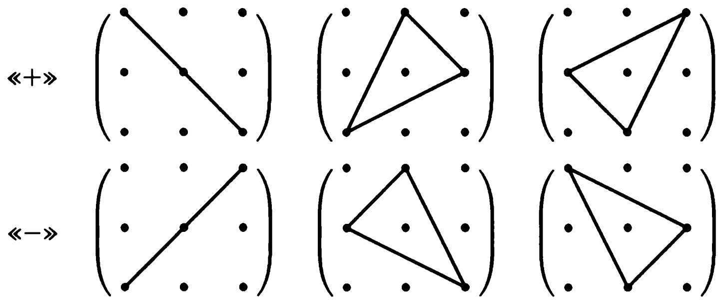
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (\pm a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}).$$

Указанная сумма состоит из $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая — со знаком «−». Правило, по которому выбираются эти знаки, в настоящем издании не используется и здесь не приводится. Методы вычисления определителей n-го порядка приведены ниже.

Методы вычисления определителей

1. *Правило «треугольников»* (правило Саррюса) вычисления определителей 3-го порядка: первое из трех слагаемых, входящих в сумму (2.1) со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье — произведения элементов, находящихся в вершинах двух

треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму (2.1) со знаком «−», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали:



2. *Разложение определителя 3-го порядка по первой строке:*

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

При таком способе вычисления определителя каждый из трех элементов a_{1j} первой строки умножается на определитель 2-го порядка, составленный из элементов матрицы A, оставшихся после вычеркивания 1-й строки и j-го столбца. При этом слагаемое с множителем a_{1j} умножается на число $(-1)^{1+j}$:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению 3-х определителей 2-го порядка. В общем случае можно вычислять определитель n-го порядка квадратной матрицы A, сводя его к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка.

3. *Разложение определителя n-го порядка по первой строке.* Аналогично последней формуле, имеем

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{\dots} & \cancel{a_{1n}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cancel{a_{n1}} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$
+(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cancel{a_{n2}} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}+
$$

$$
+(-1)^{1+3}\cdot a_{13}\cdot\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cancel{a_{n3}} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}+\ldots
$$

$$
\ldots+(-1)^{1+n}\cdot a_{1n}\cdot\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & \cancel{a_{2n}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & \cancel{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & \cancel{a_{nn}} \end{vmatrix},
$$

т. е.

$$
\det A = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}-
$$

$$
-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}-\ldots
$$

$$
\ldots+(-1)^{1+n}a_{1n}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn-1} \end{vmatrix}. \qquad (2.3)
$$

Аналогично задаются другие способы вычисления определителя n-го порядка — «разложение» по произвольной строке или произвольному столбцу — (2.4), (2.5).

Определителем (детерминантом) 1-го порядка квадратной матрицы $A = (a_{11})$ называется значение a_{11}: $\det A = a_{11}$.

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется минор, составленный из элементов A, оставшихся после вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Например, в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ минором M_{21} является определитель, составленный из элементов матрицы, оставшихся после вычеркивания 2-й строки и 1-го столбца: $\begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{7} & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 8 = -24$; соответственно, алгебраическим дополнением A_{21} будет число $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot (-24) = 24$. В новых обозначениях, аналогично формуле (2.2), записывается формула «разложение определителя 3-го порядка по первой строке»:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} \cdot A_{1j}.$$

Аналогично формуле (2.3) записывается формула «разложение определителя n-го порядка по первой строке»:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n-1} \cdot A_{1n-1} + a_{1n} \cdot A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}.$$

4. *Разложение определителя n-го порядка по i-й строке*:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in-1} \cdot A_{in-1} + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij},$$
$$\forall i = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

5. *Разложение определителя n-го порядка по j-му столбцу*:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{n-1j} \cdot A_{n-1j} + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$
$$\forall j = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

6. *Метод приведения к треугольному виду* заключается в приведении определителя (с помощью элементарных преобразований) к такому виду, когда все элементы, расположенные по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю.

7. *Метод рекуррентных соотношений* состоит в том, что определитель n-го порядка выражают через определители того же вида, но более низкого порядка, используя элементарные преобразования и разложение по строке или столбцу.

Свойства определителей

1. Если у определителя какая-либо строка (столбец) состоит только из нулей, то определитель равен 0.

2. Если какие-либо две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен 0.

3. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то и весь определитель умножится на это число.

4. Если две строки (два столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.

5. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить какую-либо другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, то определитель не изменится.

6. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей.

Матрица, определитель которой равен 0, называется *вырожденной*; матрица, определитель которой не равен 0, называется *невырожденной*.

1.2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

◐ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$ ●

Вычислить определители второго порядка:

1.2.2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$.

1.2.3. $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2.4. $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$.

1.2.5. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

1.2.6. $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$.

1.2.7. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

1.2.8. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.9. $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.10. $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6.$

1.2.11. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.12. $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0.$

1.2.13. Вычислить определитель 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

❍ Вычисляя определитель разложением по первой строке, получим:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3 \cdot 4) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) =$$
$$= 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-7) = -3.$$ ●

Вычислить определители 3-го порядка:

1.2.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$

1.2.15. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

1.2.16. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$

1.2.17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$

1.2.18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}.$

1.2.19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}.$

1.2.20. Вычислить определитель с помощью «правила треугольников»

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

❍ Из шести слагаемых не равным нулю будет только одно: $+1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. ●

Вычислить определители с помощью «правила треугольников»:

1.2.21. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.22. $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$

1.2.23. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.24. Вычислить определитель разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

❍ Удобнее всего вычислять определитель разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по 2-й строке:

$$(-1)^{2+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}6&3\\-4&5\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}5&3\\7&5\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}5&6\\7&-4\end{vmatrix}=$$
$$=2\cdot(25-21)=8. \quad \bullet$$

1.2.25. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3&0&2\\-5&3&-1\\6&0&3\end{vmatrix}$.

❍ При разложении определителя 3-го порядка по строке или столбцу, знаки («+» или «−») перед слагаемым $a_{ij}\cdot M_{ij}$ проще всего запомнить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по 2-му столбцу:

$$-0+3\cdot\begin{vmatrix}3&2\\6&3\end{vmatrix}-0=3\cdot(9-12)=-9. \quad \bullet$$

Вычислить определители 3-го порядка разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

1.2.26. $\begin{vmatrix}2&0&3\\7&1&6\\6&0&5\end{vmatrix}$.

1.2.27. $\begin{vmatrix}0&a&0\\b&c&d\\0&e&0\end{vmatrix}$.

1.2.28. $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&0&1\\4&5&6\end{vmatrix}$.

1.2.29. $\begin{vmatrix}2&1&-3\\0&1&-1\\3&-2&1\end{vmatrix}$.

1.2.30. $\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha&1\\\sin\beta&\cos\beta&1\\\sin\gamma&\cos\gamma&1\end{vmatrix}$.

Решить уравнения и неравенство:

1.2.31. $\begin{vmatrix}2&0&3\\-1&7&x-3\\5&-3&6\end{vmatrix}=0.$

1.2.32. $\begin{vmatrix}-1&3&-2\\2-3x&0&5\\3&2&1\end{vmatrix}\geqslant 0.$

1.2.33. $\begin{vmatrix}-1&0&2x+3\\3-x&1&1\\2x+1&-1&2\end{vmatrix}=0.$

1.2.34. $\begin{vmatrix}6&3&x-1\\2x&1&0\\4&x+2&2\end{vmatrix}=0.$

1.2.35. Доказать равенство, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1+a_1x+b_1y\\a_2&b_2&c_2+a_2x+b_2y\\a_3&b_3&c_3+a_3x+b_3y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}.$$

❍ Так как третий столбец левого определителя можно представить в виде суммы трех столбцов, этот определитель можно представить в виде суммы трех определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x \\ a_2 & b_2 & a_2x \\ a_3 & b_3 & a_3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1y \\ a_2 & b_2 & b_2y \\ a_3 & b_3 & b_3y \end{vmatrix}.$$

Третий столбец во втором определителе пропорционален первому столбцу, а в третьем определителе — второму столбцу, следовательно, оба этих определителя равны нулю. Что и завершает доказательство. ●

Доказать равенства:

1.2.36. $\begin{vmatrix} a_1 - xb_1 & a_1 + xb_1 & c_1 \\ a_2 - xb_2 & a_2 + xb_2 & c_2 \\ a_3 - xb_3 & a_3 + xb_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

1.2.37. $\begin{vmatrix} a_1 + xb_1 & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + xb_2 & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + xb_3 & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

Вычислить, используя свойства определителей:

1.2.38. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}.$ **1.2.39.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$

1.2.40. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}.$

1.2.41. Вычислить определитель 4-го порядка разложением по строке или столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

❍ Удобнее пользоваться разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta = (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 9 + 3 \cdot 31 + 0 - 2 \cdot 6 = 63.$$

При вычислении определителей 4-го порядка разложением по строке или столбцу, знаки («+» или «−») перед слагаемым $a_{ij} \cdot M_{ij}$ проще всего запомнить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Аналогично, для вычисления определителя n-го порядка знаки расположены следующим образом (в «шахматном» порядке, слева вверху знак «+»):

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}. \qquad \bullet$$

1.2.42. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 1 & c & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

◑ Разложим определитель по 4-ой строке:

$$\Delta = (+d) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & b \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по 2-ой строке} \end{bmatrix} =$$

$$= d \cdot (-b) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{vmatrix} = -d \cdot b \cdot a \cdot c. \qquad \bullet$$

Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

1.2.43. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.44. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.45. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$

1.2.46. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

1.2.47. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

1.2.48. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$

1.2.49. Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

❍ Прибавляя к каждой строке определителя первую строку, получим:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix}\text{разложим по} \\ \text{первому столбцу}\end{matrix}\right] =$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}}_{n-1} = \left[\begin{matrix}\text{повторяем разложение по} \\ \text{первому столбцу } n-2 \text{ раза}\end{matrix}\right] =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad ●$$

1.2.50. Вычислить определитель n-го порядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

❍ Разложим определитель по первой строке:

$$D_n = (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{n-1} = (-1)^{n+2} \cdot D_{n-1}.$$

Аналогично $D_{n-1} = (-1)^{n+1} \cdot D_{n-2}$ и т. д. Таким образом,

$$D_n = (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \ldots \cdot (-1)^{2+2} \cdot D_1.$$

Учитывая, что

$$(-1)^{n+2} = (-1)^n, \quad (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}, \quad \ldots, \quad (-1)^{2+2} = (-1)^2;$$
$$D_1 = -1,$$

получим выражение для D_n:

$$D_n = (-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \ldots \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^1 =$$
$$= (-1)^{1+2+\ldots+(n-1)+n} = (-1)^{n \cdot \frac{n+1}{2}}. \quad \bullet$$

Вычислить определители n-го порядка:

1.2.51. $\begin{vmatrix} n & n & n & \ldots & n & n & n \\ n & n-1 & n & \ldots & n & n & n \\ n & n & n-2 & \ldots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \ldots & 3 & n & n \\ n & n & n & \ldots & n & 2 & n \\ n & n & n & \ldots & n & n & 1 \end{vmatrix}.$

1.2.52. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.53. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & \ldots & n & n & n \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{vmatrix}.$

1.2.54. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 3 \end{vmatrix}.$ **1.2.55.** $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & n & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix}.$

1.2.56. Вычислить определитель n-го порядка методом рекуррентных соотношений:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

◐ Разложим определитель по первому столбцу

$$D_n = 2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2&1&0&\dots&0&0\\1&2&1&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&1&2\end{vmatrix}}_{n-1} - 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0&0\\1&2&1&\dots&0&0\\0&1&2&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&1&2\end{vmatrix}}_{n-1} =$$

$$= \begin{bmatrix}\text{разложим второй}\\\text{определитель по}\\\text{первой строке}\end{bmatrix} =$$

$$= 2\cdot D_{n-1} - 1\cdot 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2&1&0&\dots&0&0\\1&2&1&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&1&2\end{vmatrix}}_{n-2} = 2\cdot D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Вычислим D_2, D_3 и D_4:

$$D_2 = \begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix} = 3;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 1\cdot 2 = 4;$$

$$D_4 = 2D_3 - D_2 = 2\cdot 4 - 3 = 5.$$

Итак, $D_2 = 3$, $D_3 = 4$, $D_4 = 5$. Докажем (по индукции), что $D_n = n+1$. По предположению индукции, $D_{n-2} = n-1$, $D_{n-1} = n$. Учитывая, что $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, получим $D_n = 2n - (n-1) = n+1$, что и требовалось. ●

Вычислить определители методом рекуррентных соотношений:

1.2.57. $\left.\begin{vmatrix}3&2&0&\dots&0&0\\1&3&2&\dots&0&0\\0&1&3&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&1&3\end{vmatrix}\right\} n.$ **1.2.58.** $\begin{vmatrix}0&1&1&\dots&1\\1&a_1&0&\dots&0\\1&0&a_2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\dots&a_n\end{vmatrix}.$

Дополнительные задачи

Вычислить определители 2-го порядка:

1.2.59. $\begin{vmatrix}2&-3\\5&-4\end{vmatrix}.$ **1.2.60.** $\begin{vmatrix}\alpha&\beta\\0&0\end{vmatrix}.$

1.2.61. $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ xy^2 & y^2 \end{vmatrix}$.

1.2.62. $\begin{vmatrix} \alpha & 3\alpha \\ \beta & 3\beta \end{vmatrix}$.

1.2.63. $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$.

1.2.64. $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x^2+x+1 & x^2 \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

1.2.65. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.66. $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.67. $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 6.$

1.2.68. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1-y & x-2 \end{vmatrix} = -4.$

1.2.69. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 7-y & x+4 \end{vmatrix} = -34.$

1.2.70. $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 3x \\ \cos 2x & \cos 3x \end{vmatrix} = 0.$

Вычислить определители 3-го порядка разложением по первой строке:

1.2.71. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

1.2.72. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

1.2.73. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

1.2.74. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

Вычислить определители с помощью «правила треугольников»:

1.2.75. $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}$.

1.2.76. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2.77. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$.

1.2.78. $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

1.2.79. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

1.2.80. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

1.2.81. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2.82. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & y & z \\ x & 0 & z \end{vmatrix}$.

1.2.83. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решить уравнения и неравенства:

1.2.84. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.85. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leqslant 4.$

1.2.86. $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.87. $\begin{vmatrix} -3 & x-1 & 1 \\ x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6.$

1.2.88. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} < 0.$

Не вычисляя определителей, проверить, что они делятся на $a-b$, $b-c$, $c-a$:

1.2.89. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

1.2.90. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$

1.2.91. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$

Вычислить, используя свойства определителей:

1.2.92. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}.$

1.2.93. $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}.$

Вычислить определители разложением по строке или столбцу:

1.2.94. $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ g & h & k & u & l \end{vmatrix}.$

1.2.95. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.96. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$

1.2.97. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$

1.2.98. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

1.2.99. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$

Вычислить определители приведением к треугольному виду:

1.2.100. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

1.2.101. $$\begin{vmatrix} -n & 1-n & 2-n & \dots & -2 & -1 \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 & 0 \\ 2-n & 3-n & 4-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.2.102. $$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

1.2.103. $$\left.\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}\right\} n.$$

1.2.104. $$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители методом рекуррентных соотношений:

1.2.105. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

1.2.106. $$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

3 – 2361

Контрольные вопросы и более сложные задачи

1.2.107. Всегда ли определитель суммы матриц равен сумме их определителей?

1.2.108. Привести пример двух таких матриц, что определитель их суммы равен сумме их определителей.

1.2.109. Привести пример двух таких матриц, что определитель их суммы равен сумме их определителей, причем ни один из трех определителей не равен нулю.

1.2.110. Могут ли все алгебраические дополнения некоторой матрицы $A = (a_{ij})$ быть равны соответствующим минорам ($A_{ij} = M_{ij}$)?

1.2.111. Могут ли все алгебраические дополнения некоторой матрицы $A = (a_{ij})$ быть равны соответствующим элементам ($A_{ij} = a_{ij}$)?

1.2.112. Может ли определитель 2-го порядка принимать значение большее, чем определитель 5-го порядка?

1.2.113. Может ли определитель изменить знак на противоположный при транспонировании матрицы?

1.2.114. Дана квадратная матрица n-го порядка $A = (a_{ij})$. Чему равна сумма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$?

1.2.115. Можно ли вычислять миноры, дополнительные к элементам неквадратной матрицы?

1.2.116. Как изменится определитель 3-го порядка, если его строки переставить следующим образом: первую — на место второй, вторую — на место третьей, третью — на место первой?

1.2.117. Как изменится определитель n-го порядка, если его строки переставить следующим образом: первую — на место второй, вторую — на место третьей, $\ldots$, $(n-1)$-ю — на место n-й, n-ю — на место первой?

1.2.118. Сколько всего миноров у квадратной матрицы n-го порядка?

1.2.119. Сколько всего миноров у матрицы размера $m \times n$?

1.2.120. Могут ли все алгебраические дополнения некоторой ненулевой матрицы $A = (a_{ij})$ быть равны соответствующим минорам ($A_{ij} = M_{ij}$)?

1.2.121. Могут ли все алгебраические дополнения некоторой ненулевой матрицы $A = (a_{ij})$ быть равны соответствующим элементам ($A_{ij} = a_{ij}$)?

1.2.122. Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \ldots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

1.2.123*. Дана квадратная матрица n-го порядка $A = (a_{ij})$. Чему равна сумма $a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + \dots + a_{1n-1} \cdot A_{2n-1} + a_{1n} \cdot A_{2n}$?

1.2.124*. Доказать, что если все элементы определителя 3-го порядка равны 1, то значение определителя — четное число.

1.2.125*. Доказать, что если числа a, b, c — действительные, то уравнение $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$ имеет действительные корни.

1.2.126*. Числа 255, 391, 578 делятся на 17. Не вычисляя значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$, доказать, что он тоже делится на 17.

1.2.127*. Как изменится сумма всех алгебраических дополнений к элементам матрицы, если ко всем элементам матрицы прибавить одно и то же число?

1.2.128*. Вычислить определитель n-го порядка методом рекуррентных соотношений:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

§ 3. РАНГ МАТРИЦЫ

⇛ *Минором k-го порядка* произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

В матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ можно указать, например, такие миноры:

— 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right), \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}\right),$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right);$$

— 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix};$$

— 1-го порядка

$$|2| \text{ (минор } |a_{12}|), \ |3| \text{ (минор } |a_{13}|), \ |-7| \text{ (минор } |a_{34}|).$$

⇛ *Рангом матрицы* A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Обозначения: $r(A)$, $\operatorname{rang}(A)$.

⇛ *Базисным минором* называется любой из отличных от нуля миноров матрицы A, порядок которого равен $r(A)$.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 1:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 1.$$

Любой из миноров 2-го порядка матрицы A равен нулю, и существует хотя бы один минор 1-го порядка, не равный нулю, например, $|3| = 3$. Базисным минором матрицы A является каждый из ненулевых миноров 1-го порядка: $|3|(=3)$, $|-2|(=-2)$, $|2|(=2)$.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2,$$

так как существует минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$, не равный нулю, а миноров 3-го порядка у матрицы A нет. Единственный базисный минор матрицы A — минор $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Теорема 1.1. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Теорема 1.2. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу A приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы A.

Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы A состоит в следующем. Необходимо:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (т. е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$.

2) Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (*окаймляющие* M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geqslant 2$. И т. д.

...

k) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geqslant k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти *всего один* ненулевой минор k-го порядка, причем искать его только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

1.3.1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

❍ Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2\cdot\text{II}-\text{I} \\ 2\cdot\text{III}-\text{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III}+3\cdot\text{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит ее ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 2. ●

Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

1.3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$.

1.3.5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.3.6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$.

1.3.7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3.8. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

○ Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r(A) \geqslant 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Значит, $r(A) \geqslant 2$.

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 2-й строке} \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-му столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2-2) + 6 \cdot (6-4) = -12 + 12 = 0;$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2, равны нулю, следовательно, $r(A) < 3$. Итак, $r(A) = 2$.

Одним из базисных миноров является $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. ●

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор:

1.3.9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1.3.10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

1.3.11. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3.12. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3.13. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3.14. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ:

1.3.15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

1.3.16. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задачи

Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

1.3.17. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix}$.

1.3.18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}$.

1.3.19. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3.20. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

1.3.21. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

1.3.22. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

1.3.23. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3.24. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3.25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.26. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.27. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3.28. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ:

1.3.29. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3.30. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.3.31. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

1.3.32. Может ли ранг матрицы быть равным нулю? меньше нуля? равным 2,5?

1.3.33. Ранг матрицы A равен r. Что можно сказать о $r(2A)$? $r(-A)$? $r(0 \cdot A)$?

1.3.34. Как может измениться ранг матрицы при транспонировании?

1.3.35. Как может измениться ранг матрицы при добавлении к ней одной произвольной строки? Одного произвольного столбца?

1.3.36. Как может измениться ранг матрицы при вычеркивании одной строки? одного столбца?

1.3.37. Доказать, что у матрицы ранга 1 все строки (и столбцы) пропорциональны.

1.3.38. Ранг матрицы A равен r_1, ранг матрицы B равен r_2. Что можно сказать о $r(A+B)$? $r(A-B)$?

1.3.39. Как может измениться ранг матрицы при добавлении к ней одной (такой же как первая) строки?

1.3.40. Доказать, что каждая матрица ранга 1 может быть представлена в виде $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$.

1.3.41. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$.

1.3.42. Найти ранг матрицы размера $n \times n$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1.3.43*. Доказать, что если C — квадратная невырожденная матрица, и существует произведение матриц $C \cdot A$, то $r(C \cdot A) = r(A)$.

1.3.44*. Доказать, что $r(A^T A) = r(AA^T) = r(A)$.

1.3.45*. Доказать, что если ранг матрицы A не изменяется от приписывания к ней каждой строки некоторой матрицы B (с числом столбцов, как у матрицы A), то этот ранг не изменится от приписывания к матрице A всех строк матрицы B.

1.3.46*. Доказать, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы менее, чем r таких матриц.

1.3.47*. Найти ранг матрицы размера $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{pmatrix}.$$

§ 4. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$\Rrightarrow$ *Обратной матрицей* к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Замечание. Если матрица A^{-1} существует, то она единственна.

$\Rrightarrow$ *Присоединенной матрицей* к квадратной матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $\widetilde{A} = (A_{ij})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}.

Теорема 1.3. Если квадратная матрица A — невырожденная (т. е. $\det A \neq 0$), то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}. \tag{4.1}$$

Метод присоединенной матрицы вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице A состоит в применении формулы (4.1).

Метод элементарных преобразований (метод Гаусса) вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице A состоит в следующем. Приписывая справа к матрице A размера $n \times n$ единичную матрицу размера $n \times n$, получим прямоугольную матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований над строками матрицы Γ сначала приведем ее к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1|B)$, где матрица A_1 — треугольная, а затем к виду $\Gamma_2 = (E|A^{-1})$.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом

$$AX = B, \tag{4.2}$$

$$XA = B, \tag{4.3}$$

$$AXC = B. \tag{4.4}$$

В этих уравнениях A, B, C, X — матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения возможны, и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Если в уравнениях (4.2), (4.3) матрица A невырожденная, то их решения записываются следующим образом:

$$X = A^{-1}B,$$
$$X = BA^{-1}.$$

Если в уравнении (4.4) матрицы A и C невырождены, то его решение записывается так:

$$X = A^{-1}BC^{-1}.$$

1.4.1. Найти (методом присоединенной матрицы) матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

❍ 1) Найдем $\det A$:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= -48 - 2 \cdot (-42) + 3 \cdot (32 - 35) = -48 + 84 - 9 = 27 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица A^{-1} существует.

2) Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

3) Запишем матрицу $\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$

4) Найдем матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

1.4.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.3. $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1.4.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.5. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.6. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1.4.8. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.9. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

◐ 1) Найдем $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Матрица A^{-1} существует, только если $\det A \neq 0$.

2) Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = a_{22}, \quad A_{12} = -a_{21}, \quad A_{21} = -a_{12}; \quad A_{22} = a_{11}.$$

3) Запишем присоединенную матрицу:

$$\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Итак, для матрицы 2-го порядка присоединенная матрица находится очень просто — элементы главной диагонали меняются местами, а элементы побочной диагонали умножаются на (-1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{22}} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathbf{a_{11}} \end{pmatrix}.$$

4) Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \qquad \bullet$$

Найти обратную матрицу, используя результаты задачи 1.4.9:

1.4.10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.4.12. $\begin{pmatrix} x & z \\ y & -x \end{pmatrix}$.

1.4.13. $\begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix}$.

1.4.14. Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

◐ Записывая матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера (3×6), с помощью элементарных преобразований над строками приведем ее сначала к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1|B)$, а затем к виду $\Gamma_2 = (E|A^{-1})$:

$$\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \Gamma_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{II} + \mathrm{III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} : 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = \Gamma_2.$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-1&-3/2\\-3&1&1\\-1&0&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\ \bullet$$

Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

1.4.15. $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

1.4.16. $\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-2\\2&3&3\end{pmatrix}$.

1.4.17. $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&4\\3&10&8\end{pmatrix}$.

1.4.18. $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&4\\-4&-14&-6\end{pmatrix}$.

1.4.19. $\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\5&6&7&-2\\-1&0&1&2\\3&4&5&6\end{pmatrix}$.

1.4.20. $\begin{pmatrix}1&2&3&-2&4\\2&6&2&1&0\\3&0&-1&1&2\\-1&4&0&5&-4\\5&-4&-1&-1&8\end{pmatrix}$.

1.4.21. Методом элементарных преобразований найти матрицу, обратную к данной матрице размера $n\times n$:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&0&1&\dots&1\\1&1&0&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\dots&0\end{pmatrix}.$$

$$\Gamma=(A|E)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&1&1&\dots&1&1&0&0&\dots&0\\1&0&1&\dots&1&0&1&0&\dots&0\\1&1&0&\dots&1&0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\dots&0&0&0&0&\dots&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\mathrm{II}-\mathrm{I}\\\mathrm{III}-\mathrm{I}\\\vdots\\(\mathrm{n})-\mathrm{I}\end{array}\sim$$

$$\sim\Gamma_1=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&1&1&\dots&1&1&0&0&\dots&0\\0&-1&0&\dots&0&-1&1&0&\dots&0\\0&0&-1&\dots&0&-1&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&-1&-1&0&0&\dots&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\mathrm{I}+\mathrm{II}+\ldots+(\mathrm{n})\\\\\\\\\\\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&\dots&0&2-n&1&1&\dots&1\\0&-1&0&\dots&0&-1&1&0&\dots&0\\0&0&-1&\dots&0&-1&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&-1&-1&0&0&\dots&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\mathrm{II}\cdot(-1)\\\mathrm{III}\cdot(-1)\\\vdots\\(\mathrm{n})\cdot(-1)\end{array}\sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{array}\right) = \Gamma_2 = (E|A^{-1}).$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}.$ ●

Найти матрицу, обратную к данной матрице размера $n \times n$, используя метод элементарных преобразований:

1.4.22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$ **1.4.23.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$

1.4.24. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$ **1.4.25.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$

1.4.26. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

1.4.27. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

❍ Запишем данное матричное уравнение в виде $AX = B$. Его решением является матрица $X = A^{-1}B$ (если существует матрица A^{-1}).

1) Найдем определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Значит, обратная матрица A^{-1} существует, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

2) Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем матрицу

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \bullet$$

1.4.28. Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

❍ Запишем данное матричное уравнение в виде $AXC = B$. Его решением является матрица $X = A^{-1}BC^{-1}$ (если матрицы A^{-1} и C^{-1} существуют).

1) Найдем определители матриц A и C:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \det C = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Матрицы A и C невырождены, значит, существуют обратные матрицы A^{-1} и C^{-1}, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

2) Найдем обратные матрицы A^{-1} и C^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \widetilde{C} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем матрицу

$$X = A^{-1}BC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \bullet$$

Решить матричные уравнения:

1.4.29. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.30. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.31. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.32. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

1.4.33. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

1.4.34. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$

1.4.35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}.$

1.4.36. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Дополнительные задачи

Найти (методом присоединенной матрицы) матрицу, обратную к данной:

1.4.37. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}.$

1.4.38. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.39. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

1.4.40. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

1.4.41. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

1.4.42. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к данной:

1.4.43. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

1.4.44. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

1.4.45. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$

1.4.46. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$ (размер $n \times n$).

1.4.47. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ (размер $(n+1) \times (n+1)$).

1.4.48. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.49. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (размер $n \times n$).

Решить матричное уравнение:

1.4.50. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.51. $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.52. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.4.53. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.4.54. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.55. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.56. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 – 2361

1.4.57. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

1.4.58. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

1.4.59. Если матрица A не квадратная, может ли существовать такая матрица B, что:
а) $BA = E$?
б) $AB = E$?

1.4.60. Доказать, что если для квадратной матрицы A найдутся две такие матрицы B и C, что $BA = AC = E$, то $B = C$.

1.4.61. Верно ли, что:
а) $(2A)^{-1} = 0{,}5 \cdot A^{-1}$ $\left(\text{аналог числового равенства } \frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}\right)$?
б) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$?
в) $(-E)^{-1} = -E$ $\left(\text{аналог: } \frac{1}{-1} = -1\right)$?
г) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ $\left(\text{аналог: } \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right)$?
д) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$?
е) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ $\left(\text{аналог: } \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}\right)$?

1.4.62. Верно ли, что:
а) если $|A| = 0$, то $|A^{-1}| = 0$?
б) если $|A| = 2$, то $|A^{-1}| = -2$?
в) если $|A| = 2$, то $|A^{-1}| = 0{,}5$?
г) $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$?

1.4.63. Верно ли, что матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A?

1.4.64. Следует ли второе утверждение из первого (если матрицы A и B произвольные):
а) $AB = E$; $BA = E$?
б) $AB = 2E$; $BA = 2E$?
в) $A \cdot A = E$; $A = E$ или $A = -E$?

1.4.65. Следует ли второе утверждение из первого (если матрицы A и B квадратные):
а) $AB = E$; $BA = E$?
б) $AB = 2E$; $BA = 2E$?

1.4.66. Может ли матричное уравнение $AX = B$ иметь:
а) одно решение?
б) два решения?

в) 17 решений?

г) ни одного решения?

1.4.67. Равносильны ли уравнения:

а) $AX = B$ и $X = A^{-1}B$?

б) $AX = B$ и $X = BA^{-1}$?

в) $AX = B$ и $X = AB^{-1}$?

г) $AX = B$ и $X = B^{-1}A$?

1.4.68. Как изменится матрица A^{-1}, если в матрице A:

а) поменять местами i-ю и j-ю строки (i-й и j-й столбцы)?

б) i-ю строку (столбец) умножить на число $\lambda \neq 0$?

в) к i-й строке (столбцу) прибавить j-ю строку (столбец), умноженную на число λ?

1.4.69. Доказать, что матричное уравнение $A \cdot X = 0$ (матрица A — квадратная) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

1.4.70. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *симметричной*, если $a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall i, j)$. Доказать, что матрица, обратная к симметричной, будет симметричной.

1.4.71. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.72. Доказать, что если для квадратной матрицы A при некотором натуральном k выполнено равенство $A^k = 0$, то

$$(E - A)^{-1} = E + A + \ldots + A^{k-1}.$$

1.4.73. Найти матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} E_k & A \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$ размера $(k + l) \times (k + l)$, где E_k и E_l — единичные матрицы размеров $k \times k$ и $l \times l$ соответственно, A — произвольная матрица размера $k \times l$.

1.4.74. Пусть размеры матриц A, B, C таковы, что можно составить матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, и существуют матрицы A^{-1} и C^{-1}. Доказать, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

1.4.75. Доказать, что если матрица A_1 получается из матрицы A поворотом на 90°, то обратная матрица A_1^{-1} получается из матрицы A^{-1} поворотом на 90° в обратном направлении.

1.4.76*. Доказать, что любая $(m \times n)$-матрица A ранга r может быть представлена в виде произведения $A = A_1 \cdot E_r \cdot A_2$, где матрицы

A_1 и A_2 (размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно) невырождены, а матрица E_r содержит элементы $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{rr} = 1$, и все остальные ее элементы равны 0.

1.4.77*. Доказать, что для любой (возможно, не квадратной) матрицы A уравнение $AXA = A$ имеет решение.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:
$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3, \;\; A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

2. Найти ранг матрицы приведением к ступенчатому виду. Указать базисный минор.
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ -8 & 2 & -6 & -3 & -13 \\ 11 & -3 & 13 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \end{vmatrix}.$

4. Найти матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$

5. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Вариант 2

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2, \;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

2. Найти ранг матрицы приведением к ступенчатому виду. Указать базисный минор.
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 4 & -21 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & -3 & 2 & 7 & -8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -7 & -1 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -7 & -1 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Вариант 3

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:
$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти ранг матрицы приведением к ступенчатому виду. Указать базисный минор.
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & -3 & 2 & 7 & -8 \\ 0 & 2 & -13 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 9 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Вариант 4

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1,\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Найти ранг матрицы приведением к ступенчатому виду. Указать базисный минор.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 7 & 1 \\ -6 & 2 & 0 & -13 & -7 \\ -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \\ 8 & -3 & 4 & 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

❑

Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА–КАПЕЛЛИ. МЕТОД ГАУССА

⇛ Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

где числа a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, \ldots, b_m$ — *свободными членами*.

⇛ *Решением системы* (1.1) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, $\ldots$, c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

⇛ Если система (1.1) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*; система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

⇛ Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

⇛ Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

Систему (1.1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — *матрица системы*, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ —

столбец (или вектор-столбец) *неизвестных*, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — *столбец свободных членов.*

$\Rightarrow$ Матрица $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & & b_m \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы.*

Теорема 2.1 (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений (1.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$r(A) = r(A|B).$$

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы — выяснить, определенна она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если $r(A) < r(A|B)$, то система несовместна.

2) Если $r(A) = r(A|B) = n$ (где n — число неизвестных), то система совместна и определенна.

3) Если $r(A) = r(A|B) < n$, то система совместна и неопределенна.

Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать, например, *метод Гаусса*:

С помощью элементарных преобразований над строками приведем расширенную матрицу системы $(A|B)$ к ступенчатому виду $(A'|B')$:

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1k_2} & \dots & a'_{1k_r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & a'_{2k_2} & \dots & a'_{2k_r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{rk_r} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right),$$

где в i-ой строке ($i = 1, 2, \dots, r$) самый левый ненулевой элемент обозначен через a_{ik_i}.

Полученной расширенной матрице $(A'|B')$ соответствует система линейных уравнений, эквивалентная системе (1.1). При этом $r(A') = r(A)$, $r(A'|B') = r(A|B)$, и утверждения о том, что полученная система совместна (несовместна) и определенна (неопределенна) верны и для системы (1.1).

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ не равно нулю, то $r(A'|B') > r(A')$, и система несовместна; иначе (если $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$) система совместна. В случае, когда система совместна, будет $r(A') = r(A'|B') = r$, где r — число ненулевых строк матриц A' и $(A'|B')$. Если $r = n$ (где n — число неизвестных), то система определенна, в противном случае (если $r < n$) система неопределенна.

Базисным минором матриц A' и $(A'|B')$ является, например, минор, составленный из элементов этих матриц, расположенных в первых r строках и столбцах с номерами $1, k_2, k_3, \ldots, k_r$. Назовем *базисными* (или *главными*) r переменных $x_1, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots, x_{k_r}$, а остальные $n - r$ переменных назовем *свободными*. Без ограничения общности можно предположить, что главными переменными являются $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$, а свободными — $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Тогда матрица $(A'|B')$ (в случае когда $r(A')=r(A'|B')$) запишется в виде:

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2r} & a_{2r+1} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{rr} & a_{rr+1} & \ldots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую расширенной матрице $(A'|B')$ в следующем виде — перенесем все слагаемые со свободными переменными $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в правую часть:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r = b'_1 - a'_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r = b'_2 - a'_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{r-1r-1}x_{r-1} + a'_{r-1r}x_r = b'_{r-1} - a'_{r-1r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{r-1n}x_n, \\ \qquad a'_{rr}x_r = b'_r - a'_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x_n, \end{cases} \tag{1.2}$$

где коэффициенты $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{rr}$ не равны нулю.

Пусть свободные переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ принимают значения $t_1, \ldots, t_{n-r}$. Тогда из последнего уравнения системы (1.2) переменная x_r однозначно выражается через $t_1, \ldots, t_{n-r}$:

$$x_r = x_r(t_1, \ldots, t_{n-r}) = \frac{1}{a'_{rr}}(b'_r - a'_{rr+1}t_1 - \ldots - a'_{rn}t_{n-r}).$$

Подставляя это значение x_r в предпоследнее уравнение системы (1.2), получим выражение, однозначно задающее x_{r-1} через $t_1, \ldots, t_{n-r}$:

$$x_{r-1} = x_{r-1}(t_1, \ldots, t_{n-r}).$$

Продолжая подставлять полученные значения $x_r, x_{r-1}, \ldots$ в уравнения системы (1.2), получим выражения, однозначно задающие $x_1, x_2, \ldots, x_r$ через $t_1, \ldots, t_{n-r}$. Таким образом, каждому фиксированному набору значений свободных переменных $x_{r+1} = t_1, \ldots, x_n = t_{n-r}$ соответствует единственное решение системы (1.2) и системы (1.1):

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \ldots, t_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(t_1, \ldots, t_{n-r}) \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

⇛ *Общим решением* системы (1.1) называется множество всех ее решений, записанных в виде формулы (1.3), выражающей произвольное решение системы в виде функций от $n-r$ свободных переменных.

2.1.1. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

◔ Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right)_{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$r(A) = r(A|B) = 2,$$

значит, *система совместна*. Количество неизвестных также равно 2:

$$n = r(A) = r(A|B) = 2,$$

значит, *система определенна*, т.е. имеет единственное решение. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_2 = 3$; подставляя это значение в первое уравнение, получим $x_1 = 2$.

Итак, общее решение (оно же единственное частное): $(2;3)$. *Ответ.* система совместна и определенна; общее решение $(2;3)$; частное решение $(2;3)$. ●

2.1.2. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

❍ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как

$$r(A) = r(A|B) = 2 < 3 = n,$$

то *система совместна и неопределенна* (т. е имеет бесконечно много решений).

Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 3 - 2 = 1$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы A, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы — 1-й и 2-й столбцы матрицы A — соответствуют переменным x_1 и x_2 — это будут *главные переменные*, а x_3 — *свободная переменная*. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Теперь для наглядности запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 4, \\ x_2 = 2x_3 + 4. \end{cases}$$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим $x_1 = -x_3 - 8$. Обозначая свободную переменную x_3 через t, получим *общее решение системы*: $(-t - 8; 2t + 4; t)$. *Частное решение системы* получим, например, при $t = 0$: $(-8; 4; 0)$.

Ответ. система совместна и неопределенна; общее решение $(-t-8; 2t+4; t)$; частное решение $(-8; 4; 0)$. ●

2.1.3. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ 3x_4 = \ 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - \ \ x_4 = -9, \\ -7x_1 + \ x_2 + \ x_3 - \ 2x_4 = \ 8, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12. \end{cases}$$

◐ Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 6\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 7\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{IV} + 3\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} + \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} + \mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как

$$r(A) = r(A|B) = 2 < 4 = n,$$

то *система совместна и неопределенна.*

Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 4 - 2 = 2$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы A, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}$. Его столбцы (1-й и 2-й столбцы матрицы A) соответствуют переменным x_1 и x_2 — это будут *главные переменные*, а x_3 и x_4 — *свободные переменные*. Заметим, что в качестве главных переменных в данном примере нельзя выбрать пару x_2 и x_3, так как любой соответствующий им минор равен нулю: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 15 & 15 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$\begin{vmatrix} 15 & 15 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15. \end{cases}$$

Теперь запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - 2x_3 - 3x_4, \\ 15x_2 = 15 - 15x_3 - 19x_4. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2, через x_3 и x_4: $x_2 = 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4$. Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим $x_1 = -1 - \frac{7}{15}x_4$. Обозначим свободные переменные: x_3 через t_1, x_4 через $15t_2$. Запишем *общее решение системы*: $(-1 - 7t_2; 1 - t_1 - 19t_2; t_1; 15t_2)$. *Частное решение системы* получим, например, при $t_1 = 1$, $t_2 = 0$: $(-1; 0; 1; 0)$.

Ответ. система совместна и неопределенна; общее решение $(-1-7t_2; 1-t_1-19t_2; t_1; 15t_2)$; частное решение $(-1; 0; 1; 0)$. ●

2.1.4. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

❍ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 2 \cdot \mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Так как

$$r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B),$$

то *система несовместна* (не имеет решений). В самом деле, последней строке полученной расширенной матрицы соответствует уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -13$, не имеющее решений.

Ответ. система несовместна. ●

Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения:

2.1.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$

2.1.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

2.1.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 2. \end{cases}$

2.1.8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

2.1.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.1.10. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 4x - 3y + 3z = 0, \\ x + 3y = 0. \end{cases}$

2.1.11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.1.12. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

2.1.13. $\begin{cases} 2x - 3y = -2, \\ x + 2y = 2{,}5, \\ -2x - 4y = -5, \\ 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}y = -2\sqrt{3}. \end{cases}$

2.1.14. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 2, \\ 4x - 3y + 3z = 3, \\ x + 3y = 0, \\ 5x + 3z = 3. \end{cases}$

2.1.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 \qquad = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$

2.1.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$

2.1.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

2.1.18. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$

2.1.19. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7. \end{cases}$

2.1.20. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

2.1.21. Исследовать систему из n линейных уравнений, найти общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n - 2, \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_n = n - 3, \\ x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_n = n - 3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = n - 3. \end{cases}$$

❍ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n-2 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & n-3 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & n-3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \vdots \\ (\mathrm{n}) - \mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n-2 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} \cdot (-1) \\ \mathrm{III} \cdot (-1) \\ \vdots \\ (\mathrm{n}) \cdot (-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n-2 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III} - \ldots - (\mathrm{n}) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n - 2\overbrace{-1-1-\ldots-1}^{(n-1)\text{ раз}} = -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = 1. \end{cases}$$

Очевидно, эта система совместна и определенна, единственное решение $(-1; 1; 1; \dots; 1)$.

Ответ. система совместна и определенна; общее решение (оно же частное решение) $(-1, 1, 1, \dots, 1)$. ●

Исследовать систему из n линейных уравнений, найти общее и одно частное решение:

2.1.22. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = n, \\ 2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n = 2n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ nx_1 + nx_2 + \dots + nx_n = n^2. \end{cases}$$

2.1.23. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = n, \\ 2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n = 2n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n-1)x_1 + (n-1)x_2 + \dots + (n+1)x_n = (n-1)n, \\ nx_1 + nx_2 + \dots + nx_n = 0. \end{cases}$$

2.1.24. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1} + x_n = n, \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1} + x_n = n-1, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 + \dots + x_{n-1} + x_n = n-2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots \qquad + x_n = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1} \qquad = 1. \end{cases}$$

2.1.25. $$\begin{cases} \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \dots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = n, \\ -x_1 \qquad + 3x_3 + 4x_4 + \dots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = -n, \\ -x_1 - 2x_2 \qquad + 4x_4 + \dots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = -n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - \dots - (n-2)x_{n-2} + nx_n = -n, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - \dots - (n-1)x_{n-1} \qquad = -n. \end{cases}$$

2.1.26. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от параметра λ. В случае, когда система совместна, найти общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8, \\ 4x_1 - 2x_2 = \lambda. \end{cases}$$

❍ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 4 & -2 & \lambda \end{array}\right) \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 16 \end{array}\right).$$

Запишем полученную матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ее ранг $r(A)$ равен 1.

а) При $\lambda \neq 16$ получим расширенную матрицу системы $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 16 \end{array}\right)$, ее ранг $r(A|B)$ равен 2. Таким образом, $r(A) = 1 \neq 2 = r(A|B)$, *система несовместна.*

б) При $\lambda = 16$ получим расширенную матрицу системы $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, ее ранг $r(A|B)$ равен 1. Значит, $r(A) = r(A|B) = 1 < 2 = n$, *система совместна и неопределенна*. Полученной расширенной матрице системы соответствует уравнение $2x_1 - x_2 = 8$. В качестве главной переменной можно взять, например, $x_2 = 2x_1 - 8$. Обозначая свободную переменную x_1 через t, получим общее решение системы: $(t; 2t - 8)$. Частное решение системы получим, например, при $t = 0$: $(0; -8)$. *Ответ.* При $\lambda \neq 16$ система несовместна; при $\lambda = 16$ система совместна и неопределенна, общее решение $(t; 2t - 8)$, частное решение $(0; -8)$. ●

Исследовать системы линейных уравнений, зависящих от параметра λ. Для совместных систем найти общее и одно частное решение:

2.1.27. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8, \\ 2x_1 + x_2 = \lambda. \end{cases}$

2.1.28. $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 = 6, \\ \lambda x_1 + 8x_2 = 12. \end{cases}$

2.1.29. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ \lambda x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

2.1.30. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = 9. \end{cases}$

2.1.31. $\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

Дополнительные задачи

Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решение:

2.1.32. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$

2.1.33. $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 6x + 4y = 10. \end{cases}$

2.1.34. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 = 1. \end{cases}$

2.1.35. $\begin{cases} x - \sqrt{3}\,y = 1, \\ \sqrt{3}\,x - 3y = \sqrt{3}, \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x + y = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

2.1.36. $\begin{cases} 3x - y = -5, \\ 2x + 3y = 4, \\ -x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{3}, \\ x + 1{,}5y = 2. \end{cases}$

2.1.37. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

2.1.38. $\begin{cases} -x + y - 3z = 5, \\ 3x - y - z = 2, \\ 2x + y - 9z = 0. \end{cases}$

2.1.39. $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ 3x + 4y - 2z = 0, \\ 3x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$

2.1.40. $\begin{cases} 3x + y - 5z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \\ 2x + 3y - 4z = 0, \\ x + 5y - 3z = 0. \end{cases}$

2.1.41. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

2.1.42. $\begin{cases} 2\sqrt{5}\,x_1 - x_2 + \sqrt{5}\,x_3 = 1, \\ 10x_1 - \sqrt{5}\,x_2 + 5x_3 = \sqrt{5}, \\ -2x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_2 - x_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$

2.1.43. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

2.1.44. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

2.1.45. $$\begin{cases} 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 = 9, \\ 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3, \\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16, \\ 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -17, \\ 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 = 6. \end{cases}$$

2.1.46. $$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

2.1.47. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Системы 2.1.48–2.1.50 содержат по n уравнений.

2.1.48. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \ldots + 2nx_n = 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ nx_1 + 2nx_2 + 3nx_3 + \ldots + n^2x_n = n. \end{cases}$$

2.1.49. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + (-1)^{n-1}x_n = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + \ldots + 2\cdot(-1)^{n-1}x_n = 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n-1)x_1 - (n-1)x_2 + \ldots + (n-1)\cdot(-1)^{n-1}x_n = n-1, \\ nx_1 - nx_2 + nx_3 - nx_4 + \ldots + n\cdot(-1)^{n-1}x_n = 0. \end{cases}$$

2.1.50. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + x_{n-1} = 1, \\ x_1 + x_2 + \dots\dots\dots\dots + x_{n-2} + x_n = 2, \\ x_1 + x_2 + \dots\dots + x_{n-3} + x_{n-1} + x_n = 3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + x_n = n-1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + x_n = 0. \end{cases}$$

2.1.51. $$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ \ddots \qquad \vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n = 0, \\ -x_{n-1} + 2x_n = 1. \end{cases}$$

2.1.52. $$\begin{cases} x_1+x_2 & =0, \\ x_1+3x_2+2x_3 & =4, \\ x_2+3x_3+2x_4 & =6, \\ x_3+3x_4+2x_5 & =6, \\ \ddots & \vdots \\ x_{n-3}+3x_{n-2}+2x_{n-1} & =6, \\ x_{n-2}+3x_{n-1}+2x_n & =8, \\ x_{n-1}+3x_n & =7. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений, зависящих от параметра λ. Для совместных систем найти общее и одно частное решение:

2.1.53. $\begin{cases} 2x_1-x_2=\lambda, \\ \lambda x_1+x_2=2. \end{cases}$

2.1.54. $\begin{cases} \lambda x_1-4x_2=2, \\ x_1-\lambda x_2=-1. \end{cases}$

2.1.55. $\begin{cases} \lambda x_1-4x_2=2, \\ x_1-\lambda x_2=1. \end{cases}$

2.1.56. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=\lambda. \end{cases}$

2.1.57. $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=3. \end{cases}$

2.1.58. $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=4, \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=4, \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=4, \\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=4. \end{cases}$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Ответы к задачам 2.1.59– 2.1.68, 2.1.71– 2.1.73 проиллюстрируйте примерами.

2.1.59. К системе линейных уравнений с n неизвестными дописали произвольное уравнение с n неизвестными. Как при этом изменится множество решений системы?

2.1.60. Из несовместной системы линейных уравнений удалили какое-то одно уравнение. Будет ли полученная система совместной?

2.1.61. Множества решений двух систем линейных уравнений совпадают. Равны ли расширенные матрицы этих систем? Равны ли ранги этих матриц?

2.1.62. Могут ли быть эквивалентными две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных, но с разным числом уравнений?

2.1.63. Существует ли такая система линейных уравнений, что $(1;2;3)$ — ее решение, а $(-1;-2;-3)$ — нет? Если существует, что можно сказать о всех таких системах?

2.1.64. Что можно сказать о множестве решений системы линейных уравнений, если ранг $r(A)$ матрицы этой системы и ранг $r(A|B)$ расширенной матрицы равны нулю?

2.1.65. Что можно сказать о множестве решений системы линейных уравнений с матрицей A и расширенной матрицей $(A|B)$, если $r(A) > r(A|B)$?

2.1.66. Может ли частное решение системы линейных уравнений совпадать с ее общим решением?

2.1.67. Возможно ли, чтобы система линейных уравнений с матрицей A имела то же множество решений, что и система с матрицей A^T, если:

а) $A \neq 0$;

б) $A \neq A^T$;

в) $A \neq A^T$, система однородная;

г) $A \neq A^T$, система не однородная, совместная?

2.1.68. Может ли множество решений системы линейных уравнений состоять ровно из одного решения? из двух решений? из 17-ти решений?

2.1.69. Решить систему линейных уравнений с четырьмя параметрами a, b, c и d:

$$\begin{cases} -x + y + z + t = a, \\ x - y + z + t = b, \\ x + y - z + t = c, \\ x + y + z - t = d. \end{cases}$$

2.1.70. Доказать, что система n линейных уравнений с $n-1$ неизвестными совместна тогда и только тогда, когда равен нулю определитель расширенной матрицы.

2.1.71. Как выглядят решения совместной системы линейных уравнений, если все столбцы расширенной матрицы, кроме первого, пропорциональны?

2.1.72. Что можно сказать о матрице совместной системы линейных уравнений, если в любом ее решении неизвестное x_k принимает одно и то же значение?

2.1.73. Что можно сказать о матрице совместной системы линейных уравнений, если в любом ее решении неизвестное x_k принимает значение 0?

2.1.74. Решить систему из $2n$ линейных уравнений

$$\begin{cases} \qquad\quad x_2 + x_3 + \ldots + x_{2n} = a_1, \\ -x_1 \qquad + x_3 + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{2n-2} + x_{2n} = a_{2n-1}, \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{2n-1} = a_{2n}. \end{cases}$$

2.1.75. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1x_2^2x_3^3 = 2, \\ x_1^2x_2^3x_3^4 = 4, \\ x_1^2x_2x_3 = 2. \end{cases}$$

2.1.76. Система

$$\begin{cases} ay + bx = c, \\ cx + az = b, \\ bz + cy = a. \end{cases}$$

имеет единственное решение. Доказать, что $abc \neq 0$, и решить систему.

2.1.77. Система линейных уравнений записана в матричной форме: $AX = B$. Известны два частных решения этой системы X_1 и X_2. Как выглядит система, имеющая одним из решений:

а) $X_1 + X_2$;

б) λX_1 (λ — некоторое число)?

Исследовать систему уравнений и найти общее решение в зависимости от параметров a, b, c, d:

2.1.78*. $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$ **2.1.79*.** $\begin{cases} ax + y + z = a, \\ x + by + z = b, \\ x + y + cz = c. \end{cases}$

§ 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица коэффициентов системы размера $n \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Если D — определитель матрицы A — не равен нулю, то система совместна и определенна, ее решение задается формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Другую форму записи этого утверждения дают *формулы Крамера*:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где D_k — определитель, получающийся из D заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

2.2.1. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$

◑ а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдем определитель матрицы системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3.$$

Так как $D \neq 0$, то решение системы существует и единственно.

Найдем определитель D_1, подставляя в определитель D вместо первого столбца $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ столбец свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 7 = 6.$$

Определитель D_2 получается из D подстановкой столбца свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ вместо второго столбца $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-1) \cdot 2 = 9.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{3} = 2; \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ. $(2; 3)$.

б) Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ методом присоединенной матрицы.

Так как $\det A = 3 \neq 0$, то матрица A^{-1} существует, поэтому решение системы существует и единственно.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = -2, \quad A_{21} = -(-1) = 1; \quad A_{22} = 1.$$

Составим матрицу (A_{ij}) из алгебраических дополнений:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу $\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \\ -\frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $(2; 3)$.

Сравните решение примера 2.2.1 способами а) и б) с решением примера 2.1.1. ●

2.2.2. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 \qquad = -6. \end{cases}$

❍ а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдем определитель матрицы системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \quad \text{(см. пример 1.4.1).}$$

Так как $D \neq 0$, то решение системы существует и единственно. Найдем определители D_1, D_2 и D_3 подставляя столбец свободных членов $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ вместо первого, второго и третьего столбцов определителя Δ соответственно:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-48) - 2 \cdot 36 + 3 \cdot (72 + 30) =$$

$$- 288 - 72 + 306 = -360 + 306 = -54,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 36 - 6 \cdot (-42) + 3 \cdot (-24 - 63) = 36 + 252 + 3 \cdot (-87) =$$

$$= 288 - 261 = 27,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-30 - 72) - 2 \cdot (-24 - 63) + 6 \cdot (32 - 35) =$$

$$= -102 - 2 \cdot (-87) + 6 \cdot (-3) = -102 + 174 - 18 = 54.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-54}{27} = -2,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{27}{27} = 1,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{54}{27} = 2.$$

Ответ. $(-2; 1; 2)$.

б) Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Эта матрица найдена в примере 1.4.1:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-16 \cdot 6 + 8 \cdot 9 - 1 \cdot (-6))/9 \\ (14 \cdot 6 - 7 \cdot 9 + 2 \cdot (-6))/9 \\ (-1 \cdot 6 + 2 \cdot 9 - 1 \cdot (-6))/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-96 + 72 + 6)/9 \\ (84 - 63 - 12)/9 \\ (-6 + 18 + 6)/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{18}{9} \\ \frac{9}{9} \\ \frac{18}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ (как и при решении по формулам Крамера). ●

2.2.3. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24. \end{cases}$

❍ Найдем определитель матрицы системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) =$$

$$= -3 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Так как $D = 0$, то система не может быть решена ни по формулам Крамера ни с помощью обратной матрицы. При этом система является совместной (например, есть решение $(1;1;1)$) и неопределенной.

Ответ. по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы систему решить нельзя. ●

Найти решения линейной системы уравнений, используя обратную матрицу и формулы Крамера. Указать те значения параметров (a и b), при которых указанными методами систему решить невозможно:

2.2.4. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4, \\ 2x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$

2.2.5. $\begin{cases} \sqrt{3}\,x_1 + 2x_2 = 11, \\ 4x_1 - \sqrt{3}\,x_2 = 0. \end{cases}$

2.2.6. $\begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab. \end{cases}$

2.2.7. $\begin{cases} ax + by = f_1, \\ cx + dy = f_2. \end{cases}$

2.2.8. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 8, \\ 7x + 8y = 2. \end{cases}$

2.2.9. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$

2.2.10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$

2.2.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21. \end{cases}$

2.2.12. $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2. \end{cases}$

2.2.13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2, \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2, \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5. \end{cases}$

2.2.14. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + \ \ 7x_4 = 28, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + \ \ 8x_4 = 36, \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 42, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ 2x_4 = \ \ 2. \end{cases}$

2.2.15. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + \ \ x_3 \qquad\quad = 0, \\ \ \ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 \qquad\ \ + \ \ x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Дополнительные задачи

2.2.16. Найти неизвестные коэффициенты многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющего условиям:

$$f(-2) = -8, \qquad f(1) = 4, \qquad f(2) = -4.$$

2.2.17. Найти неизвестные коэффициенты функции $f(x) = a \cdot 3^x + bx^2 + c$, удовлетворяющей условиям:

$$f(0) = 2, \qquad f(1) = -1, \qquad f(2) = 4.$$

Решить системы уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

2.2.18. $\begin{cases} \ \ x_1 - x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

2.2.19. $\begin{cases} \qquad x_1 - \sqrt{5}\,x_2 = \quad 0, \\ 2\sqrt{5}\,x_1 - \quad 5x_2 = -10. \end{cases}$

2.2.20. $\begin{cases} \alpha x - \ \ y = 2, \\ 2x + \alpha y = 1. \end{cases}$

2.2.21. $\begin{cases} ax + 3by = 1, \\ bx + 3ay = 1. \end{cases}$

2.2.22. $\begin{cases} \ \ x + 2y + 3z = \ \ 8, \\ 4x + 5y + 6z = 19, \\ 7x + 8y \qquad\ = \ \ 1. \end{cases}$

2.2.23. $\begin{cases} \ \ x_1 + \ \ 2x_2 + 3x_3 = \ \ \ 4, \\ 2x_1 + \ \ 6x_2 + 4x_3 = -6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8. \end{cases}$

2.2.24. $\begin{cases} 3x + 2y + \ \ z = \ \ \ 1, \\ 6x + 5y + 4z = -2, \\ 9x + 8y + 7z = \ \ \ 3. \end{cases}$

2.2.25. $\begin{cases} 3x + 2y + \ \ z = -8, \\ 2x + 3y + \ \ z = -3, \\ 2x + \ \ y + 3z = -1. \end{cases}$

2.2.26. $\begin{cases} ax + \ \ by + \ \ z = 1, \\ \ \ x + aby + \ \ z = b, \\ \ \ x + \ \ by + az = 1. \end{cases}$

2.2.27. $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0, \\ \ \ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 \qquad\ = 0. \end{cases}$

2.2.28. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19. \end{cases}$

2.2.29. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -15, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = -6, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$

2.2.30. Найти неизвестные коэффициенты многочлена $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, удовлетворяющего условиям:

$$f(-1) = 3, \qquad f(1) = 1, \qquad f(2) = -15.$$

2.2.31. Найти неизвестные коэффициенты функции $f(x) = a\log_3 x + bx + c$, удовлетворяющей условиям:

$$f(1) = 5, \qquad f(3) = 8, \qquad f(9) = 19.$$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Ответы к задачам 2.2.32–2.2.35 проиллюстрируйте примерами.

2.2.32. Могут ли различные методы решения системы линейных уравнений (метод Крамера и метод обратной матрицы) дать различные ответы?

2.2.33. Возможно ли, чтобы система линейных уравнений имела решение с помощью метода Гаусса, но не имела решения по формулам Крамера?

2.2.34. Совместная система n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме: $AX = B$. Будут ли решениями системы оба набора из n чисел: $A^{-1}B$ и B^TA^{-1}?

2.2.35. В системе n линейных уравнений с n неизвестными поменяли местами два уравнения. Изменятся ли формы записи решения с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера? Изменится ли общее решение?

2.2.36. Доказать, что формулы Крамера являются другой формой записи решения $X = A^{-1}B$ системы линейных уравнений $AX = B$.

2.2.37. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1} \end{cases}$$

(все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различны).

2.2.38. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ — единственные решения систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n = c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n = c_n. \end{cases}$$

Доказать, что $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + \ldots + b_ny_n$. Записать это число в виде определителя.

§ 3. ОДНОРОДНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана однородная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

или в матричной форме $AX = 0$.

Однородная система всегда совместна, так как существует *тривиальное* решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Однородная система неопределенна тогда и только тогда, когда $r(A) < n$.

Положим $r = r(A)$. Пусть общее решение системы (3.1) записано в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \ldots, t_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(t_1, \ldots, t_{n-r}) \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix},$$

где $x_1, \ldots, x_r$ — главные переменные, $t_1, \ldots, t_{n-r}$ — значения свободных переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Выберем $n - r$ решений системы (3.1), полученных из общего решения слёдующим образом: одно из значений свободных переменных полагается равным 1, а остальные — равными 0:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,...,0) \\ \vdots \\ x_r(1,0,...,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0,1,...,0) \\ \vdots \\ x_r(0,1,...,0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; ..., X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1(0,0,...,1) \\ \vdots \\ x_r(0,0,...,1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти решения образуют *нормальную фундаментальную систему решений* однородной системы (3.1). Они обладают следующим свойством:

Любое решение X системы (3.1) может быть единственным образом представлено в виде:

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ — некоторые числа.

$\Rrightarrow$ Любой набор из $n - r$ решений системы (3.1), обладающих указанным свойством, называется *фундаментальной системой решений* системы (3.1).

Набор из $n - r$ произвольных решений системы (3.1) —

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \ldots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \ldots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ \ldots \\ x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$$

образует фундаментальную систему решений тогда и только тогда, когда матрица, составленная из их компонентов $\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_1^{(n-r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & \ldots & x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$ имеет ранг $n - r$.

Пусть дана некоторая неоднородная система линейных уравнений

$$AX = B, \tag{3.2}$$

а $AX = 0$ (система (3.1)) — соответствующая ей однородная система. Общее решение системы (3.2) может быть представлено в виде суммы общего решения системы (3.1) и какого-то одного (частного) решения системы (3.2).

2.3.1. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

◐ Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array}\right).$$

Так как столбец свободных членов при всех элементарных преобразованиях не изменяется, его можно не писать и ограничиться матрицей системы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Однородная система совместна всегда, т. е. ранг $r(A)$ матрицы A однородной системы всегда равен рангу $r(A|B)$ расширенной матрицы $(A|B)$, в данном примере $r(A) = r(A|B) = 2$. Количество переменных n также равно 2:

$$n = r(A) = r(A|B) = 2,$$

значит, система определенна, т. е. имеет единственное (очевидно, тривиальное — нулевое) решение.

Подробнее, запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 7x_2 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим $x_2 = 0$. Подставляя это значение в первое уравнение, получим $x_1 = 0$.

Ответ. общее решение $(0; 0)$. ●

2.3.2. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

❍ Запишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{II} - 2 \cdot \text{I} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{II} : 3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$r(A) = r(A|B) = 2 < 3 = n,$$

то система неопределенна. Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 3 - 2 = 1$. Для определения главных переменных выберем какой-нибудь не равный нулю минор второго порядка полученной матрицы A, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы — 1-й и 2-й столбцы матрицы A — соответствует переменным x_1 и x_2 — это будут *главные переменные*, а x_3 — *свободная переменная*. Заметим, что в качестве главных переменных в данном примере нельзя выбрать пару x_2 и x_3, так как соответствующий им минор равен нулю: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения, выражая x_2 через x_3, получим $x_2 = x_3$; подставляя это выражение в первое уравнение, получим $x_1 = 0$.

Обозначив свободную переменную через t, получим *общее решение системы*: $(0; t; t) = t \cdot (0; 1; 1)$. ***Фундаментальную систему решений*** образует, например, решение $\{(0; 1; 1)\}$.

Ответ. общее решение системы $(0; t; t)$; фундаментальная система решений $(0; 1; 1)$. ●

2.3.3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений: (см. задачу 2.1.3)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

◐ Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \underset{(\text{см. } 2.1.3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$r(A) = r(A|B) = 2 < 4 = n,$$

то система неопределенна. В качестве главных переменных можно выбрать x_1 и x_2, соответствующие столбцам ненулевого минора второго порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}$; в качестве свободных переменных — x_3 и x_4.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения, выражая x_2 через x_3 и x_4, получим $x_2 = -x_3 - \frac{19}{15}x_4$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим $x_1 = -\frac{7}{15}x_4$. Обозначая свободные переменные — x_3 через t_1, x_4 через $15t_2$ запишем *общее решение системы*: $(-7t_2; -t_1 - 19t_2; t_1; 15t_2) = t_1(0; -1; 1; 0) + t_2(-7; -19; 0; 15)$. ***Фундаментальную систему решений*** образует, например, пара решений $(0; -1; 1; 0)$ и $(-7; -19; 0; 15)$.

Ответ. Общее решение системы $(-7t_2; -t_1 - 19t_2; t_1; 15t_2)$; фундаментальная система решений $\{(0; -1; 1; 0),\ (-7; -19; 0; 15)\}$. ●

Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы линейных алгебраических уравнений:

2.3.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.6. $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 4x - 6y = 0. \end{cases}$

2.3.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.8. $\begin{cases} x_1 - \sqrt{3}\,x_2 = 0, \\ \sqrt{3}\,x_1 - 3x_2 = 0, \\ -\sqrt{2}\,x_1 + \sqrt{6}\,x_2 = 0, \\ 2x_1 - \sqrt{12}\,x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ -\sqrt{8}\,x_1 + \sqrt{2}\,x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.12. $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$

2.3.13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

2.3.17. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

2.3.18. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений в зависимости от параметра λ:

2.3.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 2\lambda x_3 = 0. \end{cases}$ **2.3.20.** $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda^2 x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

В задачах 2.3.21–2.3.25 вектором $\bar{p}$ будем называть упорядоченный конечный набор чисел $\bar{p} = (p_1; p_2; \ldots; p_n)$; в этом случае числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ будем называть компонентами вектора $\bar{p}$ (подробнее — см. Главу 3).

Даны:

1) неоднородная система уравнений;

2) набор из трех векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$;

3) несколько систем векторов — B_i.

Требуется:

***а)** Проверить, какие из трех векторов — $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ — являются решениями данной неоднородной системы уравнений.*

***б)** Выбрать те системы векторов B_i, которые образуют фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.*

***в)** Используя ответы к пунктам а) и б), записать общие решения данной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы уравнений.*

2.3.21. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

$\bar{a}_1 = (1; -2; 3)$, $\bar{a}_2 = (1; 0; 1)$, $\bar{a}_3 = (5; 2; -1)$;

$B_1 = \{(-4; -2; 2), (2; 1; -1)\}$, $B_2 = \{(2; 1; -1), (1; 1; 0)\}$.

◑ а) Подставляя в систему уравнений компоненты вектора $\bar{a}_1 = (1; -2; 3)$, получим два неверных равенства:

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 = 2, \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 4. \end{cases}$$

Значит, набор значений $(1; -2; 3)$ не является решением данной системы.

Теперь убедимся, что компоненты вектора $\bar{a}_2 = (1; 0; 1)$ дают решение системы:

$$\begin{cases} 1 + 0 + 1 = 2, \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 4. \end{cases}$$

Аналогично, компоненты вектора $\bar{a}_3 = (5; 2; -1)$ также представляют собой решение данной неоднородной системы уравнений (проверьте самостоятельно!).

б) Сначала выясним, из скольких решений состоит фундаментальная система решений однородной системы уравнений, соответствующей заданной неоднородной системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ранг матрицы A этой системы, для чего приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $r(A) = 1$, и $n - r(A) - 3 - 1 = 2$, откуда следует, что любая фундаментальная система состоит из двух решений.

Нетрудно увидеть, что решениями указанной однородной системы уравнений являются все четыре вектора из систем B_1 и B_2 (проверьте самостоятельно!).

Два решения указанной однородной системы будут образовывать ее фундаментальную систему решений тогда и только тогда, когда они линейно независимы, т.е. матрица, составленная из их компонент, имеет ранг 2.

Составим матрицу из компонент векторов системы B_1 и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} 2 \cdot \mathrm{II} + \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 1, значит система B_1 не является фундаментальной системой решений однородной системы уравнений.

Исследуем систему векторов B_2. Составим матрицу из компонентов векторов из B_2 и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} 2 \cdot \mathrm{II} - \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 2, значит векторы из B_2 линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений однородной системы уравнений.

в) Общее решение однородной системы может быть записано в виде линейной комбинации векторов $\bar{b}_1 = (2; 1; -1)$ и $\bar{b}_2 = (1; 1; 0)$, т.е. суммы вида

$$t_1 \cdot \bar{b}_1 + t_2 \cdot \bar{b}_2 = t_1 \cdot (2; 1; -1) + t_2 \cdot (1; 1; 0) =$$
$$= (2t_1; t_1; -t_1) + (t_2; t_2; 0) = (2t_1 + t_2; t_1 + t_2; -t_1),$$

где t_1 и t_2 — произвольные действительные числа.

Общее решение неоднородной системы уравнений может быть записано в виде суммы одного (частного) решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы уравнений. Так как и вектор $\bar{a}_2$ и вектор $\bar{a}_3$ являются решениями неоднородной системы, то ее общее решение мы можем записать двумя способами:

$$\bar{a}_2 + t_1\bar{b}_1 + t_2\bar{b}_2 = (1;0;1) + (2t_1 + t_2; t_1 + t_2; -t_1) = \\ = (1 + 2t_1 + t_2; t_1 + t_2; 1 - t_1)$$

или

$$\bar{a}_3 + t_1\bar{b}_1 + t_2\bar{b}_2 = (5;2;-1) + (2t_1 + t_2; t_1 + t_2; -t_1) = \\ = (5 + 2t_1 + t_2; 2 + t_1 + t_2; -1 - t_1).$$

Ответ. **а)** $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$; **б)** B_2; **в)** общее решение однородной системы $(2t_1+t_2; t_1+t_2; -t_1)$; общее решение неоднородной системы $(1+2t_1+t_2; t_1+t_2; 1-t_1)$ или $(5+2t_1+t_2; 2+t_1+t_2; -1-t_1)$. ●

2.3.22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ -2x_1 - 4x_2 = -8. \end{cases}$
$\bar{a}_1 = (0;2)$, $\bar{a}_2 = (-2;3)$, $\bar{a}_3 = (2;-1)$;
$B_1 = \{(2;1),(2;-1)\}$, $B_2 = \{(2;-1)\}$, $B_3 = \{(2;1)\}$.

2.3.23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 8, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases}$
$\bar{a}_1 = (-3;2;-1)$, $\bar{a}_2 = (0;0;0)$, $\bar{a}_3 = (1;2;1)$;
$B_1 = \{(0;0;0)\}$, $B_2 = \{(1;2;1)\}$, $B_3 = \{(13;2;7)\}$.

2.3.24. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$
$\bar{a}_1 = (1;1;1)$, $\bar{a}_2 = (0;0;1)$, $\bar{a}_3 = (0;1;0)$;
$B_1 = \{(1;1;2),(0;1;1),(2;-1;0)\}$, $B_2 = \{(1;0;1),(0;1;1)\}$,
$B_3 = \{(2;-1;1),(-1;2;1)\}$.

2.3.25. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2, \\ 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$
$\bar{a}_1 = (-1;-2;1;2)$, $\bar{a}_2 = (2;-2;5;2)$, $\bar{a}_3 = (-4;-2;-3;2)$;
$B_1 = \{(3;0;4;0),(1;-2;4;-3)\}$, $B_2 = \{(-1;-1;-1;3)\}$,
$B_3 = \{(3;0;4;0)\}$.

Дополнительные задачи

Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

2.3.26. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.27. $\begin{cases} x - \sqrt{3}\,y = 0, \\ \sqrt{3}\,x - 3y = 0. \end{cases}$

2.3.28. $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 4x - 3y = 0. \end{cases}$

2.3.29. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ -\sqrt{3}\,x_1 - \sqrt{12}\,x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.30. $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ 4x - 2y - 2z = 0. \end{cases}$

2.3.31. $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$

2.3.32. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.33. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.34. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.35. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.36. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.3.37. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

2.3.38. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

2.3.39. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений в зависимости от параметра:

2.3.40. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.41. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Ответы к задачам 2.3.42–2.3.56 проиллюстрируйте примерами.

2.3.42. Может ли количество решений, составляющих фундаментальную систему решений, быть больше числа неизвестных? меньше? равно?

2.3.43. Может ли частное решение однородной (неоднородной) системы линейных уравнений быть ее общим решением?

2.3.44. Может ли однородная система линейных уравнений иметь ровно одно решение? ровно два? ровно 17?

2.3.45. Фундаментальные системы решений двух однородных систем линейных уравнений совпадают. Равны ли матрицы однородных систем? Равны ли ранги этих матриц?

2.3.46. У двух неоднородных систем линейных уравнений есть общее частное решение и у соответствующих им однородных систем совпадают фундаментальные системы решений. Равны ли расширенные матрицы неоднородных систем? Совпадают ли их общие решения?

2.3.47. Следует ли, что система линейных уравнений является однородной, из того, что сумма любых двух решений системы также является ее решением?

2.3.48. Верно ли, что сумма (разность) двух любых решений системы линейных уравнений также является ее решением, если система:

а) однородна;

б) неоднородна?

2.3.49. Может ли у неоднородной системы линейных уравнений быть фундаментальная система решений?

2.3.50. Может ли у однородной системы линейных уравнений не быть фундаментальной системы решений?

2.3.51. Верно ли, что произведение решения системы линейных уравнений на любое число также является ее решением, если система:

а) однородна;

б) неоднородна?

2.3.52. Могут ли совпадать множества решений у двух различных систем линейных уравнений — однородной и неоднородной?

2.3.53. Система линейных уравнений (I) однородна, система (II) неоднородна. Общее решение системы (II) может быть представлено в виде суммы частного решения системы (II) и общего решения системы (I). Совпадают ли матрицы систем (I) и (II)? Совпадают ли ранги этих матриц?

2.3.54. Что можно сказать о множестве решений однородной системы линейных уравнений, если оно не изменяется при вычеркивании одного любого из уравнений системы?

2.3.55. Пусть даны две однородные системы линейных уравнений. Что можно сказать о множествах их решений, если при добавлении ко второй системе одного любого из уравнений первой системы множество решений второй системы не изменяется?

2.3.56. При каких условиях на числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ для любых решений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ неоднородной системы линейных уравнений сумма $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$ также будет решением этой системы?

2.3.57. При каких условиях в общем решении однородной системы

$$\begin{cases} \phantom{-x_1 + {}} x_2 + ax_3 + bx_4 = 0, \\ -x_1 \phantom{{}+ x_2} + cx_3 + dx_4 = 0, \\ ax_1 + cx_2 \phantom{{}+ x_3} - ex_4 = 0, \\ bx_1 + dx_2 + ex_3 \phantom{{}+ x_4} = 0 \end{cases}$$

в качестве свободных переменных можно взять x_3 и x_4?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Исследовать систему уравнений на совместность и определенность, не решая ее. Указать главные (базисные) и свободные переменные.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -9; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = -2; \\ -x_1 + x_2 + 9x_4 = -13; \\ -9x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 11x_4 = 3; \\ -15x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 9x_4 = 21. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13; \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3. \end{cases}$$

3. Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 17; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8; \end{cases}$$

4. Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Исследовать систему уравнений на совместность и определенность, не решая ее. Указать главные (базисные) и свободные переменные.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -3; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_4 = 8; \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -14; \\ -2x_1 - 2x_2 + 11x_3 + 18x_4 = -23. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3; \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$$

3. Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11; \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0; \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ -4x_1 + 14x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 0; \\ -x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Исследовать систему уравнений на совместность и определенность, не решая ее. Указать главные (базисные) и свободные переменные.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5; \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -11; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7; \\ 13x_1 - 7x_3 - 9x_4 = 35. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1; \\ -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6; \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8. \end{cases}$$

3. Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10; \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

4. Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0; \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \\ -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Исследовать систему уравнений на совместность и определенность, не решая ее. Указать главные (базисные) и свободные переменные.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -12; \\ -5x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 4x_4 = -19; \\ -5x_1 + 10x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 47. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2; \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4; \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

3. Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10; \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

4. Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

❏

Глава 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

⇛ *Вектором* называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overline{AB}$ (или одной буквой, $\bar{a}$, $\bar{b}$, ...). Длина отрезка AB называется *длиной*, или *модулем* вектора $\overline{AB}$ и обозначается $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\bar{0}$ или просто 0. По определению нулевой вектор не имеет направления и коллинеарен любому вектору. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается через $\bar{e}$.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется *ортом* вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}^0$. Два ненулевых вектора называются *противоположными*, если они имеют одинаковую длину и противоположные направления. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$; вектор $\overline{AB}$ противоположен вектору $\overline{BA}$ ($\overline{BA} = -\overline{AB}$).

⇛ Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Три (и более) вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

⇛ Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными* ($\bar{a} = \bar{b}$), если они сонаправлены и имеют равные длины.

Совместим параллельным переносом начала неколлинеарных векторов a и b. Начало и концы векторов образуют вершины треугольника. *Углом* между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол при вершине этого треугольника, соответствующий началу векторов. Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен нулю; если противоположно направлены — угол между ними равен 180°.

⇛ *Суммой* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, соединяющий начало вектора $\bar{a}$ с концом вектора $\bar{b}$, отложенного от конца вектора $\bar{a}$.

Обозначение: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

Для геометрического представления суммы векторов используют правила «треугольника» и «параллелограмма», проиллюстрированные на рис. 1 и 2 соответственно.

Под *разностью* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор $\bar{c}$ такой, что $\bar{b}+\bar{c} = \bar{a}$. Обозначение: $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$. Справедливо равенство $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

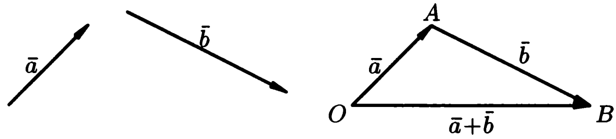


Рис. 1

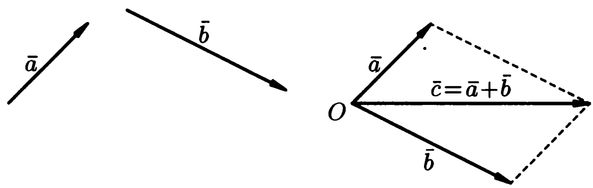


Рис. 2

$\Rightarrow$ ***Произведением вектора*** $\bar{a} \neq 0$ ***на число*** $\lambda \neq 0$ называется вектор, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$, его направление если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Обозначение: $\lambda \cdot \bar{a}$.

Отметим, что $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^0$, т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них есть произведение другого на некоторое число, т. е. $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$, λ — число (***признак коллинеарности векторов***).

Три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией других, например, $\bar{c} = \lambda_1 \cdot \bar{a} + \lambda_2 \cdot \bar{b}$ (λ_1, λ_2 — числа не равные нулю одновременно) (***признак компланарности векторов***).

3.1.1. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$, точка M — середина стороны BC. Выразить вектор $\overline{AM}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

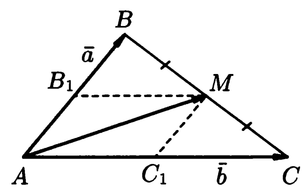


Рис. 3

◐ Через точку M проведем прямые, параллельные сторонам AB и AC. Получим параллелограмм AB_1MC_1 (рис. 3), в котором AM

является диагональю. Следовательно, $\overline{AM} = \overline{AB_1} + \overline{AC_1}$. Но $\overline{AB_1} = \frac{1}{2}\cdot\bar{a}$, $\overline{AC_1} = \frac{1}{2}\cdot\bar{b}$ (B_1M и C_1M — средние линии, поэтому $AB_1 = B_1B$, $AC_1 = C_1C$). Получаем $\overline{AM} = \frac{1}{2}\cdot\bar{a} + \frac{1}{2}\cdot\bar{b}$, т.е. $\overline{AM} = \frac{1}{2}\cdot(\bar{a}+\bar{b})$. ●

3.1.2. Какому условию должны удовлетворять ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы имело место соотношение $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$?

◕ Построим на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, отложенных от точки O, параллелограмм $OADB$ (рис. 4). Тогда $\overline{OD} = \bar{a}+\bar{b}$, $\overline{BA} = \bar{a}-\bar{b}$. Равенство $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$ означает, что длины диагоналей параллелограмма равны, т.е. $|\overline{AB}| = |\overline{OD}|$. Отсюда следует, что данный параллелограмм есть прямоугольник. Следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны. ●

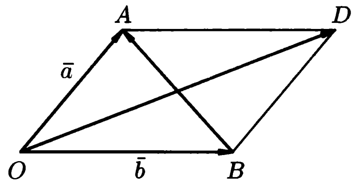


Рис. 4

3.1.3. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить векторы:

1) $\frac{1}{3}\bar{a} - 2\bar{b}$; 2) $4\bar{a}+\bar{b}$;

3) $2\cdot(\bar{a}-\bar{b})$;

4) $\frac{3}{4}(\bar{a}+2\bar{b}) - \frac{1}{4}(\bar{a}-2\bar{b}) - \bar{a} - \bar{b}$.

3.1.4. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Коллинеарны ли векторы $\bar{c} = \bar{a} - 2\sqrt{3}\cdot\bar{b}$ и $\bar{d} = -\sqrt{3}\cdot\bar{a} + 6\cdot\bar{b}$?

3.1.5. При каких значениях λ векторы $2\lambda\cdot\bar{a}$ и $(\lambda^3-1)\cdot\bar{a}$, $(\bar{a}\neq\bar{0})$ имеют одинаковое направление?

3.1.6. При каких значениях x векторы $x^3\cdot\bar{a}$ и $(x^2-x-2)\cdot\bar{a}$, $\bar{a}\neq\bar{0}$, противоположно направлены?

3.1.7. Дано: $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 19$, $|\bar{a}+\bar{b}| = 24$. Найти $|\bar{a}-\bar{b}|$.

3.1.8. Дано: $\bar{a}\perp\bar{b}$, $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 12$. Найти $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$.

3.1.9. В треугольнике ABC: M — точка пересечения медиан треугольника, $\overline{AM} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$. Разложить $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3.1.10. В параллелограмме $ABCD$: K и M — середины сторон BC и CD, $\overline{AK} = \bar{a}$, $\overline{AM} = \bar{b}$. Выразить векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AD}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3.1.11. Точка O является центром тяжести (точка пересечения медиан) треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} = \bar{0}$.

3.1.12. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали, пересекаясь, делятся пополам. Доказать, что этот четырехугольник — параллелограмм.

⇛ ***Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l*** называется число, равное длине вектора $\overline{A_1B_1}$ (рис. 5), взятой со знаком «плюс», если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси и со знаком «минус» в противном случае. Точки A_1, B_1 — это точки пересечения оси l с перпендикулярными ей плоскостями, проходящими через точки A, B.

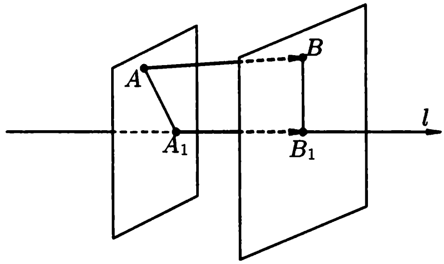


Рис. 5

Обозначение $\text{пр}_l\,\overline{AB}$.

Основные свойства проекции:

1. $\text{пр}_l(\bar{a}+\bar{b}) = \text{пр}_l\,\bar{a} + \text{пр}_l\,\bar{b}$;
2. $\text{пр}_l(\lambda\cdot\bar{a}) = \lambda\cdot\text{пр}_l\,\bar{a}$.

Если $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — орты координатных осей прямоугольной системы координат $Oxyz$, то любой вектор $\bar{a}$ единственным образом можно представить в виде их суммы (линейной комбинации) с коэффициентами a_x, a_y и a_z: $\bar{a} = a_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k}$. Коэффициенты a_x, a_y и a_z линейной комбинации называют ***координатами вектора*** $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$. Координаты a_x, a_y, a_z вектора $\bar{a}$ — это его проекции на соответствующие координатные оси. Вектор $\bar{a}$ с координатами a_x, a_y, a_z записывают в виде $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Длина вектора $\bar{a}$ определяется по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.1}$$

Вектор $\bar{a}$ образует с координатными осями Ox, Oy и Oz углы α, β и γ соответственно. Направление вектора $\bar{a}$ определяется с помощью ***направляющих косинусов***: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ для которых справедливы равенства

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}. \tag{1.2}$$

Направляющие косинусы связаны соотношением $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Пусть даны два вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Тогда:

1) векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е.

$$\bar{a} = \bar{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z; \end{cases}$$

2) векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{1.3}$$

При сложении векторов их одноименные координаты складываются, при вычитании — вычитаются, при умножении вектора на число — умножаются на это число:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z),$$

$$\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda \cdot a_x; \lambda \cdot a_y; \lambda \cdot a_z).$$

Вектор $\bar{r} = \overline{OM}$, соединяющий начало координат с произвольной точкой M $(x;\ y;\ z)$ пространства называется *радиус-вектором* точки M. Координаты точки — это координаты ее радиус-вектора $\bar{r} = (x; y; z)$ или $\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$. Если вектор $\bar{a} = \overline{AB}$ задан точками A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то его координаты a_x, a_y, a_z вычисляются по формулам $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \tag{1.4}$$

3.1.13. Даны две точки $A_1(3;-4;1)$ и $A_2(4;6;-3)$. Найти координаты вектора $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$.

◔ Координаты a_x, a_y, a_z вектора находятся по формуле (1.4). В данном случае имеем: $x_1 = 3$, $y_1 = -4$, $z_1 = 1$ и $x_2 = 4$, $y_2 = 6$, $z_2 = -3$, т. е. $\bar{a} = \overline{A_1A_2} = (1; 10; -4)$. ●

3.1.14. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину D.

◔ Обозначим координаты вершины D через x, y, z, т. е. $D(x;y;z)$. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то имеем: $\overline{BC} = \overline{AD}$. Находим координаты векторов $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$: $\overline{BC} = (6-3; 4-2; 4-1)$, т. е. $\overline{BC} = (3;2;3)$; $\overline{AD} = (x-1; y+2; z-3)$. Из равенства векторов $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ следует, что $x-1 = 3$, $y+2 = 2$, $z-3 = 3$. Отсюда находим: $x = 4$, $y = 0$, $z = 6$. Итак, $D(4;0;6)$. ●

3.1.15. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\bar{b} = 5 \cdot \bar{i} - 4 \cdot \bar{j} + 2\sqrt{2} \cdot \bar{k}$, и его модуль равен 5.

◔ Можно записать, что $\bar{a} = 5 \cdot \bar{a}^0$. Так как вектор $\bar{a}$ направлен в противоположную сторону к вектору $\bar{b}$, то $\bar{a}^0 = -\bar{b}^0$. Найдем орт $\bar{b}^0$. Из равенства $\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \bar{b}^0$ находим $\bar{b}^0 = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$. Но $|\bar{b}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 7$. Значит, $\bar{b}^0 = \frac{5}{7}\bar{i} - \frac{4}{7}\bar{j} + \frac{2\sqrt{2}}{7} \cdot \bar{k}$.

Следовательно, $\bar{a}^0 = -\frac{5}{7} \cdot \bar{i} + \frac{4}{7} \cdot \bar{j} - \frac{2\sqrt{2}}{7} \cdot \bar{k}$ и $\bar{a} = 5 \cdot \bar{a}^0 = 5 \cdot \left(-\frac{5}{7}\bar{i} + \frac{4}{7}\bar{j} - \frac{2\sqrt{2}}{7}\bar{k}\right)$, т. е. $\bar{a} = -\frac{25}{7}\bar{i} + \frac{20}{7}\bar{j} - \frac{10\sqrt{2}}{7}\bar{k}$. ●

3.1.16. Вектор $\bar{a}$ составляет с осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$ и $\beta = 120°$. Найти его координаты, если $|\bar{a}| = 2$.

◐ Пусть x, y, z — координаты вектора $\bar{a}$, т.е. $\bar{a} = (x; y; z)$. Координаты вектора $\bar{a}$ найдем из соотношений $\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}$. Предварительно найдем $\cos\gamma$. Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, то $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2 60° - \cos^2 120°$, т.е. $\cos^2\gamma = \frac{1}{2}$. Отсюда находим, что $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Условию задачи удовлетворяют два вектора $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$: $\bar{a}_1$ с направляющими косинусами $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = -\frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\bar{a}_2$ с направляющими косинусами $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = -\frac{1}{2}$, $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Имеем: $\frac{1}{2} = \frac{x_1}{2}$, $-\frac{1}{2} = \frac{y_1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{z_1}{2}$ и $\frac{1}{2} = \frac{x_2}{2}$, $-\frac{1}{2} = \frac{y_2}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{z_2}{2}$. Отсюда находим: $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $z_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = 1$, $y_2 = -1$, $z_2 = -\sqrt{2}$, т.е. $\bar{a}_1 = (1; -1; \sqrt{2})$ и $\bar{a}_2 = (1; -1; -\sqrt{2})$. ●

3.1.17. При каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \alpha\bar{k}$ и $\bar{b} = \beta\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарны?

◐ Так как $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $-\frac{2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$ (см. условие (1.3)). Отсюда находим, что $\alpha = -1$, $\beta = 4$. ●

3.1.18. Разложить вектор $\bar{c} = (9; 4)$ по векторам $\bar{a} = (1; 2)$ и $\bar{b} = (2; -3)$.

◐ Требуется представить вектор $\bar{c}$ в виде $\bar{c} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b}$, где λ_1 и λ_2 — числа. Найдем их, используя определение равенства векторов. Имеем: $\bar{c} = 9\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ и равенство $9\bar{i} + 4\bar{j} = \lambda_1(\bar{i} + 2\bar{j}) + \lambda_2(2\bar{i} - 3\bar{j})$, т.е. $9\bar{i} + 4\bar{j} = (\lambda_1 + 2\lambda_2)\bar{i} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)\bar{j}$. Отсюда следует

$$\begin{cases} 9 = \lambda_1 + 2\lambda_2, \\ 4 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2, \end{cases}$$

т.е. $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$. Следовательно, $\bar{c} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$. ●

3.1.19. Дана сила $\bar{F} = (4; 4; -4\sqrt{2})$. Найти величину и направление силы $\bar{F}$.

◐ Величину силы $\bar{F}$ находим, используя формулу модуля вектора (1.1). Имеем

$$|\bar{F}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 8.$$

Направляющие косинусы вектора $\bar{F}$ определяем по формулам (1.2): $\cos\alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак, сила $F = 8$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$ и $\gamma = 135°$. ●

3.1.20. Доказать, что в любом треугольнике длины его сторон пропорциональны синусам противолежащих углов (теорема синусов).

○ Рассмотрим треугольник ABC. Пусть $\overline{BA} = \bar{c}$, $\overline{BC} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$. В плоскости треугольника ABC возьмем вспомогательную ось l, перпендикулярную, например, вектору $\bar{b}$ и спроектируем на эту ось векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ (рис. 6). Так как $\bar{b} = \bar{a} - \bar{c}$, то $\text{пр}_l\,\bar{b} = \text{пр}_l(\bar{a} - \bar{c})$, т. е. $\text{пр}_l(\bar{a} - \bar{c}) = 0$, ($\text{пр}_l\,\bar{b} = 0$, т.к. $\bar{b} \perp l$). Поэтому $\text{пр}_l\,\bar{a} - \text{пр}_l\,\bar{c} = 0$, т. е. $\text{пр}_l\,\bar{a} = \text{пр}_l\,\bar{c}$.

Но $\text{пр}_l\,\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(90° - C) = |\bar{a}| \cdot \sin C$, а $\text{пр}_l\,\bar{c} = |\bar{c}| \times \times \cos(90° - A) = |\bar{c}| \cdot \sin A$. Поэтому $|\bar{a}| \cdot \sin C = |\bar{c}| \cdot \sin A$ или

$$\frac{|\bar{a}|}{\sin A} = \frac{|\bar{c}|}{\sin C}.$$

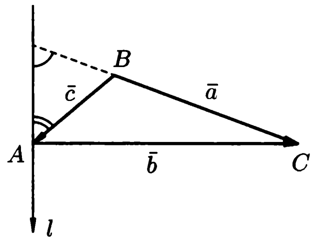


Рис. 6

Выбрав ось перпендикулярную, например, вектору $\bar{c}$, аналогично получим:

$$\frac{|\bar{a}|}{\sin A} = \frac{|\bar{b}|}{\sin B}.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\frac{|\bar{a}|}{\sin A} = \frac{|\bar{b}|}{\sin B} = \frac{|\bar{c}|}{\sin C}.$$ ●

3.1.21. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 3$ и углы между вектором и координатными осями равны: $\alpha = \beta = \gamma$.

3.1.22. Луч образует с двумя осями координат углы в $60°$. Под каким углом наклонен он к третьей оси?

3.1.23. Даны векторы $\bar{a} = (2; 3)$, $\bar{b}(1; -3)$, $\bar{c}(-1; 3)$. При каком значении коэффициента α векторы $\bar{p} = \bar{a} + \alpha\bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} + 2\bar{c}$ коллинеарны?

3.1.24. Даны точки $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(2; 2; -7)$, $D(5; -4; 2)$. Проверить, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее и во сколько раз; направлены они в одну сторону или в разные?

3.1.25. Представить вектор $\bar{d} = (4; 12; -3)$ как линейную комбинацию векторов $\bar{a} = (2; 3; 1)$, $\bar{b} = (5; 7; 0)$ и $\bar{c} = (3; -2; 4)$.

3.1.26. На оси Oy найти точку M, равноудаленную от точек $A(1; -4; 7)$ и $B(5; 6; -5)$.

3.1.27. На оси Ox найти точку M, расстояние которой от точки $A(3; -3)$ равно 5.

3.1.28. Даны вершины треугольника $A(3; -1; 5)$, $B(4; 2; -5)$, $C(-4; 0; 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

Дополнительные задачи

3.1.29. Дано разложение вектора $\bar{c}$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$: $\bar{c} = 16\bar{i} - 15\bar{j} + 12\bar{k}$. Найти разложение по этому же базису вектора $\bar{d}$, параллельного вектору $\bar{c}$ и противоположного с ним направления, при условии, что $|\bar{d}| = 75$.

3.1.30. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны и $\overline{AB} = \frac{\alpha}{2}\bar{a}$, $\overline{BC} = 4(\beta\bar{a} - \bar{b})$, $\overline{CD} = -4\beta\bar{b}$, $\overline{DA} = \bar{a} + \alpha\bar{b}$. Найти α и β и доказать коллинеарность векторов $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$.

3.1.31. Даны четыре точки A, B, C, D. Точки M и N — середины отрезков AC и BD. Доказать, что $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB})$.

3.1.32. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, $\overline{AB} = \bar{p}$, $\overline{BC} = \bar{q}$. Выразить через $\bar{p}$ и $\bar{q}$ векторы $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$.

3.1.33. Доказать, что средняя линия треугольника параллельна его основанию и длина ее равна половине длины основания.

3.1.34. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = 60°$, при этом $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 8$. Найти $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} - \bar{b}|$.

3.1.35. В равнобедренной трапеции $OACB$ величина угла $BOA = 60°$, $|\overline{OB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CA}| = 2$, точки M и N — середины сторон BC и AC. Выразить векторы $\overline{AC}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{MN}$ через $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — единичные векторы направлений $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

3.1.36. Дано: $\overline{AB} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\overline{BC} = -4\bar{a} - \bar{b}$, $\overline{CD} = -5\bar{a} - 3\bar{b}$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция.

3.1.37. Найти сумму векторов, соединяющих центр правильного треугольника с его вершинами.

3.1.38. На плоскости Oxy построить векторы $\overline{OA} = \bar{a} = 2\bar{i}$, $\overline{OB} = \bar{b} = 3\bar{i} + 3\bar{j}$, $\overline{OC} = \bar{c} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3.1.39. Дан вектор $\bar{c} = 4\bar{i} + 7\bar{j} - 4\bar{k}$. Найти вектор $\bar{d}$, параллельный вектору $\bar{c}$ и противоположного с ним направления, если $|\bar{d}| = 27$.

3.1.40. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$, образующий с ортом $\bar{j}$ острый угол и имеющий длину $|\bar{x}| = 15$.

3.1.41. Заданы векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Найти:

1) координаты орта $\bar{a}^0$;

2) координаты вектора $\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b} + \bar{c}$;

3) разложение вектора $\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$;

4) $\text{пр}_{\bar{j}}(\bar{a} - \bar{b})$.

3.1.42. Зная радиус-векторы $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор его четвертой вершины.

3.1.43. Даны радиус-векторы вершин треугольника ABC: $\bar{r}_A = \bar{i}+2\bar{j}+$ $+3\bar{k}$, $\bar{r}_B = 3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{r}_C = \bar{i}+4\bar{j}+\bar{k}$. Показать, что треугольник ABC равносторонний.

3.1.44. Радиус-вектор точки M составляет с осью Oy угол 60°, а с осью Oz угол 45°; его длина $|\bar{r}| = 8$. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна.

3.1.45. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ попарно перпендикулярны, а длины их соответственно равны 2, 3 и 6. Найти длину суммы S этих векторов и направляющие косинусы вектора $\bar{S}$.

3.1.46. Три силы $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ приложены к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Найти величину их равнодействующей $\bar{F}$, если известны величины сил: $|\bar{F}_1| = 2$, $|\bar{F}_2| = 10$, $|\bar{F}_3| = 11$.

3.1.47. Найти равнодействующую силу $\bar{R}$ сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, а также углы α и β, составляемые силой $\bar{R}$ с силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, если $|\bar{F}_1| = 15$, $|\bar{F}_2| = 10$; угол между силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ равен 45°.

3.1.48. Найти направление и скорость ветра, являющегося результатом взаимного действия морского бриза, дующего со скоростью 14 м/с на берег и ветра, дующего с берега на море со скоростью 9 м/с и под углом в 60° к береговой линии.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

3.1.49. К двум тросам подвешен груз массой 30 т так, как это показано на рис. 7. Определить силы, возникающие в тросах, если $\angle ACB = 120°$.

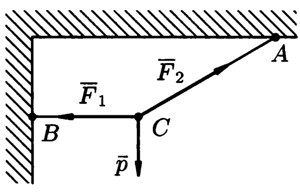


Рис. 7

3.1.50. Точка M, лежащая на отрезке AB, делит его в отношении $m : n$, т.е. $AM : MB = m : n$; O — произвольная точка пространства. Выразить вектор $\overline{OM}$ через векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

3.1.51. M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overline{OM} = \frac{1}{3} \cdot (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

3.1.52. Доказать, что для любых заданных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторы $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{c}-\bar{a}$ компланарны.

3.1.53. Даны три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. При каком значении λ векторы $\lambda\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}+\lambda\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}+\bar{b}+\lambda\bar{c}$ компланарны?

3.1.54. Разложить вектор $\bar{S}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ по трем некомпланарным векторам $\bar{m}=\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}$, $\bar{n}=\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{p}=2\bar{b}+3\bar{c}$.

3.1.55. В треугольнике ABC прямая AM является биссектрисой угла BAC, причем точка M лежит на стороне BC. Найти $\overline{AM}$, если $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AC}=\bar{c}$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=1$.

3.1.56. Найти вектор $\bar{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}=7\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k}$ и $\bar{b}=-2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, если $|\bar{x}|=5\sqrt{6}$.

Указание. $\bar{x}=\lambda\cdot(\bar{b}^0+\bar{a}^0)$.

3.1.57. Какому условию удовлетворяют векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1) $|\bar{a}+\bar{b}|>|\bar{a}-\bar{b}|$;

2) $|\bar{a}+\bar{b}|<|\bar{a}-\bar{b}|$;

3) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}|+|\bar{b}|$;

4) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}|-|\bar{b}|$?

3.1.58. Изменится ли сумма компланарных векторов, если все слагаемые векторы будут повернуты в одном и том же направлении на один и тот же угол?

3.1.59. Дать геометрическое построение разложения вектора $\bar{a}$ на два компланарных с ним слагаемых, если известны: а) длина и направление одного слагаемого; б) направление обоих слагаемых; в) направление одного и длина другого слагаемого. (Исследовать, когда разложение возможно, сколько имеет решений, если ни одно из слагаемых не параллельно $\bar{a}$.)

3.1.60. В разложении вектора $\bar{c}=\lambda_1\cdot\bar{a}+\lambda_2\cdot\bar{b}$ по двум неколлинеарным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ могут ли оба коэффициента λ_1 и λ_2 или один из них равняться нулю?

3.1.61. Могут ли векторы $\bar{a}=(-2;1;-2)$, $\bar{b}=(-2;-4;4)$, $\bar{c}=(4;3;-2)$ быть сторонами треугольника?

3.1.62. Коллинеарны ли векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если коллинеарны векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$?

3.1.63. Может ли вектор составлять с координатными осями углы 30°, 120°, 60°?

3.1.64. Следует ли из равенства $\overline{AB}=\overline{DC}$ равенство $\overline{AD}=\overline{BC}$?

3.1.65. Может ли угол между векторами равняться: 0°; 45°; 180°; 270°?

3.1.66. Как следует направить векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы длина вектора $\bar{a}+\bar{b}$ была наибольшей? наименьшей?

3.1.67. Каково взаимное расположение точек A, B, C, если:

1) векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны;

2) $\overline{AC}=\overline{CB}$;

3) $\overline{AC}=-\frac{1}{3}\overline{CA}$?

3.1.68. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ пространства, чтобы из них можно было образовать треугольник?

§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

⇛ *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними (см. рис. 8). Обозначение: $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Таким образом,

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi. \tag{2.1}$$

По определению $\bar{a}\cdot\bar{0} = \bar{0}\cdot\bar{a} = 0$.

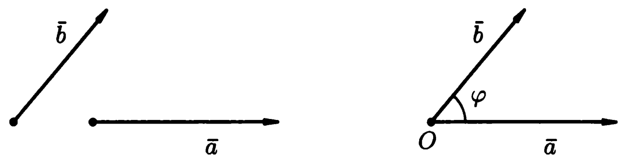


Рис. 8

Формулу (2.1) можно записать в виде

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot \text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} \quad \text{или} \quad \bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{b}|\cdot \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}. \tag{2.2}$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ (перестановочность);
2. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ (распределительность);
3. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b} = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю);
4. $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ (скалярный квадрат вектора $\bar{a}$ равен квадрату его модуля);
5. $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \iff \bar{a}\perp\bar{b}$ (или $\bar{a}=0$, или $\bar{b}=0$). В частности: $\bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{i} = 0$.

⇛ Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными*.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{2.3}$$

3.2.1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\bar{a}| = 10$ и $|\bar{b}| = 2$, вычислить $(\bar{a}+2\bar{b})\cdot(3\bar{a}-\bar{b})$.

◔ Согласно свойствам скалярного произведения

$$(\bar{a}+2\bar{b})\cdot(3\bar{a}-\bar{b}) = 3\bar{a}^2 + 5\bar{a}\bar{b} - 2\bar{b}^2 =$$

$$= 3|\bar{a}|^2 + 5|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) - 2|\bar{b}|^2 =$$

$$= 3\cdot 100 + 5\cdot 10\cdot 2\cos\frac{2}{3}\pi - 2\cdot 4 = 300 - 50 - 8 = 242. \quad ●$$

3.2.2. Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$. Найти модуль вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$.

3.2.3. Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 120^\circ$. Найти модуль вектора $\bar{c} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$.

3.2.4. Выразить длины медиан произвольного треугольника через длины его сторон.

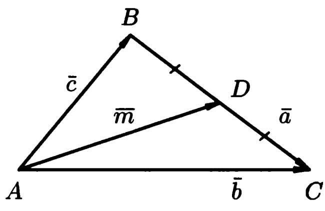


Рис. 9

○ Рассмотрим треугольник ABC. Пусть AD — одна из медиан треугольника (рис. 9). Введем в рассмотрение векторы $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{AC} = \bar{b}$ и $\overline{AD} = \bar{m}$. Тогда $\bar{m} = \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{c})$. Возведем обе части равенства в квадрат: $\bar{m}^2 = \frac{1}{4}(\bar{b}^2 + 2\bar{b}\cdot\bar{c} + \bar{c}^2)$, т. е. $|\bar{m}|^2 = \frac{1}{4}(|\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 + 2\bar{b}\cdot\bar{c})$. А так как $\bar{a} = \overline{BC} = \bar{b} - \bar{c}$, то $|\bar{a}|^2 = |\bar{b}|^2 - 2\bar{b}\cdot\bar{c} + |\bar{c}|^2$. Значит $2\bar{b}\bar{c} = |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 - |\bar{a}|^2$. В итоге получаем $|\bar{m}|^2 = \frac{1}{4}(|\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 - |\bar{a}|^2) = \frac{1}{4}(2|\bar{b}|^2 + 2|\bar{c}|^2 - |\bar{a}|^2)$ и далее $|\bar{m}| = \frac{1}{2}\sqrt{2|\bar{b}|^2 + 2|\bar{c}|^2 - |\bar{a}|^2}$. ●

3.2.5. Проверить, могут ли векторы $\bar{a} = 7\bar{i} + 6\bar{j} - 6\bar{k}$, $\bar{b} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 9\bar{k}$ быть ребрами куба. Найти третье ребро куба.

○ Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно принять за ребра куба, если они ортогональны и имеют равные длины. Проверим это: $\bar{a}\cdot\bar{b} = 7\cdot 6 + 6\cdot 2 - 6\cdot 9 = 42 + 12 - 54 = 0$, значит $\bar{a} \perp \bar{b}$; $|\bar{a}| = \sqrt{49 + 36 + 36} = 11$, $|\bar{b}| = \sqrt{36 + 4 + 81} = 11$, значит $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.

Найдем третье ребро $\bar{c} = (x; y; z)$ куба. Так как $\bar{a} \perp \bar{c}$, то $\bar{a}\cdot\bar{c} = 0$, т. е. $7x + 6y - 6z = 0$; так как $\bar{b} \perp \bar{c}$, то $\bar{b}\cdot\bar{c} = 0$, т. е. $6x + 2y + 9z = 0$; из равенств $|\bar{c}| = |\bar{a}| = |\bar{b}| = 11$ вытекает, что $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 11$. Для нахождения координат вектора $\bar{c}$ решим систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 6y - 6z = 0, \\ 6x + 2y + 9z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 121. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений выражаем x и y через z $\left(x = -3z, \ y = \frac{9}{2}z\right)$ и подставляем их значения в третье уравнение системы: $9z^2 + \frac{81}{4}z^2 + z^2 = 121$. Отсюда находим, что $z_1 = -2$, $z_2 = 2$. Тогда $x_1 = 6$, $x_2 = -6$ и $y_1 = -9$, $y_2 = 9$. Таким образом, $\bar{c} = \pm(6\bar{i} - 9\bar{j} - 2\bar{k})$. ●

3.2.6. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b} = -\bar{j} + 2\bar{k}$.

3.2.7. Найти вектор $\bar{x}$, зная, что $\bar{x} \perp \bar{a}$, $\bar{a}=(1;0;1)$, $\bar{x} \perp \bar{b}$, $\bar{b}=(0;2;-1)$, проекция вектора $\bar{x}$ на вектор $\bar{c} = (1;2;2)$ равна 1.

3.2.8. Даны вершины треугольника $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$ и $C(1;0;2)$. Найти:

а) внутренний угол при вершине C;

б) $\text{пр}_{\overline{CA}}\,\overline{CB}$.

◐ а) Угол φ при вершине C есть угол между векторами $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$. Определим координаты этих векторов:

$$\overline{CB} = (4-1; 1-0; -2-2) = (3;1;-4),$$
$$\overline{CA} = (2-1; 3-0; -1-2) = (1;3;-3).$$

Найдем их модули:

$$|\overline{CB}| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}, \quad |\overline{CA}| = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}.$$

Согласно формуле (2.1)

$$\cos\varphi = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CB}|\cdot|\overline{CA}|} = \frac{3\cdot 1 + 1\cdot 3 + (-4)\cdot(-3)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{19}} = \frac{18}{\sqrt{494}},$$
$$\varphi = \arccos\frac{18}{\sqrt{494}}.$$

б) Согласно формуле (2.2)

$$\text{пр}_{\overline{CA}}\,\overline{CB} = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CA}|} = \frac{18}{\sqrt{19}}.$$ ●

3.2.9. Даны векторы $\bar{a} = (3;-6;-1)$, $\bar{b} = (1;4;-5)$, $\bar{c} = (3;-4;12)$. Найти $\text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b})$.

3.2.10. Даны некомпланарные векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, причем $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $|\bar{c}| = 4$, $\bar{a} \perp \bar{b}$, $(\widehat{\bar{c},\bar{a}}) = (\widehat{\bar{c},\bar{b}}) = 60°$. Найти

а) $(\bar{a} - 2\bar{b})\cdot(\bar{c} - \bar{a})$;

б) $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})^2$.

3.2.11. Даны векторы $\bar{a} = (1;-3;4)$, $\bar{b} = (3;-4;2)$, $\bar{c} = (-1;1;4)$. Найти $\text{пр}_{\bar{b}+\bar{c}}\,\bar{a}$.

3.2.12. В треугольнике ABC: $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$. Выразить вектор $\bar{h}$, направленный по высоте AH, через векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

◐ Имеем (рис. 10): $\bar{h} = \bar{b} + \overline{BH}$. Но $\overline{BH} \parallel \overline{BC}$, где $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$. Поэтому $\overline{BH} = \lambda(\bar{c}-\bar{b})$ и $\bar{h} = \bar{b} + \lambda(\bar{c}-\bar{b})$. Множитель λ найдем из условия $\overline{AH} \perp \overline{BC}$. Значит $\overline{AH}\cdot\overline{BC} = 0$,

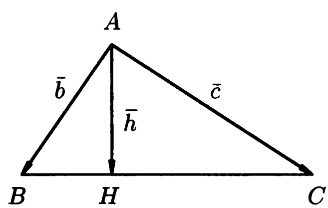


Рис. 10

т. е. $(\bar{b}+\lambda(\bar{c}-\bar{b}))\cdot(\bar{c}-\bar{b})=0$. Получаем $\bar{b}\cdot(\bar{c}-\bar{b})+\lambda\cdot(\bar{c}-\bar{b})^2=0$, откуда находим $\lambda=-\dfrac{\bar{b}\cdot(\bar{c}-\bar{b})}{|\bar{c}-\bar{b}|^2}$. Найденное значение λ подставляем в выражение для вектора $\bar{h}$:

$$\bar{h}=\bar{b}+\frac{\bar{b}\cdot(\bar{b}-\bar{c})}{|\bar{c}-\bar{b}|^2}\cdot(\bar{c}-\bar{b}).$$ ●

3.2.13. Единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ удовлетворяют условию $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\bar{0}$. Найти $\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2+\bar{e}_2\cdot\bar{e}_3+\bar{e}_3\cdot\bar{e}_1$.

3.2.14. Дано: $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=5$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=(\widehat{\bar{b},\bar{c}})=\frac{\pi}{3}$, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — компланарны. Найти модуль вектора $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$.

3.2.15. Найти вектор $\bar{x}$, зная, что он перпендикулярен к оси Oz и удовлетворяет условиям $\bar{x}\cdot\bar{a}=9$, $\bar{x}\cdot\bar{b}=-4$, где $\bar{a}=(3;-1;5)$, $\bar{b}=(1;2;-3)$.

Дополнительные задачи

3.2.16. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5;3;4)$, $B(-1;-7;5)$, $C(6;-5;-3)$ и $D(2;5;-4)$ есть квадрат.

3.2.17. Доказать, что вектор $\bar{d}=\bar{c}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{a})-\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c})$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$.

3.2.18. Найти вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$ и удовлетворяющий условию $\bar{b}\cdot\bar{a}=28$.

3.2.19. Дано: $\bar{a}=4\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=(2;1;2)$. Найти:

а) $\bar{a}\cdot\bar{b}$;

б) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$;

в) $\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}$;

г) $\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}$.

3.2.20. Какую работу производит сила $\bar{F}=(2;-1;-4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(1;-2;3)$ в точку $B(5;-6;1)$.

3.2.21. Найти работу равнодействующей сил $\bar{F}_1=\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{F}_2=2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ при перемещении ее точки приложения из начала координат в точку $M(2;-1;-1)$.

3.2.22. При каком значении λ векторы $\bar{b}=\lambda\bar{i}-5\bar{j}+3\bar{k}$ и $\bar{c}=\bar{i}+2\bar{j}-\lambda\bar{k}$ взаимно перпендикулярны?

3.2.23. В треугольнике ABC вершины имеют координаты $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$. Найти:

а) длины сторон;

б) внутренние углы;

в) острый угол между медианой BD и стороной AC.

3.2.24. Найти углы между осями координат и радиус-вектором точки $M(-2;3;1)$.

3.2.25. Доказать, что длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны, если векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ перпендикулярны.

3.2.26. Найти проекцию вектора $\bar{a}=(\sqrt{2};-3;-5)$ на ось, составляющую с координатными осями Ox и Oz углы $\alpha=45°$ и $\gamma=60°$, а с осью Oy — острый угол β.

3.2.27. Даны точки $A(3;4;-2)$ и $B(2;5;-2)$. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с осями Ox и Oy углы $\alpha=60°$ и $\beta=120°$, а с осью Oz — тупой угол γ.

3.2.28. Векторы $\overline{AB}=2\bar{a}-6\bar{b}$, $\overline{BC}=\bar{a}+7\bar{b}$, $\overline{CA}=-3\bar{a}-\bar{b}$ образуют треугольник ABC; векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — взаимно перпендикулярные орты. Найти углы треугольника ABC.

3.2.29. Зная, что $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$, $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=1$, $|\bar{c}|=4$, вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}$.

3.2.30. Найти угол между биссектрисами углов Oxy и Oyz.

3.2.31. Какой угол образуют единичные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известно, что векторы $\bar{m}=\bar{a}+2\bar{b}$ и $\bar{n}=5\bar{a}-4\bar{b}$ взаимно перпендикулярны.

3.2.32. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ имеют равные длины и попарно образуют равные углы. Найти координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{a}=(1;1;0)$, $\bar{b}=(0;1;-1)$.

3.2.33. Доказать, что точки $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$ и $C(2;3;0)$ лежат на одной прямой, причем точка B расположена между точками A и C.

3.2.34. Даны радиус-векторы трех последовательных вершин параллелограмма $ABCD$: $\bar{r}_A=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{r}_B=\bar{i}+3\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{r}_C=7\bar{i}+9\bar{j}+11\bar{k}$. Определить радиус-вектор четвертой вершины D.

3.2.35. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагонали граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

3.2.36. Доказать, что для любых четырех точек A, B, C и D пространства имеет место равенство $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=0$.

3.2.37. Определить геометрическое место концов переменного вектора $\bar{x}$, если его начало находится в точке А и вектор $\bar{x}$ удовлетворяет условию $\bar{x}\cdot\bar{a}=\alpha$, где $\bar{a}$ — данный вектор и α — данное число.

3.2.38. Найти угол между биссектрисами двух плоских углов правильного тетраэдра, проведенными из одной его вершины.

3.2.39. В треугольной пирамиде $ABCS$: $AB\perp CS$, $AC\perp BS$. Доказать, что ребра AS и BC также перпендикулярны.

3.2.40. Используя единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, доказать, что для всякого треугольника ABC справедливо неравенство

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

3.2.41. Следует ли из равенства $\bar{a}\cdot\bar{e} = \bar{b}\cdot\bar{e}$, где $\bar{e}$ — единичный вектор, равенство векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$?

3.2.42. Каков геометрический смысл равенства $(\bar{a}+\bar{b})^2 + (\bar{a}-\bar{b})^2 = 2(\bar{a}^2 + \bar{b}^2)$?

3.2.43. Доказать, что $-ab \leqslant \bar{a}\cdot\bar{b} \leqslant ab$; в каких случаях здесь имеет место знак равенства?

3.2.44. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — ненулевые векторы. При каком их взаимном расположении справедливо равенство: $(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c})$?

3.2.45. Можно ли говорить о скалярном произведении трех векторов? О скалярном кубе вектора?

3.2.46. Изменится ли скалярное произведение двух векторов, если к одному из них добавить вектор, перпендикулярный к другому сомножителю?

3.2.47. Коллинеарны ли векторы $\bar{c}_1 = 2\bar{a}+4\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 3\bar{b}-\bar{a}$, построенные по векторам $\bar{a} = (1;-2;3)$, $\bar{b} = (3;0;-1)$?

3.2.48. Равносильны ли следующие два равенства:

а) $\bar{a} = \bar{b}$ и $\alpha\bar{a} = \alpha\bar{b}$;

б) $\bar{a} = \bar{b}$ и $\bar{a}\cdot\bar{c} = \bar{b}\cdot\bar{c}$;

в) $\bar{a} = \bar{b}$ и $\bar{a}+\bar{c} = \bar{b}+\bar{c}$?

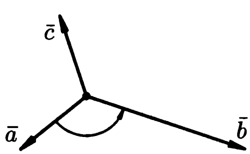
3.2.49. Какова длина отрезка MN, если $\overline{MN}^2 = 16$?

3.2.50. Какой угол образует вектор $\bar{a} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ с вектором $\bar{i}$?

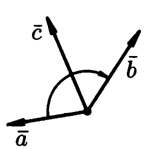
3.2.51. Как расположены прямые AB и AC, если $(\overline{AB}+\overline{AC})^2 = (\overline{AB}-\overline{AC})^2$?

§ 3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

$\Rrightarrow$ Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую (левую) тройку*, если с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, (соотв. по часовой стрелке) (см. рис. 11).



правая тройка,



левая тройка

Рис. 11

⇛ *Векторным произведением* неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, определяемый условиями:

1) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) длина вектора $\bar{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, т. е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi, \qquad \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}); \tag{3.1}$$

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны (в частности, один из этих векторов нулевой), то по определению $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Свойства векторного произведения:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ (антиперестановочность);

2. $\lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = \lambda\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \lambda\bar{b}$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю);

3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (распределительность);

4. $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ если $\bar{a} \parallel \bar{b}$ (или $\bar{a} = 0$ или $\bar{b} = 0$). В частности: $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \bar{a} \times \bar{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right). \tag{3.2}$$

Для вычисления *площади параллелограмма*, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ применяется формула

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}|. \tag{3.3}$$

Векторное произведение может быть выражено формулой

$$\bar{a} \times \bar{b} = S \cdot \bar{e}, \tag{3.4}$$

где $\bar{e}$ — орт направления $\bar{a} \times \bar{b}$.

3.3.1. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 6$, $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{5}{6}\pi$. Найти

а) $\bar{a} \times \bar{b}$;

б) $|(2\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 4\bar{b})|$.

◐ а) По формуле (3.1) находим модуль векторного произведения: $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$. По формуле (3.4) получаем $\bar{a} \times \bar{b} = 6 \cdot \bar{e}$, где $\bar{e}$ — единичный вектор направления $\bar{a} \times \bar{b}$;

б) Согласно свойствам векторного произведения получаем:

$$(2\bar{a}+3\bar{b})\times(\bar{a}-4\bar{b}) = 2(\bar{a}\times\bar{a}) - 8(\bar{a}\times\bar{b}) + 3(\bar{b}\times\bar{a}) - 12(\bar{b}\times\bar{b}) =$$
$$= -8(\bar{a}\times\bar{b}) - 3(\bar{a}\times\bar{b}) = -11(\bar{a}\times\bar{b}).$$

Следовательно,

$$|(2\bar{a}+3\bar{b})\times(\bar{a}-4\bar{b})| = |-11(\bar{a}\times\bar{b})| = 11\cdot|\bar{a}\times\bar{b}| = 11\cdot 6 = 66. \quad ●$$

3.3.2. Найти координаты вектора $\bar{a}\times(2\bar{a}+\bar{b})$, если $\bar{a}=(3;-1;-2)$, $\bar{b}=(1;2;-1)$.

3.3.3. Даны векторы $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{b}=-2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$. Найти: $\bar{c}= (\bar{a}-\bar{b})\times(2\bar{b})$; $|\bar{c}|$.

3.3.4. Дано: $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{2}{3}\pi$. Найти: $|\bar{a}\times\bar{b}|$; $|(\bar{a}+2\bar{b})\times(-\bar{a}+3\bar{b})|$.

3.3.5. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;1;2)$.

❍ Площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, т.е. $S=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$. Имеем: $\overline{AB}=(2;0;1)$, $\overline{AC}=(-3;-1;2)$. Тогда (см. (3.2))

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \left(\begin{vmatrix}0&1\\-1&2\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}2&1\\-3&2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2&0\\-3&-1\end{vmatrix}\right),$$

т.е. $\overline{AB}\times\overline{AC}=(1;-7;-2)$. Следовательно, $S=\frac{1}{2}\sqrt{1+49+4}$, $S=\frac{3\sqrt{6}}{2}$. ●

3.3.6. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}= \bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$ и $\bar{b}=5\bar{j}-7\bar{k}$.

3.3.7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=(8;4;1)$ и $\bar{b}=(2;-2;1)$.

3.3.8. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}-2\bar{b}$ и $3\bar{a}+2\bar{b}$, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=5$.

3.3.9. Сила $\bar{F}=(2;-4;5)$ приложена к точке $O(0;2;1)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(-1;2;3)$.

❍ Момент силы $\bar{F}$ относительно точки A есть вектор $\bar{M}= \overline{OA}\times\bar{F}$. Находим координаты вектора $\overline{OA}$ и искомого вектора $\bar{M}$: $\overline{OA}=(-1;0;2)$,

$$\bar{M}=\overline{OA}\times\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\-1&0&2\\2&-4&5\end{vmatrix}=$$
$$=\bar{i}\begin{vmatrix}0&2\\-4&5\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}-1&2\\2&5\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}-1&0\\2&-4\end{vmatrix}=8\bar{i}+9\bar{j}+4\bar{k},$$

т.е. $\bar{M}=(8;9;4)$. ●

3.3.10. Дана сила $\bar{F} = (3;4;-2)$ и точка ее приложения $A(2;-1;3)$. Найти момент силы относительно точки $O(0;0;0)$ и направление момента силы.

3.3.11. Три силы $\bar{F}_1 = (2;4;6)$, $\bar{F}_2 = (1;-2;3)$ и $\bar{F}_3 = (1;1;-7)$ приложены к точке $A(3;-4;8)$. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(4;-2;6)$.

Дополнительные задачи

3.3.12. Упростить выражения:
а) $2\bar{i}(\bar{j} \times \bar{k}) + 3\bar{j}(\bar{i} \times \bar{k}) + 4\bar{k}(\bar{i} \times \bar{j})$;
б) $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{c} + (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{b} + (\bar{b} - \bar{c}) \times \bar{a}$;
в) $(3\bar{i} - 4\bar{j} - 5\bar{k}) \times (2\bar{i} + 6\bar{j} - \bar{k})$.

3.3.13. Показать, что $(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b}) = 2(\bar{a} \times \bar{b})$; выяснить геометрический смысл этого равенства.

3.3.14. Показать, что $(\bar{a}\bar{b})^2 + (\bar{a} \times \bar{b})^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2$.

3.3.15. Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 20$, $\bar{a}\bar{b} = 30$. Найти $|\bar{a} \times \bar{b}|$.

3.3.16. Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 26$, $|\bar{a} \times \bar{b}| = 72$. Найти $\bar{a}\bar{b}$.

3.3.17. Найти единичный вектор $\bar{c}$, перпендикулярный каждому из векторов $\bar{a} = (3;-1;2)$ и $\bar{b} = (-1;3;-1)$.

3.3.18. Найти единичный вектор $\bar{e}$, перпендикулярный вектору $\bar{a} = (1;4;3)$ и оси абсцисс.

3.3.19. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}$ и $\bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$, где $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 3$, $(\widehat{\bar{p},\bar{q}}) = \frac{3}{4}\pi$.

3.3.20. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(3;4;5)$.

3.3.21. Даны векторы $\bar{a} = (-4;-8;8)$, $\bar{b} = (4;3;2)$. Найти векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

3.3.22. Даны векторы $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 7\bar{j} + 4\bar{k}$ и $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$. Найти $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ и $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

3.3.23. Найти координаты вектора $\bar{x}$, перпендикулярного оси аппликат и вектору $\bar{a} = (8;-15;3)$. Вектор $\bar{x}$ образует острый угол с осью абсцисс; $|\bar{x}| = 51$.

3.3.24. Найти длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{k} - \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

3.3.25. Вычислить синус угла, образованного векторами $\bar{a} = (2;-2;1)$ и $\bar{b} = (2;3;6)$.

3.3.26. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

3.3.27. Найти вектор $\bar{x}$, перпендикулярный к векторам $\bar{a} = (2; -3; 1)$ и $\bar{b} = (1; -2; 3)$ и удовлетворяющий условию $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}) = 10$.

3.3.28. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = \bar{0}$. Доказать, что $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a}$.

3.3.29. Дано: $\bar{a} = (1; -4; 0)$, $\bar{b} = (6; 3; -2)$, $\bar{c} = (1; -2; 2)$. Найти $\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b}\times\bar{c})$.

3.3.30. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ связаны соотношениями $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{d}$, $\bar{a} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{d}$. Доказать, что векторы $(\bar{a} - \bar{d})$ и $(\bar{b} - \bar{c})$ коллинеарны.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

3.3.31. Доказать, что точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\overline{AB} \times \overline{AC} = 0$.

3.3.32. Доказать, что векторное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю.

3.3.33*. Доказать тождество Лагранжа:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{vmatrix}.$$

3.3.34. Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$.

3.3.35. На векторах $\bar{a} = (2; -1; 7)$ и $\bar{b} = (1; 0; -4)$ построен параллелограмм. Найти высоту, опущенную из конца вектора $\bar{b}$, и площадь треугольника, образованного этой высотой и сторонами параллелограмма.

3.3.36. Доказать, что для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ векторы $\bar{a}\times\bar{p}$, $\bar{a}\times\bar{q}$, $\bar{a} \times \bar{r}$ компланарны.

3.3.37. Три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, и $\bar{c}$ связаны соотношениями $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{c} \times \bar{a}$, $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

3.3.38. Доказать, что $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})$.

Указание. орт $\bar{i}$ сонаправить с вектором $\bar{b}$, орт $\bar{j}$ — в плоскости векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Найти координаты обеих частей и убедиться, что они равны.

3.3.39. Вывести формулу для $\sin(\alpha - \beta)$.

Указание. рассмотреть в плоскости Oxy два единичных вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, составляющих с осями углы α и β соответственно; найти $\bar{e}_1 \times \bar{e}_2$.

3.3.40. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы векторы $3\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-3\bar{b}$ были коллинеарны?

3.3.41. При каких значениях α и β векторы $\bar{a}=\alpha\bar{i}+7\bar{j}+3\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+$ $+\beta\bar{j}+2\bar{k}$ коллинеарны?

3.3.42. Дано: $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}$, $\bar{c}\neq 0$. Можно ли отсюда заключить, что $\bar{a}=\bar{b}$?

3.3.43. Чему равно векторное произведение противоположных векторов?

3.3.44. Чему равно:
а) $\bar{j}\times\bar{i}$;
б) $\bar{j}\times(\bar{j}+\bar{k})$;
в) $2\bar{i}\times(\bar{k}-5\bar{j})$?

3.3.45. Равносильны ли равенства $\bar{a}=\bar{b}$ и $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}$?

3.3.46*. Даны два вектора $\bar{a}\neq 0$, $\bar{b}\neq 0$. Можно ли подобрать вектор $\bar{x}$ так, чтобы $\bar{a}=\bar{b}\times\bar{x}$?

3.3.47. Чему равно векторное произведение коллинеарных векторов? векторов $\bar{a}$ и $(-\bar{a})$?

3.3.48. Найти:
1) $\bar{j}\times\bar{i}$;
2) $2\bar{i}\times 5\bar{j}$;
3) $\bar{i}\times(\bar{i}+\bar{k})$.

3.3.49. Верно ли соотношение $|\bar{a}\times\bar{b}|\leqslant|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$?

3.3.50. Существуют ли такие векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, что $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{a}$?

§ 4. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

⇛ *Смешанным произведением* трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$.

Обозначение: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Таким образом:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$$

Геометрически смешанное произведение интерпретируется как число, равное *объему* параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ как на ребрах. Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ положительно, если данные векторы образуют правую тройку, и отрицательно — если левую.

Свойства смешанного произведения:

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$, т. е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов;

2. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$, т. е. смешанное произведение не меняется при перестановке знаков векторного и скалярного умножения;

3. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = \bar{c}\bar{b}\bar{a}$ т.е. смешанное произведение меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух векторов-сомножителей;

4. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$, если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны (в частности, если любые два из перемножаемых вектора коллинеарны).

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ заданы своими координатами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\bar{c} = (c_x; c_y; c_z)$ то

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — правая тройка; $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$ — левая.

Объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, и объем V_2, построенной на них треугольной пирамиды, находятся по формулам

$$V_1 = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|, \tag{4.2}$$

$$V_2 = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|. \tag{4.3}$$

3.4.1. Доказать, что четыре точки $A_1(3;5;1)$, $A_2(2;4;7)$, $A_3(1;5;3)$, $A_4(4;4;5)$ лежат в одной плоскости.

◔ Достаточно показать, что три вектора $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, имеющие начало в одной из данных точек, лежат в одной плоскости (т.е. компланарны). Находим координаты векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$:

$$\overline{A_1A_2} = (2-3; 4-5; 7-1) = (-1; -1; 6);$$
$$\overline{A_1A_3} = (1-3; 5-5; 3-1) = (-2; 0; 2);$$
$$\overline{A_1A_4} = (4-3; 4-5; 5-1) = (1; -1; 4).$$

Проверяем условие компланарности векторов (свойство 4 смешанного произведения векторов):

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

Итак, векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_4}$ коллинеарны, следовательно точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости. ●

3.4.2. Проверить компланарны ли данные векторы:

а) $\bar{a} = (1; 2; -2)$, $\bar{b} = (1; -2; 1)$, $\bar{c} = (5; -2; -1)$;

б) $\bar{a} = \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i}$.

3.4.3. При каком значении λ векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \lambda\bar{k}$, $\bar{b} = (0; 1; 0)$ и $\bar{c} = (3; 0; 1)$ компланарны?

3.4.4. Даны вершины пирамиды $A(5;1;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;3;-4)$, $S(2;2;2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC.

◯ Так как объем V пирамиды есть $V = \frac{1}{3}S'h$, то $h = \frac{3V}{S'}$, где $h = |SO|$ — высота пирамиды, S' — площадь основания (рис. 12).

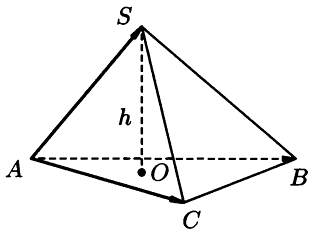


Рис. 12

Находим V: $\overline{AS} = (-3;1;6)$, $\overline{AB} = (-4;1;3)$, $\overline{AC} = (-2;2;0)$. И согласно формуле (4.3):

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}-3 & 1 & 6\\ -4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-3\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-4 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}|18 - 6 - 36| = \frac{1}{6}|-24| = 4.$$

Находим $S' = S'_{\triangle ABC}$:

$$S' = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|-6\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k}| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Следовательно, $h = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. ●

3.4.5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = (1;-2;1)$, $\bar{b} = (3;2;1)$, $\bar{c} = (1;0;-1)$.

3.4.6. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = (2;1;-3)$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = (1;-3;1)$, опущенную на грань, построенную на векторах $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

3.4.7. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\bar{a} = (1;2;3)$, $\bar{b} = (2;4;1)$, $\bar{c} = (2;-1;0)$.

8 – 2361

3.4.8. Вычислить $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c})(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c})$.

Используя свойства смешанного произведения векторов, получаем:

$$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c})(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) = ((\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\times(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}))\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) =$$
$$= (\bar{a}\times\bar{a}-\bar{a}\times\bar{b}-\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{b}-\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}-\bar{c}\times\bar{b}-\bar{c}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) =$$
$$= (0-\bar{a}\times\bar{b}-\bar{a}\times\bar{c}-\bar{a}\times\bar{b}-0-\bar{b}\times\bar{c}-\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}-0)\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) =$$
$$= (-2\bar{a}\times\bar{b}-2\bar{a}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) = -2(\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}) =$$
$$= -2(\bar{a}\bar{b}\bar{a}-\bar{a}\bar{b}\bar{b}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}\bar{c}\bar{a}-\bar{a}\bar{c}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}\bar{c}) =$$
$$= -2(0-0+\bar{a}\bar{b}\bar{c}+0+\bar{a}\bar{b}\bar{c}+0) = -2\cdot 2\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -4\bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$ ●

3.4.9. Вычислить произведение $(\bar{a}-\bar{b})(\bar{b}-\bar{c})(\bar{c}-\bar{a})$.

3.4.10. Вычислить произведение $\bar{a}(\bar{b}-\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c})$.

3.4.11. Какую тройку образуют векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

а) $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$, $b=\bar{i}-\bar{j}$, $\bar{c}=\bar{k}$;

б) $\bar{a}=(1;-4;0)$, $\bar{b}=(6;3;-2)$, $\bar{c}=(1;-2;2)$?

3.4.12. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют правую тройку. Найти $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, зная что $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$.

3.4.13. Даны векторы $\bar{a}=(3;5;-1)$, $\bar{b}=(0;-2;1)$ и $\bar{c}=(-2;2;3)$. Найти $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$.

Дополнительные задачи

3.4.14. Вычислить произведение $\bar{b}(\bar{c}+\bar{a})(\bar{b}+2\bar{c})$, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=5$.

3.4.15. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$; $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\pi}{6}$, $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=3$, $|\bar{c}|=3$. Найти $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

3.4.16. Найти объем пирамиды с вершинами $A_1(0;0;1)$, $A_2(2;3;5)$, $A_3(6;2;3)$, $A_4(3;7;2)$.

3.4.17. Показать, что точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$ и $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

3.4.18. Даны вершины пирамиды $A(-5;-4;8)$, $B(2;3;1)$, $C(4;1;-2)$, $D(6;3;7)$. Найти длину высоты, опущенной на грань BCD.

3.4.19. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;+3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси ординат.

3.4.20. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\overline{AB}=(4;3;0)$, $\overline{AD}=(2;1;2)$ и $\overline{AA_1}=(-3;-2;5)$. Найти:

а) объем параллелепипеда;

б) площадь грани $ABCD$;

в) длину высоты, проведенной из вершины A_1;

г) угол между ребром AB и диагональю BD_1.

3.4.21. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;4;1)$, $A_3(7;6;3)$, $A_4(4;-3;-1)$. Найти:

а) длину ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4;

б) площадь грани $A_1A_2A_3$;

в) угол между ребрами A_1A_4 и A_1A_3;

г) объем пирамиды;

д) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

3.4.22. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}=0$. Доказать, что эти векторы компланарны.

3.4.23. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

3.4.24. Найти $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})-(\bar{e}\times\bar{f})\times\bar{q}$, если $\bar{a}=(1;2;-2)$, $\bar{b}=(-2;3;1)$, $\bar{c}=(2;-2;2)$, $\bar{e}=(-1;3;5)$, $\bar{f}=(1;0;-2)$, $\bar{q}=(3;-2;2)$.

3.4.25. Найти объем V пирамиды с вершинами в точках $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, $A_4(x_4;y_4;z_4)$. При каком условии точки A_1, A_2, A_3, A_4 принадлежат одной плоскости?

3.4.26. Даны единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Зная, что $(\widehat{\bar{e}_1,\bar{e}_2})=$ $=(\widehat{\bar{e}_3,\bar{e}_1\times\bar{e}_2})=\alpha$, доказать равенство $(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)\cdot\bar{e}_3=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

3.4.27. Зная, что $\bar{c}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}$ найти соотношение между векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, не содержащее коэффициентов λ_1 и λ_2.

Указание. исключить λ_1 можно умножением равенства векторно на $\bar{a}$.

3.4.28. Доказать, что $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|\leqslant|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|$; в каком случае имеет место знак равенства?

3.4.29. Чему равно $\bar{a}\bar{b}(\bar{c}+\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b})$, где λ_1 и λ_2 — произвольные числа?

3.4.30. Доказать (геометрически), что при любых векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ векторы $\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{c}-\bar{a}$ компланарны. Каков геометрический смысл этого факта?

3.4.31. Чему равно $\bar{a}\bar{b}\bar{a}$?

3.4.32. Известно, что $\bar{c}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}$, λ_1 и λ_2 — числа. Чему равно $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$? Пояснить алгебраически.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
Вариант 1

1. В параллелограмме $ABCD$: O — точка пересечения диагоналей. Найти x, если
   1) $\overline{AB} = x \cdot \overline{CD}$;
   2) $\overline{AC} = x \cdot \overline{AO}$;
   3) $\overline{OB} = x \cdot \overline{BD}$;
   4) $\overline{OC} = x \cdot \overline{CD}$.

2. Разложить вектор $\bar{c} = (9;4)$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = (1;2)$ и $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$.

3. Найти вектор $\bar{d}$, зная, что $\bar{d} \perp \bar{a}$, $\bar{d} \perp \bar{b}$, где $\bar{a} = (2;3;-1)$, $\bar{b} = (1;-2;3)$ и $\bar{d} \cdot (2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) = -6$.

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}$ и $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, где $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 1$, $(\widehat{\bar{p},\bar{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

5. Дана пирамида с вершинами $A_1(7;2;4)$, $A_2(7;-1;-2)$, $A_3(3;3;1)$, $A_4(-4;2;1)$. Найти:
   а) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
   б) объем пирамиды;
   в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Вариант 2

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Доказать, что $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$, где O — произвольная точка пространства.

2. Радиус-вектор точки M составляет с осью Ox угол $45°$, с осью Oy — $60°$. Его длина $|\bar{r}| = 6$. Найти координаты точки M, зная, что третья координата отрицательная.

3. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a} = 2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b} = (1;1;2)$.

4. Найти площадь треугольника ABC, в котором $A(2;1;0)$, $B(-2;4;1)$, $C(-3;-8;4)$.

5. Дана пирамида с вершинами $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$. Найти:
   а) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
   б) объем пирамиды;
   в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Вариант 3

1. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и угол между ними равный $120°$. Построить вектор $\bar{c} = 2\bar{a} - 1{,}5\bar{b}$ и определить его длину, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$.

2. Проверить, что четыре точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$ и $D(3; -5; 3)$ служат вершинами трапеции.

3. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$. Найти вектор $\bar{x}$, если $\bar{x}\bar{a} = -5$, $\bar{x}\bar{b} = -11$, $\bar{x}\bar{c} = 20$.

4. В треугольнике с вершинами $A(4; -14; 8)$, $B(2; -18; 12)$, $C(12; -8; 12)$ найти длину высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(-2; 0; -4)$, $A_2(-1; 7; 1)$, $A_3(4; -8; -4)$, $A_4(1; -4; 6)$. Найти:

   а) длину ребра A_2A_3;

   б) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

   в) объем пирамиды.

Вариант 4

1. В ромбе $ABCD$ диагонали $\overline{AC} = \bar{a}$ и $\overline{BD} = \bar{b}$. Разложить по этим двум векторам векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

2. Зная одну из вершин треугольника $A(1; -6; 3)$ и векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overline{AB} = 3\bar{j} + 5\bar{k}$ и $\overline{BC} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, найти остальные вершины и вектор $\overline{CA}$.

3. Найти вектор $\bar{m}$, зная, что $\bar{m} \perp \bar{c}$, $\bar{m}\bar{a} = 4$, $\bar{m}\bar{b} = 35$, где $\bar{a} = (3; -2; 4)$, $\bar{b} = (5; 1; 6)$, $\bar{c} = (-3; 0; 2)$.

4. Зная две стороны $\overline{AB} = (-3; -2; 6)$, $\overline{BC} = (-2; 4; 4)$ треугольника ABC, вычислить длину высоты AD.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1; 2; 0)$, $A_2(3; 0; -3)$, $A_3(5; 2; 6)$, $A_4(8; 4; -9)$. Найти:

   а) длину ребра A_2A_3;

   б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

   в) объем пирамиды.

❏

Глава 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Прямоугольная система координат

Метод координат заключается в установлении соответствия между точками прямой (плоскости, пространства) и их координатами — действительными числами при помощи системы координат.

⇛ *Прямоугольная система координат Oxy на плоскости* задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Эти прямые называют *осями координат.* Одну из осей называют *осью абсцисс* и обозначают Ox, другую — *осью ординат* (Oy).

Единичные векторы осей Ox и Oy обозначают соответственно $\bar{i}$ и $\bar{j}$ Если M — произвольная точка плоскости, то вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M.

⇛ *Координатами* точки M в системе координат Oxy называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$.

Если $\overline{OM} = (x; y)$, то координаты точки M записывают так: $M(x; y)$; при этом число x называется — *абсциссой* точки M, а число y — *ординатой* точки M. Координаты точки полностью определяют ее положение на плоскости: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.1}$$

Координаты $(x; y)$ *точки M, делящей в заданном отношении λ отрезок AB*, где $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ ($\lambda = \frac{AM}{MB}$), находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{1.2}$$

В частности, при $\lambda = 1$ (точка M делит отрезок AB пополам), получаются формулы координат середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{1.3}$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)| \qquad (1.4)$$

или, что то же самое: $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, где $\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

4.1.1. Найти точку, симметричную точке $A(-2; 4)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

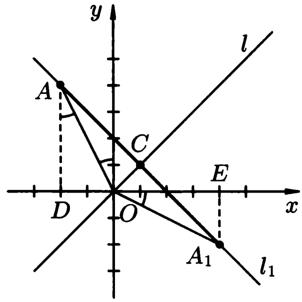


Рис. 13

◔ Проведем через точку A прямую l_1, перпендикулярную биссектрисе l первого координатного угла (рис. 13). Пусть $l_1 \cap l = C$. На прямой l_1 отложим отрезок CA_1, равный отрезку AC. Прямоугольные треугольники ACO и A_1CO равны между собой (по двум катетам). Отсюда следует, что $|OA| = |OA_1|$. Треугольники ADO и OEA_1 также равны между собой (по гипотенузе и острому углу). Заключаем, что $|AD| = |OE| = 4$, $|OD| \doteq |EA_1| = 2$, т. е. точка A_1 имеет координаты $x = 4$, $y = -2$, т. е. $A_1(4; -2)$.

Отметим, что имеет место общее утверждение: точка A_1, симметричная точке $A(a; b)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, имеет координаты $(b; a)$, т. е. $A_1(b; a)$. ●

4.1.2. Дана точка $A(3; -2)$. Найти координаты точек, симметричных точке A относительно оси Ox, оси Oy, начала координат.

4.1.3. Найти координаты точки A_1, симметричной точке $A(2; 4)$ относительно биссектрисы:

1) второго и четвертого координатных углов;

2) первого и третьего координатных углов.

4.1.4. В треугольнике с вершинами $A(2; 3)$, $B(6; 3)$, $C(6; -5)$ найти длину биссектрисы BM.

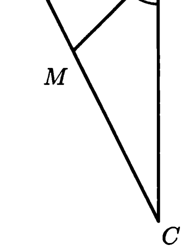


Рис. 14

◔ По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{|CM|}{|MA|} = \frac{|BC|}{|BA|}$ (рис. 14). Находим, используя формулу (1.1), длины сторон BC и BA треугольника ABC: $|BC| = \sqrt{(6-6)^2 + (-5-3)^2} = 8$, $|BA| = \sqrt{(2-6)^2 + (3-3)^2} = 4$. Следовательно,

$\lambda = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{8}{4}$, т. е. $\lambda = 2$. Находим координаты x_M и y_M точки М, используя формулу (1.2): $x_M = \frac{6+2\cdot 2}{1+2}$, $y_M = \frac{-5+2\cdot 3}{1+2}$, т. е. $x_M = \frac{10}{3}$, $y_M = \frac{1}{3}$, т. е. $M\left(\frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Находим длину биссектрисы BM: $BM = \sqrt{\left(\frac{10}{3}-6\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{9}+\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$, т. е. $BM = \frac{8}{3}\sqrt{2}$. ●

4.1.5. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-2;-1)$, $B(6;1)$, $C(3;4)$ — прямоугольный.

4.1.6. Точки $A(2;4)$, $B(-3;7)$ и $C(-6;6)$ — три вершины параллелограмма, причем A и C — противоположные вершины. Найти четвертую вершину.

4.1.7. Дан треугольник с вершинами $A(-2;4)$, $B(-6;8)$, $C(5;-6)$. Найти площадь этого треугольника.

4.1.8. Найти точку, в которой прямая, проходящая через точки $A(5;5)$ и $B(1;3)$, пересечет ось Ox.

◐ Координаты искомой точки C есть $(x;0)$. А так как точки A, B и C лежат на одной прямой, то должно выполняться условие $(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1) = 0$ (формула (1.4), площадь треугольника ABC равна нулю!), где $(x_1;y_1)$ — координаты точки A, $(x_2;y_2)$ — точки B, $(x_3;y_3)$ — точки C. Получаем $(1-5)(0-5)-(x-5)(3-5) = 0$, т. е. $20+2(x-5) = 0$, $x-5 = -10$, $x = -5$. Следовательно, точка C имеет координаты $x = -5$, $y = 0$, т. е. $C(-5;0)$. ●

4.1.9. Доказать, что три точки $(2;3)$, $(5;7)$, $(11;15)$ лежат на одной прямой.

4.1.10. Разделить отрезок между точками $(0;2)$ и $(8;0)$ в таком же отношении, в каком находятся расстояния этих точек от начала координат.

4.1.11. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки $A(3;-8)$ на расстоянии 5 единиц.

Дополнительные задачи

4.1.12. Найти длину вектора $\overline{AB}$, соединяющего точки $A(-4;5)$ и $B(-6;7)$, и угол между этим вектором и положительным направлением оси Ox.

4.1.13. Отрезок с концами $A(1;-5)$ и $B(4;3)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

4.1.14. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами в точках $A(x_1;y_1)$,

$B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ (центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан).

4.1.15. Центр тяжести треугольника ABC лежит на оси Ox. Найти координаты вершины C, зная координаты вершин $A(3;1)$ и $B(1;-3)$; площадь треугольника равна 3.

4.1.16. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки $A(1;4)$ равно 5.

4.1.17. Найти координаты точки, одинаково удаленной от осей координат и от координаты точки $A(1;8)$.

4.1.18. Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $A(1;1)$, $B(0;2)$ и $C(2;-1)$ тупой угол.

4.1.19. Даны вершины треугольника: $A(7;2)$, $B(1;9)$, $C(-8;-11)$. Найти расстояние от точки O пересечения медиан треугольника до вершины B.

4.1.20. Две противоположные вершины квадрата находятся в точках $A(3;5)$ и $C(1;-3)$. Найти его площадь.

4.1.21. Найти площадь четырехугольника с вершинами $A(-3;2)$, $B(3;4)$, $C(6;1)$, $D(5;-2)$.

4.1.22. Даны вершины треугольника $A(-3;6)$, $B(9;-10)$, $C(-5;4)$. Найти координаты центра и радиус описанного около него круга.

4.1.23. Даны вершины $A(2;1)$, $B(-2;-2)$, $C(-8;6)$ треугольника ABC. Найти длину высоты, опущенной из вершины B.

4.1.24. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2;6)$, $B(2;8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2;2)$. Найти координаты двух других вершин.

4.1.25. Даны середины сторон треугольника $M(-1;5)$, $N(1;1)$, $P(4;3)$. Найти координаты его вершин.

4.1.26. В треугольнике с вершинами $O(0;0)$, $A(8;0)$, $B(0;6)$ определить длину медианы OC и биссектрисы OD.

4.1.27. Отрезок с концами $A(-8;-8)$ и $B(-2;-4)$ разделен на четыре равные части. Найти координаты точек деления. До какой точки надо продолжить отрезок AB, чтобы его длина увеличилась в 3 раза?

4.1.28. Даны точки $A(1;2)$ и $B(4;4)$. На оси Ox найти точку C так, чтобы площадь треугольника ABC была равна 5.

4.1.29. Даны две противоположные вершины квадрата $A(3;0)$ и $C(-4;1)$. Найти координаты двух его других вершин.

4.1.30. Дан треугольник с вершинами $A(-\sqrt{3};1)$, $B(0;2)$, $C(-2\sqrt{3};2)$. Найти его внешний угол при вершине A.

4.1.31. Прямая проходит через точки $A(2;-3)$ и $B(-6;5)$. На этой прямой найти абсциссу точки, ордината которой равна -5.

4.1.32. Определить центр тяжести однородной пластинки, изображенной на рисунке 15.

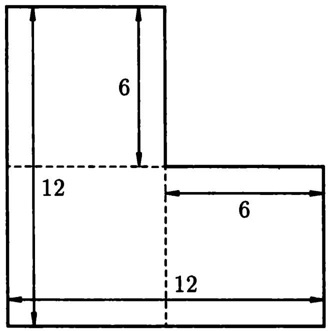


Рис. 15

4.1.33. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого — точки $A(-2;3)$, $B(4;-5)$, $C(-3;1)$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.1.34. В точках $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$ помещены массы m_1, m_2, m_3 соответственно. Найти центр тяжести системы.

Указание. центр тяжести системы двух масс делит отрезок на части, обратно пропорциональные массам, сосредоточенным на концах отрезка.

4.1.35. Найти положение центра тяжести проволочного треугольника, вершины которого расположены в точках (0;0), (0;3) и (4;0).

4.1.36. Даны вершины однородной треугольной пластинки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Если соединить середины ее сторон, то образуется новая треугольная пластинка. Доказать, что центры тяжести обеих платинок совпадают.

4.1.37. Даны две смежные вершины квадрата $A(2;-1)$ и $B(-1;3)$. Найти координаты двух его других вершин.

4.1.38. Найти координаты центра правильного шестиугольника, зная две его смежные вершины: $A(2;0)$ и $B(5;3\sqrt{3})$.

4.1.39. Показать, что точки $A(-3;8)$, $B(1;5)$ и $C(4;1)$ могут служить тремя вершинами ромба, вычислить площадь этого ромба.

4.1.40. Прямая линия отсекает на оси Ox отрезок $OA=4$ и на оси Oy отрезок $OB=7$. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую.

Указание. $\lambda=\frac{16}{49}$.

4.1.41. В каких четвертях могут быть расположены точки $M(x; y)$, если

1) $xy > 0$;
2) $xy < 0$;
3) $x - y = 0$;
4) $x - y > 0$;
5) $x + y = 0$?

4.1.42. Проведен отрезок от точки $A(1; -1)$ до точки $(-4; 5)$. Найти координаты точки, до которой нужно продлить его в том же направлении, чтобы длина его удвоилась?

4.1.43. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике длина медианы, соединяющей вершину прямого угла с серединой гипотенузы, равна половине гипотенузы.

4.1.44. Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ служат смежными вершинами ромба, диагонали которого параллельны осям координат. Как выразить координаты остальных вершин через координаты данных точек?

4.1.45. Как расположены точки, имеющие одну и ту же проекцию на ось Ox? на ось Oy?

Полярная система координат

⇛ *Полярная система координат* задается точкой O, называемой *полюсом*, лучом Op, называемым *полярной осью*, и *единичным вектором* $\bar{e}$ того же направления, что и луч Op.

Положение точки M на плоскости определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (рис. 16) и отсчитываемым в положительном направлении.

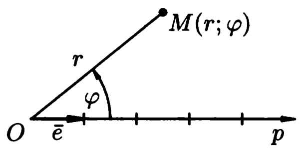


Рис. 16

⇛ Числа r и φ называются *полярными координатами* точки M: r называют *полярным радиусом*, φ — *полярным углом*.

Если рассматривать значения r в промежутке $[0; +\infty)$, а значения φ в $(-\pi; \pi]$ (или в $[0; 2\pi)$), то каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ, и наоборот.

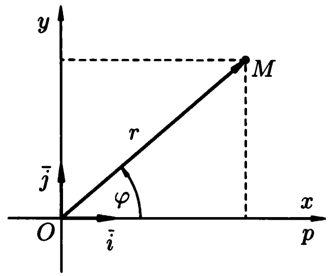


Рис. 17

Если совместить полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось — с положительной полуосью Oxy (рис. 17), то связь между полярными и прямоугольными координатами точки (кроме точки O) устанавливается формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{1.5}$$

и

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Откуда, в частности, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, где $x \neq 0$.

4.1.46. Найти прямоугольные координаты точки M с полярными координатами $\left(2; -\frac{2}{3}\pi\right)$.

○ Имеем $r = 2$, $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$. По формулам (1.5) находим $x = 2\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, $y = 2\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$. Итак, $M(-1; -\sqrt{3})$. ●

4.1.47. Найти прямоугольные координаты точек A, B, C, D, E для которых известны полярные координаты: $A(3;0)$, $B\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0; -\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(1; \frac{2}{3}\pi\right)$.

4.1.48. Найти полярные координаты точки M с прямоугольными координатами $(-\sqrt{3}; -1)$.

○ Имеем $x = -\sqrt{3}$, $y = -1$. По формулам (1.6) находим $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $tg\varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Точка M лежит в III четверти, следовательно, с учетом того, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, получаем $\varphi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi$. Итак, $M\left(2; -\frac{5}{6}\pi\right)$. ●

4.1.49. Найти полярные координаты точек A, B, C, D, E для которых известны прямоугольные координаты: $A(-3;3)$, $B(0;-5)$, $C(-2;-2)$, $D(-4;0)$, $E(2\sqrt{3};2)$.

4.1.50. В полярной системе координат заданы точки $M_1(r_1;\varphi_1)$, $M_2(r_2;\varphi_2)$. Найти:

а) расстояние между точками M_1 и M_2;

б) площадь треугольника OM_1M_2 (O — полюс).

◔ а) Воспользуемся формулами (1.1) и (1.5):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(r_2\cos\varphi_2 - r_1\cos\varphi_1)^2 + (r_2\sin\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1)^2} =$$
$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)} =$$
$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

т. е. $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$;

б) пользуясь формулой для площади треугольника со сторонами a и b и углом α между ними $\left(S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha\right)$, находим площадь треугольника OM_1M_2:

$$S = \frac{1}{2}r_1r_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad ●$$

4.1.51. Сторона правильного шестиугольника равна 1. Приняв за полюс одну из его вершин, а за полярную ось — сторону, через нее проходящую, найти полярные координаты остальных пяти вершин.

4.1.52. В полярной системе координат точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ совпадает с полюсом. Зная вершины $A\left(3;-\frac{4}{9}\pi\right)$ и $B\left(5;\frac{3}{4}\pi\right)$, найти другие вершины параллелограмма.

Дополнительные задачи

4.1.53. В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата $A\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$ и $C\left(2;\frac{2}{3}\pi\right)$. Найти его площадь.

4.1.54. Одна из вершин треугольника лежит в полюсе полярной системы координат, а другие в точках $A(2;0)$ и $B\left(4;\frac{\pi}{3}\right)$. Найти радиус вписанной в треугольник окружности.

4.1.55. В полярной системе координат даны точки $A\left(8;-\frac{2}{3}\pi\right)$ и $B\left(6;\frac{\pi}{3}\right)$. Найти полярные координаты середины отрезка, соединяющего эти точки.

4.1.56. Треугольник ABC задан полярными координатами вершин: $A\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8; \frac{5}{6}\pi\right)$, $C\left(3; \frac{7}{6}\pi\right)$. Доказать, что он равнобедренный.

4.1.57. Найти полярные координаты точек, симметричных точкам $\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(1; -\frac{\pi}{3}\right)$, $(3; 0)$ относительно

а) полюса,

б) полярной оси.

4.1.58. В полярной системе координат даны две смежные вершины квадрата $A\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$ и $B\left(3; \frac{3}{4}\pi\right)$. Найти его площадь.

4.1.59. В полярной системе координат даны две вершины правильного треугольника: $A\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(8; -\frac{\pi}{12}\right)$. Найти его площадь.

4.1.60. Найти площадь треугольника, вершины которого $A\left(3; \frac{\pi}{8}\right)$, $B\left(8; \frac{7}{24}\pi\right)$, $C\left(6; \frac{5}{8}\pi\right)$ заданы в полярных координатах.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.1.61. Как расположены точки, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $r = 2$;

б) $\varphi = -\frac{\pi}{9}$;

в) $\varphi = 0$?

4.1.62. Каковы координаты точки B полярной оси, отстоящей от точки $A\left(7\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ на 7 единиц?

4.1.63*. Построить множество точек плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $r = 2\varphi$;

б) $r = 2\sin\varphi$;

в) $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$;

г) $r\sin\varphi = 1$;

д) $\operatorname{tg}\varphi = -1$.

Уравнение линии (кривой) на плоскости

$\Rrightarrow$ *Уравнением линии (кривой)* на плоскости Oxy называется уравнение $F(x; y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и только они. Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0, \\ F_2(x; y) = 0. \end{cases} \qquad (1.7)$$

Аналогично вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат: $F(r; \varphi) = 0$.

Линию на плоскости можно рассматривать как траекторию пути, пройденного точкой, движущейся по какому-нибудь закону. Если абсцисса точки $M(x; y)$ изменяется по закону $x = x(t)$, а ордината — по закону $y = y(t)$, где t — переменная, называемая *параметром*, то уравнение линии записывается в виде

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [t_1; t_2].$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями линии.*

Линию на плоскости можно задать *векторным уравнением* $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где t — скалярный параметр: при изменении t конец вектора $\bar{r} = \bar{r}(t)$ описывает некоторую линию, называемую *годографом* (см. рис. 18). Параметрические уравнения годографа: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

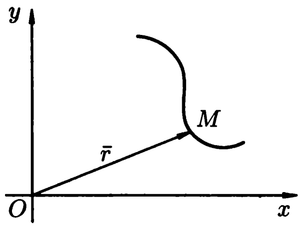


Рис. 18

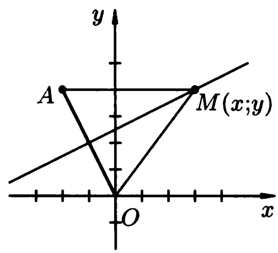


Рис. 19

4.1.64. Описать уравнением множество всех точек плоскости, равноудаленных от начала координат и от точки $A(-2; 4)$.

◔ Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомого множества точек плоскости. Тогда согласно условию задачи, $|MA| = |MO|$, где $O(0; 0)$ — начало координат (рис. 19). По формуле (1.1) находим $|MA|$ и $|MO|$: $|MA| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}$, $|MO| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Имеем $\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2$, откуда $4x - 8y + 20 = 0$. Окончательно получим $x - 2y + 5 = 0$. Это уравнение прямой, перпендикулярной отрезку OA и делящей этот отрезок пополам. ●

4.1.65. Составить уравнение линии, точки которой равноотстоят от двух заданных точек $A(-2;0)$ и $B(4;2)$.

4.1.66. Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от прямой $x = 2$ и точки $F(4;0)$.

4.1.67. Стержень AB скользит своими концами по координатным осям. Точка M делит стержень на две части $AM = a$ и $BM = b$. Найти параметрические уравнения траектории точки M, приняв в качестве параметра угол $t = \angle OBA$.

◐ Рассмотрим треугольник MCB (рис. 20): в нем $|CB| = b\cos t$, $|CM| = b\sin t$. Очевидно, $|OB| = (a+b)\cos t$. Стало быть, $x = |OB| - |CB| = (a+b)\cos t - b\cos t = a\cos t$, $y = |MC| = b\sin t$. Таким образом, получаем уравнения искомой линии

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

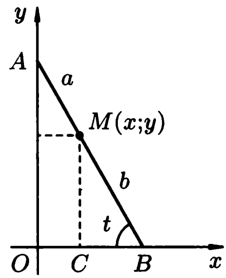


Рис. 20

Уравнение траектории точки M можно записать в виде $F(x;y) = 0$. Для этого перепишем найденные уравнения линии в виде $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$. Возводя в квадрат полученные равенства и складывая их почленно, получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Линия, определяемая этим уравнением, называется *эллипсом*. ●

4.1.68. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояние до оси Ox в три раза меньше, чем до оси Oy.

4.1.69. Найти уравнение траектории перемещения точки M, которая движется так, что расстояние от нее до точки $M_0(2;-3)$ всегда равно 5.

4.1.70. В полярной системе координат составить уравнение окружности диаметра a, если полюс системы координат лежит на окружности, а полярная ось проходит через ее центр.

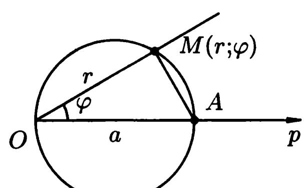


Рис. 21

◐ Пусть $M(r;\varphi)$ — произвольная точка данной окружности. Рассмотрим ΔOMA (см. рис. 21).

В нем $|OM| = r$, $\angle MOA = \varphi$, $\angle OMA = \frac{\pi}{2}$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр). Поэтому $\cos\varphi = \frac{r}{a}$. Отсюда находим $r = a\cos\varphi$ — искомое уравнение окружности. ●

4.1.71. Составить параметрические уравнения окружности. В качестве параметра t использовать угол между осью Ox и вектором $\overline{OM}$.

4.1.72. Составить уравнение окружности радиуса R, центр которой лежит на прямой, перпендикулярной полярной оси, а полюс системы координат лежит на окружности.

4.1.73. Луч выходит из полюса и наклонен к полярной оси под углом $\frac{\pi}{6}$. Составить уравнение этого луча в полярных координатах.

4.1.74. Дана окружность $x^2+y^2=9$. Лежат ли на ней точки $M_1(2\sqrt{2};1)$, $M_2(2;3)$? Пересекается ли эта окружность с прямой $y = 3$?

◐ Подставляем координаты точки M_1 в уравнение окружности. Получаем тождество $(2\sqrt{2})^2 + 1 = 9$. Значит точка M_1 лежит на окружности. Точка M_2 не лежит на окружности, т.к. $2^2 + 3^2 \neq 9$.

Для ответа на второй вопрос решим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = 3, \end{cases}$$

откуда получаем $x = 0$, $y = 3$. Таким образом, окружность и прямая имеют одну общую точку $(0;3)$ — прямая касается окружности. ●

4.1.75. Указать какие из данных точек $A_1(1;1)$, $A_2(2;2)$, $A_3(\sqrt{3};-1)$, $A_4\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$ лежат на кривой $y = 2 - x^2$.

4.1.76. Найти точки пересечения кривой $y = 6 + 5x - x^2$ с осями координат.

4.1.77. Найти точки пересечения линий $x + 7y = 25$ и $x^2 + y^2 = 25$.

4.1.78. На окружности $x^2 + y^2 = 25$ найти точки:

а) с абсциссой $x = 3$;

б) с ординатой $y = y_0$.

Дополнительные задачи

4.1.79. В прямоугольных координатах даны параметрические уравнения кривых:

а) $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t + 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

б) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \quad t \in [0;2\pi).$

в) $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1, \\ y = t - 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Найти уравнения заданных кривых в виде $F(x; y) = 0$.

4.1.80. Написать уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-2; 0)$ и $F_2(2; 0)$ равна $2\sqrt{5}$.

4.1.81. Вывести уравнение геометрического места точек, для которых модуль разности растояний до точек $F_1(-4; 0)$ и $F_2(4; 0)$ равен 4.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.1.82. Найти уравнение множества точек, произведение расстояний от которых до двух данных точек $F_1(a; 0)$ и $F_2(-a; 0)$ есть величина постоянная, равная a^2. Полученное уравнение записать в полярных координатах.

4.1.83. Окружность радиуса a катится без скольжения по оси абсцисс из начала координат. Найти параметрические уравнения кривой, описанной точкой окружности, которая при начальном положении совпадала с началом координат. (За параметр t взять угол поворота радиуса окружности.)

4.1.84. Отрезок AB длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины этого угла на этот отрезок опущен перпендикуляр OC. Найти уравнение кривой, описанной основанием таких перпендикуляров. (Поместить полюс O в вершину прямого угла, полярную ось направить по стороне угла.)

4.1.85. Составить уравнение геометрического места центров окружностей, касающихся оси Ox и проходящих через точку $A(2; 3)$.

4.1.86. Прямая перемещается так, что треугольник, образованный ею с осями координат, меняется, но сохраняет постоянную площадь S. Найти траекторию движения середины отрезка, отсекаемого осями координат на этой прямой.

4.1.87. Изобразить множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки A (фокуса) и данной прямой (директрисы). Составить уравнение кривой, обозначив через p расстояние от фокуса до директрисы (систему координат выбрать так как указано на рис. 22).

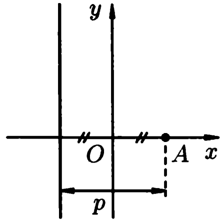


Рис. 22

4.1.88. Какие геометрические образы соответствуют уравнениям:

а) $2xy = 0$;

б) $x^2 + xy = 0$;

в) $x^2 + y^2 = 0$?

4.1.89. Проходит ли линия, заданная уравнением

$$x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 2y = 0$$

через начало координат?

4.1.90. Изобразить фигуру, заданную уравнением:

1) $x + y = 1$;

2) $|x| + |y| = 1$;

3) $x^2 + y^2 = 0$;

4) $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$;

5) $x + |x| = y + |y|$.

4.1.91. Симметрична ли фигура, заданная уравнением $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ относительно оси Oy? оси Ox?

4.1.92. Какая линия определяется параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^2, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = t - 4? \end{cases}$

§ 2. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Различные виды уравнения прямой

Каждая *прямая* на плоскости Oxy определяется линейным *уравнением первой степени с двумя неизвестными.* Обратно: каждое линейное уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет некоторую прямую на плоскости.

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом* имеет вид

$$y = kx + b, \tag{2.1}$$

где k — угловой коэффициент прямой (т. е. тангенс угла α, который прямая образует с положительным направлением оси Ox, $k = \operatorname{tg}\alpha$), b — ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

2. *Общее уравнение прямой*:

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.2}$$

где A, B и C — постоянные коэффициенты, причем A и B одновременно не обращаются в нуль ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Заметим, что $\bar{n} = (A; B)$ — нормальный вектор прямой ($\bar{n}$ перпендикулярен прямой). Частные случаи этого уравнения:

$Ax + By = 0$ ($C = 0$) — прямая проходит через начало координат;

$Ax + C = 0$ ($B = 0$) — прямая параллельна оси Oy;

$By + C = 0$ ($A = 0$) — прямая параллельна оси Ox;

$Ax = 0$ $(B = C = 0)$ — прямая совпадает с осью Oy;
$By = 0$ $(A = C = 0)$ — прямая совпадает с осью Ox.

3. *Уравнение прямой в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2.3}$$

где a и b — длины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно (рис. 23).

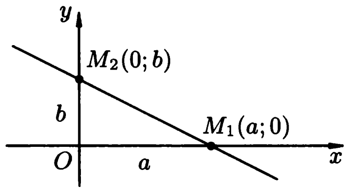


Рис. 23

4. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении*:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{2.4}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α — угол, образуемый прямой с осью Ox); $(x_0; y_0)$ — координаты данной точки. Уравнение (2.4) называют также *уравнением пучка прямых с центром в точке* $(x_0; y_0)$; *уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух прямых* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.5}$$

где λ — числовой множитель.

5. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1; y_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2)$, где $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$ имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.6}$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.7}$$

Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой (2.6) имеет вид $x = x_1$; если $y_1 = y_2$, то: $y = y_1$.

6. *Нормальное уравнение прямой*:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{2.8}$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α — угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ox (рис. 24).

Общее уравнение прямой (2.2) можно преобразовать в нормальное уравнение (2.8) путем умножения на *нормирующий множитель* $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$; знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена C (в общем уравнении прямой).

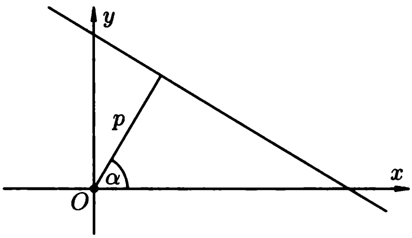


Рис. 24

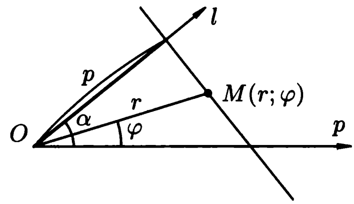


Рис. 25

7. *Уравнение прямой* в полярных координатах имеет вид

$$r\cos(\varphi-\alpha)=p, \tag{2.9}$$

r, φ, α, p — изображены на рисунке 25 (полярная система координат).

4.2.1. Построить прямую, заданную уравнением $2x-y-4=0$.

1. Для построения прямой достаточно знать координаты двух ее произвольных точек. Полагая в уравнении прямой, например, $x=0$, получим $y=-4$. Имеем одну точку $A(0;-4)$. Полагая $x=1$, получим $y=-2$. Отсюда вторая точка $B(1;-2)$. Осталось построить точки A и B и провести через них прямую (рис. 26).

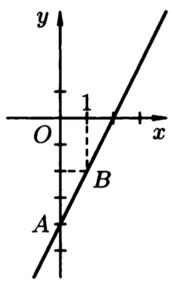


Рис. 26

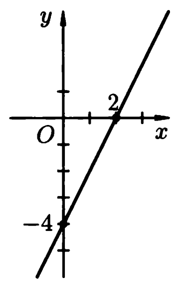


Рис. 27

2. Задачу можно решить иначе, используя уравнение прямой в отрезках. Приведем уравнение к виду (2.3). Для этого перенесем свободный член (-4) в правую часть уравнения и обе его части разделим на 4. Получаем $2x-y=4$, $\frac{2x}{4}-\frac{y}{4}=1$,

т. е. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$ — уравнение прямой в отрезках на осях. На оси Ox отложим 2 единицы вправо (от начала координат); на оси Oy отложим 4 единицы вниз. Получаем две точки на осях, через которые проводим прямую (рис. 27). ●

4.2.2. Записать уравнение прямой $y = 2x - 3$ в отрезках и построить ее.

4.2.3. Определить при каком значении α прямая $(\alpha^2 - \alpha)x + (2 + \alpha)y - 3\alpha + 1 = 0$

а) параллельна оси Ox;

б) проходит через начало координат.

4.2.4. Найти k из условия, что прямая $y = kx + 2$ удалена от начала координат на расстояние $\sqrt{3}$.

4.2.5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A\left(-2; \frac{2}{5}\right)$ и образующей с осью Ox угол, равный $\operatorname{arctg} 3$.

4.2.6. Уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$ представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения).

❍ Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим заданное уравнение относительно y. Получим $3y = 4x + 12$ и далее $y = \frac{4}{3}x + 4$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом; здесь $k = \frac{4}{3}$, $b = 4$.

Для получения уравнения прямой в отрезках перенесем свободный член $C = 12$ вправо и разделим обе части уравнения на -12. В результате получим $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$ — уравнение в отрезках на осях; здесь $a = -3$, $b = 4$.

Приведем исходное уравнение к нормальному виду (2.8). Для этого умножим обе части уравнения $4x - 3y + 12 = 0$ на нормирующий множитель $\lambda = \frac{1}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$, т. е. $\lambda = -\frac{1}{5}$. Перед корнем взят знак «минус», т. к. свободный член ($C = 12$) имеет знак «плюс». Получим $-\frac{1}{5}(4x - 3y + 12) = 0$, т. е. $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0$; здесь $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ $\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1\right)$, $p = \frac{12}{5}$, т. е. расстояние от $O(0; 0)$ до прямой равно 2,4. ●

4.2.7. Записать уравнение с угловым коэффициентом, в отрезках и нормальное для заданных прямых и определить на каком расстоянии от начала координат они находятся:

а) $2x - 3y + 6 = 0$;

б) $x + 2{,}5 = 0$;

в) $y = x - 1$;

г) $x + 5y = 0$.

4.2.8. Написать уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $A(0;2)$, $B(-3;7)$;

б) $A(2;1)$, $B(4;1)$.

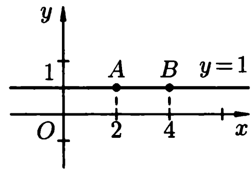


Рис. 28

○ а) Используем уравнение (2.6). Полагая в нем $x_1=0$, $y_1=2$, $x_2=-3$, $y_2=7$, получим $\frac{y-2}{7-2}=\frac{x-0}{-3-0}$, или $\frac{y-2}{5}=\frac{x}{-3}$, т. е. $-3y+6=5x$ или $5x+3y-6=0$.

б) Решаем аналогично: $\frac{y-1}{1-1}=\frac{x-2}{4-2}$. Так как $y_1=y_2$, заключаем, что $y-1=0$, $y=1$ есть уравнение прямой, проходящей через точки A и B. (Для наглядности построим точки и прямую в системе Oxy — см. рис. 28.) ●

4.2.9. Найти угловой коэффициент к прямой и ординату точки ее пересечения с осью Oy, зная, что прямая проходит через точки $A(1;1)$ и $B(-2;3)$.

4.2.10. Прямая проходит через точки $A(2;3)$ и $B(-4;-1)$, пересекает ось Oy в точке C. Найти координаты точки C.

4.2.11. Какую абсциссу имеет точка M, лежащая на прямой, проходящей через точки $A(-2;-2)$ и $B(-1;6)$, и имеющая ординату, равную 22?

4.2.12. Из пучка прямых, определяемых уравнением $y+3=k(x-2)$ выделить ту, которая проходит через точку $A(-2;5)$.

○ Подставим координаты точки A в уравнение прямой: $5+3=k(-2-2)$, получим $k=8:(-4)=-2$. Следовательно, искомое уравнение прямой есть $y+3=-2(x-2)$, т. е. $2x+y-1=0$. ●

4.2.13. Найти прямую, принадлежащую пучку $-4x+2y+1+\lambda(x-3y+2)=0$ и проходящую через точку $A(1;0)$ и написать ее уравнение.

4.2.14. Составить уравнение прямой в полярных координатах, если известно, что она проходит через точку $M\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$ и наклонена к полярной оси под углом $\frac{2}{3}\pi$.

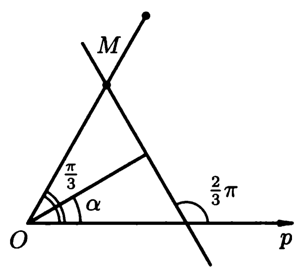


Рис. 29

○ Воспользуемся уравнением (2.9). Очевидно (см. рис. 29) $\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$. Тогда $p=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=$

$= 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, т. е. $p = \sqrt{3}$. Следовательно, уравнение искомой прямой есть $r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$. ●

4.2.15. Найти уравнение прямой:

а) образующей с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$ и пересекающей ось Oy в точке $(0; -6)$;

б) параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 2;

в) отсекающей на осях координат отрезки, равные 3 и 4.

Дополнительные задачи

4.2.16. Составить уравнение прямой, если точка $M(4; 2)$ является серединой ее отрезка, заключенного между осями координат.

4.2.17. Составить уравнение прямой, отсекающей на положительных полуосях координат равные отрезки, если длина отрезка, заключенного между осями координат, равна $7\sqrt{2}$.

4.2.18. Луч света, пройдя через точку $A(2; 3)$ под углом α к оси Ox, отразился от нее и прошел через точку $B(-5; 4)$. Найти угол α.

4.2.19. Луч света направлен по прямой $x - y - 1 = 0$. Определить точку встречи луча с осью Ox и уравнение прямой, по которой направлен отраженный луч.

4.2.20. При каких значениях α и β прямая $(\alpha - \beta)x + (2\alpha + \beta)y - 1 = 0$ отсекает на оси Ox отрезок, равный $\frac{1}{7}$, а на оси Oy — отрезок, равный $\frac{1}{2}$ (единиц масштаба).

4.2.21. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4; 4)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью $S = 4$.

4.2.22. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC с вершинами $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, $C(-2; 0)$.

4.2.23. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -4)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую.

4.2.24. Дан треугольник с вершинами $A(3; 2)$, $B(3; 8)$, $C(6; 2)$. Написать уравнения сторон треугольника.

4.2.25. Составить уравнение прямой, зная, что расстояние от нее до начала координат равно $\sqrt{2}$, а угол между перпендикуляром, опущнным из начала координат на прямую, и осью Ox, равен $\frac{3}{4}\pi$.

4.2.26. Найти площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x - 5y + 10 = 0$.

4.2.27. Составить (в полярных координатах) уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\left(4; \frac{\pi}{2}\right)$ и $M_2(4; 0)$.

4.2.28. Равнобедренная трапеция с основаниями 10 и 4 имеет острый угол $\frac{\pi}{4}$. Написать уравнение сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание, за ось Oy — ось симметрии трапеции.

4.2.29. Через середину отрезка AB, где $A(4; 0)$, $B(0; 6)$, провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок вдвое больший, чем на оси Oy и написать ее уравнение.

4.2.30. Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.

4.2.31. При каком значении C прямая $2x - 3y + C = 0$ пересекает ось Oy в точках с ординатами $b_1 = 2$; $b_2 = -3$?

4.2.32. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -1)$ и параллельной биссектрисе второго координатного угла.

4.2.33. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x - 2y + 3 = 0$ и $2x + y + 5 = 0$ и параллельную оси ординат и написать ее уравнение.

4.2.34. Через точку пересечения прямых $x + y - 6 = 0$ и $2x + y - 13 = 0$ провести прямую (не совпадающую с данными), отсекающую на осях равные отрезки и написать ее уравнение.

4.2.35. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(2; -6)$ и отсекает на осях Ox и Oy отрезки одинаковой длины (считая каждый отрезок направленным от начала координат).

4.2.36. Через точку $M(4; 3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3. Найти точки пересечения этой прямой с осями координат.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.2.37. Даны две точки $M_1(-3; 8)$ и $M_2(2; 2)$. На оси абсцисс найти такую точку M, чтобы ломаная M_1MM_2 имела наименьшую длину.

4.2.38. Из точки $A(-5; 6)$ выходит луч света под углом $\operatorname{arctg}(-2)$ к оси Ox и отражается от оси Ox, затем от оси Oy. Найти уравнения прямых, по которым направлены все три луча.

4.2.39. Доказать, что условие принадлежности трех точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ одной прямой можно записать в виде
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.2.40. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + y - 1 = 0$ и $x + 2y + 1 = 0$ и отсекающей на отрицательной части оси Oy отрезок, равный 2.

4.2.41. Какова должна быть зависимость между коэффициентами A и B, чтобы прямая $Ax + By + C = 0$ была наклонена к оси Ox под углом $\frac{3}{4}\pi$?

4.2.42. Найти уравнение прямой, содержащей биссектрису острого угла, образованного прямыми $y = \sqrt{3}x + 4$ и $y = 4$.

4.2.43. При каком значении α прямая $x + y + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$ проходит через начало координат?

4.2.44. Является ли уравнение $|x| + |y| = 0$ уравнением прямой?

4.2.45. Является ли уравнение $x^2 - y^2 = 0$ уравнением прямой, содержащей биссектрису второго координатного угла?

4.2.46. Под каким углом к положительному направлению оси Ox наклонены прямые $y = 1{,}5x$ и $y = -\sqrt{3}x$?

4.2.47. Какая из прямых $2x - 4y + 3 = 0$ и $x + y = 0$ отсекает на оси ординат отрезок большей длины?

4.2.48. Прямая $y = 3x + b$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $a = 4$. Чему равен параметр b?

4.2.49. Является ли уравнение $\frac{x}{6} - \frac{y}{3} = 1$ уравнением прямой в отрезках? Какие отрезки отсекает она на осях координат?

4.2.50. При каких значениях C площадь, ограниченная координатными осями и прямой $3x + 10y + C = 0$ равна 135 кв.ед.?

4.2.51. Каково уравнение семейства прямых, угловой коэффициент которых равен $-\frac{2}{3}$?

Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, пересечение прямых, расстояние от данной точки до данной прямой

Под *углом между прямыми в плоскости* понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованными этими прямыми.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то угол φ между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{2.10}$$

Условие параллельности прямых l_1 и l_2 имеет вид

$$k_1 = k_2, \tag{2.11}$$

а *условие их перпендикулярности*

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \tag{2.12}$$

(или $k_1 k_2 = -1$).

Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то величина φ угла между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|, \tag{2.13}$$

условие их параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (\text{или } A_1B_2 - A_2B_1 = 0), \tag{2.14}$$

условие их перпендикулярности

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{2.15}$$

Для *нахождения общих точек прямых* l_1 и l_2 необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases} \tag{2.16}$$

При этом:

если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то имеется *единственная точка пересечения прямых*;

если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ — прямые l_1 и l_2 не имеют общей точки, т. е. *параллельны*;

если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ — прямые имеют бесконечное множество общих точек, т. е. *совпадают*.

$\Rrightarrow$ *Расстоянием* d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Расстояние d определяется по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \tag{2.17}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ вычисляется по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{2.18}$$

4.2.52. Найти угол между прямыми:

1) $y = 2x - 3$ и $y = \frac{1}{2}x + 5$;

2) $2x - 3y + 10 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$;

3) $y = \frac{3}{4}x - 2$ и $8x + 6y + 5 = 0$;

4) $y = 5x + 1$ и $y = 5x - 2$.

1) Воспользуемся формулой (2.10). Подставляя в нее значения $k_1 = 2$ и $k_2 = \frac{1}{2}$, находим $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + 2\cdot\frac{1}{2}}\right| = \frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{2} = \frac{3}{4}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ ($\varphi \approx 37°$);

2) Подставим значения $A_1 = 2$, $B_1 = -3$, $A_2 = 5$, $B_2 = -1$ в формулу (2.13): $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{2\cdot(-1) - 5\cdot(-3)}{2\cdot 5 + (-3)\cdot(-1)}\right| = \left|\frac{-2+15}{10+3}\right| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

3) Здесь $k_1 = \frac{3}{4}$, найдем k_2. Для этого перейдем от $6y = -8x - 5$ к эквивалентному равенству $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{6}$. Здесь $k_2 = -\frac{4}{3}$. Так как $k_1 \cdot k_2 = -1$, то данные прямые (см. (2.12)) перпендикулярны. (По формуле (2.10) получаем: $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}\right| = \left|\frac{-\frac{25}{12}}{1-1}\right| = \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.)

4) $k_1 = 5$, $k_2 = 5$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0$. ●

4.2.53. Найти угол между двумя прямыми:

1) $3x + 2y - 1 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$;

2) $y = 3{,}5x - 3$ и $7x - 2y + 2 = 0$;

3) $x + 4y + 10 = 0$ и $5y - 3 = 0$;

4) $3x - 2y + 0{,}1 = 0$ и $2x + 3y - 5 = 0$.

4.2.54. Найти угол между прямыми:

а) $x - 2 = 0$ и $x - y + 1 = 0$;

б) $2x - 3y = 0$ и прямой, проходящей через точки $(5;0)$ и $(0;3)$.

4.2.55. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых:

1) $3x + 5y - 9 = 0$ и $10x - 6y + 4 = 0$;

2) $2x + 5y - 2 = 0$ и $x + y + 4 = 0$;

3) $2y = x - 1$ и $4y - 2x + 2 = 0$;

4) $x + 8 = 0$ и $2x - 3 = 0$;

5) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$ и $y = \frac{1}{2}x + 2$;

6) $x + y = 0$ и $x - y = 0$;

7) $y + 3 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$;

8) $y = 3 - 6x$ и $12x + 2y - 5 = 0$;

9) $2x + 3y = 8$ и $x + y - 3 = 0$;

10) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y - 1 = 0$ и $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y + 2 = 0$.

4.2.56. При каких значениях α следующие пары прямых: а) параллельны; б) перпендикулярны?

1) $2x - 3y + 4 = 0$ и $\alpha x - 6y + 7 = 0$;

2) $\alpha x - 4y + 1 = 0$ и $-2x + y + 2 = 0$;

3) $4x + y - 6 = 0$ и $3x + \alpha y - 2 = 0$;

4) $x - \alpha y + 5 = 0$ и $2x + 3y + 3 = 0$.

4.2.57. Через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 9 = 0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x + y + 6 = 0$. Составить ее уравнение.

◔ Найдем сначала точку M пересечения данных прямых. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0, \\ x + 2y - 9 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $4x = 4$. И далее, $x = 1$, $y = 4$, т. е. $M(1; 4)$. Угловой коэффициент прямой $2x + y - 6 = 0$ есть $k_1 = -2$. Следовательно, угловой коэффициент k прямой параллельной данной, есть $k = -2$ (см. (2.11)). По направлению прямой ($k = -2$) и точке $M(1; 4)$, ей принадлежащей, запишем уравнение искомой прямой: $y - 4 = -2(x - 1)$, т. е. $2x + y - 6 = 0$. ●

4.2.58. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 2)$:

а) параллельно прямой $y = 2x - 7$;

б) перпендикулярно прямой $x + 3y - 2 = 0$.

4.2.59. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $B(2; -3)$:

а) параллельно прямой, соединяющей точки $M_1(-4; 0)$ и $M_2(2; 2)$;

б) перпендикулярно прямой $x - y = 0$.

4.2.60. Показать, что уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, и параллельной прямой $Ax + By + C = 0$, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

4.2.61. Показать, что уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, и перпендикулярной к прямой $Ax + By + C = 0$, имеет вид $A(x - x_0) - B(y - y_0) = 0$.

4.2.62. Найти координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-3; 4)$ относительно прямой $4x - y - 1 = 0$.

◔ Точки M_1 и M_2 лежат на прямой M_1M_2, перпендикулярной прямой $4x - y - 1 = 0$, и одинаково удалены от (см. рис. 30, прямая l). Найдем уравнение прямой M_1M_2. Так как угловой коэффициент k_1 данной прямой равен 4, то угловой коэффициент k прямой M_1M_2 определяется равенствами $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{4}$. Поэтому уравнение прямой M_1M_2 есть

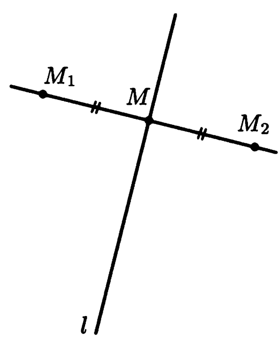


Рис. 30

$y-4=-\frac{1}{4}(x+3)$, т. е. $x+4y-13=0$. Найдем координаты точки M — точка пересечения прямой M_1M_2 и данной прямой:

$$\begin{cases} x+4y-13=0, \\ 4x-y-1=0. \end{cases}$$

Отсюда $x=1$, $y=3$, т. е. $M(1;3)$. Точка $M(1;3)$ делит отрезок M_1M_2 пополам. Из соотношений $1=\frac{-3+x}{2}$ и $3=\frac{4+y}{2}$ находим координаты x и y искомой точки M_2: $x=5$, $y=2$ и $M_2(5;2)$. ●

4.2.63. Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Найти площадь этого квадрата.

4.2.64. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Найти площадь квадрата.

4.2.65. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2)$ так, чтобы расстояние от этой прямой до точек $M_1(2;3)$ и $M_2(4;-5)$ были бы равны.

4.2.66. Найти геометрическое место точек, расстояние от которых до прямой $5x-12y-13=0$ равно 3.

4.2.67. Написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку $A(0;2)$ под углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой l_1: $x-2y+3=0$.

❍ Угловой коэффициент прямой l_1 равен $\frac{1}{2}$, т. е. $k_1=\frac{1}{2}$. Обозначим через k угловой коэффициент прямой l_2. Тогда, по формуле (2.10), имеем $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1=\left|\frac{k-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}k}\right|$. Из этого уравнения находим $k_2=3$ и $k_3=-\frac{1}{3}$. Задача имеет два решения. Для каждого случая напишем уравнение прямой, проходящей через точку A в заданном направлении: $y-2=3(x-0)$ и $y-2=-\frac{1}{3}(x-0)$, т. е. $3x-y+2=0$ и $x+3y-6=0$. ●

4.2.68. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x+4y-20=0$ и $6x+8y+5=0$.

❍ Возьмем на первой прямой произвольную точку A. Пусть, например, $x=0$, тогда $y=5$, т. е. $A(0;5)$. По формуле (2.17) находим расстояние d от точки A до второй прямой:

$$d=\left|\frac{6\cdot 0+8\cdot 5+5}{\sqrt{6^2+8^2}}\right|=\frac{45}{10}=4{,}5.$$

●

4.2.69. Найти расстояние между прямыми $2x-3y+8=0$ и $4x-6y=10$.

4.2.70. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами $A(4;-3)$, $B(-2;6)$ и $C(5;4)$.

Дополнительные задачи

4.2.71. Даны уравнения оснований трапеции: $3x-4y-15=0$, $3x-4y-35=0$. Найти длину ее высоты.

4.2.72. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;5)$ на расстоянии пяти единиц от начала координат.

4.2.73. Найти координаты точки, равноудаленной от двух точек $(5;4)$ и $(-3;2)$ и лежащей на прямой $x-3y+8=0$.

4.2.74. Даны две вершины треугольника $A(2;-2)$, $B(-6;2)$ и точка $O(1;2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C.

4.2.75. Составить уравнение прямой, содержащей высоту BD в треугольнике с вершинами $A(-3;2)$, $B(5;-2)$, $C(0;4)$.

4.2.76. Найти координаты проекции точки $A(1;-3)$ на прямую $2x-y+5=0$.

4.2.77. Найти координаты точки, симметричной точке $A(-2;-2)$ относительно прямой $x+y-4=0$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.2.78. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $x+2y-6=0$ относительно точки $A(4;2)$.

4.2.79. Доказать, что если две прямые параллельны, то их уравнения можно представить в таком виде, что они будут отличаться только свободными членами.

4.2.80. Найти уравнения прямых, на которых лежат биссектрисы углов между прямыми $3x-4y+12=0$ и $5x+12y-2=0$.

4.2.81. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;5)$ на расстоянии 2 единиц от точки $B(0;-1)$.

4.2.82. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;-1)$ так, что середина ее отрезка между прямыми $2x-3y-6=0$ и $2x-3y+6=0$ лежала бы на прямой $2x+15y-42=0$.

4.2.83. Две смежные вершины квадрата имеют координаты $(1;4)$ и $(4;5)$. Найти координаты двух других вершин.

4.2.84. Дан треугольник с вершинами $A(4;6)$, $B(-3;0)$, $C(2;-3)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат биссектриса AD и высота CE, и величину острого угла между ними.

4.2.85. Можно ли подобрать коэффициенты λ_1 и λ_2 так, чтобы прямые $5x-3y+1=0$ и $\lambda_1 x+\lambda_2 y-2=0$ совпали?

4.2.86. Какой угол образует прямая $\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{3}=1$ с положительным направлением оси Oy? оси Ox?

4.2.87. Какая должна быть зависимость между коэффициентами a и b, чтобы прямая $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ образовала с осью Oy угол 30°? 60°?

4.2.88. Какие из уравнений:

а) $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + 1 = 0$,

б) $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}y - 2 = 0$,

в) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$,

г) $x - 3{,}2 = 0$,

д) $y + 1 = 0$

являются уравнениями прямых в нормальном виде?

4.2.89. При каком значении α прямая $x + y - \alpha = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$?

4.2.90. Под каким углом к оси Ox надо направить луч из точки $A(2;4)$, чтобы отраженный луч прошел через точку $B(-5;3)$?

4.2.91. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a и b, чтобы прямые $ax + by + 1 = 0$, $x - y + 5 = 0$ и $y = 1$ проходили через одну точку?

4.2.92. При каком значении α прямые $(\alpha + 1)x + (3 - \alpha)y - 8 = 0$ и $(\alpha - 3)x + (2\alpha - 3)y = 0$ взаимно перпендикулярны?

4.2.93. На прямой $2x - y + 4 = 0$ найти точку, координаты которой связаны соотношением $x + y - 7 = 0$.

4.2.94. Каково взаимное положение двух прямых, угловые коэффициенты которых равны $-2{,}5$ и $-0{,}4$?

4.2.95. Как установить, принадлежит ли точка $(x_3; y_3)$ прямой, уравнение которой $Ax + By + C = 0$?

Смешанные задачи на прямую

4.2.96. Найти площадь треугольника, образованного прямыми: $2x + y + 4 = 0$, $x + 7y - 11 = 0$ и $3x - 5y - 7 = 0$.

4.2.97. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;1)$:

а) параллельно оси Oy;

б) образующей с осью Ox угол $\frac{3}{4}\pi$;

в) перпендикулярно вектору $\bar{a} = (4;2)$;

г) параллельно биссектрисе первого координатного угла;

д) перпендикулярно прямой $6x - y + 2 = 0$;

е) отсекающей на оси Oy отрезок длиной 5.

4.2.98. Через точку пересечения прямых $3x + 2y - 4 = 0$ и $x - 5y + 8 = 0$ проведены прямые, одна из которых проходит через начало координат, а другая параллельна оси Ox. Составить их уравнения.

4.2.99. Какой угол образует с осью Ox прямая, проходящая через точку $D(1;3)$ и точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-1;4)$, $B(2;3)$, $C(5;8)$?

4.2.100. Дан четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(3;5)$, $B(6;6)$, $C(5;3)$, $D(1;1)$. Найти:

а) координаты точки пересечения диагоналей;

б) угол между диагоналями.

4.2.101. Луч света, пройдя через точки $A(4;6)$ и $B(5;8)$, упал на прямую $x-2y+2=0$ и отразился от нее. Составить уравнение прямой, по которой направлен отраженный луч.

4.2.102. Известны вершины треугольника $A(-4;-2)$, $B(0;1)$, $C(2;-1)$. Найти расстояние от начала координат до точки пересечения медианы, проведенной из вершины A, с высотой, проведенной из вершины B.

4.2.103. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC, если задана его вершина $A(1;3)$ и уравнения медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.

4.2.104. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $A(-1;2)$ на прямую $3x-5y-21=0$.

4.2.105. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;5)$, $B(5;-1)$, $C(8;3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения медиан треугольника перпендикулярно к прямой $x+y+4=0$.

4.2.106. Известны уравнения прямых, на которых лежат две стороны ромба: $x+2y-4=0$, $x+2y-10=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x-y+2=0$. Найти координаты вершин ромба.

4.2.107. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1;-2)$, $B(0;5)$, $C(-6;5)$. Найти координаты центра описанной около треугольника окружности.

4.2.108. Даны две вершины равностороннего треугольника ABC: $A(-6;0)$, $B(0;0)$. Найти координаты

а) третьей вершины C;

б) центра вписанной в треугольник окружности.

4.2.109. Найти уравнения прямых, на которых лежат три стороны квадрата, зная, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x+3y-12=0$, концы которого лежат на осях координат.

4.2.110. Написать уравнение траектории движения точки $M(x;y)$, движущейся так, что сумма расстояний от нее до прямых $2x-y=0$ и $x+2y=0$ остается постоянной и равной $\sqrt{5}$.

4.2.111. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная уравнения двух высот: $7x-2y-1=0$ и $2x-7y-6=0$ и вершину $A(3;-4)$.

4.2.112. Даны вершины треугольника $A(2;-2)$, $B(3;5)$; $C(6;1)$. Найти:

1) длины сторон AC и BC;

2) уравнения прямых, на которых лежат стороны BC и AC;

3) уравнение прямой, на которой лежит высота, проведенная из точки B;

10 – 2361

4) длину этой высоты;

5) уравнение прямой, на которой лежит медиана, проведенная из точки A;

6) длину этой медианы;

7) уравнение прямой, на которой лежит биссектрисса угла C;

8) центр тяжести треугольника;

9) площадь треугольника;

10) угол C.

Более сложные задачи

4.2.113. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $x + y - 2 = 0$ и $7x - y + 4 = 0$ и точка $(3; 5)$ на его основании. Найти уравнение прямой, на которой лежит основание.

4.2.114. Даны координаты середин сторон треугольника: $A(1; 2)$, $B(7; 4)$, $C(3; -4)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

4.2.115. Даны уравнения $4x - 3y - 17 = 0$ и $4x - 3y + 3 = 0$ двух сторон квадрата и одна из его вершин $A(2; -3)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат две другие стороны квадрата.

4.2.116. Уравнение одной из сторон угла есть $4x - 3y + 9 = 0$, уравнение его биссектрисы есть $x - 7y + 21 = 0$. Написать уравнение прямой, на которой лежит другая сторона угла.

4.2.117. Даны вершины треугольника $A(-1; -1)$, $B(1; 3)$, $C(4; -1)$. Из вершины B опущена высота. К какой из сторон ближе расположена середина этой высоты?

4.2.118. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $3x - 4y - 10 = 0$ и отстоящей от нее на расстоянии 3 единицы.

4.2.119. Показать, что биссектрисы углов, образованных прямыми $3x + 4y - 9 = 0$ и $12x + 9y - 8 = 0$, перпендикулярны друг другу.

4.2.120. Через точку $A(r_1; \varphi_1)$ проведена прямая, образующая с полярной осью угол θ. Составить уравнение этой прямой.

4.2.121. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная одну его вершину $A(2; -7)$, а также уравнение прямых, на которой лежат высота $3x + y + 11 = 0$ и медиана $x + 2y + 7 = 0$, проведенные из различных вершин.

§ 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

⇒ Линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных x и y, т. е. уравнениям вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \tag{3.1}$$

называются *кривыми второго порядка*.

Окружность

⇛ *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки A этой же плоскости на одно и тоже расстояние $R > 0$. Точка A называется *центром*, а R — *радиусом* окружности.

В прямоугольной системе координат уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \tag{3.2}$$

где $(a;b)$ — координаты ее центра, (рис. 31). Уравнение (3.2) называется *каноническим уравнением окружности.* В частности, если $a=0$, $b=0$ (т.е. центр окружности совпадает с началом координат), то уравнение (3.2) имеет вид

$$x^2+y^2=R^2. \tag{3.3}$$

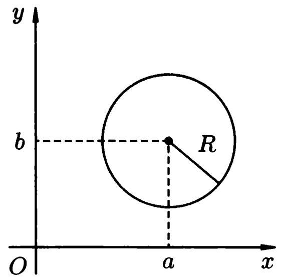


Рис. 31

Общее уравнение второй степени (3.1) определяет окружность, если $A=C\neq 0$ и $B=0$.

4.3.1. Найти координаты центра и радиус окружности:

1) $x^2+y^2-4x+8y-16=0$;

2) $9x^2+9y^2+42x-54y-95=0$;

◔ 1) Выделяя полные квадраты в левой части данного уравнения, приведем его к виду (3.2):

$$x^2-4x+4-4+y^2+8y+16-16-16=0,$$

т.е. $(x-2)^2+(y+4)^2=6^2$. Центр окружности находится в точке $(2;-4)$, а радиус равен 6.

2) Преобразуем уравнение к виду (3.2): разделив обе части уравнения на 9, находим $x^2+y^2+\frac{14}{3}x-6y-\frac{95}{9}=0$. И далее, $x^2+\frac{14}{3}x+\left(\frac{7}{3}\right)^2+y^2-6y+9-\frac{49}{9}-9-\frac{95}{9}=0$, т.е.

$\left(x+\frac{7}{3}\right)^2+(y-3)^2=25$. Итак, $R=5$, центр окружности — точка $\left(-\frac{7}{3};3\right)$. ●

4.3.2. Найти координаты центра и радиус окружности:
а) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$;
б) $3x^2+3y^2+6x-4y-2=0$.

4.3.3. Написать уравнения касательных к окружности $x^2+y^2-6x+4y-12=0$, проведенных из точки $M(0;3)$.

◐ Уравнения касательных будем искать в виде уравнений прямых с угловыми коэффициентами: $y=kx+3$. Уравнение окружности приведем к каноническому виду (3.2): $(x-3)^2+(y+2)^2-9-4-12=0$, т.е. $(x-3)^2+(y+2)^2=25$. Для нахождения общих точек прямой и окружности решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=kx+3,\\ (x-3)^2+(y+2)^2=25. \end{cases}$$

Имеем: $(x-3)^2+(kx+3+2)^2=25$, т.е. $x^2-6x+9+k^2x^2+10kx+25=25$, поэтому $(k^2+1)x^2+(10k-6)x+9=0$. Так как прямая касается окружности, то это уравнение имеет единственное решение. Следовательно, его дискриминант равен нулю, т.е. $(5k-3)^2-9(k^2+1)=0$, или $16k^2-30k=0$, откуда $k_1=0$, $k_2=\frac{15}{8}$. Значит, $y=3$ и $y=\frac{15}{8}x+3$ — искомые уравнения. ●

4.3.4. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $(4;-2)$.

4.3.5. Найти уравнения касательных к окружности $(x-4)^2+(y-2)^2=4$, проведенных из начала координат.

4.3.6. Найти центр и радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами $3x+4y-12=0$, $4x-3y+12=0$, $y=0$.

Указание. Центр окружности равноудален от сторон треугольника.

4.3.7. Написать уравнение окружности, проходящей через точки: $(-1;3)$, $(0;2)$, $(1;-1)$.

◐ Уравнение окружности ищем в виде (3.2):

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Подставляя в это уравнение координаты данных точек, получим три уравнения для определения a, b и R:

$$\begin{cases} (-1-a)^2+(3-b)^2=R^2,\\ a^2+(2-b)^2=R^2,\\ (1-a)^2+(-1-b)^2=R^2. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем $(-1-a)^2+(3-b)^2 = a^2 + (2-b)^2$, т.е. $1+2a+a^2+9-6b+b^2 = a^2+4-4b+b^2$, поэтому $a-b=-3$; из второго и третьего уравнений системы получаем $a^2+(2-b)^2 = (1-a)^2+(-1-b)^2$, отсюда $a-3b=-1$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} a-b=-3, \\ a-3b=-1, \end{cases}$$

находим $a=-4$, $b=-1$. Подставляя эти значения a и b во второе уравнение первоначальной системы, находим: $16+9=R^2$, т.е. $R^2=25$. Искомое уравнение есть $(x+4)^2+(y+1)^2=25$.

Заметим, что уравнение окружности можно искать в виде $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$. Так как данные три точки принадлежат окружности, то подставив их координаты в записанное уравнение, получим систему трех уравнений:

$$\begin{cases} 10-2D+6E+F=0, \\ 4+4E+F=0, \\ 2+2D-2E+F=0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $D=4$, $E=1$, $F=-8$ и искомое уравнение окружности $x^2+y^2+8x+2y-8=0$. ●

4.3.8. Написать уравнение окружности, если:

а) центр находится в точке $C(-2;0)$, а радиус $R=2$;

б) центр лежит в точке $C(-4;5)$ и окружность проходит через точку $M(-1;1)$;

в) концы одного из диаметров имеют координаты $(0;4)$ и $(6;0)$.

4.3.9. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(3;5)$, $B(5;-1)$, если ее центр лежит на прямой $x-y-2=0$.

Дополнительные задачи

4.3.10. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2-8x+12=0$.

4.3.11. Найти уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2+y^2-6x-8y+16=0$ и $x^2+y^2+10x+4y+13=0$.

4.3.12. Найти точки пересечения окружности $(x-2)^2+(y+3)^2=20$ и прямой $y=x-3$.

4.3.13. Найти уравнение общей хорды окружностей: $(x-1)^2+(y-3)^2 = 4$, $x^2+y^2-6x-10y+30=0$.

4.3.14. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(2;-2)$.

4.3.15. Составить уравнение окружности, касающейся прямых $2x+y-5=0$ и $2x+y+15=0$, причем одной из них — в точке $A(2;1)$.

4.3.16. Найти угол между радиусами окружности $(x-4)^2+(y+3)^2-25=0$, проведенными в точках ее пересечения с осью Ox.

4.3.17. Найти при каких значениях k прямая $y = kx$ пересекает окружность $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$; касается этой окружности.

4.3.18. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 = 5$, параллельных прямой $y = 2x + 1$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.3.19*. Найти уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в точке $(x_0; y_0)$.

4.3.20*. Найти длины отрезков касательных, проведенных из точки $A(6;3)$ к окружности $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ от этой точки до точек касания.

4.3.21*. Найти уравнение окружности, симметричной окружности $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$ относительно прямой $x + y - 5 = 0$.

4.3.22. Можно ли провести окружность через четыре точки: $(1;-2)$, $(5;2)$, $(5;-6)$, $(7;1)$?

4.3.23. Пройдет ли окружность с центром в точке $(-3;4)$ и радиусом $R = 5$ через начало координат?

4.3.24. Какие из точек $A(-2;7)$, $B(1;5)$, $C(2;3{,}9)$ лежат внутри круга, ограниченного окружностью $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$?

4.3.25*. Написать уравнение множества окружностей, образованного параллельным переносом окружности $x^2+y^2+10x-6y+25 = 0$ вдоль оси Ox.

4.3.26. Дано множество концентрических окружностей $x^2 + y^2 + 12y + C = 0$. Найти уравнение той окружности, радиус которой равен 10.

Эллипс

$\Rightarrow$ *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.4}$$

где a — ***большая полуось***, b — ***малая полуось*** эллипса. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где c — половина расстояния между фокусами (рис. 32). Числа a, b и c связаны соотношенем

$$c^2 = a^2 - b^2. \tag{3.5}$$

Точки A, B, C, D называются ***вершинами*** эллипса, точка O — ***центром*** эллипса, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M эллипса до его фокусов называются ***фокальными радиусами*** этой точки.

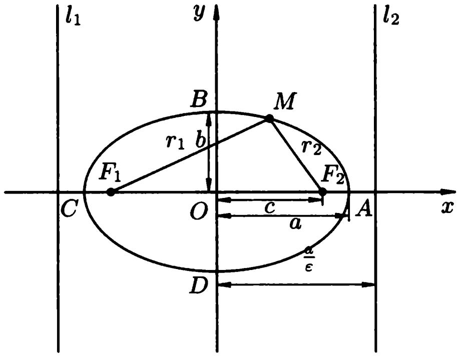


Рис. 32

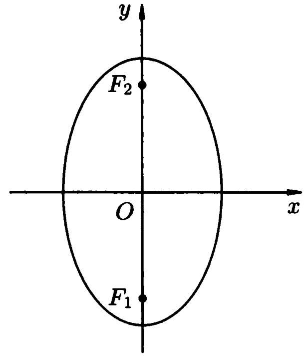


Рис. 33

⇛ *Эксцентриситетом* ε эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ (расстояния между фокусами) к большой оси $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (\varepsilon < 1, \text{ т. к. } c < a). \tag{3.6}$$

Фокальные радиусы определяются формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x \quad (r_1 + r_2 = 2a). \tag{3.7}$$

⇛ *Директрисами эллипса* называются прямые l_1 и l_2 параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$; уравнения директрис:

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{3.8}$$

Замечания. 1) Если $a = b$,то уравнение (3.4) определяет окружность $x^2 + y^2 = a^2$;

2) если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то эллипс имеет вид, изображенный на рисунке 33: В этом случае:

$$b > a, \quad c^2 = b^2 - a^2, \tag{3.9}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{b}, \tag{3.10}$$

уравнения директрис $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$;

3) уравнение эллипса с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{3.11}$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты центра эллипса (рис. 34);

4) уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi]$$

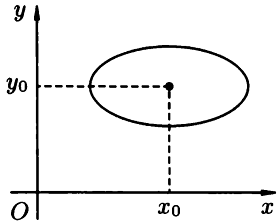


Рис. 34

являются *параметрическими уравнениями эллипса.*

4.3.27. Показать, что уравнение $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ определяет эллипс, найти его оси, координаты центра и эксцентриситет.

❍ Преобразуем данное уравнение кривой. Так как

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=4(x^2-2x)+3(y^2+4y)-32=$$
$$=4(x^2-2x+1-1)+3(y^2+4y+4-4)-32=$$
$$=4(x-1)^2-4+3(y+2)^2-12-32,$$

то уравнение можно переписать в виде $4(x-1)^2+3(y+2)^2=48$, т.е. $\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$. Получили уравнение вида (3.11); его центр симметрии имеет координаты $(1;-2)$. Из уравнения находим: $a^2=12$, $a=2\sqrt{3}$ и $b^2=16$, $b=4$ $(b>a)$. Поэтому $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-12}=2$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$. ●

4.3.28. Дано уравнение эллипса $24x^2+49y^2=1176$. Найти:

1) длины его полуосей;

2) координаты фокусов;

3) эксцентриситет эллипса;

4) уравнения директрис и расстояние между ними;

5) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12.

❍ Запишем уравнение эллипса в виде (3.4), разделив обе его части на 1176:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1.$$

1) Отсюда $a^2=49$, $b^2=24$, т.е. $a=7$, $b=2\sqrt{6}$.

2) Используя соотношение (3.5), находим $c^2=7^2-(2\sqrt{6})^2=25$, $c=5$. Следовательно, $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$.

3) По формуле (3.6) находим: $\varepsilon = \frac{5}{7}$.

4) Уравнения директрис (3.8) имеют вид $x=\pm\frac{7}{\frac{5}{7}}$, т.е. $x=\frac{49}{5}$ и $x=-\frac{49}{5}$; расстояние между ними $d=\frac{49}{5}-\left(-\frac{49}{5}\right)=\frac{98}{5}=19{,}6$.

5) По формуле $r_1 = a + \varepsilon x$ находим абсциссу точек, расстояние от которых до точки F_1 равно 12: $12 = 7 + \frac{5}{7}x$, т.е. $x = 7$. Подставляя значение x в уравнение эллипса, найдем ординаты этих точек: $24 \cdot 49 + 49y^2 = 1176$, $49y^2 = 0$, $y = 0$. Условию задачи удовлетворяет точка $A(7; 0)$. ●

4.3.29. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

4.3.30. Составить уравнение эллипса, зная, что:

1) его большая полуось равна 10 и фокусы суть $F_1(-6; 0)$, $F_2(10; 0)$;

2) $a = 5$, $F_1(-3; 5)$, $F_2(3; 5)$.

4.3.31. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2; -4\sqrt{3})$ и $M_2(-1; 2\sqrt{15})$.

○ Уравнение эллипса ищем в виде (3.4)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Так как эллипс проходит через точки M_1 и M_2, то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса: $\frac{4}{a^2} + \frac{48}{b^2} = 1$ и $\frac{1}{a^2} + \frac{60}{b^2} = 1$. Умножая второе равенство на (-4) и складывая с первым, находим $-\frac{192}{b^2} = -3$, т.е. $b^2 = 64$. Подставляя найденное значение b^2 в первое уравнение, получаем $\frac{4}{a^2} + \frac{48}{64} = 1$, откуда $a^2 = 16$. Таким образом, искомое уравнение эллипса есть $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$. ●

4.3.32. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox, симметрично относительно начала координат, если:

1) задана точка $M_1(2\sqrt{3}; 1)$ эллипса и его малая полуось равна 2;

2) заданы две точки эллипса $M_1(0; 7)$ и $M_2(8; 0)$;

3) расстояние между фокусами равно 24 и большая ось равна 26;

4) эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{7}{25}$ и заданы фокусы $(\pm 7; 0)$.

4.3.33. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox, симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) $M_1(2\sqrt{3}; 0{,}4\sqrt{10})$ и $M_2\left(-\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ — точки эллипса;

2) точка $M(3; -2\sqrt{3})$ принадлежит эллипсу, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

3) $2a = 20$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

4) расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5.

4.3.34. Найти уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярной прямой $x - y + 50 = 0$.

◑ Уравнение касательной будем искать в виде $y = kx + c$. Ее угловой коэффициент k найдем из условия $k \cdot k_1 = -1$ перпендикулярности прямых, где k_1 — угловой коэффициент прямой $x - y + 50 = 0$. Так как $k_1 = 1$, то $k = -1$, уравнение касательной к эллипсу имеет вид $y = -x + c$. Общие точки прямой и эллипса находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1, \\ y = -x + c. \end{cases}$$

Получаем $\frac{x^2}{20} + \frac{x^2 - 2cx + c^2}{5} = 1$, т. е. $5x^2 - 8cx + 4c^2 - 20 = 0$. Уравнение имеет единственное решение (прямая касается эллипса, т. е. имеет с ним единственную общую точку) лишь в случае, когда его дискриминант равен нулю, т. е.

$$64c^2 - 4 \cdot 5(4c^2 - 20) = 0$$

или $4c^2 - 5(c^2 - 5) = 0$. Значит, есть два решения: $c_1 = 5$ и $c_2 = -5$. Условию задачи удовлетворяют две касательные: $y = -x + 5$ и $y = -x - 5$. ●

4.3.35. При каких значениях α прямая $y = x - \alpha$ пересекает эллипс $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$? Касается его?

4.3.36. Эллипс касается оси Oy в точке $A(0; 2)$ и пересекает ось Ox в точках $B(4; 0)$ и $C(10; 0)$. Составить уравнение эллипса, если оси его параллельны осям координат.

4.3.37. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Oy, а малая ось равна $2\sqrt{3}$. Каждый из фокусов равноудален от центра эллипса и от ближайшего конца фокальной оси.

◑ Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b > a$. По условию задачи $2a = 2\sqrt{3}$, т. е. $a = \sqrt{3}$, и $c = \frac{b}{2}$. Так как

$c^2 = b^2 - a^2$ (3.9), то получаем: $\frac{b^2}{4} = b^2 - 3$, т.е. $b^2 = 4$. Таким образом, уравнение эллипса есть $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. ●

4.3.38. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Oy, симметрично относительно начала координат, если:
1) его полуоси равны 5 и 8;
2) $2c = 24$, $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

Дополнительные задачи

4.3.39. Найти длину диаметра (хорда, проходящая через центр) эллипса $3x^2 + 8y^2 = 22$, делящего угол между осями координат пополам.

4.3.40. Найти координаты точек эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$, для которых расстояние от левого фокуса в два раза больше расстояния от правого фокуса.

4.3.41. Найти длину хорды эллипса $x^2 + 10y^2 - 10 = 0$, проходящей через его фокус параллельно малой оси.

4.3.42. Найти длину хорды эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{44} = 1$, направленной по диагонали прямоугольника, построенного на осях эллипса.

4.3.43. Найти координаты точек эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, в которых фокальные радиусы перпендикулярны.

4.3.44. Определить траекторию перемещения точки M, которая при своем движении остается одинаково удаленной от точки $A(2;0)$ и от окружности $x^2 + y^2 = 16$.

4.3.45. Определить траекторию перемещения точки M, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1;0)$, чем к прямой $x - 8 = 0$.

4.3.46. В эллипс $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной эллипса. Найти координаты двух других вершин треугольника.

4.3.47. В эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписан квадрат так, что стороны его параллельны осям эллипса. Найти площадь квадрата.

4.3.48. Найти уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 2y^2 = 3$, параллельных прямой $x - 2y + 1 = 0$.

4.3.49. Найти координаты точки эллипса $4x^2 + 9y^2 - 72 = 0$, наиболее удаленной от прямой $2x - 3y - 1 = 0$, вычислить расстояние от этой точки до данной прямой.

4.3.50. Найти координаты точки эллипса $9x^2 + 25y^2 = 450$, расстояние от которой до правого фокуса в 4 раза больше расстояния до левого фокуса.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.3.51. Вывести условие, при котором прямая $Ax+By+C=0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

4.3.52. Доказать оптическое свойство эллипса: луч света, выходящий из одного фокуса эллипса, отразившись от него, проходит через второй фокус.

Указание. показать, что касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.

4.3.53. Эллипс, симметричный относительно осей прямоугольной системы координат, касается двух прямых $x+2y-\sqrt{39}=0$ и $x-3y+7=0$. Найти его уравнение.

4.3.54. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Найти уравнение кривой, описываемой фиксированной точкой M этого отрезка.

4.3.55. Доказать, что отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

4.3.56. Чему равен эксцентриситет земного меридиана, имеющего форму эллипса, отношение осей которого равно $\frac{299}{300}$?

4.3.57. Сколько касательных можно провести к эллипсу $4x^2+5y^2-{}$ $-80=0$ из точки $M_1(0;4)$, $M_2(1;2)$, $M_3(5;3)$?

4.3.58. Чему равен эксцентриситет эллипса, у которого малая ось равна расстоянию между фокусами?

4.3.59. Чему равен периметр четырехугольника, вершины которого совпадают с вершинами эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$?

Гипербола

$\Rrightarrow$ *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек этой же плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3.12}$$

где a — ***действительная***, b — ***мнимая полуось*** гиперболы. Числа $2a$ и $2b$ называются соответственно *действительной* и *мнимой осями* гиперболы. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, c — половина расстояния

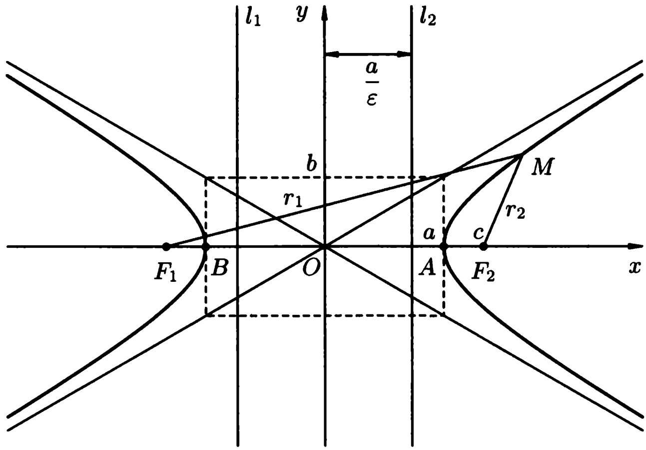


Рис. 35

между фокусами (рис. 35). Числа a, b и c связаны соотношенем

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{3.13}$$

Точки A и B называются ***вершинами*** гиперболы, точка O — ***центром*** гиперболы, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M гиперболы до ее фокусов называются ***фокальными радиусами*** этой точки.

⇛ Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ $\quad (\varepsilon > 1,\ \text{т. к. } c > a).$ (3.14)

называется ***эксцентриситетом*** гиперболы.

Фокальные радиусы определяются формулами: для точек правой ветви гиперболы:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = -a + \varepsilon x; \tag{3.15}$$

для точек левой ветви:

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{3.16}$$

⇛ Прямоугольник, центр которого совпадает с точкой O, а стороны равны и параллельны осям гиперболы называется ***основным прямоугольником гиперболы***. Диагонали основного прямоугольника гиперболы лежат на двух прямых, называемых ***асимптотами гиперболы***; они определяются уравнениями

$$y = \pm\frac{b}{a}\,x. \tag{3.17}$$

⇛ Две прямые l_1 и l_2, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$, называются ***директрисами гиперболы***. Их уравнения

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{3.18}$$

Замечания. 1) Если $a = b$, то гипербола (3.12) называется ***равносторонней (равнобочной)***. Ее уравнение принимает вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{3.19}$$

2) если фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{3.20}$$

Эксцентриситет этой гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{b}$, асимптоты определяются уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$, а уравнения директрис $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$. Гипербола (3.20) называется ***сопряженной*** гиперболе (3.12); она имеет вид, изображенный на рисунке 36;

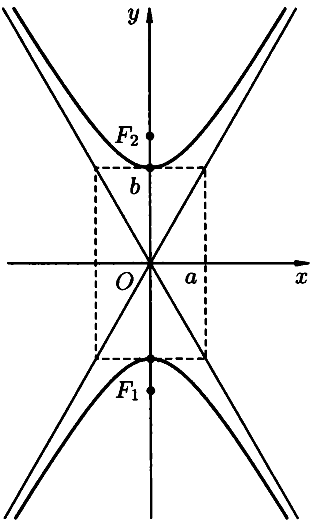


Рис. 36

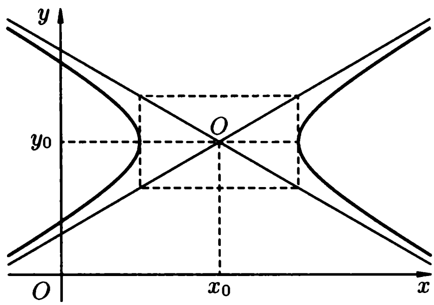


Рис. 37

3) уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{3.21}$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты центра гиперболы (рис. 37).

4.3.60. Дано уравнение гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$. Найти:

1) длины его полуосей;

2) координаты фокусов;

3) эксцентриситет гиперболы;

4) уравнения асимптот и директрис;

5) фокальные радиусы точки $M(3; 2{,}5)$.

◐ Разделив обе части уравнения на 20, приведем уравнение гиперболы к каноническому виду (3.12):

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Отсюда:

1) $a^2 = 4$, $b^2 = 5$, т. е. $a = 2$, $b = \sqrt{5}$;

2) используя соотношение (3.13), находим $c^2 = 4 + 5$, т. е. $c = 3$. Отсюда находим фокусы гиперболы: $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$;

3) по формуле (3.14) находим $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

4) уравнения асимптот и директрис найдем по формулам (3.17) и (3.18): $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ и $x = \pm\frac{4}{3}$;

5) точка M лежит на правой ветви гиперболы ($x = 3 > 0$), воспользуемся формулами (3.15): $r_1 = 2 + \frac{3}{2} \cdot 3 = 6{,}5$, $r_2 = -2 + \frac{3}{2} \cdot 3 = 2{,}5$. ●

4.3.61. Составить уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

◐ Искомое уравнение гиперболы имеет вид (3.20). Согласно условию $2c = 10$, $c = 5$; $2b = 8$, $b = 4$. Из соотношения (3.13) найдем мнимую полуось a: $25 = a^2 + 16$, $a^2 = 9$, $a = 3$. Получаем $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ — уравнение гиперболы. ●

4.3.62. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) $2c = 10$, $a = 3$;

2) $c = 3$, $\varepsilon = 1{,}5$;

3) $b = 6$, уравнения асимптот $y = \pm\frac{5}{3}x$.

4.3.63. Написать каноническое уравнение гиперболы, если:

1) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$;

2) $\varepsilon = \frac{3}{2}$ и расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$;

3) $\varepsilon = \sqrt{2}$ и точка $M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$ лежит на гиперболе.

4.3.64. Найти уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-2; 4)$ и $F_2(12; 4)$, а длина мнимой оси равна 6.

◐ Центр гиперболы лежит на прямой $y = 4$, параллельной оси Ox. Уравнение гиперболы имеет вид (3.21). По условию $2b = 6$, $b = 3$. Расстояние между фокусами равно 14, т. е. $2c = 14$, $c = 7$. Используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, находим a: $49 = a^2 + 9$, $a = 2\sqrt{10}$. Центр гиперболы делит расстояние между фокусами пополам. Поэтому $x_0 = \dfrac{-2+12}{2} = 5$, $y_0 = \dfrac{4+4}{2} = 4$. Записываем уравнение гиперболы: $\dfrac{(x-5)^2}{40} - \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$. ●

4.3.65. Найти каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, проходящей через точки $M_1(6;-1)$ и $M_2(-8;-2\sqrt{2})$.

4.3.66. Найти уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, зная, что ее мнимая полуось равна 2 и гипербола проходит через точку $M(4;-\frac{2\sqrt{3}}{3})$. Найти расстояние от точки M до правого фокуса.

4.3.67. Найти угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

○ Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm\frac{b}{a}x$. Найдем отношение $\frac{b}{a}$, воспользовавшись формулами (3.13), (3.14) и условием $\varepsilon = 2$: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Отсюда $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \varepsilon^2 - 1$, т.е. $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2-1}$. Имеем: $\frac{b}{a} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Стало быть, уравнения асимптот гиперболы есть $y = \sqrt{3}x$ и $y = -\sqrt{3}x$. Угол φ между асимптотами найдем по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-3}\right| = \sqrt{3}$, $\varphi = 60^\circ$. ●

4.3.68. Составить уравнения асимптот гиперболы $\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$, построить ее.

4.3.69. Дан эллипс $5x^2 + 8y^2 = 40$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса.

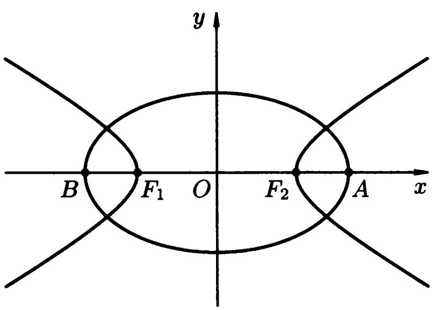


Рис. 38

○ Найдем координаты вершин A и B и фокусов эллипса, записав его уравнение в канонической форме $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. Имеем

$a^2 = 8$, $a = 2\sqrt{2}$; $b^2 = 5$, $b = \sqrt{5}$. Из соотношения $c^2 = a^2 - b^2$ находим c: $c^2 = 8 - 5$, $c = \sqrt{3}$. Можно записать: $A(2\sqrt{2};0)$, $B(-2\sqrt{2};0)$, $F_1(-\sqrt{3};0)$, $F_2(\sqrt{3};0)$ (рис. 38). Обозначим через $a_г$, $b_г$, $c_г$ — соответственно полуоси гиперболы и половину расстояния между ее фокусами. Тогда, согласно условиям задачи, можно записать: $a_г = OF_2$, т. е. $a_г = \sqrt{3}$ и $c_г = OA$, т. е. $c_г = 2\sqrt{2}$. Из соотношения $c_г^2 = a_г^2 + b_г^2$ находим $8 = 3 + b_г^2$, поэтому $b_г^2 = 5$, $b_г = \sqrt{5}$. Подставляя найденные значения $a_г$ и $b_г$ в уравнение (3.12), находим $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ — искомое уравнение гиперболы. ●

4.3.70. Дана гипербола $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{3} = 1$. Найти софокусный эллипс, проходящий через точку $M\left(4; -\frac{9}{5}\right)$.

Дополнительные задачи

4.3.71. Найти эксцентриситет гиперболы, зная, что расстояние между фокусами в 4 раза больше расстояния между ее директрисами.

4.3.72. На гиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$ найти точку, для которой расстояние от левого фокуса в 3 раза больше, чем от правого.

4.3.73. Найти уравнения касательных к гиперболе $9x^2 - 8y^2 = 72$, проведенных из точки $C(2;0)$.

4.3.74. Найти уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, параллельных прямой $x + y - 4 = 0$.

4.3.75. Построить линию:

а) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$;

б) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \\ y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}). \end{cases}$

4.3.76. Доказать,что длина перпендикуляра, опущенного из фокуса на одну из асимптот гиперболы, равна мнимой полуоси.

4.3.77. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы $x^2 - y^2 = 4$ до двух ее асимптот есть величина постоянная, равная 2.

4.3.78. Найти площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$ и прямой $9x + 2y - 12 = 0$.

4.3.79. Вершины квадрата лежат на гиперболе $9x^2 - 4y^2 = 125$. Найти его площадь.

4.3.80. Найти эксцентриситет гиперболы, асимптота которой составляет с действительной осью угол α.

11 – 2361

4.3.81. Найти расстояние между точками пересечения асимптот гиперболы $9x^2-16y^2=144$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

4.3.82. Найти траекторию пути точки M, которая при своем движениии остается вдвое ближе к прямой $x-2=0$, чем к точке $A(8;0)$.

4.3.83. На гиперболе $x^2-y^2=1$ найти точку, фокальные радиусы которой перпендикулярны.

4.3.84. Найти расстояние между левым фокусом F_1 гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ и правым фокусом F_2 сопряженной с ней гиперболы.

4.3.85. Найти фокальные радиусы точки $M(10;3\sqrt{6})$, лежащей на гиперболе $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$. Найти расстояния от точки M до директрис.

4.3.86. На гиперболе $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ найти точку M, ближайшую к прямой $2x+y-2=0$, и вычислить расстояние от точки до этой прямой.

4.3.87. Через левый фокус гиперболы $x^2-y^2=8$ проведем перпендикуляр к ее оси, содержащей вершины. Найти расстояния от фокусов до точек пересечения этого перпендикуляра с гиперболой.

4.3.88. При каких значениях α прямая $y=2x+\alpha$ пересекает гиперболу $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{18}=1$? Касается ее?

4.3.89. Составить уравнение гиперболы, зная ее эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{4}$, фокус $F_2(5;0)$.

4.3.90. Составить уравнение гиперболы, зная ее фокусы $F_1(-8;2)$, $F_2(12;2)$ и расстояние между вершинами, равное 16.

4.3.91. Дан эллипс $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{5}=1$. Найти уравнение софокусной равнобочной геперболы.

4.3.92. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $9x^2+25y^2=225$. Найти уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.3.93. Вывести условие, при котором прямая $Ax+By+C=0$ касается гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

4.3.94. Найти уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат и касающейся прямой $x-y-2=0$ в точке $M(4;2)$.

4.3.95. Даны точки $A(-1;0)$ и $B(2;0)$. Точка $M(x;y)$ движется так, что в треугольнике AMB угол B остается вдвое больше угла A. Найти уравнение траектории движения точки M.

4.3.96. Доказать, что отношение расстояний от любой точки гиперболы до фокуса и до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

4.3.97. Эксцентриситет гиперболы равен 3, фокальный радиус ее точки M, проведенный из некоторого фокуса, равен 12. Найти расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

4.3.98. Доказать, что касательная к гиперболе в ее произвольной точке M составляет равные углы с фокальными радиусами этой точки.

4.3.99. Доказать оптическое свойство гиперболы: луч света, исходящий из одного фокуса гиперболы, отразившись от нее, идет по прямой, соединяющей точку отражения с другим фокусом.

4.3.100. Можно ли к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательные любого направления? Какое ограничение наложено на угловые коэффициенты касательных к этой гиперболе?

4.3.101. Какие линии определяются следующими уравнениями:
1) $y = -2\sqrt{x^2+1}$;
2) $x = -\sqrt{y^2+4}$?

4.3.102. Чему равен угол между асимптотами гиперболы $y^2 = 100 + x^2$?

4.3.103. Чему равна площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и прямой $x = 2$?

4.3.104. Проходит ли гипербола $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{2} = 1$ через точки $O(2;0)$, $A(-2\sqrt{10};2)$, $B\left(6;\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)$?

Парабола

⇛ *Параболой* называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки этой же плоскости, называемой *фокусом*, и заданной прямой, называемой *директрисой*.

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px, \tag{3.22}$$

где число $p > 0$, равное расстоянию от фокуса F до директрисы l, называется *параметром* параболы. Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Точка $O(0;0)$ называются *вершиной* параболы, длина r отрезка FM — *фокальный радиус* точки M, ось Ox — *ось симметрии* параболы.

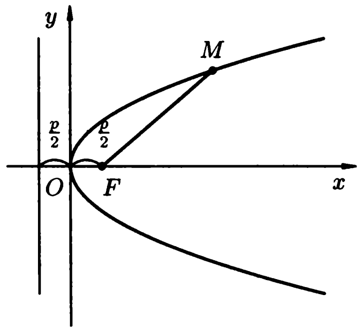


Рис. 39

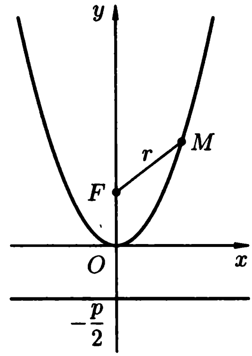


Рис. 40

Уравнение директрисы l параболы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2}; \tag{3.23}$$

фокальный радиус вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{3.24}$$

В прямоугольной системе координат парабола, заданная каноническим уравнением (3.22), расположена так, как указано на рисунке 39.

Замечания. 1) Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат (рис. 40), имеет уравнение

$$x^2 = 2py. \tag{3.25}$$

Фокусом параболы (3.25) является точка

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right). \tag{3.26}$$

Уравнение директрисы этой параболы

$$y = -\frac{p}{2}. \tag{3.27}$$

Фокальный радиус точки M параболы

$$r = y + \frac{p}{2}. \tag{3.28}$$

2) На рисунках 41 и 42 изображены графики парабол $y^2 = -2px$ и $x^2 = -2py$ соответственно.

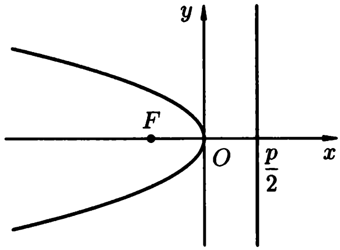


Рис. 41

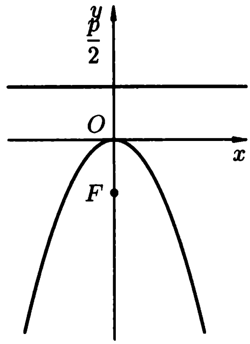


Рис. 42

3) На рисунках 43–46 приведены уравнения и графики парабол с осями симметрии, параллельными координатным осям.

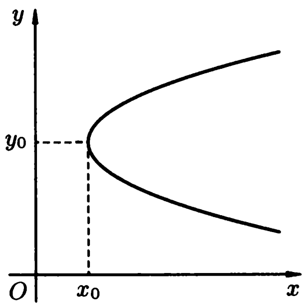


Рис. 43. $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

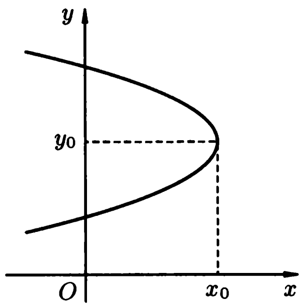


Рис. 44. $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

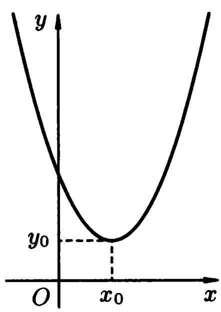


Рис. 45. $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

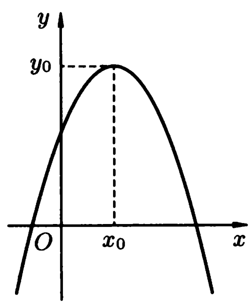


Рис. 46. $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$

4.3.105. Дана парабола $x^2 = 4y$. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы, длину фокального радиуса точки $M(4;4)$.

◔ Парабола задана каноническим уравнением (3.25). Следовательно, $2p = 4$, $p = 2$. Используя формулы (3.26), (3.27), (3.28) находим, что фокус имеет координаты $(0;1)$, т. е. $F(0;1)$; уравнение директрисы есть $y = -1$; фокальный радиус точки $M(4;4)$ равен $r = 4 + 1 = 5$. ●

4.3.106. Найти вершину, фокус и директрису параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$, построить эскиз графика.

◔ Преобразуем уравнение $y = -2x^2+8x-5$, выделив в правой части полный квадрат:

$$y = -2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = -2\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{5}{2}\right) =$$
$$= -2\left((x-2)^2 - \frac{3}{2}\right) = -2(x-2)^2 + 3,$$

т. е. $y = -2(x-2)^2+3$ или $(x-2)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)$. Уравнение параболы имеет вид, как на рис. 46. Вершина параболы имеет координаты $(2;3)$; $2p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$. Прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы. Координаты фокуса $x = 2$, $y = 3 - \frac{1}{8} = 2\frac{7}{8}$, т. е. $F\left(2;2\frac{7}{8}\right)$. Уравнение директрисы $y = 3 + \frac{p}{2} = 3 + \frac{1}{8}$, т. е. $y = 3\frac{1}{8}$. График изображен на рис. 47. ●

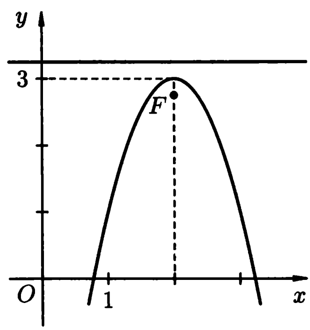


Рис. 47

4.3.107. Парабола симметрична относительно оси Ox, ее вершина находится в начале координат. Составить уравнение параболы, зная, что она проходит через точку $A(-3;-3)$.

4.3.108. Найти высоту арки моста длиной 24м, имеющей форму параболы, уравнение которой $x^2 = -48y$.

4.3.109. Найти уравнение касательной к параболе $y^2 = 4x$, проведенной из точки $A(-2; -1)$.

◔ Уравнение прямой будем искать в виде

$$y = kx + b. \tag{3.29}$$

Так как точка A принадлежит искомой касательной, подставляя ее координаты в уравнение (3.29), получим тождество

$$-1 = -2k + b. \tag{3.30}$$

Далее, прямая (3.29) и парабола $y^2 = 4x$ имеют единственную общую точку (касаются). Следовательно, система уравнений

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

имеет единственное решение. Решаем ее относительно x и y. Это можно сделать различными способами, например, возвести правую и левую части первого уравнения в квадрат и подставить в левую часть полученного равенства вместо y^2 его выражение из второго уравнения. Получим $k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 4x$. Это — квадратное уравнение, имеющее единственное решение в случае, когда дискриминант равен нулю. Таким образом,

$$\frac{D}{4} = (kb-2)^2 - k^2b^2 = 0 \quad \text{или} \quad 4kb = 4, \quad b = \frac{1}{k}. \tag{3.31}$$

Теперь для параметров k и b прямой (3.29) имеем два условия: (3.30) и (3.31). Следовательно, искомые значения параметров находятся как решения системы из этих условий:

$$\begin{cases} -2k + b = -1, \\ b = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Подстановкой вместо b в первое уравнение его выражения из второго, получим $-2k^2 + k + 1 = 0$, откуда находим, что $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2}$. Система имеет два решения:

$$\begin{cases} k_1 = 1, \\ b_1 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} k_2 = -1/2, \\ b_2 = -2. \end{cases}$$

Следовательно, две прямые удовлетворяют условиям задачи. Их уравнения: $y = x + 1$ и $y = -\frac{x}{2} - 2$. ●

4.3.110. К параболе $y^2 = 4x$ проведена касательная параллельно прямой $2x - y + 7 = 0$. Найти уравнение этой касательной.

4.3.111. При каких значениях k прямая $y = kx - 1$ пересекает параболу $y^2 = -5x$? Касается ее?

Дополнительные задачи

4.3.112. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy, имеющей вершину в начале координат, если она проходит через точку $A(-2;4)$.

4.3.113. Найти координаты такой точки параболы $y^2 = 6x$, которая находится от директрисы на расстоянии 3,5.

4.3.114. Через фокус параболы $y^2 = 12x$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Найти длину хорды.

4.3.115. В параболу $y^2 = 2px$ вписан равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с вершиной параболы. Найти длину стороны треугольника.

4.3.116. Найти длину хорды, соединяющей точки пересечения двух парабол, имеющих общую вершину в начале координат, а фокусы в точках $(2;0)$ и $(0;2)$.

4.3.117. Трос, подвешенный за два конца на одинаковой высоте, имеет форму дуги параболы. Расстояние между точками крепления 24 м. Глубина прогиба троса на расстоянии 3 м от точки крепления равна 70 см. Определить глубину прогиба троса посередине между креплениями.

4.3.118. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 16 м. Описав параболическую траекторию, он упал в 48 м от точки бросания. На какой высоте находился камень на расстоянии 6 м по горизонтали от точки бросания?

4.3.119. На параболе $y^2 = -4x$ найти координаты точки, расстояние от которой до прямой $y = 1 + 3\sqrt{2} - x$ равно 3.

4.3.120. Парабола $y^2 = x$ отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду, длина которой равна $\sqrt{2}$. Составить уравнение этой прямой.

4.3.121. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, фокус которой находится в точке пересечения прямой $5x - 3y + 12 = 0$ с осью ординат; осью абсцисс.

4.3.122. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку пересечения прямой $y - x = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

4.3.123. Дана парабола $x^2 = 8y$. Найти длину ее хорды, проходящей через точку $A(1;1)$ перпендикулярно прямой $2x - y + 3 = 0$.

4.3.124. Уравнение линии привести к каноническому виду, построить ее:

а) $y = 4x^2 + 8x + 7$;

б) $x = 5y^2 - 10y + 6$;

в) $y = x^2 - 4x + 5$;

г) $x = y^2 + 3y$.

4.3.125. Найти уравнение линии, все точки которой одинаково удалены от точки $O(0;0)$ и от прямой $x+4=0$.

4.3.126. Найти уравнение прямой, которая проходит через вершину параболы $y=-2x^2-6x-4$ параллельно прямой $2x-y+3=0$.

4.3.127. Дана парабола $y^2=12x$. Найти длину ее хорды, проходящей через точку $A(8;0)$ и наклоненной к оси Ox под углом $60°$.

4.3.128. Составить уравнение касательной к параболе $y^2=36x$, проведенной из точки $A(1;10)$.

4.3.129. К параболе $y^2=36x$ проведены из точки $A(1;10)$ две касательные. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

4.3.130. Доказать оптическое свойство параболы: луч света, исходящий из фокуса параболы, отразившись от нее, идет по прямой, параллельной оси этой параболы.

4.3.131. Доказать, что касательная к параболе в ее произвольной точке M составляет равные углы с фокальным радиусом точки M и с лучом, исходящим из точки M и сонаправленным с осью параболы.

4.3.132. Из фокуса параболы $y^2=12x$ под острым углом α к оси Ox направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$. Дойдя до параболы, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

4.3.133. Дана парабола $y^2=4x$. Через точку $\left(\frac{5}{2};1\right)$ провести такую хорду, которая делилась бы в этой точке пополам. Составить уравнение этой хорды.

4.3.134. Показать, что фокус параболы и точки касания двух касательных к параболе, проведенных из любой точки директрисы, лежат на одной прямой.

4.3.135. Каково будет уравнение параболы $y^2=4x$, если ее ось симметрии повернуть на $90°$? на $180°$? на $-90°$?

4.3.136. Каково уравнение параболы с вершиной в точке $(0;0)$, если уравнение ее директрисы $2y+7=0$?

4.3.137. Найти фокус и директрису кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x=\frac{2}{t^2}, \\ y=\frac{3}{t}. \end{cases}$$

4.3.138. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y=4, \\ x+y^2=9. \end{cases}$$

4.3.139. Чему равна длина хорды, проходящей через фокус параболы $x^2 = 8y$ и перпендикулярной к ее оси симметрии?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. На биссектрисе первого координатного угла лежат точки $A(3;3)$ и $B(x;y)$, расстояние между которыми равно $\sqrt{2}$. Найти координаты точки B.

2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-y-1=0$ и $3x-y+4=0$ параллельно прямой $4x+2y-13=0$.

3. Найти угол между высотой AD и медианой AE в треугольнике с вершинами в точках $A(1;3)$, $B(4;-1)$, $C(-1;1)$.

4. Найти каноническое уравнение эллипса, если

   а) расстояние между концами большой и малой оси равно 5, а сумма длин полуосей равна 7;

   б) расстояния от его фокуса до концов большой оси равны 2 и 14.

5. Через фокус параболы $y^2 = -x$ проведена прямая под углом $135°$ к оси Ox. Найти длину образовавшейся хорды.

Вариант 2

1. Дан треугольник ABC с вершинами $A(1;5)$, $B(4;1)$, $C(13;10)$. Найти точку пересечения биссектрисы внутреннего угла A со стороной BC.

2. Прямая $y = kx + 4$ удалена от начала координат на расстояние $d = \sqrt{3}$. Найти значение k.

3. Даны последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-2;5)$, $B(2;7)$, $C(-4;-3)$. Найти координаты четвертой вершины D и написать уравнение диагонали BD.

4. Найти уравнение прямой, содержащей диаметр окружности $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$, перпендикулярный прямой $x - 3y + 2 = 0$.

5. Найти уравнение гиперболы, зная, что ее эксцентриситет $\varepsilon = 2$, фокусы гиперболы совпадают с фокусом эллипса $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$.

Вариант 3

1. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку $A(-10;4)$ и касающейся оси Ox в точке $B(-6;0)$.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;1)$ на расстоянии 1 от начала координат.

3. При каких значениях A и C прямая $Ax + 3y + C = 0$:

   а) параллельна прямой $3x - y + 8 = 0$;

   б) перпендикулярна прямой $y = 5x$;

   в) проходит через точки (2;2) и $(-1;4)$;

   г) пересекается с прямой $4x - 2y + 7 = 0$.

4. Найти площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

5. Найти длину диаметра эллипса (хорды, проходящей через центр эллипса) $9x^2+27y^2 = 225$, перпендикулярного к асимптоте гиперболы $x^2 - y^2 = 4$, проходящей через первую и третью четверти.

Вариант 4

1. Площадь треугольника ABC с вершинами $A(-2;1)$, $B(2;2)$, $C(4;y)$ равна 15. Найти ординату вершины C.

2. Через точку пересечения прямых $2x-y = 0$ и $x+3y-1 = 0$ проведена прямая, перпендикулярная прямой $y = 3 - x$. Найти ее уравнение.

3. Даны две смежные вершины $A(-2;4)$, $B(2;2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M(1;-1)$ пересечения его диагоналей. Найти уравнения сторон BC и CD параллелограмма.

4. Окружность проходит через точки $M_1(1;5)$ и $M_2(5;3)$, а центр ее лежит на прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$. Найти уравнение окружности.

5. Дан эллипс $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса.

❏

Глава 5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямоугольная система координат. Основные задачи

Положение любой точки в пространстве можно однозначно определить с помощью прямоугольной системы координат. Эта система включает три взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в одной точке O — *началe координат*. Одну из осей называют *осью абсцисс* (ось Ox), другую — *осью ординат* (Oy), третью — *осью аппликат* (Oz). На каждой из осей выбраны *единичные векторы*, которые обозначают соответственно $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Если M — произвольная точка пространства, то вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M (см. рис. 48).

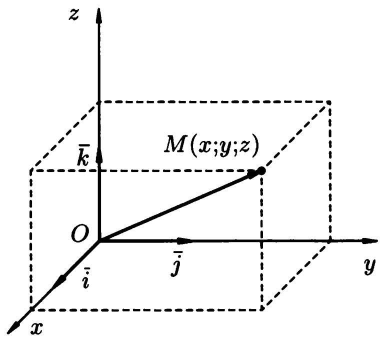


Рис. 48

⇛ *Координатами точки* M в системе координат $Oxyz$ называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$. Если $\overline{OM} = (x;y;z)$ (рис. 48), то координаты точки M записывают так: $M(x;y;z)$; здесь число x — *абсцисса*, y — *ордината*, z — *аппликата* точки M. Каждой тройке чисел $(x;y;z)$ соответствует одна и только одна точка пространства, и наоборот.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1.1}$$

Координаты $(x;y;z)$ *точки* M, *делящей в заданном отношении* λ $\left(\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}\right)$ *отрезок* AB, $(A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2))$, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{1.2}$$

В частности, при $\lambda = 1$ (точка M делит отрезок AB пополам), получаются формулы для определения координат середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{1.3}$$

5.1.1. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух точек $A(2;3;1)$ и $B(-1;5;-2)$.

◑ Точка M, лежащая на оси Oy, имеет координаты $M(0;y;0)$. По условию задачи $|AM| = |BM|$. Найдем расстояния $|AM|$ и $|BM|$, используя формулу (1.1):

$$|AM| = \sqrt{(0-2)^2 + (y-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{y^2 - 6y + 14};$$

$$|BM| = \sqrt{(0+1)^2 + (y-5)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}.$$

Получим уравнение

$$\sqrt{y^2 - 6y + 14} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}.$$

Отсюда находим, что $4y = 16$, т. е. $y = 4$. Искомая точка есть $M(0;4;0)$. ●

5.1.2. Найти координаты точки на плоскости Oxy, равноудаленной от трех точек: $A(4;0;2)$, $B(-1;2;4)$, $C(1;1;-3)$.

5.1.3. Показать, что треугольник с вершинами в точках $A(-3;2;4)$, $B(0;-2;-1)$, $C(1;5;9)$ равнобедренный.

5.1.4. Отрезок AB разделен на 3 равные части. Найти координаты точек деления, если известны точки $A(-2;4;1)$ и $B(2;-4;-3)$.

◑ Обозначим точки деления отрезка AB в следующем порядке: C и D. По условию задачи $|AC| = |CD| = |DB|$. Поэтому точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Пользуясь формулами (1.2), находим координаты точки C:

$$x_C = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}, \quad y_C = \frac{4 + \frac{1}{2}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3},$$

$$z_C = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

Имеем, $C\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. По формулам (1.3) находим координаты точки D — середины отрезка CB:

$$x_D = \frac{-\frac{2}{3} + 2}{2} = \frac{2}{3}, \quad y_D = \frac{\frac{4}{3} - 4}{2} = -\frac{4}{3}, \quad z_D = \frac{-\frac{1}{3} - 3}{2} = -\frac{5}{3},$$

т. е. точка D имеет координаты $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. ●

5.1.5. Дана точка $A(3; -4; 2)$. Найти координаты точки, симметричной данной относительно координатных плоскостей, осей координат, начала координат.

5.1.6. Дан треугольник с вершинами в точках $A(5; 2; 4)$, $B(-3; 6; 0)$, $C(3; 2; -4)$. Найти длину его медианы, проведенной из вершины A.

5.1.7. В точках $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$ сосредоточены соответственно массы m_1, m_2, m_3, m_4. Найти координаты центра тяжести системы этих масс.

◐ Как известно из курса физики центр тяжести масс m_1 и m_2, помещенных в точках A и B, делит отрезок AB на части, обратно пропорциональные массам, сосредоточенным на концах отрезка ($\lambda = \frac{m_2}{m_1}$). Исходя из этого, найдем сначала центр тяжести $M_1(x'; y'; z')$ системы двух масс m_1 и m_2, помещенных в точках A_1 и A_2:

$$x' = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1 + m_2},$$

$$y' = \frac{y_1m_1 + y_2m_2}{m_1 + m_2}, \quad z' = \frac{z_1m_1 + z_2m_2}{m_1 + m_2}.$$

Центр тяжести системы трех масс m_1, m_2 и m_3 находим аналогично ($\lambda = \frac{m_3}{m_1 + m_2}$):

$$x'' = \frac{x' + \frac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1+m_2}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y'' = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad z'' = \frac{z_1m_1 + z_2m_2 + z_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Находим, наконец, центр тяжести системы трех масс m_1, m_2, m_3 и m_4 ($\lambda = \frac{m_4}{m_1 + m_2 + m_3}$):

$$x = \frac{x'' + \frac{m_4}{m_1+m_2+m_3}x_4}{1 + \frac{m_4}{m_1+m_2+m_3}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + x_4m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

$$y = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3 + y_4m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

$$z = \frac{z_1m_1 + z_2m_2 + z_3m_3 + z_4m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$ ●

5.1.8. Показать, что треугольник с вершинами в точках $A(8; 0; 6)$, $B(2; -4; 2)$, $C(6; -6; -2)$ прямоугольный.

5.1.9. Найти координаты центра тяжести треугольника с вершинами в точках $A(2; 5; 0)$, $B(11; 3; 8)$, $C(5; 1; 12)$.

5.1.10. Центр тяжести однородного стержня находится в точке $M(1; -1; 5)$, один из его концов есть $A(-2; -1; 7)$. Найти координаты другого конца стержня.

Дополнительные задачи

5.1.11. Найти координаты точки на оси Oz, удаленной от точки $M(-2;-1;4)$ на 3 единицы.

5.1.12. Даны вершины треугольника $A(1;-1;3)$, $B(-5;2;-6)$, $C(2;1;-2)$. Найти длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

5.1.13. Лежат ли на одной прямой точки $A(2;-3;1)$, $B(0;-11;3)$ и $C(4;5;-1)$?

5.1.14. В каких октантах могут быть расположены точки, координаты которых удовлетворяют одному из следующих условий:

1) $x-y=0$;

2) $x+z=0$;

3) $xy>0$;

4) $xyz<0$?

5.1.15. Найти центр и радиус сферы, которая проходит через точку $A(4;-1;-1)$ и касается всех трех координатных плоскостей.

5.1.16. Найти расстояние от точки $A(3;-4;5)$ до начала координат и до осей координат.

5.1.17. Даны две вершины параллелограмма $ABCD$: $A(1;1;-1)$, $B(-2;3;0)$ и точка пересечения его диагоналей $M(4;0;3)$. Найти координаты вершин C и D.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

5.1.18. Найти радиус сферы, проходящей через точки $(0;0;0)$, $(2;0;0)$, $(0;3;0)$, $(0;0;6)$.

5.1.19. Проверить, что три данные точки $A(1;-5;3)$, $B(5;-1;7)$ и $C(6;0;8)$ лежат на одной прямой.

5.1.20. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

5.1.21. Где расположены точки $A(0;0;z)$, $B(x;0;z)$, $C(0;y;z)$?

5.1.22. Чему равно расстояние от точки $A(-12;-3;4)$ до оси Ox?

5.1.23. Ребро куба равно 1. Найти длину отрезка, соединяющего середины двух скрещивающихся ребер.

5.1.24. Длина радиус-вектора точки M равна 1. Может ли абсцисса точки M равняться 1? 2?

5.1.25. Как расположена точка в прямоугольной системе координат, если одна ее координата равна нулю? две ее координаты равны нулю?

Уравнение поверхности и кривой в пространстве

⇛ *Уравнением поверхности в пространстве $Oxyz$* называется уравнение $F(x;y;z)=0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки поверхности и только они.

Поверхность *может быть задана* уравнением

$$F(x;y;z)=0, \tag{1.4}$$

или, например, уравнением $z=f(x;y)$ $\big(y=\varphi(x;z),\ x=\psi(y;z)\big)$.

Уравнение вида

$$F(x;y)=0 \tag{1.5}$$

определяет в пространстве *цилиндрическую поверхность* с образующими параллельными оси Oz и направляющей, лежащей в плоскости Oxy и заданной в ней уравнением $F(x;y)=0$. Уравнение поверхности составляется по схеме составления уравнения линии на плоскости.

Кривую (*линию*) *в пространстве* можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей; тогда она задается системой двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x;y;z)=0, \\ F_2(x;y;z)=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Если кривую рассматривать как траекторию движения точки, то она задается *параметрическими уравнениями*

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad t\in[a;b]. \tag{1.7}$$

5.1.26. Найти уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1(a;b;c)$.

◯ В прямоугольной системе координат $Oxyz$ точка O_1 — центр сферы — имеет координаты a, b и c. Пусть $M(x;y;z)$ — произвольная точка сферы. Тогда $O_1M=R$, или (см. (1.1))

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R\,.$$

Окончательно получаем уравнение сферы

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\,.$$ ●

5.1.27. Найти координаты центра и радиус сферической поверхности, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2-2x+6z-6=0$.

5.1.28. Как расположены точки $A(0;5;7)$, $B(-3;4;0)$, $C(0;0;6)$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z-11=0$?

5.1.29. Какую поверхность определяет уравнение $x^2+y^2+4x-10y+{}$ $+28=0$?

◯ Уравнение имеет вид (1.5), определяет цилиндрическую повехность с образующими, параллельными оси Oz; направляющей служит кривая $x^2+y^2+4x-10y+28=0$, лежащая в плоскости Oxy. Выделим в левой части этого уравнения полные квадраты:

$$(x^2+4x+4)-4+(y^2-10y+25)-25+28=0, \quad (x+2)^2+(y-5)^2=1.$$

Направляющей служит окружность радиуса 1 с центром в точке $(-2;5)$ (рис. 49). Таким образом, заданное уравнение определяет прямой круговой цилиндр. ●

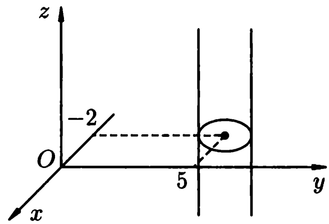


Рис. 49

5.1.30. Какие геометрические образы определяются следующими уравнениями:

1) $y^2=4$;
2) $y^2=x$;
3) $x^2+y^2+z^2=0$;
4) $z^2+yz=0$?

5.1.31. Определить, какие геометрические образы заданы уравнениями:

1) $xyz=0$;
2) $y^2-x^2=0$;
3) $x^2+y^2+4=0$;
4) $x^2+y^2-2x-3=0$.

5.1.32. Составить уравнение винтовой линии радиуса a и шага h.

◔ Винтовую линию описывает точка, которая равномерно вращается вокруг неподвижной оси (на рис. 50 вокруг оси Oz) и равномерно перемещается в ее направлении. Пусть $M(x;y;z)$ — произвольная точка линии, а $M_0(x;y;0)$ — ее проекция на плоскость Oxy. Точка M лежит на образующей прямого кругового цилиндра, направляющей которого служит окружность радиуса a, описываемая точкой M_0. Обозначим угол поворота M_0Ox через t, т. е. $t=\angle M_0Ox$. В силу равномерности движения точки M можно записать $|MM_0|=bt$. Имеем: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=|MM_0|=bt$. Для нахождения коэффициента b положим в последнем равенстве $t=2\pi$, $z=h$ (в этом случае точка M_0 совершит полный оборот; точка M опишет один виток, поднявшись на шаг h винта). Следовательно, $h=2\pi b$, $b=\frac{h}{2\pi}$.

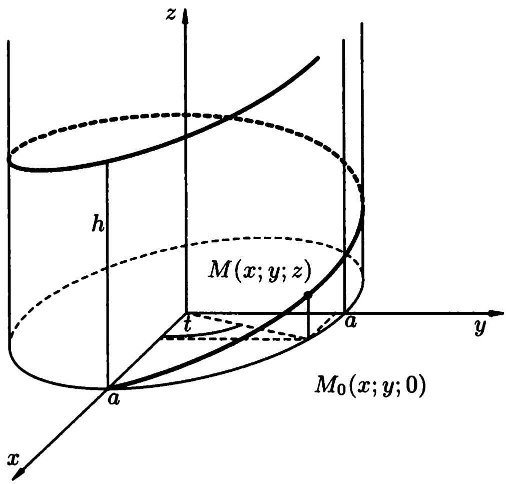


Рис. 50

Уравнениями винтовой линии будут

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = \dfrac{h}{2\pi}\,t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

●

5.1.33. Найти уравнение поверхности, каждая точка которой вдвое ближе к точке $A(2;3;0)$, чем к точке $B(-2;0;0)$.

Дополнительные задачи

5.1.34. Какая кривая определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0, \\ y - 2 = 0? \end{cases}$$

5.1.35. Какие кривые определяются уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y - 3 = 0, \\ z + 2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ x = 4? \end{cases}$

5.1.36. Найти уравнение сферической поверхности с центром в точке $C(2;1;-4)$, проходящей через точку $A(5;3;2)$.

5.1.37. Найти уравнение линии пересечения плоскости Oxz и сферы с центром в точке $O(2;2;2)$ и радиусом, равным 3.

5.1.38. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек $A(1;0;0)$ и $B(0;1;0)$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

5.1.39. Из точки $M(2;6;-5)$ проведены всевозможные лучи до пересечения с плоскостью Oxz. Составить уравнение геометрического места середин отрезков лучей от точки M до точки пересечения с плоскостью Oxz.

5.1.40. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной плоскости.

Указание. Поместить начало координат в середине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

5.1.41. Вывести уравнение поверхности, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-a;0;0)$ и $F_2(a;0;0)$ равна постоянному числу $4a^2$.

5.1.42. Вывести уравнение поверхности, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0;-5;0)$ и $F_2(0;5;0)$ равен 6.

5.1.43. Какую линию определяет система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c? \end{cases}$$

5.1.44. Какую поверхность определяет уравнение $x^2 + y^2 - 2y = 0$?

5.1.45. Лежат ли точки $A_1(0;-4;8)$, $A_2(-1;2;2)$ на поверхности $z = x^2 + \dfrac{y^2}{2}$?

§ 2. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Различные виды уравнения плоскости

Каждая *плоскость* в пространстве $Oxyz$ определяется линейным алгебраическим *уравнением первой степени с тремя неизвестными*. И наоборот: каждое линейное уравнение первого порядка с тремя неизвестными определяет некоторую плоскость в пространстве.

1. ***Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A;B;C)$:***

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) называют также *уравнением пучка (связки) плоскостей.* Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую, образованную пересечением плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (2.2)$$

где λ — числовой множитель.

2. *Общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0). \qquad (2.3)$$

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется ***нормальным вектором*** этой плоскости. В частности, вектор $\bar{n}=(A; B; C)$ — нормальный вектор плоскости, заданной уравнением (2.3)

Частные случаи уравнения (2.3):

$Ax + By + Cz = 0$ $(D = 0)$ — плоскость проходит через начало координат;

$Ax + By + D = 0$ $(C = 0)$ — плоскость параллельна оси Oz (аналогичный смысл имеют уравнения $Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$);

$Ax + By = 0$ $(D = C = 0)$ — плоскость проходит через ось Oz ($Ax+Cz+D = 0$, $By+Cz+D = 0$ — через ось Oy и Ox соответственно);

$Ax + D = 0$ $(B = C = 0)$ — плоскость параллельна плоскости Oyz ($Cz + D = 0$, $By + D = 0$ — параллельно плоскости Oxy и Oxz соответственно);

$Ax = 0$, т.е. $x = 0$ $(B = C = D = 0)$ — плоскость совпадает с плоскостью Oyz ($y = 0$, $z = 0$ — уравнения плоскостей Oxz и Oxy соответственно).

3. *Уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (2.4)$$

где a, b, c — абсцисса, оридината и аппликата точек пересечения плоскостью координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно.

4. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ *и* $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.5) *в векторной форме* имеет вид

$$(\bar{r} - \bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0, \qquad (2.6)$$

где $\bar{r}$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ — радиус-векторы точек $M(x; y; z)$, M_1, M_2 и M_3 соответственно.

5. *Нормальное уравнение плоскости*:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{2.7}$$

где p — длина перпендикуляра OK, опущенного из начала координат на плоскость; α, β, γ — углы, образованные единичным вектором $\bar{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK (рис. 51), с осями Ox, Oy и Oz $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$.

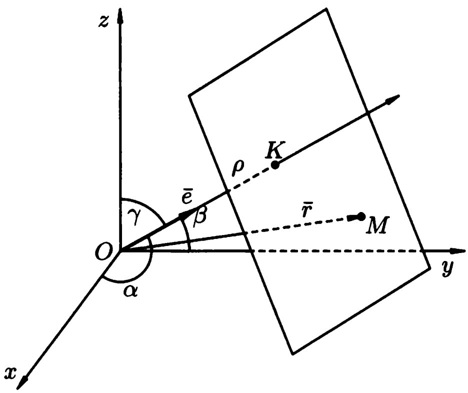


Рис. 51

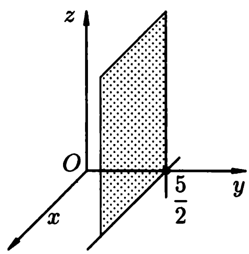


Рис. 52

Уравнение (2.7) *в векторной форме* имеет вид

$$\bar{r}\cdot\bar{e} - p = 0. \tag{2.8}$$

Общее уравнение плоскости (2.3) приводится к нормальному виду (2.7) путем умножения на *нормирующий множитель*

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \tag{2.9}$$

знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена D (в общем уравнении плоскости).

5.2.1. Построить плоскости, заданные уравнениями:
1) $2y - 5 = 0$;
2) $x + z - 1 = 0$; 3) $3x + 4y + 6z - 12 = 0$.

◐ 1) Плоскость $2y - 5 = 0$ параллельна плоскости Oxz (см. (2.3), частные случаи); она отсекает на оси Oy отрезок, равный $\frac{5}{2}$ и имеет вид, изображенный на рисунке 52.

2) Плоскость $x + z - 1 = 0$ параллельна оси Oy (см (2.3)); она пересекает плоскость Oxz по прямой $x + z = 1$, отсекая на осях Ox и Oz отрезки, равные 1 (рис. 53).

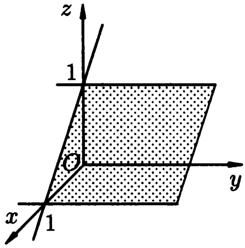


Рис. 53

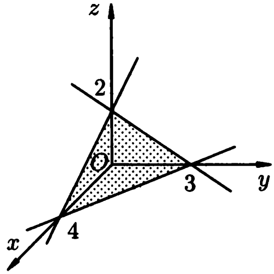


Рис. 54

3) Общее уравнение плоскости $3x + 4y + 6z - 12 = 0$ перепишем в виде (2.4): $3x + 4y + 6z = 12$, т. е. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$. Эта плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz отрезки, равные 4, 3, 2 соответственно (рис. 54). ●

5.2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через:

1) точку $M(-2; 3; 1)$ параллельно плоскости Oxy;

2) точку M и ось Oy.

Построить эти плоскости.

5.2.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через:

1) точку $A(5; -4; 6)$ перпендикулярно оси Ox;

2) точку A и отсекающей равные отрезки на положительных координатных полуосях.

Построить эти плоскости.

5.2.4. Уравнение плоскости $2x - 6y + 3z - 14 = 0$ привести к нормальному виду.

❍ Умножим обе части уравнения на нормирующий множитель (2.9):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}}, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \frac{1}{7}.$$

Перед корнем взят знак «плюс», т.к. свободный член $C = -14$ заданного уравнения отрицателен. Имеем:

$$\frac{1}{7}(2x - 6y + 3z - 14) = 0 \cdot \frac{1}{7}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z - 2 = 0.$$

Здесь $p = 2$, т. е. расстояние от точки $O(0; 0; 0)$ до плоскости равно 2;

$$\cos\alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos\beta = -\frac{6}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{7}$$

$$\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{49} + \frac{36}{49} + \frac{9}{49} = 1\right).$$ ●

5.2.5. Определить направляющие косинусы радиус-вектора, перпендикулярного к плоскости $3x - 4y + 5z - 10 = 0$.

5.2.6. Написать уравнение плоскости:

1) параллелльной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(-1; 2; 5)$;

2) проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

◔ 1) Уравнение плоскости, параллелльной оси Oz, имеет вид $Ax + By + D = 0$ (см (2.3), частные случаи). Так как плоскость проходит через точки M_1 и M_2, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Подставим их в уравнение $Ax + By + D = 0$. Получаем два уравнения

$$\begin{cases} 3A - B + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0 \end{cases}$$

с тремя неизвестными A, B, D. Выразим неизвестные коэффициенты A и B через D: умножив первое уравнение на 2 и сложив почленно уравнения, находим $5A + 3D = 0$, т.е. $A = -\frac{3}{5}D$; тогда $B = 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}D\right) + D$, т.е. $B = -\frac{4}{5}D$. Подставляя найденные значения A и B в уравнение $Ax + By + D = 0$, получаем $-\frac{3}{5}Dx + \left(-\frac{4}{5}D\right)y + D = 0$. После сокращения на $\left(-\frac{1}{5}D\right)$ уравнение искомой плоскости приобретает вид $3x + 4y - 5 = 0$.

2) Используем уравнение (2.3) плоскости. Вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты $\overline{M_1M_2} = (-1-3; 2-(-1); 5-2)$ или $\overline{M_1M_2} = (-4; 3; 3)$. Так как искомая плоскость перпендикулярна вектору $\overline{M_1M_2}$, он является ее нормалью и, следовательно, значения параметров A, B, и C в (2.3) равны -4, 3 и 3 соответственно. Уравнение плоскости, таким образом, имеет вид

$$-4x + 3y + 3z + D = 0.$$

Точка $M_1(3; -1; 2)$ по условию задачи лежит в плоскости. Следовательно, подстановкой координат точки M_1 в уравнение плоскости получим тождество:

$$-4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + D = 0.$$

Отсюда находим, что $D = 9$. Уравнение искомой плоскости:

$$-4x + 3y + 3z + 9 = 0.$$ ●

5.2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; 3; -4)$ и параллельной векторам $\bar{a} = (-3; 2; -1)$ и $\bar{b} = (0; 3; 1)$.

◔ Воспользуемся уравнением (2.1) плоскости. Имеем

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z+4) = 0.$$

Найдем A, B и C. Так как плоскость параллельна векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то в качестве ее нормального вектора $\bar{n} = (A; B; C)$ можно взять вектор $\bar{n} \doteq \bar{a} \times \bar{b}$. Находим вектор $\bar{n}$ по формуле $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$:

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 9\bar{k} + 3\bar{i} + 3\bar{j} = 5\bar{i} + 3\bar{j} - 9\bar{k};$$

значит, $A = 5$, $B = 3$, $C = -9$. Искомое уравнение плоскости есть $5(x-2) + 3(y-3) - 9(z+4) = 0$, т. е. $5x + 3y - 9z - 55 = 0$.

Замечание. Приведем второе решение задачи. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка искомой плоскости. Составим вектор $\overline{M_0M} = (x-2; y-3; z+4)$. Так как векторы $\overline{M_0M}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем $5x + 3y - 9z - 55 = 0$. ●

5.2.8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; 0; -1)$, $M_2(-3; 1; 3)$ параллельно вектору $\bar{s} = (1; 2; -1)$.

5.2.9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; 0)$, параллельно векторам $\bar{a} = (0; 2; 3)$ и $\bar{b} = (-1; 4; 2)$.

5.2.10. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1; 0; -1)$, $M_2(2; 2; 3)$, $M_3(0; -3; 1)$.

◐ Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют в пространстве единственную плоскость. Ее уравнение будем искать в виде (2.3). Так как точки M_1, M_2 и M_3 лежат в одной плоскости, векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ также лежат в ней (см. рис. 55)

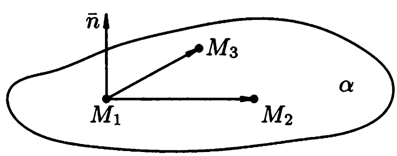


Рис. 55

Векторное произведение векторов $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ перпендикулярно плоскости α, в которой они лежат. Следовательно, в качестве нормали $\bar{n}$ к плоскости α можно взять вектор

$\bar{n} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$. Находим координаты векторов $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\bar{n}$:

$$\overline{M_1M_2} = (2-1; 2-0; 3-(-1)) = (1; 2; 4);$$
$$\overline{M_1M_3} = (0-1; -3-0; 1-(-1)) = (-1; -3; 2);$$
$$\bar{n} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$\bar{i}(4-(-3)\cdot 4) - \bar{j}(1\cdot 2-(-1)\cdot 4) + \bar{k}(1\cdot(-3) - 2\cdot(-1)) =$$
$$16\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}; \quad \bar{n} = (16; -6; -1).$$

Таким образом, параметры A, B и C плоскости, заданной уравнением (2.3) равны 16, -6 и -1 соответственно. Уравнение искомой плоскости, следовательно, имеет вид

$$16x - 6y - z + D = 0.$$

Точка $M_1(1; 0; -1)$ по условию лежит в плоскости. Следовательно, подстановка координат точки M_1 в уравнение плоскости обратит его в тождество. Имеем:

$$16\cdot 1 - 6\cdot 0 - (-1) + D = 0.$$

Откуда находим, что $D = -17$. Уравнение плоскости, проходящей через заданные точки M_1, M_2 и M_3, имеет вид $16x-6y-z-17=0$.

Замечание. Приведенное решение задачи по сути является обоснованием формулы (2.5). ●

5.2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2; 0; 0)$, $M_2(0; 4; 0)$, $M_3(0; 0; 5)$.

5.2.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ и линию пересечения плоскостей $2x - y + 2z - 6 = 0$ и $3x + 2y - z + 3 = 0$.

◐ Линия пересечения плоскостей — прямая. Выберем на ней две произвольные (несовпадающие) точки и сведем задачу к предыдущей — определение уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки.

Координаты точек прямой, заданной пересечением плоскости $2x - y + 2z - 6 = 0$ и $3x + 2y - z + 3 = 0$, — это решения системы

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 6 = 0, \\ 3x + 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Выбрать два решения этой системы можно различными способами. Поступим так: присвоим одной из переменных фиксированное значение (что-нибудь простое, например, равное нулю или единице), а значения остальных переменных найдем из образующейся системы. Пусть, например, $x = 0$. Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} -y + 2z = 6, \\ 2y - z = -3, \end{cases}$$

решение которой $y = 0$, $z = 3$. Итак, одна точка найдена. Обозначим ее M_2. Координаты этой точки $M_2(0; 0; 3)$.

Для нахождения второй точки поступим аналогичным образом. Пусть теперь $x = 3$ (подставка $z = 0$ приводит к дробным решениям, что слегка усложняет арифметические процедуры). Исходная система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 6 - y + 2z - 6 = 0, \\ 9 + 2y - z + 3 = 0, \end{cases}$$

решение которой $y = -8$; $z = -4$. Найдена вторая точка на прямой (обозначим ее M_3), координаты которой $M_3(3; -8; -4)$. Теперь есть три точки $M_1(1; -2; 3)$, $M_2(0; 0; 3)$ и $M_3(3; -8; -4)$, определяющие в пространстве плоскость. Ее уравнение находится способом, показанным в решении задачи 5.2.7. Уравнение искомой плоскости: $14x + 7y - 2z + 6 = 0$. ●

5.2.13. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 1; 1)$ перпендикулярно к линии пересечения двух плоскостей $x - y + 2z - 3 = 0$ и $2x - z + 4 = 0$.

5.2.14. Найти уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей $x - 2y + 3z - 4 = 0$ и $x + y - 5z + 9 = 0$ и параллельной оси Ox.

Дополнительные задачи

5.2.15. Найти объем пирамиды, ограниченной плоскостью $x+3y-5z-15 = 0$ и координатными плоскостями.

5.2.16. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $20x - 5y + 4z - 210 = 0$ и угол, образованный этим перпендикуляром с осью Oz.

5.2.17. Найти плоскость, зная, что точка $M(2; -4; 4)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

5.2.18. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точек $M_1(2; 1; -2)$ и $M_2(-2; 3; 4)$.

5.2.19. Найти уравнение плоскости, отсекающей на отрицательной полуоси Oy отрезок, равный 4, и перпендикулярной вектору $\bar{n} = (3; -2; 4)$.

5.2.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(4;2;3)$ и $M_2(2;0;1)$ и перпендикулярной к плоскости $x+2y+3z+4=0$.

5.2.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;0;3)$ и перпендикулярной к плоскостям $x+y+z-8=0$ и $2x-y+4z+5=0$.

5.2.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(-2;-3;4)$ и пересекающей оси Ox и Oz в точках с равными и положительными координатами.

5.2.23. Найти расстояние от начала координат до плоскости, которая пересекает оси Ox, Oy, Oz в точках с координатами $a=-6$, $b=3$, $c=3$.

5.2.24. Найти уравнение плоскости, проходящей через основания перпендикуляров, опущенных из точки $M(2;2;2)$ на координатные плоскости.

5.2.25. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-2;5)$ и отсекающей на осях Ox и Oy втрое большие отрезки, чем на оси Oz.

5.2.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}=\bar{i}-\bar{j}-3\bar{k}$, зная точку $M_2(2;-8;-1)$.

5.2.27. Найти точку пересечения следующих плоскостей:

1) $x-3y+2z-11=0$, $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$;

2) $3x+y+z-5=0$, $x-4y-2z+3=0$, $3x-12y-6z+7=0$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

5.2.28. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно двум векторам $\bar{a}=(m_1;n_1;p_1)$ и $\bar{b}=(m_2;n_2;p_2)$, может быть представленным в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

5.2.29. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно вектору $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$ и перпендикулярно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

5.2.30. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, точку $M_0(-1;2;1)$ и точку пересечения плоскостей $2x-4y+5z=21$, $x-3z+18=0$, $6x+y+z-30=0$.

5.2.31. Плоскости $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $3x+y-2z-18=0$ образуют треугольную пирамиду. Найти объем куба, вписанного в пирамиду так, что три его грани лежат на координатных плоскостях, одна из его вершин — на последней плоскости ($3x+y-2z-18=0$).

5.2.32. Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости $10x + 2y - 11z + 450 = 0$.

5.2.33. Чему равна площадь треугольника, отсеченного плоскостью $2x - 9y + 6z - 12 = 0$ от координатного угла Oxz?

5.2.34. Каково уравнение плоскости, проходящей через точку $(1;2;3)$ перпендикулярно вектору $\bar{a} = (3;2;1)$?

5.2.35. Какое из следующих уравнений плоскости является нормальным 1) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - 6 = 0$; 2) $x + y - 2 = 0$; 3) $y + 1 = 0$; 4) $x - 1 = 0$; 5) $\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z + 2 = 0$?

5.2.36. Проходит ли плоскость $2x - 4y + z - 3 = 0$ через одну из следующих точек: $A(2;1;3)$, $B(0;2;10)$, $C(-3;-3;-3)$?

5.2.37. Найти точки пересечения плоскости $x + 2y - 3z + 6 = 0$ с осями координат.

Угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей; расстояние от данной точки до данной плоскости

Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. Если две плоскости Q_1 и Q_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то величина угла φ между ними вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{2.10}$$

Величина *наименьшего* из двух смежных углов, образованных этими плоскостями, находится по формуле:

$$\cos\varphi = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|. \tag{2.11}$$

Условие параллельности двух плоскостей Q_1 и Q_2 имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{2.12}$$

условие перпендикулярности

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \tag{2.13}$$

плоскости совпадают, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{2.14}$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{2.15}$$

Если плоскость задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости может быть найдено по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|. \tag{2.16}$$

5.2.38. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -3; -2)$ параллельно плоскости $3x - 2y + 4z - 3 = 0$.

○ Ищем уравнение плоскости в виде $Ax + By + Cz + D = 0$ (это вид 2.3). Две параллельные плоскости имеют общую нормаль. Координаты нормали заданной плоскости $\bar{n} = (3; -2; 4)$. Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид $3x - 2y + 4z + D = 0$.

Точка $M(1; -3; -2)$ по условию лежит в искомой плоскости. Следовательно, подстановкой координат M в уравнение плоскости получим тождество: $3\cdot(1) - 2\cdot(-3) + 4\cdot(-2) + D = 0$. Отсюда находим, что $D = -1$. Уравнение искомой плоскости имеет вид $3x - 2y + 4z - 1 = 0$. ●

5.2.39. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-4; -3; -2)$, параллельно плоскости $x + 2y - 3z - 6 = 0$.

5.2.40. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; -3; 2)$ параллельно плоскости, проходящей через три точки $M_1(0; -2; -1)$, $M_2(1; -3; 4)$, $M_3(1; 1; -1)$.

5.2.41. Найти величину острого угла между плоскостями:

1) $11x - 8y - 7z - 15 = 0$ и $4x - 10y + z - 2 = 0$;

2) $2x + 3y - 4z + 4 = 0$ и $5x - 2y + z - 3 = 0$.

○ 1) Воспользовавшись формулой (2.11), получаем

$$\cos\varphi = \frac{|11\cdot 4 - 8\cdot(-10) - 7\cdot 1|}{\sqrt{121+64+49}\cdot\sqrt{16+100+1}} =$$

$$= \frac{117}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{117}} = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{117}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

2) Можно заметить, что выполняется условие (2.13) перпендикулярности плоскостей, т.к. $2\cdot 5 + 3\cdot(-2) - 4\cdot 1 = 0$. Следовательно, плоскости взаимно перпендикулярны; $\varphi = \frac{\pi}{2}$. ●

5.2.42. Найти величину острого угла между плоскостями:

1) $x + y - 2z + 5 = 0$ и $2x + 3y + z - 2 = 0$;

2) $2x - 2y + z = 0$ и $z = 0$.

5.2.43. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x - 2y + 2z + 5 = 0$ и удаленной от точки $M(3; 4; -2)$ на расстояние $d = 5$.

○ Уравнение искомой плоскости ищем в виде $x - 2y + 2z + D = 0$. Найдем значение D. Так как точка M удалена от искомой плоскости на расстояние $d = 5$, то по формуле (2.15) записываем

$$5 = \frac{|3 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \quad \text{или} \quad 5 = \frac{|D - 9|}{3},$$

т. е. $15 = \pm(D - 9)$, откуда $D = 24$ и $D = -6$. Условию задачи удовлетворяют две плоскости $x - 2y + 2z + 24 = 0$ и $x - 2y + 2z - 6 = 0$. ●

5.2.44. Найти расстояние между параллельными плоскостями:

1) $x + y - z - 2 = 0$ и $2x + 2y - 2z + 5 = 0$;

2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $2x - 3y + 6z + 42 = 0$.

5.2.45. Найти расстояние от точки $M_0(5; 4; -1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0; 4; 0)$, $M_2(0; 4; -3)$, $M_3(3; 0; 3)$.

5.2.46. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1; 3; 0)$ и $M_2(2; 4; -1)$, перпендикулярно плоскости $x - 2y + 3z - 10 = 0$.

○ Ищем уравнение плоскости в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Точки M_1 и M_2 лежат в искомой плоскости, следовательно, вектор $\overline{M_1M_2}$ также лежит в ней. Его координаты: $\overline{M_1M_2} = (2 - (-1); 4 - 3; -1 - 0) = (3; 1; -1)$.

Так как заданная и искомая плоскости перпендикулярны, вектор-нормаль заданной плоскости лежит в искомой. Координаты вектора-нормали заданной плоскости: $\bar{n} = (1; -2; 3)$.

Нормаль $\bar{n}_1$ к искомой плоскости находим как векторное произведение лежащих в ней неколлинеарных векторов:

$$\bar{n}_1 = \overline{M_1M} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}(3 - 2) - \bar{j}(9 + 1) + \bar{k}(-6 - 1);$$

$\bar{n}_1 = (1; -10; -7)$. Уравнение искомой плоскости имеет вид $x - 10y - 7z + D = 0$. Подставляя координаты точки $M_1 = (-1; 3; 0)$ (или M_2), лежащей в плоскости, в это уравнение, находим, что $D = 31$. Уравнение искомой плоскости имеет вид $x - 10y - 7z + 31 = 0$. ●

5.2.47. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку $M(2; 1; -1)$ перпендикулярно плоскости $2x - 3z = 0$.

Дополнительные задачи

5.2.48. Установить, какие из следующих пар плоскостей являются параллельными, какие — перпендикулярными:

1) $3x + 4y - z + 8 = 0$ и $6x + 8y - 2z - 3 = 0$;

2) $3x - 6y + 3z - 12 = 0$ и $-x + 2y - z + 4 = 0$;

3) $x + 2y - 5z + 1 = 0$ и $2x + 4y + 2z - 7 = 0$.

5.2.49. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; 0; 2)$ и перпендикулярной плоскостям $x + y + z = 0$ и $y - z = 0$.

5.2.50. Найти координаты точки на оси Oy, равноудаленной от двух плоскостей $x + 2y - 2z + 6 = 0$ и $2x + y + 2z - 9 = 0$.

5.2.51. Дана пирамида с вершинами $A(2; 2 - 3)$, $B(3; 1; 1)$, $C(-1; 0; -5)$, $D(4; -2; -3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

5.2.52. Составить уравнение плоскости, расположенной на расстоянии четырех единиц от плоскости $3x - 6y - 2z + 8 = 0$ и параллельно ей.

5.2.53. Доказать, что параллелепипед, грани которого лежат в плоскостях $8x - 4y + 5z - 7 = 0$, $3x + y - 4z + 13 = 0$, $11x + 47y + 20z + 2 = 0$, является прямоугольным.

5.2.54. Найти объем куба, две грани которого лежат на плоскостях $13x + 5y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ и $13x + 5y + \sqrt{2}z + 23 = 0$.

5.2.55. Даны уравнения трех граней параллелепипеда $x + 4 = 0$, $y + 2z - 5 = 0$, $x - 3y + 4z - 12 = 0$ и одна из его вершин $(4; -3; 2)$. Найти уравнения трех других граней параллелепипеда.

5.2.56. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y - 12z - 3 = 0$ и $3x + y - 7z - 2 = 0$ перпендикулярно плоскости $4x - 2y + 25 = 0$.

5.2.57. Определить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и составляющей с плоскостью $x + \sqrt{6}y - z - 3 = 0$ угол $60°$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

5.2.58. Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $2x - 2y + z + 5 = 0$ и $x + 2y - 2z - 3 = 0$.

5.2.59. Написать уравнение плоскости, расположенной на равном расстоянии от двух данных параллельных плоскостей $4x - 3y + z - 2 = 0$ и $4x - 3y + z + 8 = 0$.

5.2.60. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(0; 0; 2)$ и $M_2(0; 1; 0)$ и образующей угол $45°$ с плоскостью Oyz.

5.2.61. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ и начало координат.

5.2.62. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки $M_1(a_1; b_1; c_1)$ и $M_2(a_2; b_2; c_2)$.

5.2.63. При каких значениях α и β уравнения будут определять параллельные плоскости:

1) $2x + \alpha y + 3z - 8 = 0$ и $\beta x - 6y - 6z + 4 = 0$;

2) $\alpha x + 2y - 3z + 11 = 0$ и $3x - 5y - \beta z - 2 = 0$?

5.2.64. Определить, при каких значениях γ следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $4x - 7y + 2z - 3 = 0$ и $-3x + 2y + \gamma z + 5 = 0$;

2) $x - \gamma y + z = 0$ и $2x + 3y + \gamma z - 1{,}2 = 0$.

5.2.65. Пересекаются ли плоскости $2x - y + z - 140 = 0$, $x - z = 0$, $x + 5y - 2z + 1 = 0$?

§ 3. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Различные виды уравнения прямой в пространстве

1. *Канонические уравнения прямой*, проходящей через данную точку (x_0, y_0, z_0) параллельно вектору $\bar{a} = (m, n, p)$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}\,; \tag{3.1}$$

Всякий ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором этой прямой*. В частности, вектор $\bar{a} = (m, n, p)$ — направляющий для прямой, заданной уравнениями (3.1). Обращение в нуль одного из знаменателей уравнения (3.1) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

2. *Параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \tag{3.2}$$

где t — переменный параметр, $t \in \mathbb{R}$. В *векторной форме* уравнение (3.2) имеет вид

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{s}t, \tag{3.3}$$

где $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $\bar{s} = (m; n; p)$.

3. *Уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2; z_2)$, где $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3.4}$$

4. *Общее уравнение прямой*:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

(коэффициенты при переменных не пропорциональны). Направляющий вектор прямой (3.5) находится по формуле

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \qquad \text{или} \qquad \bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \tag{3.6}$$

т. е.

$$\bar{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

5.3.1. Общее уравнение прямой

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

преобразовать к каноническому виду и определить величины углов, образованные этой прямой с координатными осями.

◑ Для решения этой задачи надо знать какую-либо точку прямой и ее направляющий вектор $\bar{s}$. Выберем точку на прямой следующим образом: положим, например, $z = 0$; тогда для определения абсциссы x и ординаты y у этой точки получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 2 = 0, \\ 2x - 2y - 5 = 0, \end{cases}$$

из которой находим $x = 1$, $y = -\frac{3}{2}$. Итак, на прямой известна точка $\left(1; -\frac{3}{2}; 0\right)$. Направляющий вектор прямой находим по формуле (3.6):

$$\bar{s} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) \quad \text{т. е.} \quad \bar{s} = (-4; -7; -6).$$

Тогда, согласно формуле (3.1),

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{-7} = \frac{z-0}{-6} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{7} = \frac{z}{6}$$

— искомое уравнение прямой.

Замечание. Каноническое уравнение прямой можно получить, зная две точки этой прямой. В качестве координат этих точек можно взять два любых решения данной системы уравнений. Например, $\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)$ и $\left(0; -\frac{13}{4}; -\frac{3}{2}\right)$. Тогда искомое уравнение найдем, используя формулы (3.4):

$$\frac{x-\frac{5}{3}}{0-\frac{5}{3}} = \frac{y+\frac{1}{3}}{-\frac{13}{4}+\frac{1}{3}} = \frac{z-1}{-\frac{3}{2}-1},$$

т. е.

$$\frac{x-\frac{5}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{y+\frac{1}{3}}{-\frac{35}{12}} = \frac{z-1}{-\frac{5}{2}}, \quad \text{или} \frac{x-\frac{5}{3}}{4} = \frac{y+\frac{1}{3}}{7} = \frac{z-1}{6}.$$

Направление прямой задает вектор $\bar{s} = (4; 7; 6)$. Он образует с координатными осями Ox, Oy, Oz углы α, β и γ — соответственно. Находим эти углы по известным формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Получаем

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+7^2+6^2}}, \quad \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{4^2+7^2+6^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{4^2+7^2+6^2}}$$

$$\text{или} \quad \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{101}}, \quad \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{101}}, \quad \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{101}}.$$

Заметим, для контроля, что равенство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ выполняется. ●

5.3.2. Найти направляющий вектор прямой

$$\begin{cases} x = 2, \\ z = 4. \end{cases}$$

5.3.3. Привести к каноническому виду прямую

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 8 = 0, \\ 6x + 3y + 2z - 18 = 0. \end{cases}$$

5.3.4. Найти направляющие косинусы прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2{,}5}{0} = \frac{z-1}{-4}$.

5.3.5. Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(2; -1; -3)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 - 4t, \\ z = t; \end{cases}$

2) прямая параллельна оси Oy;

3) прямая перпендикулярна плоскости $3x + y - z - 8 = 0$.

❍ 1) Так как прямые параллельны, то они имеют один и тот же направляющий вектор $\bar{s} = (2; -4; 1)$. Согласно формулам (3.2) имеем искомое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 - 4t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

2) В качестве направляющего вектора оси Oy можно взять вектор $\bar{s} = (0; 1; 0)$, совпадающий с ортом $\bar{j}$. Искомое уравнение прямой есть

$$x = 2 + 0 \cdot t\,, \qquad y = -1 + 1 \cdot t\,, \qquad z = -3 + 0 \cdot t\,,$$

$$\text{т. е.} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1 + t, \\ z = -3. \end{cases}$$

3) Вектор $\bar{n} = (3; 1; -1)$ перпендикулярен плоскости $3x + y - z - 8 = 0$. Следовательно, в качестве вектора $\bar{s}$ можно взять вектор $\bar{n}$, т. е. $\bar{s} = (3; 1; -1)$. Тогда параметрические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $3x + y - z - 8 = 0$, примут вид

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -3 - t. \end{cases}$$ ●

5.3.6. Найти параметрические уравнения прямой:

1) проходящей через точку $(1; 0; -1)$ и параллельной вектору $\bar{a} = (2; 3; 0)$;

2) проходящей через точки $(2; 2; 2)$ и $(6; 2; 1)$.

5.3.7. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(4; 3; -2)$ параллельно

1) вектору $\bar{a} = (3; -6; 5)$;

2) прямой $\begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0, \\ 2x - y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$

❍ 1) В качестве направляющего вектора прямой, проходящей через точку M_0 возьмем вектор $\bar{s}$ равный вектору $\bar{a}$, т. е. $\bar{s} = (3; -6; 5)$. Тогда, по формуле (3.1), канонические уравнения прямой примут вид

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z+2}{5}\,.$$

2) Направляющий вектор $\bar{s}_1$ данной прямой находим по формулам (3.6):

$$\bar{s}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -11\bar{i} + 6\bar{j} - 7\bar{k},$$

т. е. $\bar{s}_1 = (-11; 6; -7)$. Так как данная прямая и искомая параллельны между собой, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ искомой прямой можно взять вектор $\bar{s}_1$, т. е. $\bar{s} = \bar{s}_1$. Получаем канонические уравнения

$$\frac{x-4}{-11} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+2}{-7}.$$

●

5.3.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(3; -2; 5)$:
1) параллельно оси Oz;
2) параллельно прямой $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0, \\ 2x + y - 4z + 3 = 0. \end{cases}$

Дополнительные задачи

5.3.9. Проверить, лежит ли точка $M(1; -3; 2)$ на прямой

$$\begin{cases} 3x - 2y + z - 11 = 0, \\ 2x + 5y + 6z + 1 = 0. \end{cases}$$

5.3.10. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки $(-3; 5; 4)$, $(2; 4; 6)$, $(2; 14; 6)$.

5.3.11. Привести к каноническому виду уравнение прямой

$$\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0, \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

5.3.12. Найти точки пересечения прямой $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{5}$ с координатными плоскостями.

5.3.13. Найти точки пересечения прямой

$$\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x - 3y - 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

с координатными плоскостями.

5.3.14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4; 2; 2)$ и пересекающей ось Oz под прямым углом.

5.3.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ и перпендикулярной векторам $\bar{a} = (2; 2; 3)$ и $\bar{b} = (-2; 5; 0)$.

5.3.16. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;3;-2)$ и образующей с осями Ox, Oy, Oz углы $120°$, $60°$, $45°$ соответственно.

5.3.17. При каких значениях D прямая

$$\begin{cases} 4x - 6y + 7z + D = 0, \\ 2x + 5y - 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

пересекает ось Ox?

5.3.18. Даны вершины треугольника $A(-3;2;8)$, $B(-7;0;3)$, $C(3;4;5)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины A.

5.3.19. Даны две вершины параллелограмма $ABCD$: $A(8;1;5)$ и $D(-3;0;4)$ и точка пересечения диагоналей $O(2;4;-2)$. Найти уравнение стороны BC.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

5.3.20. Даны вершины треугольника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$, $C(-5;14;-3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

5.3.21. Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

для того, чтобы прямая:

1) проходила через начало координат;

2) была параллельна оси Oy;

3) пересекала ось Oz;

4) совпадала с осью Ox.

5.3.22. Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\begin{cases} x - 6y + 2z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

на координатные плоскости.

5.3.23. Каково уравнение оси Ox?

5.3.24. Написать параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Угол между двумя прямыми; условия параллельности и перпендикулярности прямых; условие компланарности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Под углом между прямыми понимают угол между направляющими векторами $\bar{a}_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $\bar{a}_2=(m_2;n_2;p_2)$. Величина угла между прямыми L_1 и L_2 определяется из формулы

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{3.7}$$

Для нахождения величины острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (3.7) следует взять по модулю:

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{3.8}$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 имеет вид

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \tag{3.9}$$

Условие параллельности (или совпадения) прямых —

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \tag{3.10}$$

Условием, при котором *две прямые* L_1 *и* L_2 *лежат в одной плоскости*, является равенство

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0, \tag{3.11}$$

при этом, если $\bar{a}_1 \nparallel \bar{a}_2$, то прямые L_1 и L_2 пересекаются.

5.3.25. Найти величину острого угла между прямыми

$$\frac{x-4}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y+2z-8=0, \\ 2x+y-z+3=0. \end{cases}$$

◔ Направляющий вектор первой прямой есть $\bar{s}_1=(-3;1;-2)$. Находим направляющий вектор $\bar{s}_2$ второй прямой:

$$\bar{s}_2=\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right), \quad \text{т.е.} \quad \bar{s}_2=(-1;5;3).$$

По формуле (3.8) находим

$$\cos\varphi = \frac{|-3\cdot(-1)+1\cdot 5-2\cdot 3|}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{1+25+9}} = \frac{\sqrt{10}}{35},$$

поэтому $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{10}}{35}$ ($\approx 85°$). ●

5.3.26. Найти величину острого угла между прямыми:

1) $\frac{x}{11} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-1}{7}$ и $\frac{x-4}{7} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{8}$;

2) $\begin{cases} x-y+2=0, \\ 2x+y-z-6=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x-y+3z+1=0. \end{cases}$

5.3.27. Установить взаимное расположение прямых:

1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2}$ и $\begin{cases} x=5-8t, \\ y=4-6t, \\ z=3+4t; \end{cases}$

2) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$.

❍ 1) Выпишем направляющие векторы первой и второй прямых: $\bar{s}_1 = (4;3;-2)$, $\bar{s}_2 = (-8;-6;4)$. Как видно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{4}{-8} = \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4}.$$

Следовательно, данные прямые параллельны или совпадают. Возьмем на первой прямой какую-нибудь точку, например точку $(2;0;-1)$. Подставим ее координаты в уравнение второй прямой:

$$\begin{cases} 2=5-8t, \\ 0=4-6t, \\ -1=3+4t. \end{cases}$$

Получаем $t=\frac{3}{8}$ — из первого уравнения, $t=\frac{2}{3}$ — из второго, $t=-1$ — из третьего. Это означает, что точка $(2;0;-1)$ не принадлежит второй прямой; прямые не совпадают, значит они параллельны.

2) Координаты направляющих векторов $\bar{s}_1 = (2;-3;1)$ и $\bar{s}_2 = (3;2;4)$ данных прямых не пропорциональны. Следовательно, прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся. Проверим выполнение условия (3.11) принадлежности двух прямых одной плоскости, предварительно выписав координаты точек M_1 и M_2, через которые проходят данные прямые:

$M_1(0;1;-2)$, $M_2(-4;-3;1)$. Имеем

$$\begin{vmatrix} -4-0 & -3-1 & 1-(-2) \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot(-14) + 4\cdot 5 + 3\cdot 13 = 115 \neq 0.$$

Следовательно, данные прямые — скрещивающиеся. ●

5.3.28. Выяснить взаимное расположение прямых:

1) $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=18t, \\ y=10t, \\ z=-3+2t. \end{cases}$

2) $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+30}{5} = \dfrac{z-2{,}5}{4}$ и $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-7}{2} = \dfrac{z+4}{-1}$.

5.3.29. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-2;3;4)$ и перпендикулярной прямым

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

◐ Уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x+2}{m} = \frac{y-3}{n} = \frac{z-4}{p}.$$

Найдем m, n и p — координаты направляющего вектора $\bar{s}$ этой прямой. Используя условие (3.9) перпендикулярности прямых, можно записать:

$$\begin{cases} m\cdot 1 + n\cdot(-1) + p\cdot 2 = 0, \\ m\cdot 2 + n\cdot 1 + p\cdot 3 = 0. \end{cases}$$

По правилу решения системы двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными находим:

$$m = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} t = -5t, \quad n = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} t = t, \quad p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} t = 3t.$$

Уравнения искомой прямой есть

$$\frac{x+2}{-5t} = \frac{y-3}{t} = \frac{z-4}{3t} \quad \text{или} \quad \frac{x+2}{-5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}.$$

Замечания: 1) Систему уравнений

$$\begin{cases} m-n+2p=0, \\ 2m+n+3p=0 \end{cases}$$

можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{m}{p} - \dfrac{n}{p} + 2 = 0, \\ 2\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{p} + 3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{m}{p} = -\frac{5}{3}$, $\frac{n}{p} = \frac{1}{3}$ т.е. $m : n : p = -5 : 1 : 3$, поэтому $m = -5t$, $n = t$, $p = 3t$, где t — число.

2) В качестве вектора $\bar{s}$ можно использовать вектор $\bar{s}_1 \times \bar{s}_2$, т.к. искомая прямая перпендикулярна данным прямым. Тогда

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}, \quad \text{т.е.} \quad m = -5, \quad n = 1, \quad p = 3.$$

●

5.3.30. Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости Oxy, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-4}{3}$.

5.3.31. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1; -2; 3)$ и перпендикулярной к прямым $\frac{x-5}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{-2}$, $\frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-1}{4}$.

Дополнительные задачи

5.3.32. Найти расстояние от точки $M(-5; 4; 3)$ до прямой $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$.

5.3.33. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

Указание. Воспользоваться формулой $S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$.

5.3.34. Проверить, лежат ли прямые

$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0, \\ y + z - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + 2z - 3 = 0, \\ x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

в одной плоскости.

5.3.35. В уравнении прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{n} = \frac{z}{3}$ найти параметр n, при котором эта прямая пересекается с прямой $\frac{x}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{1}$, найти координаты точки их пересечения.

5.3.36. Показать, что прямая
$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3t, \\ z = t \end{cases}$$
перпендикулярна к прямой
$$\begin{cases} y + z - 8 = 0, \\ x - z + 4 = 0. \end{cases}$$

5.3.37. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(-3; 2; 7)$ на:

1) ось Ox;

2) плоскость Oyz.

5.3.38. Определить величины углов между осями координат и прямой $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{\sqrt{2}} = \frac{z-1}{1}$.

5.3.39. Найти величину тупого угла между прямыми
$$\begin{cases} x = 5, \\ y = -3 + 3t, \\ z = 4 - t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = 1 + 2t, \\ z = t. \end{cases}$$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

5.3.40. Найти координаты точки пересечения прямых $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$ и $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{4}$.

5.3.41. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-8}{0} = \frac{z-2}{3}$ и $\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

5.3.42. Найти уравнение перпендикуляра, общего к двум скрещивающимся прямыми
$$\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 3 - t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

5.3.43. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба с ребром, равным 1, и непересекающей ее диагональю грани.

5.3.44. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(2; -1; -3)$ на прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-2}$.

5.3.45. Пересекаются ли прямые $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4}$?

5.3.46. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $(1; 1; 1)$
а) параллельно оси Oz;
б) перпендикулярно оси Oz.

5.3.47. Написать уравнение прямой, по которой плоскость $x-2y+1=0$ пересекает кооординатную плоскость Oxz.

§ 4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Величина *угла между прямой* (L) $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ *и плоскостью* (Q) $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,. \tag{4.1}$$

Условие параллельности прямой (L) *и плоскости* (Q) имеет вид

$$Am+Bn+Cp=0\,; \tag{4.2}$$

условие их перпендикулярности:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}\,. \tag{4.3}$$

Для *нахождения точки пересечения прямой и плоскости* удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой

$$\begin{cases} x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt; \end{cases}$$

координаты точки пересечения находятся из *системы уравнений*

$$\begin{cases} x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt,\\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Условие, при котором прямая (L) *лежит в плоскости* Q:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases} \tag{4.5}$$

(Если $Am+Bn+Cp\neq 0$, то прямая пересекает плоскость; если $Am+{}$ ${}+Bn+Cp=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ — прямая параллельна плоскости.)

5.4.1. Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3; 4; 5)$ относительно плоскости $x-2y+z-6=0$.

❍ Точка M_2, симметричная точке M_1 относительно плоскости, находится на перпендикуляре к плоскости и является концом отрезка M_1M_2, для которого серединой будет точка N пересечения прямой M_1M_2 и плоскости. Направляющий вектор перпендикуляра к плоскости — это вектор-нормаль этой плоскости $\bar{n} = (1; -2; 1)$. Уравнение перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку M_1, имеет вид

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{1} (= t) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 3+t, \\ y = 4-2t, \\ z = 5+t. \end{cases}$$

Координаты точки N пересечения перпендикуляра с плоскостью находим, решая систему (см. (4.4))

$$\begin{cases} x = 3+t, \ y = 4-2t, \ z = 5+t, \\ x - 2y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

Из равенства $(3+t) - 2(4-2t) + (5+t) - 6 = 0$ вытекает равенство $6t - 6 = 0$, т. е. $t = 1$. Следовательно, $x = 3+1 = 4$, $y = 4-2 = 2$, $z = 5+1 = 6$, т. е. $N(4; 2; 6)$ — точка пересечения прямой и плоскости. А так как N — середина отрезка M_1M_2, то

$$x_N = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2}, \quad y_N = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2}, \quad z_N = \frac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2}.$$

Имеем

$$4 = \frac{3 + x_{M_2}}{2}, \quad 2 = \frac{4 + y_{M_2}}{2}, \quad 6 = \frac{5 + z_{M_2}}{2}.$$

Отсюда находим $x_{M_2} = 5$, $y_{M_2} = 0$, $z_{M_2} = 7$, т. е. точка M_2 имеет координаты $(5; 0; 7)$. ●

5.4.2. Найти координаты точки, симметричной точке $M(2; 8; 0)$ относительно прямой $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1}$.

5.4.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -3; 0)$ и прямую

$$\begin{cases} 2x + y - 6z + 3 = 0, \\ x - y + 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

❍ Один из способов решения этой задачи мы уже приводили (см. задачу 5.2.12). Рассмотрим другой подход к решению.

Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую: $2x + y - 6z + 3 + \lambda(x - y + 2z - 6) = 0$ (см. (2.2)). Выделим среди них плоскость, проходящую через точку $M(2; -3; 0)$, подставив ее координаты в уравнение пучка:

$$2 \cdot 2 - 3 - 6 \cdot 0 + 3 + \lambda(2 + 3 + 2 \cdot 0 - 6) = 0.$$

Отсюда $4 + \lambda \cdot (-1) = 0$, т.е. $\lambda = 4$. Из уравнения пучка при $\lambda = 4$ находим уравнение искомой плоскости

$$2x + y - 6z + 3 + 4(x - y + 2z - 6) = 0,$$

т.е. $6x - 3y + 2z - 21 = 0$. ●

5.4.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0, \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

и точку $M(0; 1; 2)$.

5.4.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; -3; 6)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-2}$.

5.4.6. Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x - 2y - 2z - 3 = 0$.

○ Применяя формулу (4.1), находим

$$\sin\varphi = \frac{|4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{16+4+4}} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\varphi = \frac{\pi}{6}$. ●

5.4.7. Найти величину острого угла между прямой

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

и плоскостью $2x + y + 2z - 5 = 0$.

5.4.8. Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

1) $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = t, \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ и $5x - 6y + 2z - 10 = 0$;

2) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}$ и $3x + y - 4z - 15 = 0$.

○ 1) Имеем $\bar{s} = (-4; 1; 2)$, $\bar{n} = (5; -6; 2)$. Как видно координаты направляющего вектора $\bar{s}$ прямой и нормального вектора $\bar{n}$ плоскости не пропорциональны: прямая не перпендикулярна плоскости (см. (4.3)). Найдем значение выражения $Am + Bn + Cp$:

$$Am + Bn + Cp = 5 \cdot (-4) - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -20 - 6 + 4 = -22 \neq 0.$$

Условие (4.2) параллельности прямой и плоскости не выполняется. Значит, прямая *пересекает* плоскость.

2) Здесь $\bar{s} = (3;-1;2)$, $\bar{n} = (3;1;-4)$, $M_0(-1;2;-4)$, $Am + Bn + Cp = 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = 9 - 1 - 8 = 0$. Следовательно, данная прямая параллельна плоскости или лежит на ней. Проверим условия (4.5) принадлежности прямой плоскости:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) - 15 = 0.$$

Условия (4.5) выполняются, поэтому прямая *лежит в плоскости.* ●

5.4.9. Установить взаимное расположение прямой L и плоскости Q:

1) $\begin{cases} x - y + 4z - 6 = 0, \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$ (L) и $3x - y + 6z - 12 = 0$ (Q);

2) $\frac{x}{2} = \frac{y+13}{17} = \frac{z+7}{13}$ (L) и $5x - z = 4$ (Q).

Дополнительные задачи

5.4.10. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-0{,}5}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+2{,}5}{3}$ и перпендикулярной к плоскости $3x + 4y - 5z - 6 = 0$.

5.4.11. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ и $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-1}$.

5.4.12. Найти координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x - y + 2z + 5 = 0$.

5.4.13. Найти координаты проекции точки $M(2;2;-2)$ на плоскость $3x - y + z - 13 = 0$.

5.4.14. Найти координаты проекции точки $M(-3;0;2)$ на прямую

$$\begin{cases} x = 5 - t, \\ y = 2t, \\ z = 3t. \end{cases}$$

5.4.15. При каком значении m прямая $\frac{x+10}{m} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x - 3y + 4z - 1 = 0$?

5.4.16. При каких значениях C и D прямая $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{7}$ лежит в плоскости $2x - y + Cz + D = 0$?

5.4.17. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1;1;6)$ на прямую

$$\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2t, \\ z = t. \end{cases}$$

5.4.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0, \\ 3x - y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

параллельно прямой

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$$

5.4.19. Найти расстояние от точки $M(3;5;5)$ до прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$.

5.4.20. Прямая L проходит через точку $M(3;-4;0)$ и точку пересечения прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{1}$ с плоскостью $x + y - z + 2 = 0$. Найти величину угла, образованного прямой L с плоскостью $2x + y + 2z - 5 = 0$.

5.4.21. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и образующей с плоскостью $\sqrt{2}x + y - z + 2 = 0$ угол, равный $\frac{\pi}{4}$.

5.4.22. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.

5.4.23. Найти расстояние d между параллельными прямыми:

1) $\begin{cases} x + z = 1, \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + z = 1, \\ y + 2z = 1; \end{cases}$

2) $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{-3}$ и $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-8} = \frac{z+1}{-12}$.

5.4.24. Плоскость α проходит через точки $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$, $M_3(10;-7;1)$. Найти точку, симметричную точке $(3;-4;-6)$ относительно плоскости α.

5.4.25. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-9}{-6} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ и $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

5.4.26. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-3}$ на плоскость, заданную уравнением $2x - 3y + z - 4 = 0$.

5.4.27. Записать уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум данным прямым.

5.4.28. На плоскости $x - 2y + 4z - 28 = 0$ найти точку M_0, сумма расстояний от которой до точек $M_1(4;2;1)$ и $M_2(-1;1;1)$ была бы наименьшей.

5.4.29. Найти уравнения плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

и образующей угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

5.4.30*. Доказать, что кратчайшее расстояние между прямыми $\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{s}_1 t$ и $\bar{r} = \bar{r}_2 + \bar{s}_2 t$ может быть вычислено по формуле

$$d = \frac{|(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{s}_1\bar{s}_2|}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|}.$$

5.4.31. Можно ли через прямую $\frac{x+2}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+1}{-3}$ провести плоскость параллельно плоскости $12x - y + 10z - 3 = 0$?

5.4.32. Каково уравнение прямой, проходящей через точку $O(0;0;0)$ перпендикулярно к плоскости $x + y + z + 1 = 0$?

5.4.33. Лежит ли прямая $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-7}$ в плоскости $3x + 2y + z = 0$? А в плоскости $3x + 2y + z - 1 = 0$?

5.4.34. При каких значениях p и B прямая $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{p}$ перпендикулярна плоскости $6x + By - 3z + 1 = 0$?

5.4.35. При каком значении A плоскость $Ax - 2y + 4z + 5 = 0$ параллельна прямой

$$\begin{cases} y - z = 0, \\ x + y = 0? \end{cases}$$

§ 5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Если в пространстве $\mathbb{R}^3$ ввести прямоугольную систему координат $Oxyz$, то каждая *поверхность* определяется некоторым *уравнением* $F(x, y, z) = 0$, (x, y, z) — координаты любой точки поверхности. Если $F(x, y, z)$ — *многочлены не выше второй* степени относительно совокупности переменных x, y, z, то уравнение $F(x, y, z) = 0$ *называется уравнением второго порядка*, а поверхность, изображаемая этим уравнением называется *поверхностью второго порядка.*

Если поверхность имеет специфическое расположение относительно системы координат (например, симметрична относительно некоторых координатных плоскостей, или имеет вершину в начале координат и пр.), то ее уравнение имеет достаточно простой вид, который называется *каноническим.*

Канонический вид уравнений поверхностей второго порядка. Геометрическое изображение

1) Сфера радиуса R с центром в начале координат (рис. 56)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

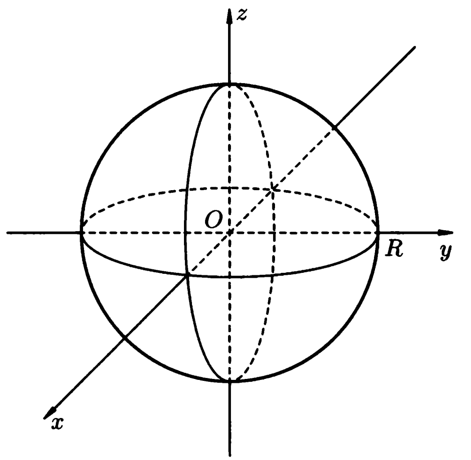


Рис. 56

Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ изображает сферу радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2) *Эллипсоид* с полуосями a, b, c и центром в начале координат (рис. 57)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

При $a = b = c = R$ *эллипсоид* превращается в сферу радиуса R.

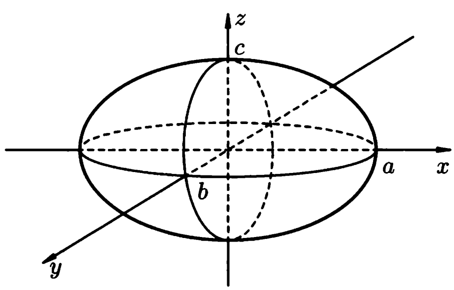


Рис. 57

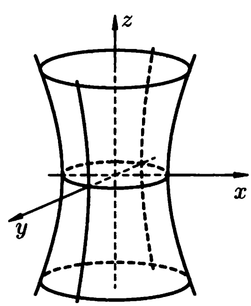


Рис. 58

14 – 2361

3) *Однополостный гиперболоид* с полуосями a, b, c и осью Oz (рис. 58)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ являются эллипсами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями $x = h$ или $y = h$ являются гиперболами.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

4) *Двуполостный гиперболоид* с полуосями a, b, c и осью Oz (рис. 59)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями $z = h$, $|h| > c$ являются эллипсами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями $x = h$ или $y = h$ являются гиперболами.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2} - 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2} - 1.$$

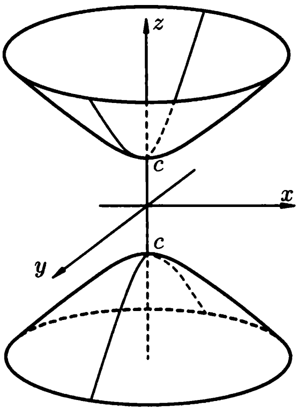


Рис. 59

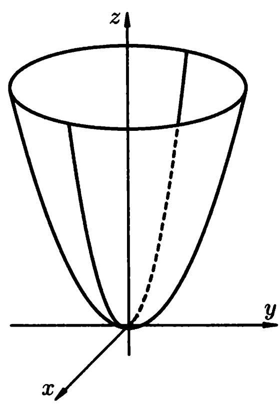


Рис. 60

5) *Параболоид* эллиптический с параметрами a, b, p и вершиной в начале координат (рис. 60)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$$

Сечения параболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ ($h > 0$ при $p > 0$, $h < 0$ при $p < 0$) есть эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2ph.$$

Сечения параболоида вертикальными плоскостями $x = h$ или $y = h$ являются параболами.

$$\frac{y^2}{b^2} = 2pz - \frac{h^2}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} = 2pz - \frac{h^2}{b^2}.$$

6) *Параболоид гиперболический* с параметрами a, b, p и вершиной в начале координат (рис. 61)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$$

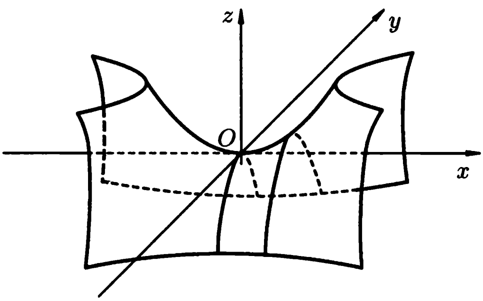


Рис. 61

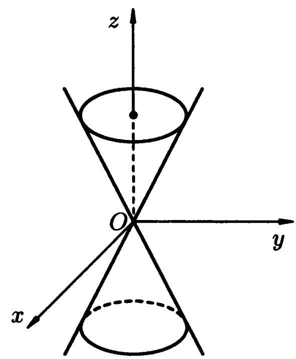


Рис. 62

Сечения параболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ представляют собой гиперболы

$$\frac{x^2}{2a^2ph} - \frac{y^2}{2b^2ph} = 1.$$

Сечения вертикальными плоскостями $x = h$ и $y = h$ являются параболами

$$\frac{y^2}{b^2} = -2pz + \frac{x^2}{a^2} \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} = 2pz + \frac{h^2}{b^2}.$$

7) *Конус эллиптический* с вершиной в начале координат и осью Oz (рис. 62)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Если $a = b$, то конус круглый или круговой. Пересечение конуса горизонтальными плоскостями являются эллипсами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

(при $h = 0$ эллипс вырождается в точку).

Сечения конуса вертикальными плоскостями $x = h$ и $y = h$ являются гиперболами

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2} \quad \text{при} \quad h \neq 0,$$

или парой пересекающих прямых

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{при} \quad h = 0.$$

К поверхностям второго порядка относятся цилиндры, направляющие которых — линии второго порядка. Мы ограничимся перечислением цилиндров, направляющие которых расположены в плоскости Oxy, а образующие — прямые, параллельные оси Oz.

8) Цилиндры:

(1) *Эллиптический* (рис. 63)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

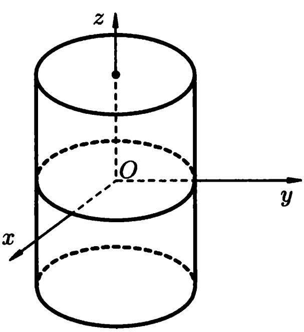


Рис. 63

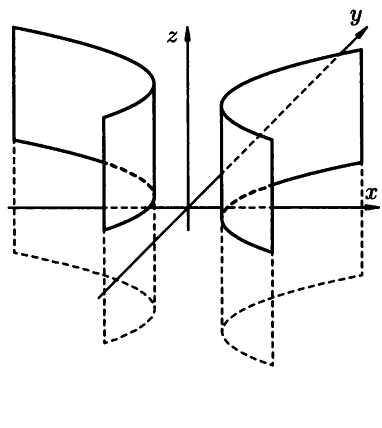


Рис. 64

Если $a = b = R$, то цилиндр — круговой $x^2 + y^2 = R$.

(2) *Гиперболический* (рис. 64)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(3) *Параболический* (рис. 65)

$$y^2 = 2px.$$

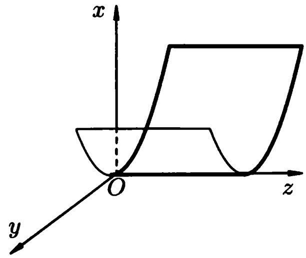


Рис. 65

Примечание. Если в каждом из приведенных канонических уравнений заменить $x = x_1 - x_0$, $y = y_1 - y_0$, $z = z_1 - z_0$, где (x_0, y_0, z_0) — фиксированные числа, то новые уравнения представляют те же поверхности и они занимают в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ такое же положение относительно плоскостей $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$ как поверхности, заданные канонически относительно координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Другими словами, приведенные формулы представляют параллельный сдвиг поверхности на вектор $\overline{OM} = (x_0, y_0, z_0)$.

Метод параллельных сечений

Если задано уравнение той или иной поверхности, то возникает задача исследования ее формы и расположения относительно координатных осей. Для решения этой задачи обычно применяют метод параллельных сечений: поверхность пересекается несколькими плоскостями, параллельными плоскостям координат. Форма и размер полученных сечений позволяют выяснить геометрическую форму самой поверхности.

Пересечение поверхности с плоскостью

Линию в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно определить как пересечение двух поверхностей. Таким образом уравнение линии можно записать в виде системы

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Для исследования этой линии удобно воспользоваться цилиндром, проектирующем ее на ту или иную координатную плоскость. Если, например, проектируем линию на плоскость Oxy, то исключим z из системы и получим уравнение $\varphi(x, y) = 0$. Оно изображает направляющую проектрующего цилиндра на плоскость Oxy. В зависимости от того, будет ли $\varphi(x, y) = 0$ эллипсом, гиперболой, параболой, парой прямых — изучаемая линия сохранит соответствующее название.

5.5.1. Составить уравнение сферы с центром в точке $M_0(-5; 3; 2)$ и касающейся плоскости $2x - 2y + z - 4 = 0$.

❍ Для составления уравнения сферы нужен ее радиус. В данном случае R — расстояние от M_0 до плоскости:

$$R = \frac{|(-5)\cdot 2 - 2\cdot 3 + 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = 6.$$

Искомое уравнение: $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36$. ●

5.5.2. Составить уравнение сферы с центром в точке $M_0(0;4;0)$, если она касается плоскости $2x + 6y - 3z - 3 = 0$.

5.5.3. Составить уравнение сферы, касающейся двух параллельных плоскостей $6x - 3y - 2z - 35 = 0$ и $6x - 3y - 2z + 63 = 0$, если ее центр расположен на прямой $\frac{x-11}{6} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+3}{-2}$.

❍ 1) Определим точки M_1 и M_2 пересечения прямой с плоскостями (заметим, что прямая перпендикулярна плоскостям). Для этого параметрические уравнения прямой $x = 11 + 6t$, $y = -4 - 3t$, $z = -3 - 2t$ подставляем в уравнения плоскостей, находим t и возвращаемся к этим уравнениям.

$$6(11 + 6t) - 3(-4 - 3t) - 2(-3 - 2t) - 35 = 0,$$
$$t = -1, \quad M_1(5, -1, -1).$$

Аналогично находим $M_2(-7, 5, 3)$.

2) Центр сферы M_0 — середина отрезка M_1M_2: $M_0(-1, 2, 1)$. Радиус сферы $R = M_0M_1 = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$.

3) Уравнение сферы $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 49$. ●

5.5.4. Составим уравнение сферы, проходящей через четыре точки $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;0;-1)$.

❍ Уравнение сферы ищем в виде

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

где (a, b, c) — координаты центра и R — радиус неизвестные. Координаты данных точек превращают уравнение сферы в верные равенства, т. е.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R^2, \\ (2-a)^2 + b^2 + c^2 = R^2, \\ (1-a)^2 + (1-b)^2 + c^2 = R^2, \\ (1-a)^2 + b^2 + (1+c)^2 = R^2. \end{cases}$$

После возведения в квадрат, приведения подобных слагаемых получается система, из которой $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $R^2 = 1$.

Ответ. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. ●

5.5.5. Составить уравнение сферы если:

1) точки $A(3;-2;6)$ и $B(5;2;-2)$ являются концами одного из ее диаметров;

2) имеет центр в точке $M_0(5;0;3)$ и проходит через точку $A(4;1;-1)$;

3) имеет центр в точке $M_0(2;1;3)$ и касается плоскости $z=6$;

4) имеет центр в точке $M_0(5;2;-1)$ и касается плоскости $2x-y+3z+23=0$;

5) она симметрична сфере $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=46$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$;

6) она проходит через точки $A(1,-6,-2)$, $B(4;-3;2)$, $C(-3;-3;9)$ и $D(4;1;6)$.

5.5.6. Найти точки пересечения поверхности $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и прямой $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

◔ Параметрические уравнения прямой $x=4t$, $y=-3t$, $z=-2+4t$ подставим в уравнение однополостного гиперболоида и определим значение t: $\frac{16t^2}{16}+\frac{9t^2}{9}-\frac{(4t-2)^2}{4}=1$, $(t-1)^2=0$, $t_{1,2}=1$. Следовательно, $x=4$, $y=-3$, $z=2$. Прямая имеет с гиперболоидом две совпадающие точки пересечения, т. е. прямая касается поверхности гиперболоида в точке $M_1(4;-3;2)$. ●

5.5.7. При каких значениях параметра p плоскость $2x-2y-z=p$ касается сферы $x^2+y^2+z^2=81$?

◔ Если плоскость касается сферы, то расстояние от ее центра до плоскости равно радиусу сферы, т. е. $\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0-0-p|}{\sqrt{4+4+1}}=9$. Отсюда $|p|=27$, т. е. $p=\pm 27$. ●

5.5.8. Установить при каких m плоскость $y+mz=1$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$:

а) по эллипсу,

б) по гиперболе.

5.5.9. Установить при каких m плоскость $my+z=2$ пересекает эллиптический параболоид $y=\frac{x^2}{3}+\frac{z^2}{2}$:

а) по эллипсу,

б) по параболе.

5.5.10. Методом параллельных сечений исследовать поверхность, определяемую уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=-1$.

◔ 1) Перепишем уравнение в виде $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=\frac{z^2}{4}-1$ и пересекаем поверхность плоскостями $z=h$ параллельными координатной плоскости Oxy.

В сечениях получаются линии с уравнениями $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = \frac{h^2}{4} - 1$.

При $|h| < 2$ эти уравнения не имеют изображения (мнимые эллипсы) при $h = \pm 2$ они изображают точки $(0; 0; 2)$ и $(0; 0; -2)$, а при $|h|^2 > 2$ получаются эллипсы $\frac{x^2}{(4c)^2} + \frac{y^2}{(3c)^2} = 1$, где $c = \sqrt{\frac{h^2}{4} - 1}$.

С увеличением $|h|$ увеличиваются и полуоси эллипсов $4c$ и $3c$, т. е. эллипсы расширяются (рис. 66). Поверхность симметрична относительно плоскости Oxy.

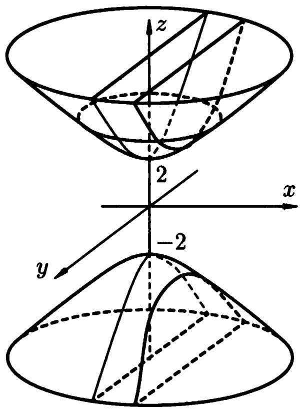


Рис. 66

2) Перепишем уравнение поверхности в виде $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = -\frac{y^2}{9} - 1$ и пересечем ее вертикальными плоскостями $y = l$. При каждом $l \in (-\infty; +\infty)$ соответствующие уравнения описывают гиперболы. В частности, при $l = 0$ получаем гиперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{4} = -1$, расположенную в плоскости Oxz.

3) Сечения поверхности плоскостями $x = r$ также гиперболы

$$\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = -1 - \frac{r^2}{16}.$$

Но из пп. 1) и 2) уже можно сделать вывод о строении поверхности: она состоит из эллипсов, «нанизанных» на гиперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{4} = -1$ $(l = 0)$. Поскольку два сечения, параллельных Oxz и Oyz — гиперболы, а одно — параллельное Oxy —

эллипс, то поверхность называется гиперболоидом эллиптическим; для уточнения — двуполостный, ибо состоит из двух отдельных частей (над и под плоскостью Oxy). ●

5.5.11. Установить тип заданных поверхностей и построить их.

1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} = 1$;
2) $x^2 + y^2 - 4z^2 = -1$;
3) $3x^2 + y^2 = 2a(z-2)$;
4) $2y = x^2 - \frac{z^2}{4}$;
5) $y^2 = 15z$;
6) $z = 5 - x^2 - y^2$;
7) $x^2 - 9y^2 = 4z^2$;
8) $x^2 = 5y - 1$;
9) $2x^2 - 4x + y^2 - 6y - z^2 = 0$;
10) $2x^2 - 7y^2 + 11z^2 = 0$;
11) $x + 2 = y^2 - 3y + 3z^2 + 6z$;
12) $x^2 = yz$.

5.5.12. Определить линию пересечения поверхностей

$$(x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36 \quad \text{и} \quad 3x + y - z - 9 = 0.$$

◐ Первая поверхность — это сфера, вторая — плоскость. Они пересекаются или по окружности, или в одной точке, или вовсе не пересекаются.

Найдем расстояние d от центра сферы $M_0(4; 7; -1)$ до плоскости $3x + y - z - 9 = 0$.

$$d = \frac{|3 \cdot 4 + 7 + 1 - 9|}{\sqrt{3^2 + 1 + 1}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}.$$

Поскольку $d < R$ ($R = 6$ — радиус сферы), то плоскость пересекает сферу по окружности.

Центр $O(x_1; y_1; z_1)$ этой окружности расположен на перпендикуляре M_0O, опущенном из центра сферы M_0 на заданную плоскость (рис. 67).

Уравнение перпендикуляра M_0O в параметрической форме имеет вид

$$x = 4 + 3t, \quad y = 7 + t, \quad z = -1 - y.$$

Подставим эти равенства в уравнение плоскости и находим t. $3(4+3t) + (7+t) - (-1-t) - 9 = 0$, $t = -1$.

Подставим $t = -1$ в параметрические уравнения перпендикуляра M_0O. Находим: $x = 1$, $y = 6$, $z = 0$, т. е. $O(1; 6; 0)$ — центр окружности пересечения сферы и плоскости.

Из ΔOM_0A (рис. 67) находим $r^2 = R^2 - d^2$, $r^2 = 36 - 11 = 25$, $r = 5$.

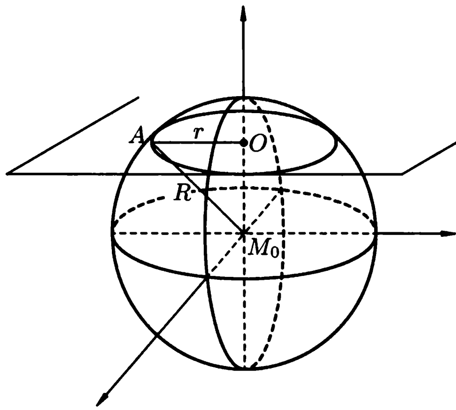


Рис. 67

Таким образом получено, что кривая

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36, \\ 3x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

представляет собой окружность радиуса 5 с центром в точке $O(1;6;0)$. ●

5.5.13. Составить уравнения касательных плоскостей к сфере $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$ в точках ее пересечения с прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

❍ Точки пересечения прямой со сферой получаются подстановкой равенств $x = 1+t$, $y = -t$, $z = 1+2t$ в уравнение сферы, определением t и подстановкой обратно в уравнения прямой. Имеем $(1+t-2)^2 + (-t+1)^2 + (1+2t-3)^2 = 6$, $6(t-1)^2 = 6$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$. Далее $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$, $x_2 = 3$, $y_2 = -2$, $z_2 = 5$. Итак, $M_1(1;0;1)$, $M_2(3;-2;5)$ — точки пересечения прямой и сферы.

Составим уравнение первой касательной плоскости, проходящей через $M_1(1;0;1)$. Ее нормальный вектор $\overline{M_0M_1}$, где $M_0(2;-1;3)$ центр сферы: $\overline{M_0M_1} = (-1;+1;-2)$, а уравнение плоскости: $-(x-1) + y - 2(z-1) = 0$ или $x - y + 2z - 3 = 0$.

Уравнение второй плоскости, по аналогии: $x - y + 2z - 15 = 0$.

Полученные плоскости параллельны потому, что данная прямая проходит через центр сферы $M_0(2;-1;3)$ (получается при $t = 1$). ●

5.5.14. Установить, что плоскость $y-2=0$ пресекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{9}=1$ по эллипсу. Найти его полуоси и вершины.

○ Пересечение двух поверхностей в пространстве преставляет некоторую линию, принадлежащую как одной так и другой поверхности. Уравнение этой линии в нашем случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{9}=1, \\ y-2=0. \end{cases}$$

Подставим $y=2$ в первое уравнение и получаем $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=\frac{1}{2}$. Это уравнение эллипса, расположенного в плоскости $y-2=0$. Поскольку каноническое уравнение полученного эллипса имеет вид $\frac{x^2}{8}+\frac{z^2}{4{,}5}=1$, то его полуоси равны $a=\sqrt{8}$ и $b=\sqrt{4{,}5}$ ($c^2=a^2-b^2$, $c=\sqrt{3{,}5}$), а вершины эллипса расположены в точках $A_1(-\sqrt{8};2;0)$ и $A_2(8;2;0)$ — на большем диаметре, $B_1(0;2;-\sqrt{4{,}5})$ и $B_2(0;2;\sqrt{4{,}5})$ — на меньшем диаметре. ●

5.5.15. Исследовать линию пересечения гиперболоида $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ с плоскостью $4x-3y-12z-6=0$, пользуясь ее проекциями на координатные плоскости.

○ Линия пересечения гиперболоида с плоскостью определяется системой

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1, \\ 4x-3y-12z-6=0. \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения

$$z=\frac{4x-3y-6}{12} \quad \text{и} \quad z^2=\frac{16x^2+9y^2+36-24xy-48x+36y}{144}$$

и подставляем в первое уравнение. Получаем

$$9y^2+8xy+16x-12y-60=0.$$

Это уравнение проекции на плоскость Oxy линии пересечения гиперболоида с плоскостью. Вместе с тем это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz, направляющая которой есть исследуемая линия. Уравнение этой линии следует привести к каноническому виду известными формулами преобразования координат (поворот осей и сдвиг). В данном случае методом разложения на множители можно получить $(y+2)(9y+8x-30)=0$, т. е. наша линия представляет пару прямых $y+2=0$ и $8x+9y-30=0$, которые пересекаются в точке

$$\begin{cases} y+2=0, \\ 8x+9y-30=0, \end{cases}$$

т. е. $M_1(6; -2)$.

По аналогии с этим, проектируем искомую линию на плоскость Oxz. Получаем пару прямых $x - 3z = 0$ и $5x - 9z - 12 = 0$, которые пересекаются в точке $M_2(6; 2)$.

Наконец, на плоскость Oyz искомая линия проектируется в прямые $y + 2 = 0$ и $5y + 8z - 6 = 0$, которые пересекаются в точке $M_3(-2; 2)$.

Если проекции на координатные плоскости данной линии являются пересекающимися прямыми, то сама эта линия представляет пару пересекающихся в точке $M(6; -2; 2)$ прямых. Координаты M получаются из координат ее проекций M_1, M_2, M_3. ●

5.5.16. Установить какие линии определяются системами уравнений:

1) $\begin{cases} 2z = \dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{6}, \\ 3x - y + 6z - 18 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2z = \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{3}, \\ x - 2y - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1, \\ 9x - 6y + 2z - 43 = 0. \end{cases}$

5.5.17. Дан гиперболический параболоид $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = z$ и одна из его касательных плоскостей: $10x - 2y - z - 21 = 0$. Найти уравнения каждой из тех двух прямых, по которой плоскость касается с параболоидом.

◑ Уравнения искомых прямых задаются системой уравнений, которую последовательно преобразуем.

$$\begin{cases} 10x - 2y - z - 21 = 0, \\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10x - 2y - 21, \\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 10x - 2y - 21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 10x - 2y - 21, \\ (2x - y - 6)(2x + y - 14) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 10x - 2y - z - 21 = 0, \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} & (5.1) \\ \\ \begin{cases} 10x - 2y - z - 21 = 0, \\ 2x + y - 14 = 0. \end{cases} & (5.2) \end{array} \right.$$

Уравнения прямых (5.1) и (5.2) получены в общем виде. Приведем (5.1) к каноническому виду. Для этого найдем две точки на прямой (5.1):

$$z=0:\begin{cases}10x-2y=21,\\ 2x-y=6\end{cases}\Rightarrow M_1\left(\frac{3}{2};-3;0\right);$$

$$y=0:\begin{cases}10x-z=21,\\ 2x-6=0\end{cases}\Rightarrow M_2(3;0;9).$$

Составим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2. $\overline{M_1M_2}=\left(\frac{3}{2};3;9\right)=\frac{3}{2}(1;2;6)$. Прямая (5.1) имеет вид $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-9}{6}$ или параметрически: $x=3+t$, $y=2t$, $z=9+6t$. (Уравнение прямой определяется неоднозначно: например, при $t=2$ находим на этой прямой точку $x_0=5$, $y_0=4$, $z_0=21$, а потому ее уравнение можно записать и так $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-21}{6}$). По аналогии, прямую (5.2) можно привести к виду $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-21}{14}$. ●

Дополнительные задачи

5.5.18. Составить уравнение сферы радиуса $R=9$, проходящей через точки $A(-5;10;-1)$, $B(1;-2;-1)$, $C(-8;-2;2)$.

5.5.19. Сфера проходит через три точки $A(-2;4;1)$, $B(-5;0;0)$, $C(3;1;-3)$, а ее центр лежит на плоскости $2x+y-z+3=0$. Составить ее уравнение.

5.5.20. Составить уравнение сферы, проходящей через четыре точки: $A(1;-2;-1)$, $B(4;1;11)$, $C(-8;-2;2)$ и $D(-5;10;-1)$.

5.5.21. Установить как расположена точка $A(2;-1;3)$ относительно каждой сферы — на сфере, внутри нее или вне:

1) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;

2) $(x+14)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=625$;

3) $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$.

5.5.22. Определить центр $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и радиус окружности:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100,\\ 2x-2y-z+9=0.\end{cases}$$

5.5.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух сфер.

$$2x^2+2y^2+2z^2+3x-2y+z-5=0$$

$$x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+1=0.$$

5.5.24. Составить уравнение сферы, проходящей через начало координат и окружность:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ 2x-3y+5z-5=0.\end{cases}$$

5.5.25. Методом параллельных сечений исследовать геометрическую форму поверхностей заданных уравнениями:

1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1;$

2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1;$

3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{4} = 1;$

4) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9};$

5) $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9};$

6) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$

7) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1;$

8) $x^2 = 2y.$

Более сложные задачи

5.5.26. Определить, как расположена прямая относительно сферы — пересекает ли, касается или проходит вне ее. Прямая и сфера заданы следующими уравнениями:

1) $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+\frac{7}{2}}{3} = \frac{z+2}{1}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0;$

2) $x = 5+3t, y = 2t, z = -25-2t, x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-67 = 0;$

3) $\begin{cases} 2x - y + 2z - 12 = 0, \\ 2x - 4y - z + 6 = 0, \end{cases}$ $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 43 = 0.$

5.5.27. Найти кратчайшее расстояние от точки A до сферы с заданным уравнением:

1) $A(-2; 6; 3)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

2) $A(1; -1; 3)$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0.$

5.5.28. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точке $M_1(6; -3; -2)$.

5.5.29. Доказать, что плоскость $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и вычислить координаты точки касания.

5.5.30. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и параллельных плоскости $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

5.5.31. Доказать, что в каждом из указанных ниже случаев заданные поверхность и плоскость имеют одну общую точку и найти ее координаты:

1) $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y$, $2x - 2y - z - 10 = 0,$

2) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$, $5x + 2z + 5 = 0$,

3) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{81} = 1$, $3x - 12y - 4z + 54 = 0$.

5.5.32. Доказать, что плоскость $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ по прямолинейным образующим. Составить уравнения этих образующих.

5.5.33. Доказать, что плоскость $2x - 12y - z + 16 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $2z = x^2 - 4y^2$ по прямолинейным образующим. Составить уравнения этих прямых.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Начало отрезка AB находится в точке $A(2; -3; 4)$. Точка $M(-1; 2; 5)$ отсекает от него четвертую часть ($AM : AB = 1 : 4$). Найти координаты точки B.

2. Какие поверхности определяются уравнениями:
   1) $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 8y - 8 = 0$;
   2) $y = 4z^2$?

3. Составить уравнения плоскости, проходящей через:
   1) ось Oz и точку $A(2; -3; 4)$;
   2) точку A параллельно плоскости Oxy.

4. Треугольник ABC образован пересечением плоскости $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ с координатными осями. Найти уравнения средней линии треугольника, параллельной плоскости Oxy.

5. Найти уравнения перпендикуляра к плоскости $x - 2y + z - 9 = 0$, проходящего через точку $A(-2; 0; -1)$, и определить координаты основания этого перпендикуляра.

Вариант 2

1. На оси Ox найти точку, равноудаленную от двух точек $A(3; -1; 2)$ и $B(4; 1; -1)$.

2. На линии $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 64, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 58 \end{cases}$ найти точку:
   1) абсцисса которой равна 4;
   2) аппликата которой равна 2.

3. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 27$ в точке $M_0(2; -1; -3)$.

4. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(2;4;3)$, $B(-3;0;6)$, $C(-4;2;1)$. Найти уравнения стороны AD и диагонали BD.

5. Найти расстояние оси точки $A(0;2;5)$ до прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{3}$.

Вариант 3

1. Найти центр шара радиуса $R = 5$, который расположен в пятом октанте и касается всех трех координатных плоскостей.

2. Найти уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух точек $A_1(3;2;1)$ и $A_2(-4;-2;1)$.

3. Найти угол между плоскостью $x + y = 0$ и плоскостью, проходящей через точку $M(3;-1;-1)$ и содержащую ось Ox.

4. Через точку $M(2;1;-4)$ провести прямую, параллельную биссектрисе координатного угла Oyz.

5. Найти проекцию точки $A(2;-1;3)$ на плоскость $5x - 2y + z + 15 = 0$.

Вариант 4

1. Отрезок AB разделен на 5 равных частей точками C, D, E, F ($AC = CD = DE = EF = FB$). Найти координаты точек D и C, если известны точки $A(2;2;5)$ и $B(-3;1;0)$.

2. Составить уравнение линии пересечения плоскости Oyz и сферы, центр которой находится в точке $C(4;-3;2)$ и радиус равен 10.

3. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $A(1;2\sqrt{2};0)$ и от плоскости $x + y - 5 = 0$.

4. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(5;-7;9)$ параллельно прямой
$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 6 = 0, \\ 2x - y + 4z + 17 = 0. \end{cases}$$

5. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+6}{3}$ и $\frac{x+5}{8} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+6}{12}$.

❑

Глава 6. ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

§ 1. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Определение функции

Везде далее в этом параграфе под множествами будут пониматься числовые множества, т. е. множества, состоящие из действительных чисел.

Множество всех действительных чисел будет обозначаться буквой $\mathbb{R}$.

$\Rrightarrow$ Пусть каждому числу x из некоторого множества X поставлено в соответствие одно и только одно число y. Тогда говорят, что на множестве X задана *функция*.

Способ (правило), с помощью которого устанавливается соответствие, определяющее данную функцию, обозначают той или иной буквой: f, g, h, $\varphi, \ldots$ Если, например, выбрана буква f, то пишут

$$y = f(x).$$

Переменная x при этом называется *независимой* переменной (или *аргументом*), а переменная y — *зависимой*.

Множество X называется *областью определения* данной функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y, соответствующих различным числам $x \in X$, — *областью значений* этой функции и обозначается $E(f)$.

$\Rrightarrow$ Если числу x_0 из области определения функции $f(x)$ соответствует некоторое число y_0 из области значений, то y_0 называется *значением функции* в точке x_0 (или при $x = x_0$).

График функции

$\Rrightarrow$ Пусть заданы прямоугольная система координат Oxy и функция $y = f(x)$. *Графиком функции* $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Множество точек на координатной плоскости является графиком некоторой функции в том и только в том случае, когда каждая вертикальная (т. е. параллельная оси Oy) прямая пересекает его не более чем в одной точке.

График функции $y = f(x)$ зачастую можно построить с помощью преобразований (сдвиг, растяжение) графика некоторой уже известной функции.

15 – 2361

В частности:

1. График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|a|$ единиц (вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$);

2. График функции $y = f(x - b)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $|b|$ единиц (вправо, если $b > 0$, и влево, если $b < 0$);

3. График функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением (сжатием) вдоль оси Oy в k раз ($1/k$ раз), если $k > 1$ ($k \in (0, 1)$);

4. График функции $y = f(mx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием (растяжением) по оси Ox в m раз ($1/m$ раз), если $m > 1$ ($m \in (0, 1)$);

5. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Ox;

6. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Oy.

Четность, нечетность и периодичность функции

$\Rrightarrow$ Функция называется *четной*, если:
1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля (т. е. $\forall x \in D(f) \Longrightarrow -x \in D(f)$);
2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

$\Rrightarrow$ Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если:
1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля;
2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется *функцией общего вида.*

$\Rrightarrow$ Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$ справедливы условия:
1) $x + T \in D(f)$, $x - T \in D(f)$;
2) $f(x + T) = f(x)$.

Число T называется *периодом* функции $f(x)$. Если T — период функции $f(x)$, то числа $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T, \ldots$ также являются периодами этой функции. Как правило, под периодом функции понимают наименьший из ее положительных периодов (*основной период*), если таковой существует.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T, то ее график переходит сам в себя при сдвиге вдоль оси Ox на T единиц влево или вправо.

Сложная функция. Элементарные функции

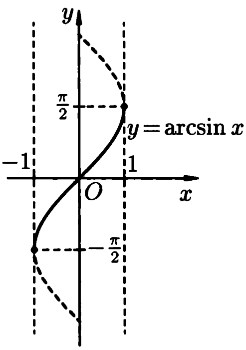
⇛ Пусть область значений функции $y = f(x)$ содержится в области определения функции $g(y)$. Тогда функция

$$z = g(f(x)),\ x \in D(f)$$

называется *сложной функцией* или *композицией* функций f и g и обозначается $g \circ f$.

Основными (или *простейшими*) *элементарными функциями* называются: *постоянная функция* $y = c$; *степенная функция* $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; *показательная функция* $y = a^x$, $a > 0$; *логарифмическая функция* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; *тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ $\left(\text{где } \sec x = \dfrac{1}{\cos x}\right)$, $y = \operatorname{cosec} x$ $\left(\text{где } \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}\right)$; *обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

На рисунках 68,*а* и 68,*б* приведены соответственно графики функций $y = \arcsin x$ и $y = \operatorname{arctg} x$.



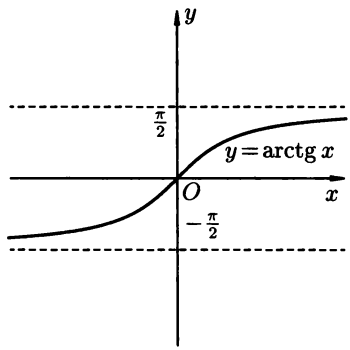


Рис. 68

⇛ *Элементарными функциями* называются функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (+, −, ·, :) и композиций (т. е. образования сложных функций).

Монотонная, обратная и ограниченная функция

⇛ Функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

⇛ Функция $f(x)$ называется *монотонной*, если она невозрастающая или неубывающая.

⇛ Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

⇛ Функция $f(x)$ называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

⇛ Пусть для любых различных значений $x_1, x_2 \in D(f)$ справедливо, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда для любого $y \in E(f)$ найдется только одно значение $x = g(y) \in D(f)$, такое, что $y = f(x)$. Функция $x = g(y)$, определенная на $E(f)$, называется *обратной* для функции $f(x)$.

Отметим, что $E(g) = D(f)$.

Если функция $f(x)$ имеет обратную функцию, то каждая горизонтальная прямая $y = c$ пересекает ее график не более чем в одной точке.

Пусть функция $x = g(y)$ (иногда ее обозначают $x = f^{-1}(y)$) — обратная для функции $y = f(x)$. Если обозначить аргумент этой функции через x, то ее можно записать в виде $y = g(x)$. Тогда

$$g(f(x)) = x \text{ для всех } x \in D(f),$$

$$f(g(x)) = x \text{ для всех } x \in E(f).$$

Иными словами, если функция $g(x)$ — обратная для функции $f(x)$, то функция $f(x)$ — обратная для функции $g(x)$; поэтому обе эти функции называют еще *взаимообратными*.

Пусть функция $y = f(x)$ вырастает (убывает) на отрезке $[a; b]$. Тогда на отрезке $[f(a); f(b)]$ (соответственно, $[f(b); f(a)]$) определена возрастающая (убывающая) функция $g(x)$, обратная для функции $f(x)$.

График функции $g(x)$, обратной для функции $f(x)$, симметричен графику $f(x)$ относительно прямой $y = x$.

⇛ Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу) на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое число M, что

$$f(x) \leqslant M \quad (f(x) \geqslant M) \text{ для всех } x \in X.$$

⇛ Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое число $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \text{ для всех } x \in X.$$

Гиперболические функции

Гиперболическими функциями называются следующие четыре функции:

1) *гиперболический синус* $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (график этой нечетной возрастающей функции изображен на рис. 69,a);

2) *гиперболический косинус* $y = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (график этой четной функции см. на рис. 69,*б*);

3) *гиперболический тангенс* $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (график этой нечетной возрастающей функции см. на рис. 69,*в*);

4) *гиперболический котангенс* $y = \operatorname{cth} x$, где $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (график этой нечетной убывающей функции см. на рис. 69,*г*).

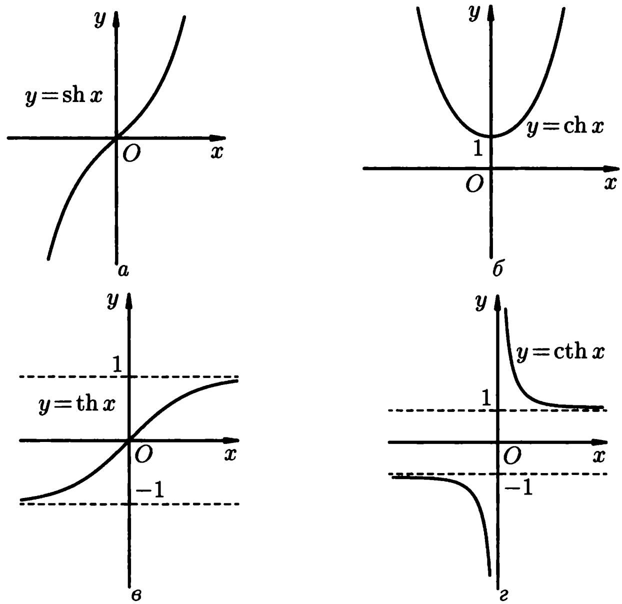


Рис. 69

Для гиперболических функций имеют место формулы, аналогичные (с точностью до знака) соответствующим формулам для обычных тригонометрических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$
$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \quad \text{и т. д.}$$

Неявные и параметрически заданные функции

Формула $y = f(x)$ определяет явный способ задания функции. Однако во многих случаях приходится использовать неявный способ задания функции.

$\Rightarrow$ Пусть данная функция определена на множестве D. Тогда, если каждое значение $x \in D$ и соответствующее ему значение функции y удовлетворяют некоторому (одному и тому же) уравнению $F(x;y) = 0$, то говорят, что эта *функция задана неявно уравнением* $F(x;y) = 0$. Сама функция в этом случае называется *неявной функцией*.

$\Rightarrow$ *Графиком уравнения* $F(x;y) = 0$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Пусть на некотором множестве $X \subset R$ заданы две функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда множество всех точек на плоскости Oxy с координатами $(x(t), y(t))$, где $t \in X$, называется *кривой* (или линией), *заданной параметрически*.

Если кривая, заданная параметрически, является графиком некоторой функции $y = f(x)$, то эта функция также называется *функцией, заданной параметрически* (или параметрически заданной).

6.1.1. Найти области определения функций:

1) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$;

2) $f(x) = \sqrt{5-3x}$;

3) $f(x) = \ln(x+2)$.

○ 1) Дробь $\dfrac{3x+1}{x^2-1}$ определена, если ее знаменатель не равен нулю. Поэтому область определения данной функции находится из условия $x^2 - 1 \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 1$. Таким образом, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Функция $f(x) = \sqrt{5-3x}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $5 - 3x \geqslant 0$. Отсюда $x \leqslant \frac{5}{3}$, и, значит, $D(f) = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$.

3) Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, поэтому функция $\ln(x+2)$ определена в том и только в том случае, когда $x + 2 > 0$, т. е. $x > -2$. Значит, $D(f) = (-2; +\infty)$. ●

6.1.2. Найти области определения функций:

1) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin\dfrac{x+2}{3}$;

2) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}} - 7\cos 2x$.

○ 1) Функция a^x, $a > 0$ определена при всех действительных значениях x, поэтому функция $2^{\frac{1}{x}}$ определена в точности при тех значениях x, при которых имеет смысл выражение $\frac{1}{x}$, т. е. при $x \neq 0$.

Далее, область определения второго слагаемого находим из двойного неравенства $-1 \leqslant \frac{x+2}{3} \leqslant 1$. Отсюда $-3 \leqslant x + 2 \leqslant 3$, т. е. $-5 \leqslant x \leqslant 1$.

Область определения функции $f(x)$ есть пересечение областей определения обоих слагаемых, откуда $D(f) = [-5; 0) \cup (0; 1]$.

2) Функция $7 \cos 2x$ определена при всех действительных значениях x, а функция $\frac{5}{\sqrt[3]{2x - x^2}}$ — лишь при тех значениях x, при которых $2x - x^2 \neq 0$, т. е. при $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Таким образом, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$. ●

Найти области определения функций:

6.1.3. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^3 + 1}$.

6.1.4. $f(x) = \sin \frac{1}{|x| - 2}$.

6.1.5. $f(x) = \log_3(-x)$.

6.1.6. $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 7x + 10}$.

6.1.7. $f(x) = x^2 + \operatorname{tg} x$.

6.1.8. $f(x) = \sqrt{x - 7} + \sqrt{10 - x}$.

6.1.9. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{|x^2 - 2|}}$.

6.1.10. $f(x) = \sqrt[4]{x + 2} + \frac{1}{\sqrt[6]{1 - x}}$.

6.1.11. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \log_2(2 - 3x)$.

6.1.12. $f(x) = \arccos(x - 2) - \ln(x - 2)$.

6.1.13. Найти множества значений функций:

1) $f(x) = x^2 + 4x + 1$;

2) $f(x) = 2^{x^2}$;

3) $f(x) = 3 - 5 \cos x$.

○ 1) Так как $x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3$, а $(x + 2)^2 \geqslant 0$ для всех значений x, то $f(x) \geqslant -3$ для всех x. Поскольку к тому же функция $(x + 2)^2$ принимает все значения от 0 до ∞, то $E(f) = [-3; +\infty)$.

2) $E(x^2) = [0; +\infty)$, поэтому множество значений функции 2^{x^2} совпадает с множеством значений функции 2^x при $x \geqslant 0$. Отсюда $E(f) = [1; +\infty)$.

3) $E(\cos x) = [-1; 1]$, откуда $E(-5 \cos x) = [-5; 5]$. Так как $f(x) = -5 \cos x + 3$, то $E(f) = [-2; 8]$. ●

Найти множество значений функций:

6.1.14. $f(x) = x^2 - 8x + 20.$

6.1.15. $f(x) = 3^{-x^2}.$

6.1.16. $f(x) = 2\sin x - 7.$

6.1.17. $f(x) = \frac{1}{x} + 4.$

6.1.18. $f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.$

6.1.19. $f(x) = \sqrt{5-x} + 2.$

6.1.20. Для функции $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$ найти:

1) $f(0)$; **2)** $f(-2)$; **3)** $f(\sqrt{2})$; **4)** $f(-x)$; **5)** $f\left(\frac{1}{x}\right)$; **6)** $f(a+1)$; **7)** $f(a)+1$; **8)** $f(2x)$.

○ 1)–3). Подставляя значение $x = 0$ в аналитическое выражение для данной функции, получим: $f(0) = \frac{0+3}{0^2-1} = -3$. Аналогично находим $f(-2) = \frac{-2+3}{(-2)^2-1} = \frac{1}{3}$, $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+3}{(\sqrt{2})^2-1} = \sqrt{2}+3$.

4)–6). Для того, чтобы найти $f(-x)$, надо формально заменить x в формуле для $f(x)$ на $-x$. Тогда $f(-x) = \frac{-x+3}{(-x)^2-1} = \frac{3-x}{x^2-1}$. Точно так же найдем $f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{1}{x}+3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1} = \frac{3x^2+x}{1-x^2}$, $f(a+1) = \frac{(a+1)+3}{(a+1)^2-1} = \frac{a+4}{a^2+2a}$.

7) $f(a)+1 = \frac{a+3}{a^2-1} + 1 = \frac{a^2+a+2}{a^2-1}$.

8) $f(2x) = \frac{2x+3}{(2x)^2-1} = \frac{2x+3}{4x^2-1}$. ●

6.1.21. Для функции $f(x) = x^3 \cdot 2^x$ найти:

1) $f(1)$; **2)** $f(-3)$; **3)** $f(-\sqrt[3]{5})$; **4)** $f(-x)$; **5)** $f(3x)$; **6)** $f\left(\frac{1}{x}\right)$; **7)** $\frac{1}{f(x)}$; **8)** $f(b-2)$.

6.1.22. Для функции $\varphi(t) = \frac{\sqrt{t+5}}{t^2}$ найти:

1) $\varphi(-1)$;
2) $\varphi(-5)$;
3) $\varphi(\frac{5}{4})$;
4) $\varphi(z+3)$;
5) $\varphi(2t-1)$.

6.1.23. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие — общего вида:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$;

2) $f(x) = x^4 - 5|x|$;

3) $f(x) = e^x - 2e^{-x}$;

4) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

❍ 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, и, стало быть, область определения функции симметрична относительно начала координат. Кроме того, $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$, т. е. данная функция нечетная.

2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = (-x)^4 - 5|-x| = x^4 - 5|x| = f(x)$. Следовательно, функция четная.

3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = e^{-x} - 2e^x \neq \pm f(x)$, т. е. данная функция общего вида.

4) $D(f) = (-1; 1)$, т. е. область определения симметрична относительно нуля. К тому же $f(-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\dfrac{1-x}{1+x} = -f(x)$, т. е. функция нечетная. ●

6.1.24. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие — общего вида:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

2) $f(x) = x^5 + 3x^3 - x$;

3) $f(x) = \sqrt{x}$;

4) $f(x) = \arcsin x$;

5) $f(x) = \sin x + \cos x$;

6) $f(x) = |x| - 2$;

7) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$;

8) $f(x) = x \cdot e^x$.

6.1.25. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует:

1) $f(x) = \sin 4x$;

2) $f(x) = \cos^2 5x$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$;

4) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$;

5) $f(x) = x^2$.

❍ 1) Наименьшим положительным периодом функции $\sin x$ является число 2π. Покажем, что наименьший положительный период $\sin 4x$ — число $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Действительно, $\sin 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x + 2\pi) = \sin 4x$, т. е. $T = \frac{\pi}{2}$ — период данной функции. С другой стороны, если $T_1 > 0$ — какой-либо другой период этой функции, то $\sin 4(x + T_1) = \sin 4x$ для всех x, т. е. $\sin(4x + 4T_1) = \sin 4x$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $4T_1$ — период функции $\sin t$, где $t = 4x$, и, значит, $4T_1 \geqslant 2\pi$, т. е. $T_1 \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $T = \frac{\pi}{2}$ — наименьший положительный период функции $\sin 4x$.

Аналогично можно показать (см. также задачу 6.1.123), что наименьший положительный период функций $\sin(kx + b)$ и $\cos(kx + b)$ $(k \neq 0)$ — это число $\frac{2\pi}{k}$.

2) Поскольку $\cos^2 5x = \dfrac{1 + \cos 10x}{2}$, то период данной функции совпадает с периодом функции $\cos 10x$. Рассуждая как и в пункте 1), легко показать, что наименьший положительный период функции $\cos 10x$ равен $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$. Таким образом, наименьший положительный период функции $f(x)$ равен $\frac{\pi}{5}$.

3) Наименьший положительный период $\operatorname{tg} x$ равен π, поэтому наименьший положительный период функции $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ будет равен (см. рассуждения в пункте 1)) $\frac{\pi}{(1/3)} = 3\pi$.

4) Наименьшие положительные периоды функций $\sin 2x$ и $\cos 3x$ соответственно равны (см. пункты 1) и 2)) $\frac{2\pi}{2}$, т. е. π, и $\frac{2\pi}{3}$. Нетрудно показать (см. также задачу 6.1.124), что наименьший положительный период суммы этих функций будет равен наименьшему общему кратному их периодов, т. е. числу 2π.

5) При $x > 0$ функция определена и возрастает, поэтому не может быть периодической. Значит, и на интервале $(-\infty; +\infty)$ функция не является периодической. ●

6.1.26. Какие из следующих функций периодические, а какие — нет? Там, где это возможно, найти наименьший положительный период функции:

1) $f(x) = \cos\frac{x}{4}$;

2) $f(x) = |x|$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}(2x - 1)$;

4) $f(x) = \sin\frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$;

5) $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 3x$.

Наибольшее целое число, не превосходящее x (т. е. ближайшее слева на числовой оси), называется *целой частью* x и обозначается $[x]$ (или $E(x)$). Например, $[\pi] = 3$, $[-4{,}5] = -5$ и т. д.

Число $x - [x]$ называется *дробной частью* x и обозначается $\{x\}$. Так $\{1{,}8\} = 0{,}8$, $\{-2{,}7\} = 0{,}3$ и т. д.

6.1.27. Построить график функции:

1) $y = [x]$;

2) $y = \{x\}$.

○ 1) Функция $[x]$ равна n на каждом полуинтервале $[n; n+1)$, поэтому ее график имеет следующий «ступенчатый» вид (рис. 70).

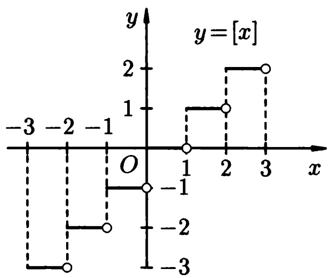


Рис. 70

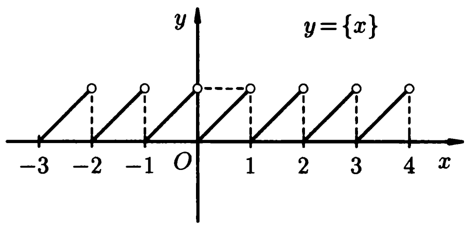


Рис. 71

2) На каждом полуинтервале $[n; n+1)$ имеем: $[x] = n$, поэтому функция $\{x\}$ принимает одни и те же значения. Таким образом, достаточно построить ее график на $[0; 1)$ (здесь $\{x\} = x$), а затем параллельно перенести эту часть на все остальные промежутки. В итоге получим график, изображенный на рисунке 71. ●

6.1.28. Построить график функции:

1) $y = x^2 + 4x + 3$;

2) $y = -2\sin 3x$;

3) $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$.

○ 1) Выделяя полный квадрат в данном квадратном трехчлене, преобразуем функцию к виду $y = (x+2)^2 - 1$. Теперь ясно, что для построения графика функции, достаточно сначала сместить параболу $y = x^2$ влево на 2 единицы (получается график функции $y = (x+2)^2$), а затем на 1 единицу вниз (рис. 72).

2) Сжав стандартную синусоиду $y = \sin x$ в три раза к оси Oy, получим график функции $y = \sin 3x$ (рис. 73). Растянув полученный график в два раза вдоль оси Oy, получим график

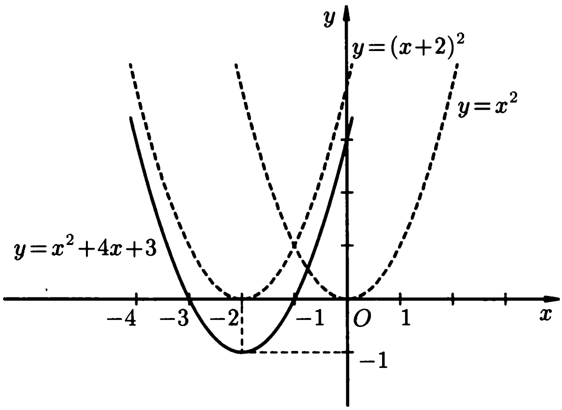


Рис. 72

функции $y = 2\sin 3x$ (рис. 74 а)). Осталось отразить последний график относительно оси Ox, результатом будет искомый график (рис. 74 б)).

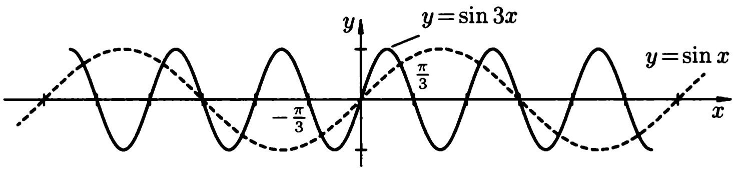


Рис. 73

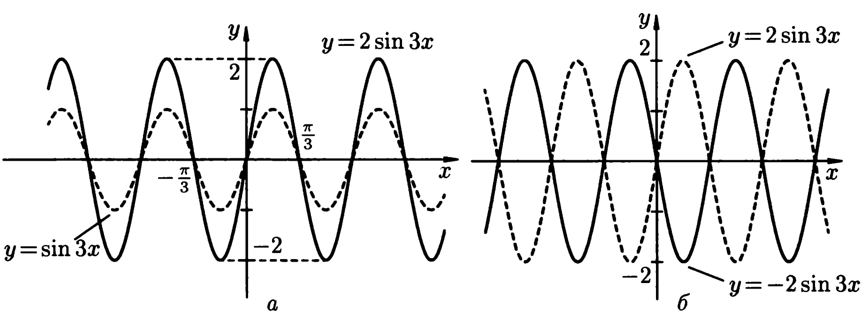


Рис. 74

3) Опустив на $\frac{1}{2}$ вниз график дробной части x (рис. 71), получим график функции $y = \{x\} - \frac{1}{2}$ (рис. 75 а)). Теперь те

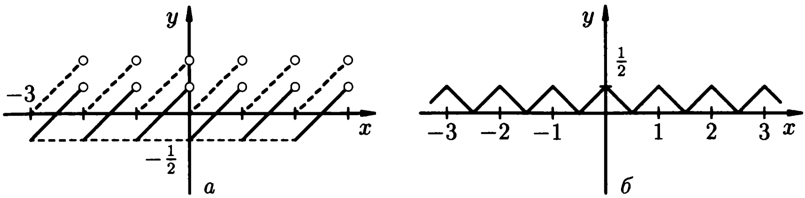


Рис. 75

части этого графика, которые расположены ниже оси Ox, отражаем относительно этой оси — в итоге имеем искомый график (рис. 75 б)). ●

Построить графики функций:

6.1.29. $y = |x - 3|$.

6.1.30. $y = x^2 - 6x + 11$.

6.1.31. $y = 3\cos 2x$.

6.1.32. $y = -\dfrac{2}{x} + 1$.

6.1.33. $y = 2^{x-1} + 3$.

6.1.34. $y = \log_3(-x)$.

6.1.35. $y = \operatorname{tg}|x|$.

6.1.36. $y = \dfrac{x+4}{x+2}$.

6.1.37. Найти сложные функции $f \circ g$ и $g \circ f$, где
1) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$;
2) $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x - 1$.

❍ 1) По определению композиции функций имеем $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, $x \geqslant 0$.

2) Аналогично, $(f \circ g)(x) = (2x-1)^3$, $(g \circ f)(x) = 2x^3 - 1$. ●

6.1.38. Найти сложные функции $f \circ g$ и $g \circ f$, где
1) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$;
2) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 2x - 5$;
3) $f(x) = |x|$, $g(x) = \cos x$.

6.1.39. Найти обратную функцию для данной:
1) $y = x - 1$;
2) $y = \dfrac{2}{x+3}$;
3) $y = \sqrt{x}$.

❍ 1) Функция $y = x - 1$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, а значит, для любых $x_1 \neq x_2$ имеем: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Отсюда следует, что на $(-\infty; +\infty)$ эта функция имеет обратную. Для того, чтобы найти эту обратную функцию, разрешим уравнение $y = x - 1$ относительно x, откуда $x = y + 1$. Записывая полученную формулу в традиционном виде (т. е. меняя x и y местами), найдем окончательно: $y = x + 1$ — обратная функция к исходной.

2) Функция $y = \dfrac{2}{x+3}$ убывает на множестве $(-\infty; -3) \cup$ $\cup (-3; +\infty)$, являющейся областью определения. Поэтому у нее есть обратная, которую найдем, разрешая уравнение $y = \dfrac{2}{x+3}$ относительно x.

Отсюда получим, что функция $y = \dfrac{2}{x} - 3$ — обратная к исходной.

3) Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и, стало быть, имеет обратную. Рассуждая, как в пунктах 1) и 2), найдем обратную функцию $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$. Область определения этой функции совпадает с областью значений исходной функции $y = \sqrt{x}$, т. е. с промежутком $[0; +\infty)$. ●

6.1.40. Доказать, что функция $y = x^2$ не имеет обратной на интервале $(-\infty; +\infty)$.

◐ Для любого $y_0 > 0$ уравнение $y_0 = x^2$ имеет два решения $x_1 = \sqrt{y_0}$ и $x_2 = -\sqrt{y_0}$ (т. е. каждая горизонтальная прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y = x^2$ в двух точках). Но функция имеет обратную только в том случае, если такое решение единственно. Значит, данная функция действительно не имеет обратной на интервале $(-\infty; +\infty)$. ●

Какие из следующих функций имеют обратные? Для таких функций найти обратные функции.

6.1.41. $y = 3x + 5$.

6.1.42. $y = x^3 - 2$.

6.1.43. $y = |x|$.

6.1.44. $y = \dfrac{x-2}{x}$.

Выяснить, какие из следующих функций являются монотонными, какие — строго монотонными, а какие — ограниченными:

6.1.45. $f(x) = c$.

6.1.46. $f(x) = \sin^2 x$.

6.1.47. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

6.1.48. $f(x) = -x^2 + 2x$.

6.1.49. $f(x) = \dfrac{x+2}{x+5}$.

6.1.50. $f(x) = [x]$ (см. задачу 6.1.27).

6.1.51. Вычислить значения гиперболических функций:

$\operatorname{sh} 0$, $\operatorname{ch} 0$, $\operatorname{th} 0$, $\operatorname{sh} 1$, $\operatorname{ch}(\ln 2)$.

6.1.52. Доказать тождества:

1) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$;

2) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$;

3) $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$;

4) $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$;

5) $\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y = \dfrac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)]$;

6) $\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)]$;

7) $\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)]$.

6.1.53. Функция y задана неявно. Выразить ее в явном виде.
1) $xy = 7$;
2) $x^2 + y^2 = 1$, $y \leqslant 0$.

○ 1) При $x \neq 0$ из данного уравнения получим $y = \frac{7}{x}$.

2) Выражая y из данного уравнения, имеем $y = -\sqrt{1 - x^2}$. ●

6.1.54. Функция y задана неявно. Там, где это возможно, выразить ее в явном виде:
1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$;
2) $x + |y| = 1$;
3) $e^y - \sin y = x^2$.

6.1.55. Какие из следующих точек принадлежат графику уравнения $y + \cos y - x = 0$:

$$A(1;0), \quad B(0;0), \quad C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \quad D(\pi - 1;\pi)?$$

6.1.56. Кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = t - 1; \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$$

1) Найти точки на графике при $t = 0$, $t = 1$, $t = -\sqrt{2}$.
2) Какие из следующих точек лежат на этой кривой:

$$A(1;5), \quad B\left(\frac{1}{2};\frac{13}{4}\right), \quad C(2;8), \quad D(0;1)?$$

Дополнительные задачи

Найти области определения функций:

6.1.57. $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

6.1.58. $f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(x-5)}$.

6.1.59. $f(x) = \arccos 3x$.

6.1.60. $f(x) = \frac{1}{\lg x}$.

6.1.61. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{-8-x}$.

6.1.62. $f(x) = \frac{\log_7 x}{\sqrt[5]{x-3}}$.

6.1.63. $f(x) = e^{\ln x}$.

6.1.64. $f(x) = \arcsin(\log_3 x)$.

6.1.65. $f(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

6.1.66. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2x+1}} - \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+5}}$.

6.1.67. $f(x) = \cos \frac{1}{x} + \ln(x+1) + \sqrt[10]{\pi - x}$.

Найти множества значений функций:

6.1.68. $f(x) = 4 - x^2$.

6.1.69. $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$.

6.1.70. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

6.1.71. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

6.1.72. $f(x) = e^{x^2-2x-3}$.

6.1.73. $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

6.1.74. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$.

6.1.75. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

6.1.76. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in [0; 5]$.

Найти $y(0)$, $y(2)$, $y\left(\frac{x}{2}\right)$, $y(t^2)$, $3y(5x)$ для функции $y(x)$:

6.1.77. $y(x) = \sqrt{2x + 7}$.

6.1.78. $y(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 2, \\ 0 & \text{при } x = 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$

6.1.79. Решить уравнение $f(x) = f(1)$, где $f(x) = 4x^3 - 4x + 1$.

6.1.80. Выяснить, какие из следующих функций являются четными, какие — нечетными, а какие — функциями общего вида:

1) $y(x) = \frac{|x|}{x}$;

2) $y(x) = |x + 1| - |x - 1|$;

3) $\varphi(t) = |t - 2|$;

4) $z(y) = \ln y^3$;

5) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \geqslant 0, \\ x & \text{при } x < 0; \end{cases}$

6) $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } t > 0, \\ -t^2 & \text{при } t \leqslant 0; \end{cases}$

7) $h(\alpha) = \frac{\operatorname{arctg}^2 \alpha}{\alpha - 1}$;

8) $f(x) = c$.

6.1.81. Дана функция $f(x) = x$, $x \in [0; +\infty)$. Доопределить ее на интервале $(-\infty; 0)$ так, чтобы новая функция $g(x)$, определенная на интервале $(-\infty; +\infty)$, была:

1) четной;

2) нечетной;

3) функцией общего вида.

6.1.82. Выяснить, какие из следующих функций периодические, и определить их наименьший положительный период:

1) $y = \ln |x|$;

2) $y = |\cos x|$;

3) $y = 10$;

4) $y = \frac{\sin 5x}{\cos 4x - 2}$.

Построить графики функций:

6.1.83. $y = \ln x^2$.

6.1.84. $y = \big||x-2|-3\big|$.

6.1.85. $y = \dfrac{x-2}{x+3}$.

6.1.86. $y = -\sqrt{x}+2$.

6.1.87. $y = \operatorname{cosec} x$.

6.1.88. $y = 1 - 3\ln x$.

6.1.89. $y = x \cdot \sin x$.

6.1.90. $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

6.1.91. $y = |x+1| + |x-2|$.

6.1.92. $y = \arcsin |x|$.

6.1.93. $y = \dfrac{4x+5}{2x-1}$.

6.1.94. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

6.1.95. $y = \operatorname{sign} x$ (читается *сигнум* x), где $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

6.1.96. Найти сложные функции $f \circ f$, $f \circ g$ и $g \circ f$, если:
1) $f(x) = x^2$, $g(x) = x+2$;
2) $f(x) = \operatorname{sign} x$ (см. задачу 6.1.95), $g(x) = -2$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$;
4) $f(x) = [x]$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Какие из следующих функций имеют обратные? Для таких функций найти обратные функции.

6.1.97. $y = \dfrac{x}{1-x}$.

6.1.98. $y = 2^{x-3}$.

6.1.99. $y = \begin{cases} 2x & \text{при } x \geqslant 0, \\ -x^2 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

6.1.100. $y = \operatorname{sign} x$ (см. задачу 6.1.95).

Выяснить, какие из следующих функций монотонные, какие — строго монотонные, а какие — ограниченные:

6.1.101. $y = 2^{-x^2}$.

6.1.102. $y = \sqrt{x-2}$.

6.1.103. $y = \dfrac{|x|}{x}$.

6.1.104. $y = x^3 - x$.

6.1.105. $y = \dfrac{3x+5}{x+1}$.

6.1.106. $y = \begin{cases} -3 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$

6.1.107. Доказать тождества:
1) $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
2) $\operatorname{cth}^2 x - 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;
3) $\operatorname{sh}(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{2x}$;
4) $\operatorname{ch}(\ln x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$;
5) $\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x$;
6) $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$.

16 – 2361

Построить графики уравнений:

6.1.108. $xy = 0$.

6.1.109. $|x| + |y| = 1$.

6.1.110. $xy = y^3$.

6.1.111. $x^2 - y^2 = 0$.

Более сложные задачи

6.1.112. Пусть $D(f_1) = X_1$, $D(f_2) = X_2$. Доказать, что $D(f) = X_1 \cap X_2$ в любом из следующих случаев:
1) $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$;
2) $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

6.1.113. Записать одной формулой функцию, область определения которой состоит из:
1) одной точки;
2) двух точек;
3) множества всех целых чисел.

6.1.114. Привести пример функции $f(x)$, для которой:
1) $D(f) = E(f)$;
2) $D(f) \supset E(f)$;
3) $D(f) \subset E(f)$.

6.1.115. Найти множество значений функции:
1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$;
2) $f(x) = \arcsin \dfrac{x^2+1}{2x}$;
3) $f(x) = \dfrac{|x|}{|x|+1}$.

6.1.116. Записать одной формулой функцию, область значений которой состоит из:
1) одной точки;
2) двух точек;
3) множества всех целых чисел.

6.1.117. Пусть $E(f_1) = X_1$, $E(f_2) = X_2$. Верно ли, что:
1) $E(f_1 + f_2) = E(f_1) \cap E(f_2)$;
2) $E(f_1 + f_2) = E(f_1) \cup E(f_2)$?

6.1.118. Могут ли существовать такие функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, что $E(f_1) = E(f_2) = \mathbb{R}$, но:
1) $E(f_1 + f_2) = \{1\}$;
2) $E(f_1 \cdot f_2) = \{2\}$?
Ответ объяснить.

6.1.119. Доказать, что:
1) сумма, разность и произведение двух четных функций есть четная функция;
2) произведение двух нечетных функций есть четная функция;

3) сумма двух нечетных функций есть нечетная функция;

4) произведение четной и нечетной функции есть нечетная функция.

6.1.120. Верно ли, что сумма четной и нечетной функции есть четная функция? нечетная функция? Ответ пояснить.

6.1.121. Какая функция, определенная на всей действительной оси, является и четной и нечетной одновременно? Показать, что такая функция единственна.

6.1.122. Пусть $f(x)$ — произвольная функция с симметричной относительно нуля областью определения. Доказать, что:

1) функция $f(x) + f(-x)$ — четная;

2) функция $f(x) - f(-x)$ — нечетная.

6.1.123. Пусть функция $f(x)$ периодическая и имеет период T. Доказать, что функция $f(kx + b)$, где $k \neq 0$, также периодическая с периодом $\frac{T}{k}$.

6.1.124. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ периодические с периодами T_1 и T_2 соответственно. Доказать, что любое положительное число, кратное T_1 и T_2, является периодом функций $f_1 \pm f_2$, $f_1 \cdot f_2$.

6.1.125. Обозначим через $D(x)$ *функцию Дирихле*:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{при рациональных } x, \\ 0 & \text{при иррациональных } x. \end{cases}$$

Доказать, что:

1) периодом этой функции является любое рациональное число, большее нуля (поэтому у этой периодической функции нет наименьшего положительного периода);

2) никакое иррациональное число не является периодом этой функции.

6.1.126. Доказать, что следующие функции не являются периодическими:

1) $f(x) = \cos x^2$;

2) $f(x) = \sin |x|$;

3) $f(x) = x \cdot \sin x$;

4) $f(x) = \ln \cos x$.

6.1.127. Найти наименьший положительный период функций:

1) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

2) $y = |\sin 2x|$;

3) $y = \sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}$.

6.1.128. Доказать, что:

1) график функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ так: часть графика, расположенная не ниже оси Ox, остается без изменений, а «нижняя» часть графика симметрично отражается относительно оси Ox;

2) график функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ так: правая часть графика (при $x \geqslant 0$) остается без изменений, а вместо «левой» строится симметричное отражение «правой» относительно оси Oy.

Построить графики функций:

6.1.129. $y = \cos^2 x$.

6.1.130. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

6.1.131. $y = \arcsin(\sin x)$.

6.1.132. $y = x + \sin x$.

6.1.133. $y = \operatorname{sign}(\cos x)$.

6.1.134. $y = |x| + |x+1| + |x+2|$.

6.1.135. $y = \log_3(\sin x)$.

6.1.136. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

6.1.137. Решить графически уравнения:

1) $|x-3| - x - 1 = 0$;

2) $x^3 + 2x - 4 = 0$;

3) $\ln x + x = 1$.

6.1.138. Решить графически неравенства:

1) $x^3 > x$;

2) $2^x + x > 0$;

3) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$.

6.1.139. Найти $f(x)$, если известно, что

1) $f(x+2) = \dfrac{3}{x-5}$;

2) $f(x^3) = x^2 + 4$;

3) $f\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right) = x + 1$.

6.1.140. Доказать, что существует только одна функция $f(x)$, определенная на всей числовой оси, такая, что для любой функции $g(x)$, также определенной на всей оси, справедливо равенство

$$f \circ g = g \circ f.$$

Найти эту функцию.

6.1.141. Существуют ли функции, обратные сами себе? Ответ обосновать.

6.1.142. Что можно сказать о графике функции, обратной самой себе?

6.1.143. Доказать, что четная функция не может быть строго монотонной.

6.1.144. Доказать, что:

1) сумма двух возрастающих (убывающих) функций — также возрастающая (соответственно, убывающая) функция;

2) сумма, разность и произведение двух ограниченных функций — также ограниченная функция.

6.1.145. Показать, что:

1) частное двух ограниченных функций может не быть ограниченной функцией;

2) произведение двух возрастающих функций может не быть возрастающей функцией.

6.1.146. Показать, что следующие функции ограничены:

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$;

2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2} - \cos x}$.

6.1.147. Доказать, что

1) функция $y = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbb{R}$ имеет обратную функцию, равную $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Эта обратная функция называется *ареасинус гиперболический* и обозначается $\operatorname{arsh} x$. Таким образом,

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1});$$

2) функция $y = \operatorname{th} x$, $x \in \mathbb{R}$ имеет обратную, равную $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. Эта функция называется *ареатангенс гиперболический* и обозначается $\operatorname{arth} x$. Таким образом,

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

6.1.148. Исключив параметр t, явно выразить функцию y:

1) $\begin{cases} x = t+3, \\ y = t^2 + 6t + 10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t. \end{cases}$

§ 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

Определение последовательности

⇛ Пусть каждому натуральному числу n (т. е. $n = 1, 2, 3, \ldots$) по некоторому закону поставлено в соответствие единственное действительное число x_n. В этом случае говорят, что задана *последовательность*: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будем обозначать $\{x_n\}$.

⇛ Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ в последовательности $\{x_n\}$ называются *членами* последовательности; x_1 — 1-м членом последовательности, x_2 — 2-м членом последовательности, …, x_n — n-м (энным) или *общим членом* последовательности.

⇛ Формулы, позволяющие выразить n-й член последовательности через предыдущие члены, называются *рекуррентными*.

Свойства последовательностей

$\Rrightarrow$ Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется *постоянной.*

Таким образом, для постоянной последовательности $\{x_n\}$ имеем: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots$.

$\Rrightarrow$ Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если $\forall n$: $x_n \leqslant x_{n+1}$, т.е. $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant \leqslant x_{n+1} \leqslant \dots$ (соответственно, $\forall n$: $x_n \geqslant x_{n+1}$, т.е. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \dots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \dots$).

Невозрастающие и неубывающие последовательности объединяют общим термином — *монотонные* последовательности.

$\Rrightarrow$ Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если $\forall n$: $x_n < x_{n+1}$, т.е. $x_1 < x_2 \dots < x_n < x_{n+1} \dots$ (соответственно, $\forall n$: $x_n > x_{n+1}$, т.е. $x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots$) .

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим названием — *строго монотонные* последовательности.

$\Rrightarrow$ Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*ограниченной снизу*), если существует такое число M, что все члены последовательности меньше (соответственно, больше), чем M.

Последовательность, ограниченная сверху и снизу одновременно, называется *ограниченной.*

Это определение равносильно следующему: последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если существует такое число $M > 0$, что для всех n справедливо неравенство $|x_n| < M$.

$\Rrightarrow$ Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого $M > 0$ найдется такой ее член x_n, что $|x_n| > M$.

Действия над последовательностями

$\Rrightarrow$ Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две произвольные последовательности. *Суммой* (*разностью*) последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность, каждый член которой есть сумма (соответственно, разность) соответствующих членов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Таким образом, $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.

Аналогично определяется произведение и частное двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, причем в случае частного, разумеется, предполагается, что $y_n \neq 0$, $\forall n$.

Другими словами, для того, чтобы сложить, вычесть, умножить или разделить две данные последовательности, надо сложить, вычесть, умножить или разделить их соответствующие члены.

Частным случаем операции умножения последовательностей (если одна из последовательностей постоянна) является операция умножения последовательности на число: для того, чтобы умножить последовательность $\{x_n\}$ на число x, необходимо каждый член этой последовательности умножить на α, т.е. $\alpha \cdot \{x_n\} = \{\alpha \cdot x_n\}$.

6.2.1. Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

2) x_n — n-й знак в десятичной записи числа e;

3) $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + 2$.

◐ 1) Подставляя поочередно $n = 1, 2, 3, 4$ в формулу для общего члена последовательности, найдем: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{3}$, $x_4 = \frac{1}{4}$.

2) Поскольку $e = 2{,}71828\ldots$, то $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1$, $x_4 = 8$.

3) В соответствии с формулой $x_n = x_{n-1} + 2$ получим: $x_2 = x_1 + 2 = 3$, $x_3 = x_2 + 2 = 5$, $x_4 = x_3 + 2 = 7$. ●

Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если:

6.2.2. $x_n = 2^{n+1}$.

6.2.3. $x_n = n^2 + 2n + 3$.

6.2.4. $x_n = (-1)^n + 1$.

6.2.5. $x_n = \dfrac{n+1}{n^2}$.

6.2.6. $x_n = \sin \dfrac{\pi n}{2}$.

6.2.7. $x_1 = -1$, $x_n = -n \cdot x_{n-1}$.

Зная несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$, написать формулу ее общего члена:

6.2.8. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

6.2.9. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

6.2.10. $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \ldots$

6.2.11. $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

6.2.12. Какие из следующих последовательностей ограничены сверху? ограничены снизу? ограничены?

1) $2, 4, 6, 8, \ldots$;

2) $-1, -4, -9, -16, \ldots$;

3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots$;

4) $-2, 4, -8, 16, \ldots$

◐ 1) Данная последовательность, состоящая из всех четных положительных чисел, ограничена снизу, но не ограничена сверху.

2) Последовательность ограничена сверху ($x_n = -n^2 < 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$), но не ограничена снизу.

3) Последовательность ограничена, так как она ограничена снизу и сверху: $0 < x_n = \frac{1}{3^n} < 1$.

4) Последовательность $\{(-2)^n\}$ не ограничена, так как для любого числа $M > 0$ можно найти такой номер n, что $|x_n| = 2^n > M$. ●

Какие из следующих последовательностей $\{x_n\}$ ограничены, если:

6.2.13. $x_n = (-1)^n$.

6.2.14. $x_n = n^3 + 2n$.

6.2.15. $x_n = -\ln n$.

6.2.16. $x_n = \dfrac{n+1}{n}$.

6.2.17. $x_n = (-1)^n \cdot n$.

6.2.18. $x_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2k, \\ \sqrt{n} & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$

6.2.19. Какие из следующих последовательностей монотонные, а какие — строго монотонные:

1) $x_n = 2n + 1$;

2) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

3) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$;

4) $x_n = [\sqrt{n}]$;

5) $-1, -1, -2, -2, -3, -3, \ldots$?

◐ 1) Данная последовательность строго возрастает, т. к. $x_{n+1} = 2(n+1)+1 = 2n+3 > 2n+1 = x_n$ для всех натуральных чисел n.

2) Последовательность $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\right\}$ не является ни монотонной, ни строго монотонной, так как, например, $x_1 < x_2$, но $x_2 > x_3$.

3) $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$ — убывающая последовательность, так как $x_n = \dfrac{1}{n^2} > x_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

4) Последовательность $\{[\sqrt{n}]\} = \{1, 1, 1, 2, 2, \ldots\}$ — неубывающая, так как $x_{n+1} = [\sqrt{n+1}] \geqslant [\sqrt{n}] = x_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и к тому же, например, $x_1 = x_2$.

5) Данная последовательность невозрастающая, так как $x_n \leqslant x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ и некоторые (например, первый и второй) члены этой последовательности равны между собой. ●

Какие из следующих последовательностей монотонные? строго монотонные? ограниченные?

6.2.20. $x_n = n - \frac{1}{n}$.

6.2.21. $x_n = \cos\frac{\pi n}{2}$.

6.2.22. $x_n = -\frac{n^2+1}{n^2}$.

6.2.23. $x_n = -\sqrt{n}$.

6.2.24. $x_n = \pi, \pi, \pi, \ldots$

6.2.25. Пусть $\{x_n\} = \{n\}$, $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ — две последовательности. Найти последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$ и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

○ По определению операций над последовательностями имеем:

$$\{x_n + y_n\} = \left\{n + \frac{1}{n}\right\} = \left\{2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, \ldots\right\};$$
$$\{x_n - y_n\} = \left\{n - \frac{1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{3}{2}, 2\frac{2}{3}, \ldots\right\};$$
$$\{x_n \cdot y_n\} = \{1\} = \{1, 1, 1, \ldots\};$$
$$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{n : \frac{1}{n}\right\} = \{n^2\} = \{1, 4, 9, \ldots\}.$$ ●

Найти последовательности $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, если:

6.2.26. $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-2)^n$.

6.2.27. $x_n = n^2 + 1$, $y_n = n$.

Найти последовательности $\alpha x_n + \beta y_n$, если:

6.2.28. $x_n = n$, $y_n = 3n$, $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

6.2.29. $x_n = (\sqrt{2})^n$, $y_n = 1$, $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = -5$.

Дополнительные задачи

Найти первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если:

6.2.30. $x_n = \frac{5^n}{n^2}$.

6.2.31. $x_n = 1$.

6.2.32. $x_n = [\sqrt{n}]$ (см. 6.1.27).

6.2.33. $x_1 = 2$, $x_n = |x_{n-1} - 2|$.

6.2.34. $x_n = n!$ (читается *эн-факториал*), где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

6.2.35. x_n — n-й знак в десятичной записи числа $\frac{2}{7}$.

Зная несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$, написать формулу ее общего члена:

6.2.36. $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$.

6.2.37. $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

6.2.38. $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \ldots$

6.2.39. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

Какие из следующих последовательностей $\{x_n\}$ ограничены, если:

6.2.40. $x_n = \sin n$.

6.2.41. $x_n = -\dfrac{n^2+1}{n}$.

6.2.42. $x_n = (-\sqrt{3})^{2n}$.

6.2.43. $x_n = (-1)^{n+1}\sqrt{n}$.

Среди следующих последовательностей указать монотонные; строго монотонные; ограниченные последовательности:

6.2.44. $x_n = \sin n$.

6.2.45. $x_n = \dfrac{n}{3n-2}$.

6.2.46. $x_n = P_{2n}$, $(n \geqslant 2)$, где P_{2n} — периметр правильного $2n$-угольника, вписанного в единичный круг.

6.2.47. $x_1 = 1$, $x_n = \dfrac{2}{x_{n-1}+1}$.

Найти последовательности $\{x_n^2\}$ *и* $\left\{\dfrac{2x_n-1}{3y_n+2}\right\}$, *если:*

6.2.48. $x_n = n$, $y_n = 1$.

6.2.49. $x_n = n^2$, $y_n = n$.

Более сложные задачи

6.2.50. Найти первые семь членов *последовательности Фибоначчи*, определяемой рекуррентной формулой $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ при $n > 2$, $x_1 = x_2 = 1$.

6.2.51. Найти первые четыре члена последовательности $\{P_n\}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$, где P_n — периметр правильного n-угольника, вписанного в круг единичного радиуса.

6.2.52. Написать формулу общего члена последовательности, каждый четный член которой — рациональное число, а каждый нечетный — иррациональное.

6.2.53. Найти общий член последовательности, зная несколько ее первых членов:

1) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 1$, $x_5 = 5, \ldots$

2) $7, 9, 13, 21, 37, \ldots$

6.2.54. Найти формулу общего члена последовательности, заданной с помощью рекуррентного соотношения

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_n = \frac{1}{2 - x_{n-1}}.$$

6.2.55. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены. Доказать, что последовательности

1) $\{x_n + y_n\}$; **2)** $\{x_n - y_n\}$;

3) $\{x_n \cdot y_n\}$

также ограничены.

6.2.56. Привести пример двух ограниченных последовательностей, таких, что их частное является неограниченной последовательностью.

Доказать, что следующие последовательности ограничены:

6.2.57. $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$. **6.2.58.** $x_n = \ln(n+1) - \ln n$.

6.2.59. $x_n = \dfrac{3n^2-1}{n^2+1}$.

6.2.60. $x_n = \dfrac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Какие из следующих последовательностей монотонные? строго монотонные? ограниченные?

6.2.61. $x_n = \dfrac{3^n}{n}$. **6.2.62.** $x_n = \ln n - n$.

6.2.63. $x_1 = 1$, $x_n = \dfrac{1}{x_{n-1}+1}$.

6.2.64. x_n — n-й знак десятичной записи некоторого иррационального числа q.

6.2.65. Может ли произведение двух немонотонных последовательностей быть:

1) монотонной, но не строго монотонной последовательностью;

2) строго монотонной последовательностью?

6.2.66. Показать на примере, что произведение двух возрастающих последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ может не быть даже монотонной последовательностью.

§ 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Бесконечно малые последовательности, предел последовательности

$\Rrightarrow$ Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно подобрать такой номер N, что, начиная с этого номера (т. е. для всех $n \geqslant N$), будет выполнено неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

В дальнейшем тот факт, что последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, мы будем сокращенно обозначать так: б. м. $\{\alpha_n\}$.

$\Rrightarrow$ Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если последовательность $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ является бесконечно малой.

На основе определения бесконечно малой последовательности можно дать другое, эквивалентное, определение предела последовательности.

$\Rrightarrow$ Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε можно подобрать такой номер N (как правило, зависящий от ε), что, начиная с этого номера (т. е. для всех $n \geqslant N$), будет выполнено неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

В случае, если последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a, говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* (или стремится) к числу a, и обозначают этот факт так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \ (\text{при } n \to \infty).$$

⇛ Если последовательность не имеет предела, то говорят, что она *расходится*.

Иногда удобно использовать *геометрическое* определение предела последовательности, эквивалентное двум предыдущим:

⇛ Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если в любом интервале с центром в точке a находятся почти все (т. е. все, кроме конечного числа) члены этой последовательности.

Связь между сходимостью и ограниченностью последовательности

Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Всякая монотонная и ограниченная последовательность сходится.

Всякая постоянная последовательность, члены которой равны a, сходится к этому числу, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

Свойства бесконечно малых последовательностей

Сумма (разность) двух бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой последовательностью.

Таким образом, $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — б. м. $\Longrightarrow$ $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — б. м.

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью, т. е.

$$\{\alpha_n\} \text{ — б. м., } \{x_n\} \text{ — огранич. посл-ть } \Longrightarrow \{\alpha_n \cdot x_n\} \text{ — б. м.}$$

Произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью:

$$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \text{ — б. м., } \Longrightarrow \{\alpha_n \cdot \beta_n\} \text{ — б. м.}$$

Произведение бесконечно малой последовательности на постоянное число является бесконечно малой последовательностью:

$$\{\alpha_n\} \text{ — б. м., } c \in \mathbb{R} \Longrightarrow \{c \cdot \alpha_n\} \text{ — б. м.}$$

Операции над пределами последовательностей

1. Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей равен сумме (соответственно, разности) их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \ \lim_{n\to\infty} y_n = b \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

2. Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \implies \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

В частности:

— постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad c \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty}(cx_n) = c \cdot a;$$

— предел натуральной степени от сходящейся последовательности равен этой степени от ее предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty}(x_n)^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k = a^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

3. Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,\ (b \neq 0,\ y_n \neq 0\ \forall n) \implies \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

4. Предел корня k-й степени от сходящейся последовательности равен корню этой же степени от предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad k = 2, 3, 4, \ldots \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}.$$

Пределы и неравенства

Пусть все члены данной сходящейся последовательности неотрицательны. Тогда ее предел также неотрицателен:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad x_n \geqslant 0\ \forall n \implies a \geqslant 0.$$

Пусть каждый член одной сходящейся последовательности больше или равен соответствующему члену другой сходящейся последовательности. Тогда и предел первой последовательности больше или равен пределу второй последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b, \quad x_n \geqslant y_n\ \forall n \implies a \geqslant b.$$

Теорема 6.1 (о промежуточной переменной). Пусть соответствующие члены трех данных последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ удовлетворяют условию $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$.

Тогда если последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то последовательность $\{y_n\}$ также сходится к этому пределу:

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,\ \forall n, \quad \lim x_n = \lim z_n = a \implies \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Бесконечно большие последовательности

$\Rrightarrow$ Последовательность $\{x_n\}$ называется *положительной бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого числа M найдется такой номер N, что для всех n, начиная с этого номера, выполняется неравенство $x_n > M$.

Про положительную бесконечно большую последовательность $\{x_n\}$ говорят также, что она *стремится к плюс бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Заметим, что эта запись, так же, как и слова о стремлении к плюс бесконечности, носит условный характер и не означает существование предела в том смысле, как это было определено в начале этого параграфа. То же относится к отрицательной бесконечно большой и бесконечно большой последовательностям, определенным ниже.

$\Rrightarrow$ Последовательность $\{x_n\}$ называется *отрицательной бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого по модулю отрицательного числа M найдется такой номер N, что для всех n, начиная с этого номера, выполняя неравенство $x_n < M$.

Про отрицательную бесконечно большую последовательность $\{x_n\}$ говорят также, что она *стремится к минус бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

$\Rrightarrow$ Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если последовательность $\{|x_n|\}$ является положительной бесконечно большой.

Если последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая (б. б.), то говорят также, что она *стремится к бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$, все члены которой отличны от нуля, — бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая:

$$x_n \neq 0 \ (\forall n);\ \{x_n\} \text{ — б. м.} \iff \left\{\frac{1}{x_n}\right\} \text{ — б. б.}$$

Кроме того, полезно иметь в виду следующее:

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, (в том числе $a = +\infty$), $a > 0$ (соответственно, $a < 0$, в том числе $a = -\infty$), $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, $y_n > 0$ $\forall n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$ (соответственно, $= -\infty$).

Число e

Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — возрастает и ограничена сверху, а поэтому сходится. Ее пределом является замечательное иррациональное число $e = 2{,}71828182845\ldots$, служащее основанием натуральных логарифмов.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

6.3.1. Используя определение, доказать, что последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ — бесконечно малая.

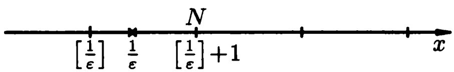


Рис. 76

○ Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда из неравенства $|\alpha_n| < \varepsilon$, т. е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$, получим $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поскольку число $\frac{1}{\varepsilon}$ может не быть целым, то, положив $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (рис. 76), мы найдем искомое натуральное N. Действительно, для всех $n \geqslant N$ будем иметь $\frac{1}{n} < \varepsilon$, т. е. $|\alpha_n| < \varepsilon$. Но это и означает, что последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ — бесконечно малая. ●

Используя определение, доказать, что следующие последовательности $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малые:

6.3.2. $\alpha_n = \dfrac{2}{n+1}$.

6.3.3. $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

6.3.4. Доказать, что последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ — бесконечно малая, и для каждого данного ε найти такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ справедливо неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, где

1) $\varepsilon = \frac{1}{2}$;

2) $\varepsilon = 0{,}1$;

3) $\varepsilon = 0{,}015$.

6.3.5. Используя определение предела, доказать, что последовательность $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n}{n-1}, \ldots$ сходится к числу 1.

◯ Обозначив $x_n = \frac{n}{n-1}$, выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n-1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n-1)}{n-1}\right| = \frac{1}{n-1}$$

и неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено в точности тогда, когда $\frac{1}{n-1} < \varepsilon$, т.е. $n - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, откуда $n > \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Положив $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 2\right]$, получим, что для всех $n \geqslant N$ справедливо неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$. В соответствии с определением предела это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. ●

Используя определение предела, доказать, что:

6.3.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$.

6.3.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-1}{5n+2} = \frac{4}{5}$.

6.3.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = 2$.

6.3.9. Доказать, используя определение предела, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right\}$ сходится к числу 1, и для каждого данного ε найти такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ верно неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$, где

1) $\varepsilon = \frac{1}{4}$;

2) $\varepsilon = 0{,}1$;

3) $\varepsilon = 0{,}07$.

6.3.10. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}$.

◯ 1) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, поделив числитель и знаменатель на старшую степень n, т.е. на n^2:

$$\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2}}.$$

Отсюда, используя теорему о действиях над пределами, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{5+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\frac{3-0+0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

В последних равенствах мы воспользовались тем, что предел константы — константа, а также тем, что последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ — бесконечно малые.

Окончательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\dfrac{3}{5}$.

2) Домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное к нему, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Поскольку последовательность $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ — бесконечно большая, то последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ — бесконечно малая. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=0$, а значит, и $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=0$.

3) Поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень n (выбираем из двух вариантов $\sqrt{n^3}$ и $\sqrt{n}$), т.е. на $\sqrt{n^3}=n^{3/2}$. Тогда

$$\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}=\frac{1}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}.$$

Оба слагаемых в знаменателе последней дроби, т. е. $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, — бесконечно малые последовательности, следовательно, вся эта дробь — бесконечно большая последовательность. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \infty.$$

Найти пределы:

6.3.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-5}{n}$.

6.3.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4-n^2}{3-n^2}$.

6.3.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+5n^2-1}{10n^3-3n+2}$.

6.3.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^2-1}{5n^3+4n^2-2n+1}$.

6.3.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3-5n^2+10n}{21n^3+7n-8}$.

6.3.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}$.

6.3.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}}{n+2}$.

6.3.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^2+n+4}}$.

6.3.19. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$.

6.3.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$.

Дополнительные задачи

Используя определение, доказать, что данные последовательности — бесконечно малые:

6.3.21. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$

6.3.22. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

6.3.23. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$

6.3.24. Доказать, что последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{n^3+2}\right\}$ — бесконечно малая, и для каждого данного ε найти такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, где

1) $\varepsilon = 0{,}1$;

2) $\varepsilon = 0{,}01$;

3) $\varepsilon = 0{,}001$.

Используя определение предела, доказать, что:

6.3.25. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-n}{4-n} = 1$.

6.3.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2+7} = 5$.

6.3.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}-1}{3^n} = 3$.

6.3.28. Найти предел a последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{n+\cos\pi n}{n}$. Найти номер N, начиная с которого величина $|x_n - a|$ будет меньше ε, если

1) $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$;

2) $\varepsilon = 0{,}1$;

3) $\varepsilon = \dfrac{3}{502}$.

Найти пределы:

6.3.29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3}{5n^3}$.

6.3.30. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{n+2} - \dfrac{5}{2n+1}\right)$.

6.3.31. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+5}{4n+1} - \dfrac{n^2+4}{2n+3}\right)$.

6.3.32. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3-4n^2} - n\right)$.

6.3.33. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n-1}{5^n+1}$.

6.3.34. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}$.

6.3.35. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$.

6.3.36. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}}$.

6.3.37. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n+2}{x_n^2+4}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

6.3.38. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+n^2-4} - \sqrt[5]{n^6}}{\sqrt[3]{n^5+2n} + \sqrt[4]{n^6+3n^4+2}}$.

Более сложные задачи

6.3.39. Доказать, что у одной последовательности не может быть двух разных пределов.

6.3.40. Показать, что частное двух бесконечно малых последовательностей может не быть бесконечно малой последовательностью.

6.3.41. Привести пример такой бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$, что:

1) первые сто ее членов больше 1000;

2) существует бесконечно много как положительных, так и отрицательных ее членов.

6.3.42. Доказать, что следующие последовательности $\{x_n\}$ не имеют предела:

1) $x_n = (-1)^n$;

2) $x_n = 1 + (-1)^n$;

3) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$;

4) $x_n = (-5)^n$;

5) $x_n = n^2$;

6) $x_n = 1 + 2 + \cdots + n$.

6.3.43. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, которая расходится, но для которой последовательность $\{|x_n|\}$ сходится.

6.3.44. Показать, что:

1) каждая бесконечно большая последовательность является неограниченной;

2) не каждая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

6.3.45. Найти пределы (в пунктах 2) и 3) предварительно доказать, что предел существует):

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2 - 3x_n + 2}{x_n - 2}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n = \sqrt{6 + x_{n-1}}$, $x_1 = \sqrt{6}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 - 9}{8}$, $x_1 = 7$.

6.3.46. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 6} + \dfrac{1}{6\cdot 8} + \dots + \dfrac{1}{2n(2n+2)}\right)$.

6.3.47. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая, а $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — бесконечно большие последовательности. Верно ли, что всегда:

1) $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно большая последовательность;

2) $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно малая последовательность;

3) $\{x_n \cdot y_n\}$ — сходящаяся последовательность;

4) $\{y_n \cdot z_n\}$ — бесконечно большая последовательность;

5) $\{y_n + z_n\}$ — расходящаяся последовательность?

6.3.48. Привести пример таких сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что:

1) $x_n > y_n \ \ \forall n$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $x_n > 100 y_n > 0 \ \ \forall n$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

6.3.49. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+k}$, где $k \in \mathbb{N}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n$.

§ 4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение предела

$\Rrightarrow$ *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0. Дадим первое определение предела функции (по Гейне):

$\Rrightarrow$ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 ($x_n \neq x_0$ $\forall n$), последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ (при $x \to x_0$).

Первое определение предела функции эквивалентно второму определению (по Коши):

$\Rrightarrow$ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Первое определение называется также определением предела функции «на языке последовательностей», а второе — определением предела «на языке ε–δ» (эпсилон–дельта).

Операции над пределами функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и, кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда:

1. Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (соответственно, разности) их пределов, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$$

2. Предел произведения функций равен произведению их пределов, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B.$$

3. Предел частного функций равен частному их пределов (при условии $B \neq 0$), т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела функции, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \implies \forall \alpha \in R: \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha A.$$

Для функций справедливы аналоги соответствующих теорем для последовательностей о пределах корня и степени.

Пределы функций и неравенства

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ для всех значений x из этой окрестности. Пусть, кроме того,

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = A_2.$$

Тогда $A_1 \leqslant A_2$.

Теорема 6.2 (о промежуточной переменной). Пусть функции $f_1(x)$, $f(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$ верно неравенство $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ также существует и равен A.

Теорема 6.3 (о сохранении знака). Если предел функции в данной точке x_0 положителен, то и все значения функции в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0) положительны.

Теорема 6.4 (об ограниченности функции, имеющей предел). Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a; +\infty)$.

$\Rrightarrow$ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любой положительной бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ (т. е. $x_n \to +\infty$, $n \to \infty$) последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Равносильное определение предела функции при $x \to +\infty$ на языке ε–δ будет выглядеть так:

$\Rrightarrow$ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех значений $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.
Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Односторонние пределы

⇛ Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки x_0, т. е. на некотором интервале $(x_0, x_0+\delta)$, где $\delta > 0$. Тогда говорят, что число A называется *пределом функции* $f(x)$ *справа* в точке x_0 (или *правосторонним пределом*), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 и такой, что все ее члены больше, чем x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

Обозначения: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$ или $f(x_0+0) = A$.

Аналогично определяется *предел функции слева* (или *левосторонний предел*) в точке x_0, обозначаемый $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $f(x_0-0)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют и односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, причем все три числа равны, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Часто используются следующие следствия из обоих замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R};$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

⇛ Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$ (или в окрестности точки x_0), если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$.

Таким образом,

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x) \iff f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x\to x_0$.

$\Rrightarrow$ Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$ Тогда:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка в окрестности точки* x_0.

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно* малыми (в окрестности точки x_0), что обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$.

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to x_0$ и говорят, что $\alpha(x)$ — *о малое* от $\beta(x)$ при $x \to x_0$. В частности, если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то $\alpha(x) = o(1)$, $x \to x_0$.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad a^x - 1 \sim x\ln a \text{ (в частности, } e^x - 1 \sim x),$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, $x \to x_0$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x) = \lim_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta_1(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.

6.4.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$, используя

1) первое определение предела функции;

2) второе определение предела функции.

◯ 1) Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к 2, т. е. такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Тогда в соответствии со свойствами пределов последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = = \lim\limits_{n\to\infty}(2x_n + 1) = 2\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 2\cdot 2 + 1 = 5$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=5$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке $x_0 = 2$, то по первому определению предела функции это как раз и означает, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$.

2) Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется по этому ε найти такое $\delta > 0$, чтобы из условия $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$, т.е. из $0 < |x-2| < \delta$ вытекало бы неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ т.е. } |(2x+1) - 5 < \varepsilon|.$$

Последнее неравенство приводится к виду $|2(x-2)| < \varepsilon$, т.е. $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то неравенство $|x-2| < \delta$ будет автоматически влечь за собой неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$ (это значит, что для всех x, для которых верно первое неравенство, будет верно и второе). В соответствии со вторым определением предела функции это означает, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$. ●

Используя первое определение предела функции, найти пределы:

6.4.2. $\lim\limits_{x\to -1}(4x+3)$.

6.4.3. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4x + 8)$.

6.4.4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}$.

6.4.5. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2+5}{x^2-1}$.

Используя второе определение предела функции, доказать, что:

6.4.6. $\lim\limits_{x\to 0}(3x-2) = -2$.

6.4.7. $\lim\limits_{x\to 1}(-x+4) = 3$.

6.4.8. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

6.4.9. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{5}$.

6.4.10. Доказать, что функция $y = \operatorname{sign} x$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

◐ Действительно, если выбрать последовательность $\{x'_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, сходящуюся к нулю, то

$$\lim_{x\to\infty} f(x'_n) = \lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{sign}\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1,$$

т. е. последовательность $\{f(x'_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к единице.

Если же выбрать последовательность $\{x''_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}$, также сходящуюся к нулю, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1.$$

Таким образом, мы нашли две различные последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, сходящиеся к точке $x_0 = 0$, для которых соответствующие последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ значений функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ сходятся к различным числам. Это противоречит первому определению предела функции, и, значит, у функции $\operatorname{sign} x$ нет предела в точке $x_0 = 0$. ●

Доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0, если:

6.4.11. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$.

6.4.12. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geqslant 2, \\ x & \text{при } x < 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$.

6.4.13. Доказать по второму определению предела, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$, где $f(x) = \dfrac{2(x-1)^2}{x-1} + 1$, $x_0 = 1$. Найти соответствующее δ по данному ε, если:

1) $\varepsilon = \frac{1}{2}$;

2) $\varepsilon = 0{,}01$.

6.4.14. Используя свойства пределов функций, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2}$;

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + x - x^2}{2x^2 + 3x}$.

○ 1) Применяя теорему о действиях над пределами функций, получим:

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to -1}(3x^2 - 1)}{\lim\limits_{x \to -1}(4x^2 + 5x + 2)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -1} 3x^2 - \lim\limits_{x \to -1} 1}{\lim\limits_{x \to -1} 4x^2 + \lim\limits_{x \to -1} 5x + \lim\limits_{x \to -1} 2} =$$

$$= \frac{3 \lim\limits_{x \to -1} x \cdot \lim\limits_{x \to -1} x - 1}{4 \lim\limits_{x \to -1} x \cdot \lim\limits_{x \to -1} x + 5 \lim\limits_{x \to -1} x + 2} =$$

$$= \frac{3 \cdot (-1)(-1) - 1}{4(-1)(-1) + 5(-1) + 2} = 2.$$

2) Так как пределы числителя и знаменателя при $x \to 2$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. «Раскроем» эту неопределенность (т. е. избавимся от нее), разложив

числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}.$$

В полученной дроби знаменатель уже не стремится к нулю при $x\to 2$, поэтому можно применять теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2+2}{2-3}=-4.$$

Окончательно $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=-4.$

3) Здесь мы также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю (избавляемся от иррациональности в числителе):

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8})^2-3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{6}.$$

4) Числитель и знаменатель дроби — бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрывая эту неопределенность, поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т. е. на x^2:

$$\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}}.$$

Осталось воспользоваться свойствами пределов, а также тем, что функции $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ — бесконечно малые при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{0+0-1}{2+0}=-\frac{1}{2}.$$ ●

Найти пределы:

6.4.15. $\lim\limits_{x\to -2}(5x^2+2x-1)$.

6.4.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+1}{x^3-2x+3}$.

6.4.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2-x}$.

6.4.18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^x-8}{2^x+8}$.

6.4.19. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$.

6.4.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-3x^2+x}{2x}$.

6.4.21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}$.

6.4.22. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-x-1}{-6x^2+5x+4}$.

6.4.23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$.

6.4.24. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+7x+6}{x^3+6x^2+3x+18}$.

6.4.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$.

6.4.26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x-4}}$.

6.4.27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

6.4.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$.

6.4.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$.

6.4.30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{x-3}}$.

6.4.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}$.

6.4.32. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2+7x-2}$.

6.4.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

6.4.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x}{2x^3+x^2+1}$.

6.4.35. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)$.

6.4.36. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-3}-x\right)$.

6.4.37. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

○ 1) Сделаем замену $y=\alpha x$; тогда $y\to 0$ при $x\to 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{\left(\frac{y}{\alpha}\right)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\alpha\sin y}{y}=\alpha\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=\alpha$. В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\alpha$.

2) Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x, после чего воспользуемся предыдущим пунктом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)}=\frac{5}{3}.$$

3) Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену $y = x - \frac{\pi}{2}$. Тогда $y \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$, а $x = y + \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \pi} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}.$$

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем — первый замечательный предел.

4) Сделаем замену $t = \arcsin x$, т. е. $x = \sin t$. Ясно, что $t \to 0$ при $x \to 0$, поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}} = 1.$$ ●

Найти пределы:

6.4.38. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$.

6.4.39. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

6.4.40. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

6.4.41. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

6.4.42. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$.

6.4.43. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2}$.

6.4.44. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x}$.

6.4.45. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$.

6.4.46. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$, $k \in \mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[x]{1 + 5x}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 2}\right)^x$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{7x}$.

❍ 1) В данном случае мы имеем неопределенность вида 1^∞. Для ее раскрытия сделаем замену $y = \frac{x}{k}$. Тогда $y \to \infty$ при $x \to \infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k \cdot \frac{x}{k}} = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ky} =$$

$$= \left[\lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^k = e^k.$$

2) Поскольку $\sqrt[x]{1+5x} = (1+5x)^{\frac{1}{x}}$, то здесь мы также имеем дело с неопределенностью 1^∞, для раскрытия которой нам снова понадобится одна из форм второго замечательного предела. Сделаем замену $y = 5x$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+5x} = \lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5} =$$

$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}\cdot 5} = \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^5 = e^5.$$

3) Поделив числитель и знаменатель дроби на x, сведем данный предел к частному пределов из пункта 1):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

4) Сделав замену $y = 2x$ и применяя одно из следствий из второго замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{7x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{\frac{7}{2}y} = \frac{2}{7}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = \frac{2}{7}.$$

●

6.4.47. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{m}{x}\right)^{nx} = e^{mn}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x} = a$.

Найти пределы:

6.4.48. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[2x]{1+3x}$.

6.4.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)^x$.

6.4.50. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6.4.51. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$.

6.4.52. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$.

6.4.53. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

6.4.54. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

6.4.55. $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+3)-\ln x]$.

6.4.56. Найти пределы справа и слева функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $x_0 = 0$.

❍ Так как $f(x) = 1$ при $x > 0$, то

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} 1 = 1.$$

Аналогично находим:

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} (-1) = -1.$$ ●

Найти односторонние пределы функций $f(x)$ в точке x_0:

6.4.57. $f(x) = [x]$, $x_0 = 2$.

6.4.58. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \frac{x}{3} & \text{при } x > 1; \end{cases}$

а) $x_0 = 1$;

б) $x_0 = 11$.

6.4.59. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$.

❍ 1) В силу следствия из первого замечательного предела $\sin \alpha x \sim \alpha x$, $x \to 0$. Отсюда (при $x \to 0$) $\sin 4x \sim 4x$, а $\sin 3x \sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

2) При $x \to 0$ имеем $e^x - 1 \sim x$ и $1 - \cos \sim \frac{x^2}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = 2.$$ ●

Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

6.4.60. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{2x}$.

6.4.61. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$.

6.4.62. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1-6x)}$.

6.4.63. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{3^x - 1}$.

6.4.64. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+7x} - 1}{x}$.

6.4.65. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2 - 2x}$.

Дополнительные задачи

Используя первое определение предела функции, найти пределы:

6.4.66. $\lim\limits_{x\to -2} (x^2 - x)$.

6.4.67. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x}{x+3}$.

6.4.68. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2 + 27}$.

6.4.69. $\lim\limits_{x\to a} (x + 2a)^5$.

Используя второе определение предела функции, доказать, что:

6.4.70. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0.$

6.4.71. $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0.$

6.4.72. $\lim\limits_{x\to 1} x^3 = 1.$

6.4.73. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4}{x-1} = 2.$

Доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0, если:

6.4.74. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0.$

6.4.75. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное} \end{cases}$

(функция Дирихле), $x_0 = \dfrac{1}{2}.$

Найти пределы:

6.4.76. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-1}{2x+5}.$

6.4.77. $\lim\limits_{x\to 2{,}5} \sqrt{4x-1}.$

6.4.78. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}+1}{\sqrt{x+5}}.$

6.4.79. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \left(x^2 + \dfrac{1}{x^4} - 3\right).$

6.4.80. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+5x-2}{3x-1}.$

6.4.81. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}.$

6.4.82. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right).$

6.4.83. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5-3x^3+x^2}{x^4+2x^2}.$

6.4.84. $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y^3+4y-5}{y^3+2y^2-y-2}.$

6.4.85. $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{(x+a)^3-x^3}{a}.$

6.4.86. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x^2-8x}{\sqrt{x+1}-3}.$

6.4.87. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{9-x}-2}{3-\sqrt{x+4}}.$

6.4.88. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$

6.4.89. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+6}-3}.$

6.4.90. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t}.$

6.4.91. $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y-1}{\sqrt[4]{y}-1}.$

6.4.92. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^4-2x+3}{x^2-3x^4}.$

6.4.93. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^3-x^2+3x-1}{10x^2+x}.$

6.4.94. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x^2-3)(2x+9)}{(x^2+x+1)(3x^2-4)}.$

6.4.95. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-10x\right).$

6.4.96. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right).$

6.4.97. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{5x^2+1} - \dfrac{x^2}{5x-3}\right).$

6.4.98. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}.$

6.4.99. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}.$

6.4.100. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$

6.4.101. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h-\sin h}{h+\sin h}.$

6.4.102. $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)\operatorname{ctg} \pi x.$

6.4.103. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot \operatorname{tg} 2x}.$

6.4.104. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 7x}{\sin 4x}$.

6.4.105. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

6.4.106. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x-1}{4^x-1}$.

6.4.107. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

6.4.108. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

6.4.109. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\sin x}$.

6.4.110. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{8+x}{10+x}\right)^{2x+3}$.

6.4.111. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$.

6.4.112. $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)^{t}$.

6.4.113. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

6.4.114. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-3}\right)$.

Найти односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0:

6.4.115. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$.

6.4.116. $f(x) = \dfrac{1}{\{x\}}$, где $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x; $x_0 = 1$.

6.4.117. Доказать эквивалентность следующих функций при $x \to 0$:

1) $e^{kx} - 1 \sim kx$;

2) $\arcsin \alpha x \sim \alpha x$;

3) $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$;

4) $\ln\cos x \sim -\dfrac{x^2}{2}$.

Найти пределы, заменяя бесконечно малые эквивалентными:

6.4.118. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{tg}^2 8x}$.

6.4.119. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin x}-1}{x}$.

6.4.120. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\arcsin\sqrt{x}}{\operatorname{arctg}^{3/2} 2x}$.

6.4.121. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-1}{\sqrt{x}-1}$.

6.4.122. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

6.4.123. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

Более сложные задачи

6.4.124. Верно ли, что:

1) если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет предела в этой точке, то функция $f(x)+g(x)$ имеет предел в точке x_0;

2) если функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют предела в точке x_0, то функция $f(x)+g(x)$ также не имеет предела в этой точке?

6.4.125. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ не существует.

6.4.126. Привести пример функции, которая определена и не имеет предела во всех целых точках ($x \in \mathbb{Z}$), но имеет предел во всех остальных точках.

6.4.127. Доказать, что:

1) сумма (разность) бесконечно малых при $x \to x_0$ функций также бесконечно малая при $x \to x_0$ функция;

2) произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию (в частности, произведение двух бесконечно малых) есть бесконечно малая функция.

6.4.128. Показать на примерах, что:

1) частное двух бесконечно малых при $x \to x_0$ функций может не быть бесконечно малой функцией;

2) если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, а $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_1$, то сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ может нигде не быть бесконечно малой функцией;

3) сумма бесконечно больших функций при $x \to x_0$ может быть даже бесконечно малой при $x \to x_0$.

6.4.129. Привести пример функции, бесконечно малой при $x \to 1$, $x \to 2$ и $x \to 3$, но не являющейся бесконечно малой в окрестностях других точек.

Найти пределы:

6.4.130. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

6.4.131. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^4-1}$.

6.4.132. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{-\frac{2}{x^2}}$.

6.4.133. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos 2x}{x^2}$.

6.4.134. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

6.4.135. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$.

6.4.136. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}{x}$.

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Непрерывность функции в точке

⇒ Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если обозначить $x - x_0 = \Delta x$ (приращение аргумента), $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ (приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx), то это определение можно записать в эквивалентной форме.

⇛ Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Односторонняя непрерывность

⇛ Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева в точке* x_0, если она определена на некотором полуинтервале $(a; x_0]$ и

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

⇛ Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа в точке* x_0, если она определена на некотором полуинтервале $[x_0; b)$ и

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке, т. е. когда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Непрерывность функции на промежутке

⇛ Функция $f(x)$ называется *непрерывной* на данном промежутке (интервале, полуинтервале, отрезке), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

При этом если функция определена в конце промежутка, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слева. В частности, функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она:

1) непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$;
2) непрерывна справа в точке a;
3) непрерывна слева в точке b.

Точки разрыва функции

⇛ Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $f(x)$ или является граничной точкой этой области. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Точки разрыва подразделяются на точки разрыва 1-го рода и 2-го рода.

$\Rrightarrow$ Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, но они не равны между собой, или же односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то x_0 называется *точкой разрыва* 1-го рода.

Если в точке x_0 существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$, а $f(x_0)$ не определено или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то эта точка называется *точкой устранимого разрыва.*

Точки разрыва 1-го рода функции $f(x)$, не являющиеся точками устранимого разрыва, называются *точками скачка* этой функции.

Если x_0 — точка скачка функции $f(x)$, то разность $\Delta f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ не равна нулю и называется *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0.

$\Rrightarrow$ Если в точке x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода.*

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 6.5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (если $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

В частности, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то функция $\alpha \cdot f(x)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, также непрерывна в точке x_0.

Теорема 6.6 (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

Непрерывность элементарных функций

Теорема 6.7. Все простейшие элементарные функции (c, x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$) непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Из этой теоремы, а также из двух предыдущих следует, что также непрерывны в каждой точке своих областей определения все функции, полученные из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 6.8 (Больцано–Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах разные знаки. Тогда найдется хотя бы одна такая точка $x_0 \in (a;b)$, что $f(x_0) = 0$.

Теорема 6.9 (о промежуточных значениях). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда для любого числа C, заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $x_0 \in [a;b]$, что $f(x_0) = C$.

Теорема 6.10 (1-я теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда эта функция ограничена на этом отрезке.

Теорема 6.11 (2-я теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда эта функция принимает на отрезке $[a;b]$ свои наибольшие и наименьшие значения, т. е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a;b]$, что для любой точки $x \in [a;b]$ справедливы неравенства

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2).$$

6.5.1. Заполнить таблицу для функции $f(x)$, найдя для каждого приращения Δx в точке $x_0 = 2$ соответствующее приращение $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Δx	-1	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	1	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}01$
Δy								

а) $f(x) = 3x + 1$;

б) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

На основании заполненной таблицы сделать предположение о поведении функции в точке $x_0 = 2$.

○ а) При $\Delta x = -1$ имеем $x = x_0 + \Delta x = 2 - 1 = 1$, откуда $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(1) - f(2) = 4 - 7 = -3$.

Аналогично находим и другие значения Δy. В результате получаем таблицу

Δx	-1	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	1	0,2	0,1	0,01
Δy	-3	$-0{,}6$	$-0{,}3$	$-0{,}03$	3	0,6	0,3	0,03

Как видно из этой таблицы, малым значениям приращения аргумента соответствуют малые значения приращения функции. Поэтому можно сделать предположение о непрерывности данной функции в точке $x_0 = 2$. Разумеется, подобные нестрогие рассуждения не могут служить доказательством непрерывности функции в данной точке.

б) Производя вычисления как и в пункте а), получаем таблицу

Δx	-1	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	1	0,2	0,1	0,01
Δy	-1	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	1	1	1	1

Из таблицы видно, что малые приращения функции соответствуют малым приращениям аргумента лишь слева от точки $x_0 = 2$; справа же от этой точки (т. е. при $\Delta x > 0$) Δy не уменьшается при уменьшении Δx. Отсюда можно предположить, что $x_0 = 2$ — точка разрыва данной функции; при этом $f(x)$ непрерывна слева в этой точке. ●

6.5.2. Найдя для каждого приращения Δx функции $f(x)$ в точке $x_0 = -1$ соответствующее приращение Δy, заполнить таблицу

Δx	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	0,5	0,1	0,01
Δy						

На основании заполненной таблицы сделать предположение о поведении функции в точке $x_0 = -1$.

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{при } x \neq -1, \\ 1 & \text{при } x = -1; \end{cases}$

б) $f(x) = x^2$.

6.5.3. Заполнить таблицу для функции $f(x)$, найдя для каждого приращения Δx аргумента в точке $x_0 = 1{,}5$ соответствующее приращение Δy.

Δx	$-0{,}6$	$-0{,}3$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	0,6	0,3	0,1	0,01
Δy								

.

Заполнив таблицу, сделать предположение о поведении функции в данной точке. Построить график функции и указать на нем точки, соответствующие $\Delta x = 0{,}6$, $\Delta x = 0{,}3$, $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta x = 0{,}01$.

а) $f(x) = |x - 1{,}5|$;

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1{,}5} & \text{при } x < 1{,}5, \\ 2x - 3 & \text{при } x \geqslant 1{,}5. \end{cases}$

6.5.4. Пользуясь определением непрерывности функции доказать, что функция $y = x^2$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

❍ Пусть Δx — приращение аргумента в точке x_0. Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 =$$
$$= (x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Теперь, применяя теоремы о пределе суммы и произведения функций, получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right] =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 \cdot \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 2x_0 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x\right)^2 = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что и означает (по определению) непрерывность данной функции в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. ●

6.5.5. Пользуясь определением, доказать непрерывность функции $f(x)$ в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

а) $f(x) = c$;

б) $f(x) = x$;

в) $f(x) = x^3$;

г) $f(x) = 4x^2 - 5x + 2$.

6.5.6. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x_0 = 0$, но непрерывна справа в этой точке. Построить график функции $f(x)$.

❍ Найдем односторонние пределы в точке $x_0 = 0$. Слева от точки x_0 имеем $f(x) = 0$, поэтому

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} 0 = 0.$$

Аналогично,

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} 1 = 1.$$

Кроме того, $f(x_0) = f(0) = 1$, откуда следует, что

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) \neq f(0) = \lim_{x \to 0+0} f(x).$$

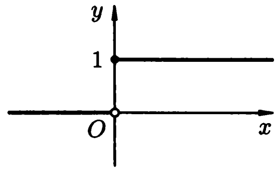


Рис. 77

Это означает, что в точке 0 не выполнены все условия непрерывности функции, но функция $f(x)$ непрерывна справа в этой точке.

График функции $f(x)$ изображен на рис. 77. ●

6.5.7. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant 1, \\ 2 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x_0 = 1$, но непрерывна слева в этой точке. Построить график функции $f(x)$.

6.5.8. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{при } x < -2, \\ x^2 - 4 & \text{при } x \geqslant -2 \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x_0 = -2$, но непрерывна справа в этой точке. Построить график функции $f(x)$.

6.5.9. Доказать, что функция $y = [x]$ (см. задачу 6.1.27) непрерывна во всех точках $x_0 \neq n \in \mathbb{Z}$, а во всех точках $x_0 = n \in \mathbb{Z}$ — непрерывна справа.

6.5.10. Доказать, что функция $y = \{x\}$ (см. задачу 6.1.27) непрерывна во всех точках $x_0 \neq n \in \mathbb{Z}$, а во всех точках $x_0 = n \in \mathbb{Z}$ — непрерывна справа.

6.5.11. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant -\pi, \\ \sin x & \text{при } -\pi < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти скачок функции в точках скачка.

❍ Функции $y = x$, $y = \sin x$ и $y = 1$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т. е. в точках $x_1 = -\pi$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке $x_1 = -\pi$ имеем:

$$\lim_{x\to-\pi-0} f(x) = \lim_{x\to-\pi} x = -\pi, \qquad \lim_{x\to-\pi+0} f(x) = \lim_{x\to-\pi} \sin x = 0,$$

$$f(-\pi) = -\pi.$$

Таким образом, в этой точке

$$\lim_{x\to-\pi-0} f(x) = f(-\pi) \neq \lim_{x\to-\pi+0} f(x),$$

т. е. функция имеет разрыв 1-го рода и непрерывна слева. Скачок функции $f(x)$ в точке $x_1 = -\pi$ равен

$$\Delta f(-\pi) = \lim_{x\to-\pi+0} f(x) - \lim_{x\to-\pi-0} f(x) = \pi.$$

Аналогично, для точки $x_2 = \frac{\pi}{2}$ получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} 1 = 1,$$

а значение $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ не определено. Отсюда следует, что $x_2 = \frac{\pi}{2}$ — точка устранимого разрыва для функции $f(x)$.

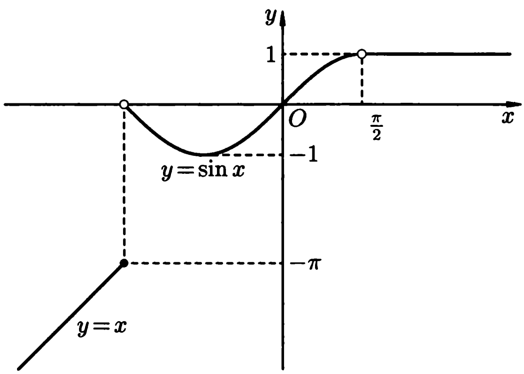


Рис. 78

График функции изображен на рис. 78. ●

6.5.12. Исследовать на непрерывность и построить график функции $f(x)$. Найти скачок функции в точках разрыва.

а) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, & \text{если } -2 \leqslant x < 2, \\ x-2, & \text{если } x > 2; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & \text{если } x < 1, \\ 2, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ 3x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

6.5.13. Используя только график функции $f(x)$ (рис. 79), указать ее точки разрыва и определить их род.

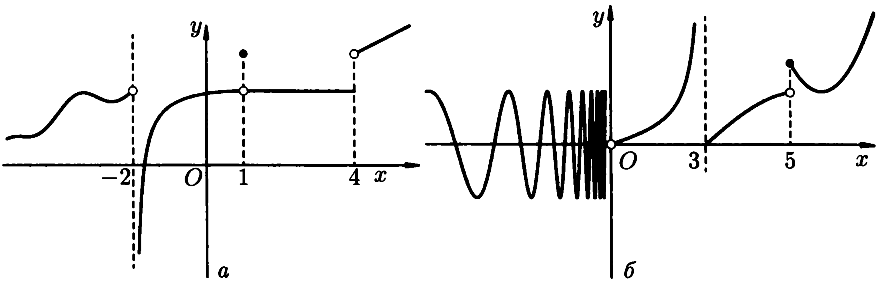


Рис. 79

6.5.14. Установить характер разрыва функции $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ в точке $x_0 = 2$.

❍ Находим:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x\to 2+0} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty,$$

то есть функция в точке $x_0 = 2$ не имеет ни одного из односторонних пределов. Отсюда следует, что $x_0 = 2$ — точка разрыва 2-го рода. ●

6.5.15. Установить характер разрыва функции в точке x_0:

а) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$, $x_0 = -4$;

б) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$.

6.5.16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{x-1}$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{2^{x-3}-1}$, $x_0 = 3$.

6.5.17. Используя свойства непрерывных функций, доказать, что функция $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

❍ Функции $y = x^2$, $y = x^3$ и $y = c$ непрерывны на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Следовательно, данная функция $f(x)$ также непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ как сумма непрерывных функций $y = x^3$, $y = -5x^2$ (эта функция непрерывна, так как является произведением непрерывных функций $y = -5$ и $y = x^2$) и $y = 7$. ●

6.5.18. Используя свойства непрерывных функций, доказать, что функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

а) $f(x) = 4x^5 - \dfrac{7}{x^2+1} + 2$;

б) $f(x) = 5x + \dfrac{4x-1}{x^4+7}$;

в) $f(x) = \sin 5x - e^{3x-1}$;

г) $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \cos^2 4x$.

6.5.19. Найти предел, используя свойства непрерывных функций:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+8x-1}{x^2-4}.$$

○ Данная функция элементарная, поэтому она непрерывна на области определения, т. е. при всех $x \neq \pm 2$. Следовательно, $f(x)$ непрерывна и в точке $x = 3$, откуда

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+8x-1}{x^2-4} = \frac{3^2+8\cdot 3-1}{3^2-4} = \frac{32}{5} = 6{,}4. \quad ●$$

6.5.20. Найти пределы, используя свойства непрерывных функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5}{x^2+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x+7}{x^4+3x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2+x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1+\cos(x-1))$.

6.5.21. Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$ на непрерывность на отрезке $[a; b]$, если

а) $[a; b] = [-1; 2]$;

б) $[a; b] = [-5; 0]$;

в) $[a; b] = [-3; 4]$.

○ Данная функция элементарная, поэтому она непрерывна на области определения, т. е. при всех x, не равных -2 и 3. В точке $x_1 = -2$ функция терпит разрыв 2-го рода, так как

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = +\infty, \quad \lim_{x\to -2+0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty.$$

В точке $x_2 = 3$ также разрыв 2-го рода, потому что

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty, \quad \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = +\infty.$$

Отсюда следует, что данная функция непрерывна на отрезке $[-1; 2]$ (так как $x_1, x_2 \notin [-1; 2]$); на отрезке $[-5; 0]$ функция непрерывна всюду, кроме точки -2, в которой терпит разрыв 2-го рода ($x_1 \in [-5; 0]$, $x_2 \notin [-5; 0]$); на отрезке $[-3; 4]$ функция имеет две точки разрыва 2-го рода $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, а в остальных точках непрерывна ($x_1; x_2 \in [-3; 4]$). ●

6.5.22. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность на отрезках $[0; 2]$; $[-3; 1]$; $[4; 5]$, если

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 1}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$;

3) $f(x) = \ln \dfrac{x+4}{x-5}$;

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 20}$.

Дополнительные задачи

6.5.23. Доказать, что следующие функции непрерывны в каждой точке своей области определения:

а) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg} x$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

г) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+5}$.

6.5.24. Исследовать на непрерывность функцию $y = |\operatorname{sign} x|$. Построить график этой функции.

Более сложные задачи

6.5.25. Используя определение, доказать непрерывность на $(-\infty; +\infty)$ следующих функций:

а) $f(x) = \sin x$;

б) $f(x) = \cos x$;

в) $f(x) = e^x$.

6.5.26. Доказать, что функция Дирихле (см. задачу 6.1.125) разрывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

6.5.27. Привести пример двух разрывных в точке x_0 функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых функция $h(x)$ будет непрерывна в этой точке:

а) $h(x) = f(x) + g(x)$;

б) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

6.5.28. Привести пример двух функций $f(x)$ и $g(x)$, разрывных в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, для которых функция $h(x)$ непрерывна на всей действительной оси:

а) $h(x) = f(x) + g(x)$;

б) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

6.5.29. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

имеет разрыв 2-го рода в точке 0.

6.5.30. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

непрерывна на $(-\infty; +\infty)$.

6.5.31. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны справа (соответственно, слева) в точке x_0. Доказать, что функции

а) $f(x) + g(x)$;

б) $f(x) \cdot g(x)$;

в) $f(x)/g(x)$ $(g(x_0) \neq 0)$

также непрерывны справа (соответственно, слева) в точке x_0.

6.5.32. Привести пример функции, непрерывной и неограниченной на данном интервале.

6.5.33. Привести пример функции, заданной на отрезке $[a; b]$ и неограниченной на нем.

6.5.34. Привести пример непрерывной на некотором множестве функции, которая принимает значения 0 и 2, но не принимает значения 1.

6.5.35. Привести пример функции, непрерывной на каждом из промежутков $[0; 1)$ и $[1; 2]$, но не являющейся непрерывной на их объединении, т. е. на отрезке $[0; 2]$.

6.5.36. Привести пример функции $f(x)$, непрерывной на интервале $(a; b)$, множество значений которой:

а) интервал;

б) отрезок;

в) полуинтервал.

6.5.37. Привести пример функции, которая достигает на данном отрезке наибольшего и наименьшего значений и принимает все промежуточные значения между ними, но не является непрерывной на этом отрезке.

6.5.38. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Доказать, что тогда функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности этой точки.

6.5.39. Доказать, что всякий многочлен третьей степени имеет по крайней мере один действительный корень.

6.5.40. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на данном промежутке, то и функция $|f(x)|$ также непрерывна на этом промежутке.

6.5.41. Привести пример функции $f(x)$, разрывной на отрезке $[a; b]$, для которой функция $|f(x)|$ непрерывна на этом отрезке.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
Вариант 1

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^3 - 1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \cdot \sin^2 x}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{5x}$.

5. Для данной функции $f(x)$ требуется:
   а) найти точки разрыва;
   б) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
   в) сделать чертеж.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi \\ \sin x, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Вариант 2

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^3 - x^2 - 8x - 4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{1 - \sqrt{3-x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1-x^2}{3+x^2}\right)^{4x^2}$.

5. Для данной функции $f(x)$ требуется:
   а) найти точки разрыва;
   б) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
   в) сделать чертеж.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ (x+1)^2, & 0 < x \leqslant 2 \\ -x+4, & x > 2. \end{cases}$$

Вариант 3

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1})$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x + \sin x}{2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-5}{2x+3}\right)^{7x}$.

5. Для данной функции $f(x)$ требуется:
   а) найти точки разрыва;
   б) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
   в) сделать чертеж.

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^3, & 0\leqslant x<2\\ 3, & x>2.\end{cases}$$

Вариант 4

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{3x^2+x}{(x-2)(x^2+x+1)}-\dfrac{2}{x-2}\right]$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x^2+4}{-7x^3+x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2-2}\right)^{5x^2}$.

5. Для данной функции $f(x)$ требуется:
   а) найти точки разрыва;
   б) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
   в) сделать чертеж.

$$f(x)=\begin{cases}-2, & x<-\frac{\pi}{2}\\ 2\sin x, & -\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

❏

Глава 7. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

❏

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Понятие производной

$\Rrightarrow$ Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или $f'|_{x=x_0}$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$\Rrightarrow$ Вычисление производной называется *дифференцированием* функции.

Таблица производных

1. $(c)' = 0$, $c = \mathrm{const}$;
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (где $\alpha \in \mathbb{R}$); в частности, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$; в частности, $(e^x)' = e^x$;
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$; в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Основные правила дифференцирования

Пусть c — константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке x. Тогда функции $u(x)\pm v(x)$, $c\cdot u(x)$, $u(x)\cdot v(x)$ и $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x)\neq 0$) также имеют производные в этой точке, причем

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

2. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$, в частности, $(cu)'=c\cdot u'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{cv'}{v^2}$.

Пусть теперь функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y=f(u)$ — в точке $u_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y=f(\varphi(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$$y'(x_0)=y'(u_0)\cdot u'(x_0).$$

Геометрический смысл производной

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда существует касательная к графику этой функции в точке $M_0(x_0;y_0)$, уравнение которой имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

При этом $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона этой касательной к оси Ox (рис. 80).

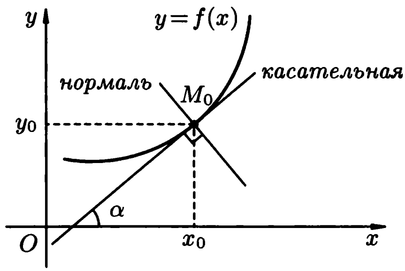


Рис. 80

⇛ Прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой и имеет уравнение

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0).$$

Если $f'(x_0)=0$ (т. е. касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна и имеет уравнение $x=x_0$.

⇛ Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0. Тогда *углом между* этими *кривыми* называется угол между касательными к ним, проведенными в точке M_0.

Этот угол φ можно найти из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

Логарифмическая производная

При нахождении производных от показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$, а также других громоздких выражений, допускающих логарифмирование (произведение, частное и извлечение корня), удобно применять логарифмическую производную.

⇛ *Логарифмической производной* от функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Используя логарифмическую производную, нетрудно вывести формулу для производной показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$:

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v.$$

Производная неявной функции

Пусть функция $y = y(x)$, обладающая производной в точке x, задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

Тогда производную $y'(x)$ этой функции можно найти, продифференцировав уравнение (1.1) (при этом y считается функцией от x) и разрешая затем полученное уравнение относительно y'.

Производные высших порядков

⇛ Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ называется также *производной первого порядка*. В свою очередь производная от функции $f'(x)$ называется *производной второго порядка* от функции $f(x)$ (или второй производной) и обозначается $f''(x)$.

Аналогично определяются *производная третьего порядка* (или *третья производная*), обозначаемая $f'''(x)$ и т. д.

Производная n-го порядка обозначается $f^{(n)}(x)$.

Производная функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ определена параметрически функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в точке t_0, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)} \quad \text{или} \quad y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}.$$

Вторая производная $y''(x)$ находится по формуле

$$y_{xx}'' = \frac{y_t'' \cdot x_t' - x_t'' \cdot y_t'}{(x_t')^3}.$$

7.1.1. Пользуясь определением, найти производную функции $y=f(x)$:
1) $y = 3x^2$;
2) $y = \sin x$.

◐ 1) Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда соответствующее приращение Δy функции будет иметь вид

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 =$$
$$= 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) = 3\Delta x(2x + \Delta x).$$

Отсюда находим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке x при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 3 \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 3 \cdot 2x = 6x.$$

Таким образом, $y' = (3x^2)' = 6x$.

2) Найдем приращение Δy функции, соответствующее приращению Δx аргумента, используя формулу разности синусов:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом и непрерывностью $\cos x$. Таким образом, $y' = (\sin x)' = \cos x$. ●

Пользуясь определением, найти производные функций:

7.1.2. $y = 5x - 2$.

7.1.3. $y = x^3$.

7.1.4. $y = \sqrt{x}$.

7.1.5. $y = \frac{1}{x}$.

7.1.6. Пользуясь основными правилами дифференцирования, найти $f'(x)$, если:
1) $f(x) = \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} - 5^{x+1}$;
2) $f(x) = (x^4 - x) \cdot (3\operatorname{tg} x - 1)$.

○ 1) Преобразуем функцию к виду

$$f(x) = 9 \cdot x^{-2/3} - 5 \cdot 5^x.$$

Отсюда, используя таблицу производных, получим

$$f'(x) = (9 \cdot x^{-2/3} - 5 \cdot 5^x)' = (9 \cdot x^{-2/3})' - (5 \cdot 5^x)' =$$
$$= 9 \cdot (x^{-2/3})' - 5 \cdot (5^x)' = 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} - 5 \cdot 5^x \ln 5 =$$
$$= -6x^{-5/3} - 5^{x+1} \ln 5.$$

2) Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$f'(x) = \left[(x^4 - x)(3\operatorname{tg} x - 1)\right]' =$$
$$= (x^4 - x)'(3\operatorname{tg} x - 1) + (x^4 - x)(3\operatorname{tg} x - 1)' =$$
$$= (4x^3 - 1)(3\operatorname{tg} x - 1) + (x^4 - x) \cdot \frac{3}{\cos^2 x}. \quad ●$$

Найти производные указанных функций:

7.1.7. $y = x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 2x - 4$.

7.1.8. $y = ax^2 + bx + c$.

7.1.9. $y = 6x^7 + 4x^3 - \frac{1}{8}x$.

7.1.10. $y = \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}$.

7.1.11. $y = \sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}$.

7.1.12. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \sqrt{7} \cdot x$.

7.1.13. $y = x\sqrt[4]{x} + 3\sin 1$.

7.1.14. $y = 5 \cdot 2^x + \frac{3}{4}\operatorname{ctg} x$.

7.1.15. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

7.1.16. $y = -10\operatorname{arctg} x + 7 \cdot e^x$.

7.1.17. $y = x^3 \log_2 x$.

7.1.18. $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

7.1.19. $f(t) = \frac{1 + e^t}{1 - e^t}$.

7.1.20. $z = \left(\sqrt{y} + 1\right) \arcsin y$.

7.1.21. $u = \frac{21^v}{21^v + 1}$.

7.1.22. $f(x) = \sqrt[5]{x} \arccos x - \frac{\log_6 x}{x^2}$.

Найти производную данной функции в точке x_0:

7.1.23. $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$.

7.1.24. $y = x^4 + x^3 - 17^5$, $x_0 = 1$.

7.1.25. $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$.

7.1.26. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, $x_0 = 9$.

7.1.27. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции y:
1) $y = \sin^2 x$;
2) $y = \ln(\operatorname{arctg} 3x)$.

❍ 1) Данная функция является композицией двух имеющих производные функций $u = \sin x$ и $f(u) = u^2$. Так как $u' = \cos x$, а $f'(u) = 2u$, то с учетом правила дифференцирования сложной функции получим:

$$y'(x) = (u^2)'_x = 2u \cdot u' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

2) Функция $\ln(\operatorname{arctg} 3x)$ — композиция функций $u = \operatorname{arctg} 3x$ и $f(u) = \ln u$, откуда

$$y'(x) = (\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot (\operatorname{arctg} 3x)'.$$

Функция $\operatorname{arctg} 3x$, в свою очередь, является композицией двух функций $v = 3x$ и $g(v) = \operatorname{arctg} v$, поэтому для нахождения ее производной нам придется еще раз применить правило дифференцирования сложной функции:

$$(\operatorname{arctg} 3x)' = (\operatorname{arctg} v)'_x = \frac{1}{1+v^2} \cdot v' = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}.$$

Отсюда окончательно

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot (\operatorname{arctg} 3x)' = \frac{3}{(1+9x^2)\operatorname{arctg} 3x}.$$ ●

Найти производные функций:

7.1.28. $y = \cos 5x$.

7.1.29. $y = 7^{3x-1}$.

7.1.30. $y = \cos^3 x$.

7.1.31. $y = (x+1)^{100}$.

7.1.32. $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

7.1.33. $y = \arcsin \sqrt{x}$.

7.1.34. $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

7.1.35. $y = \ln \sin x$.

7.1.36. $y = e^{\operatorname{ctg} x}$.

7.1.37. $y = \arccos(e^x)$.

7.1.38. $y = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x}$.

7.1.39. $y = \sin^9\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

7.1.40. $y = \sqrt[3]{(1-3x)^2}$.

7.1.41. $y = \arcsin \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

7.1.42. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}$.

7.1.43. $y = (1+\operatorname{tg}^2 3x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

7.1.44. $y = \ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)$.

7.1.45. $y=\operatorname{tg}4x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 4x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 4x$.

7.1.46. $y = x^3\cdot\sin(\cos x)$.

7.1.47. $y = 3^{x^2}\cdot\sqrt{x^3-5x}$.

7.1.48. $y = \log_6 \sin 4x$.

7.1.49. $y = \cos\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

7.1.50. $y = \ln\dfrac{(x+1)(x+3)^3}{(x+2)^3(x+4)}$.

7.1.51. $y=\operatorname{arctg}(x-2)+\dfrac{x-3}{x^2-4x+5}$.

7.1.52. $y = \sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}$.

7.1.53. $y = e^{\operatorname{sh}^2 5x}$.

7.1.54. $y = \dfrac{x+e^{3x}}{x-e^{3x}}$.

7.1.55. $y = \arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$.

7.1.56. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.

7.1.57. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{ctg}x+1}+\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}x+1}$.

7.1.58. Используя логарифмическую производную, найти производные функций:

1) $y = x^{\sin x}$;

2) $y = \dfrac{(x-1)^3\cdot\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

❍ 1) Прологарифмируем обе части равенства $y = x^{\sin x}$. Тогда $\ln y = \ln x^{\sin x}$, т. е. $\ln y = \sin x\cdot\ln x$. Теперь продифференцируем последнее равенство, при этом в левой части используем производную сложной функции, а в правой — производную произведения: $(\ln y)' = (\sin x\cdot\ln x)'$, т. е. $\frac{y'}{y} = (\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)'$ или $\frac{y'}{y} = \cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$.

Отсюда $y' = y\Big(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\Big)$ или, учитывая, что $y = x^{\sin x}$,

$$y' = x^{\sin x}\Big(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\Big).$$

2) Непосредственное дифференцирование данной дроби привело бы к громоздким вычислениям, зато применение логарифмической производной позволяет найти ответ без труда:

$$\ln y = \ln\frac{(x-1)^3(x+2)^{1/2}}{(x+1)^{2/3}}.$$

Отсюда, используя формулы для логарифма произведения, частного и степени, получим:

$$\ln y = \ln(x-1)^3+\ln(x+2)^{1/2}-\ln(x+1)^{2/3},$$

т. е.

$$\ln y = 3\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)-\frac{2}{3}\ln(x+1).$$

Осталось продифференцировать обе части полученного равенства:

$$(\ln y)' = \left[3\ln(x-1) + \tfrac{1}{2}\ln(x+2) - \tfrac{2}{3}\ln(x+1)\right]'$$

или

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)},$$

откуда

$$y' = y \cdot \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)}\right),$$

т. е.

$$y' = \frac{(x-1)^3\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)}\right). \qquad \bullet$$

Найти производные:

7.1.59. $y = x^x$.

7.1.60. $y = x^{\ln x}$.

7.1.61. $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x^2+1)(x+3)}{(x-3)^3}}$.

7.1.62. $y = \dfrac{(x^3-2)\cdot\sqrt[3]{(x-1)}}{(x+5)^4}$.

7.1.63. $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

7.1.64. $y = \dfrac{(1-x^2)\cdot\cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}}$.

7.1.65. Найти производную неявно заданной функции y:

$$x^3 + y^3 = \sin(x-2y).$$

❍ Дифференцируя обе части уравнения и учитывая, что y — есть функция от x (поэтому, например, $(y^3)'_x = 3y^2 \cdot y'$), получим:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x-2y)(1-2y')$$

или

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x-2y) - 2y' \cdot \cos(x-2y).$$

Отсюда находим y':

$$3y^2y' + 2y' \cdot \cos(x-2y) = \cos(x-2y) - 3x^2$$

или

$$y'(3y^2 + 2\cos(x-2y)) = \cos(x-2y) - 3x^2,$$

т. е.

$$y' = \frac{\cos(x-2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x-2y)}. \qquad \bullet$$

Найти производную функции y, заданной неявно:

7.1.66. $e^{xy} - \cos(x^2+y^2) = 0$.

7.1.67. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

7.1.68. $x^2 + y^2 = \ln\dfrac{y}{x} + 7$.

7.1.69. $x\sin y + y\sin x = 0$.

7.1.70. $x^4 - y^4 = x^2y^2$.

7.1.71. $e^y = e - xy$. Найти y' в точке $(0;1)$.

7.1.72. Найти производную $y'(x)$ от следующей функции, заданной параметрически:

$$x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t.$$

❍ Производная функции $y(x)$ находится по формуле $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, откуда в нашем случае

$$y'(x) = \frac{(3\sin t)'}{(2\cos t)'} = -\frac{3\cos t}{2\sin t} = -1{,}5\operatorname{ctg} t. \quad ●$$

Найти $y'(x)$ для заданных параметрически функций $y = y(x)$:

7.1.73. $x = t^3 + t$, $y = t^2 + t + 1$. **7.1.74.** $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

7.1.75. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$. **7.1.76.** $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

7.1.77. $x = 5\operatorname{ch} t$, $y = 4\operatorname{sh} t$.

7.1.78. **1)** Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y^2 = 4x$ в точке $M(1;2)$.

2) Найти точки, в которых касательная к графику гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ параллельна прямой $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$.

3) Найти угол, под которым пересекаются кривые

$$y = \frac{8}{x} \quad \text{и} \quad x^2 - y^2 = 12.$$

❍ 1) Найдем $y'(x)$ как производную неявной функции: $(y^2)' = (4x)'$, т. е. $2yy' = 4$, откуда $y' = \dfrac{2}{y}$. Значит, $y'(x_0) = y'(1) = 1$. Отсюда получаем уравнение касательной в точке M:

$$y - 2 = x - 1, \quad \text{т. е.} \quad y = x + 1.$$

Теперь найдем уравнение нормали:

$$y - 2 = -(x - 1), \quad \text{т. е.} \quad y = -x + 3.$$

2) Угловой коэффициент данной прямой равен $-\dfrac{1}{4}$, поэтому производная к кривой в искомой точке x_0 также равна $-\dfrac{1}{4}$:

$$y'(x_0) = -\frac{1}{4}, \quad \text{т. е.} \quad -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4},$$

откуда $x^2 = 4$, или $x = \pm 2$.

3) Сначала найдем точку пересечения кривых, для чего подставим $y = \dfrac{8}{x}$ во второе уравнение: $x^2 - \left(\dfrac{8}{x}\right)^2 = 12$, или $t - \dfrac{64}{t} = 12$, где $t = x^2$. Решая последнее уравнение, найдем

$t = 16$, откуда $x = \pm 4$, $y = \pm 2$. Таким образом, имеем 2 точки пересечения $M_1(4;2)$ и $M_2(-4;-2)$.

Найдем угол φ_1 пересечения кривых в точке M_1, предварительно вычислив $y_1'(4)$ и $y_2'(4)$ из уравнений $y_1 = \frac{8}{x}$ и $x^2 - y_2^2 = 12$:

$$y_1' = -\frac{8}{x^2} \implies y_1'(4) = -\frac{8}{16} = -0{,}5;$$

$$(x^2 - y_2^2)' = 12' \implies 2x - 2y_2 \cdot y_2' = 0 \implies$$

$$\implies y_2' = \frac{x}{y_2} \implies y_2'(4) = \frac{4}{2} = 2.$$

Теперь окончательно найдем

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_2'(4) - y_1'(4)}{1 + y_1'(4)y_2'(4)} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{1 - 1}.$$

Поскольку знаменатель дроби обратился в ноль, то это означает, что $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Аналогично находим угол $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ во второй точке пересечения данных кривых. ●

Найти уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке x_0:

7.1.79. $y = e^x$, $x_0 = 0$.

7.1.80. $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

7.1.81. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна прямой:

а) $y = 2x + 5$;

б) $y = x + \sqrt{3}$?

7.1.82. Найти углы, под которыми пересекаются кривые $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$.

7.1.83. Найти:

1) $f'''(x)$, где $f(x) = \sin 3x$;

2) y''_{xx} для функции $y = y(x)$, заданной параметрически $x = t^2$, $y = t^3$.

◐ 1) Находим первую производную:

$$f'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x.$$

Отсюда получим вторую производную —

$$f''(x) = (3\cos 3x)' = -9\sin 3x,$$

а затем и искомую третью:

$$f'''(x) = (-9\sin 3x)' = -27\cos 3x.$$

2) Воспользуемся формулой

$$y''_{xx} = \frac{x_t' \cdot y_{tt}'' - y_t' \cdot x_{tt}''}{(x_t')^3},$$

откуда

$$y''_{xx} = \frac{(t^2)' \cdot (t^3)'' - (t^3)' \cdot (t^2)''}{[(t^2)']^3} = \frac{2t \cdot 6t - 3t^2 \cdot 2}{(2t)^3} = \frac{6t^2}{8t^3} = \frac{3}{4t}. \ \bullet$$

Найти производные указанных порядков для следующих функций:

7.1.84. $y = \operatorname{tg} 3x$, $y'' = ?$

7.1.85. $y = -x \cdot \cos x$, $y'' = ?$

7.1.86. $y = \ln^2 x$, $y'' = ?$

7.1.87. $y = x \cdot \ln x$, $y''' = ?$

7.1.88. $y = e^{2x}$, $y^{(V)} = ?$

7.1.89. $y = \ln(1+x)$, $y^{(n)} = ?$

7.1.90. $x = t^3$, $y = t^2$, $y''_{xx} = ?$

7.1.91. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $y''_{xx} = ?$

Дополнительные задачи

Пользуясь определением, найти производные следующих функций:

7.1.92. $y = -4.$

7.1.93. $y = e^x.$

7.1.94. $y = 5t^3 - 2t + 7.$

7.1.95. $f(h) = \dfrac{3}{h^2+1}.$

Найти $f'(x_0)$ по определению производной:

7.1.96. $f(x) = 4x^2 - 3x + 8$, $x_0 = 1.$

7.1.97. $f(x) = \cos 2x$, $x_0 = 0.$

Найти производные функций:

7.1.98. $y = 5\sqrt{x} + \dfrac{13}{x^4} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}.$

7.1.99. $y = 10x^6 - \dfrac{4}{x} + 3\sqrt[5]{x}.$

7.1.100. $y = 2\operatorname{ctg} x - 3\sin x.$

7.1.101. $y = \operatorname{arctg} x + 7 \cdot e^x.$

7.1.102. $y = 19^x - 8\arcsin x.$

7.1.103. $y = (x^2-1)(x^3+x).$

7.1.104. $\varphi(\alpha) = 3\arcsin\alpha - 4\arccos\alpha + 14\sqrt[7]{\alpha}.$

7.1.105. $f(t) = \dfrac{t}{1-t^2}.$

7.1.106. $y = 3\sin^2 x - \lg x + 3\cos^2 x.$

7.1.107. $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - \dfrac{1}{3^x} + 4^x.$

7.1.108. $y = \dfrac{e^x + \ln x}{e^x - \ln x}.$

7.1.109. $y = (x+1)(x+2)(x+3).$

7.1.110. $y = (x^2-1)(x^2-3)(x^2-5).$

7.1.111. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^3+4}.$

7.1.112. $y = \dfrac{3}{x^4+2}.$

7.1.113. $y = \sqrt{x}\left(x^5 + \sqrt{x} - 2\right).$

7.1.114. $y = \dfrac{3^{2x}}{2^{2x}} - \sqrt[5]{x} \cdot \ln x^5.$

Найти производную данной функции в точке x_0:

7.1.115. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$, $x_0 = 1$.

7.1.116. $f(x) = 4x + 6\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$.

7.1.117. $f(x) = x^2 + 3\sin x - \pi x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

7.1.118. $f(x) = e^{x+1}\cdot(4x-5)$, $x_0 = \ln 2$.

Найти производные функций:

7.1.119. $y = 10^{x^2+1}$.

7.1.120. $y = \operatorname{tg} 4x$.

7.1.121. $y = \operatorname{ch}^4 \frac{x}{2}$.

7.1.122. $y = \ln(5x^3 - x)$.

7.1.123. $y = \cos^4 x - \sin^4 x$.

7.1.124. $y = \sqrt{4-7x^2}$.

7.1.125. $y = \sqrt[5]{1+\operatorname{ctg} 10x}$.

7.1.126. $y = (\sin 3x - \cos 3x)^2$.

7.1.127. $x = \ln^4 \sin 3t$.

7.1.128. $f(h) = \operatorname{arctg}\sqrt{h}$.

7.1.129. $y = \dfrac{1}{\arcsin x}$.

7.1.130. $y = \dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

7.1.131. $y = \dfrac{x\ln x}{x-1}$.

7.1.132. $y = \operatorname{sh}(\ln(\operatorname{tg} 2x))$.

7.1.133. $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

7.1.134. $y = 3^{\sin^3 2x + 4\sin 2x}$.

7.1.135. $y = e^{-\ln\frac{x+2}{x-3}} - \dfrac{x-3}{x+2}$.

7.1.136. $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

7.1.137. $y = x\cdot 2^{\sqrt{x}}$.

7.1.138. $y = 5^{(1/\log_5 x)}$.

7.1.139. $y = \frac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}$.

7.1.140. $y = \ln(e^{2x}+1) - 2\operatorname{arctg} e^x$.

7.1.141. $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}}$.

7.1.142. $y = \dfrac{\operatorname{tg} 3x + \ln\cos^2 3x}{3}$.

7.1.143. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

7.1.144. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2} - \dfrac{x}{2(1+x^2)}$.

7.1.145. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

7.1.146. $y = 14\arcsin\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}$.

7.1.147. $y = \dfrac{\ln(x^2+2)}{2} + \dfrac{2-x}{4(x^2+2)} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

Найти производные функций, используя логарифмическую производную:

7.1.148. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

7.1.149. $y = (x^2+1)^{\sqrt{x}}$.

7.1.150. $y = \dfrac{e^x \cdot (x+4)^4}{\sqrt{5x-1}}$.

7.1.151. $y = \dfrac{x^3\sqrt{x-10}}{(x^2+4)^3 \cdot \sqrt[7]{x-6}}$.

7.1.152. $y = 3^x \cdot x^5 \cdot \sqrt{x^4+x}$.

7.1.153. $f(t) = t^{\frac{1}{\ln t}}$.

Найти производную функции y, заданной неявно:

7.1.154. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$.

7.1.155. $x^2 + 3y^2 - 4xy + 10 = 0$.

7.1.156. $\arcsin \dfrac{x}{y} = y \ln x$.

7.1.157. $\operatorname{arctg} y = x^2 y$.

7.1.158. $x^y \cdot y^x = 1$.

7.1.159. $x^2 + y^2 = 4$. Найти y' в точке $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Найти $y'(x)$ для заданных параметрически функций $y = y(x)$:

7.1.160. $x = t^3$, $y = 3t$.

7.1.161. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

7.1.162. $x = \dfrac{t+1}{t}$, $y = \dfrac{t-1}{t}$.

7.1.163. $x = t - \operatorname{arctg} t$, $y = \dfrac{t^3}{3} + 1$.

Найти уравнения касательной и нормали к данной кривой в данной точке:

7.1.164. $y = x^3$, $x_0 = -2$.

7.1.165. $x^2 + y^2 = 4$, $M_0 = (1; \sqrt{3})$.

7.1.166. $y = 2x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox.

7.1.167. $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = 2$.

7.1.168. В какой точке касательная к параболе $-x^2 + 4x - 6$ наклонена к оси абсцисс под углом

а) $0°$;

б) $45°$?

Найти угол между кривыми:

7.1.169. $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ и $y = -5x - 5$.

7.1.170. $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Найти производные указанных порядков для следующих функций:

7.1.171. $y = \ln\cos x$, $y'' = ?$

7.1.172. $y = \sin^2 x$, $y'' = ?$

7.1.173. $y = 5^x$, $y'' = ?$

7.1.174. $y = \dfrac{1}{4x-1}$, $y'' = ?$

7.1.175. $f(x) = xe^x$, $f'''(x) =?$

7.1.176. $r(\varphi) = \cos\varphi$, $r^{(IV)}(\varphi) =?$

7.1.177. $y = \ln x$, $y^{(n)} =?$

7.1.178. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $y''_{xx} = ?$

7.1.179. $x = e^{3t}$, $y = e^{5t}$, $y''_{xx} =?$

Более сложные задачи

7.1.180. Доказать, что:

1) производная четной функции — нечетная функция;
2) производная нечетной функции — четная функция.

7.1.181. Пусть функция $f(x)$ — периодическая с периодом T. Доказать, что $f'(x)$ (если она существует) также периодическая функция с периодом T.

7.1.182. Доказать, что функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x_0 = 0$.

7.1.183*. Построить пример функции, непрерывной на всей действительной прямой и имеющей производную всюду, кроме точек 1 и 2.

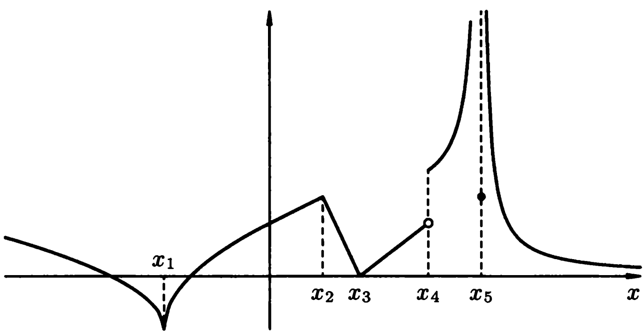


Рис. 81

7.1.184. Исходя из графика функции (рис. 81), указать точки, в которых функция не имеет производной или разрывна.

7.1.185. Дифференцируя данные тригонометрические тождества получить соответственно формулы для $\cos 2x$, $\cos 3x$ и $\cos(x + a)$, $a = \text{const}$:

1) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;
2) $\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$;
3) $\sin(x + a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$.

7.1.186. Доказать, что:

1) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$;
2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$;
3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

7.1.187. Доказать частный случай (при $n = 2$) формулы Лейбница для второй производной произведения: если $u(x)$ и $v(x)$ имеют вторые производные, то

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

7.1.188. Верно ли, что если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ — не имеет, то функция $f(x)g(x)$ также не имеет производной в точке x_0?

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Понятие дифференциала

⇛ Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует такое число A, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{2.1}$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т. е. $A \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом функции* в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Нетрудно показать (положив $y = x$ в формуле (2.1)), что $dx = \Delta x$.

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$; при этом $A = f'(x_0)$. Поэтому $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$, или, если $f'(x)$ существует на данном интервале $(a; b)$, то

$$dy = f'(x)\,dx, \quad x \in (a; b).$$

Отсюда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, т. е. производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

Если приращение Δx аргумента x близко к нулю (т. е. достаточно мало), то приращение Δy функции приближенно равно ее дифференциалу, т. е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{df(x_0)}.$$

Последняя формула удобна для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ по известному значению этой функции и ее производной в точке x_0.

Геометрический смысл и свойства дифференциала

Геометрически (рис. 82) приращение Δy функции $f(x)$ в точке x — есть приращение ординаты точки на кривой ($\Delta y = AC$), а дифференциал dy функции в этой точке — приращение ординаты соответствующей точки на касательной ($dy = AB$).

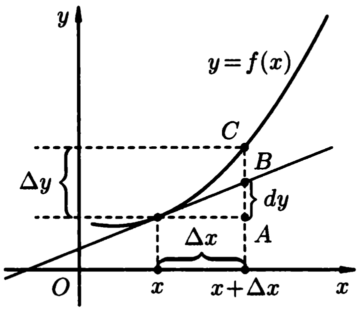


Рис. 82

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые функции, дифференцируемые в точке x. Тогда:

1. $dC = 0$, где C — константа.
2. $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$, где α — константа.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(u \cdot v) = udv + vdu$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$.
6. *Инвариантность формы дифференциала.* Если $y = f(u(x))$ — сложная функция, то

$$df(u) = f'(u)\,du, \quad \text{или} \quad dy = y'_u \cdot du,$$

т. е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается y как функция независимой переменной x или зависимой переменной u.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда, как известно, в каждой точке этого интервала определен дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ функции $f(x)$, называемый также *дифференциалом первого порядка* (или первым дифференциалом).

⇛ *Дифференциалом второго порядка* (или вторым дифференциалом) от функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$ в этой точке.

Дифференциал второго порядка обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Таким образом, $d^2y = d(dy)$. Учитывая, что $dy = f'(x)\,dx$, где dx — не зависящая от x константа, получим

$$d^2y = f''(x)(dx)^2, \text{ или, более кратко, } d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков: $d^3y = d(d^2y)$, $d^4y = d(d^3y), \ldots$ В общем случае, ***дифференциалом n-го порядка*** от функции $f(x)$ в точке x называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $f(x)$ в этой точке:

$$d^ny = d(d^{n-1}y),$$

т. е. $d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$, или, более кратко, $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$. Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}, \text{ в частности } f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Заметим, что для дифференциалов высших порядков свойство инвариантности (как для дифференциалов первого порядка) не имеет места.

7.2.1. Найти дифференциал функции

$$y = e^{x^3}.$$

◐ Так как $dy = y'dx$, то в данном случае $dy = \left(e^{x^3}\right)'dx = 3x^2 \cdot e^{x^3}dx$. ●

Найти дифференциал функции:

7.2.2. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

7.2.3. $y = (x^3 - x)\operatorname{tg} x$.

7.2.4. $y = x^2 \ln x$.

7.2.5. $y = \dfrac{x-2}{x^2+1}$.

7.2.6. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$.

◐ Сначала найдем приращение Δy в общем виде:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x+\Delta x) - y(x) = \\ &= \left[(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1\right] - (x^2 - 3x + 1) = \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 = \\ &= 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x-3)\Delta x + (\Delta x)^2.\end{aligned}$$

Из полученного выражения для приращения Δy видно, что его линейная часть в произвольной точке x_0 равна $(2x_0 - 3)\Delta x$. Тогда по определению дифференциал данной функции будет равен $dy = (2x-3)\Delta x$, или, в более привычной записи, $dy = (2x-3)dx$.

Второе слагаемое в полученной записи для Δy, т. е. $(\Delta x)^2$, есть бесконечно малая более высокого порядка, чем первое слагаемое.

Заметим, что можно найти dy и сразу (без вычисления Δy) по формуле $dy = y'dx$, откуда $dy=(x^2-3x+1)'dx=(2x-3)dx$.

Теперь найдем Δy и dy в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 - 3) \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}11, \quad dy = 0{,}1. \quad \bullet$$

Найти приращение и дифференциал функции $y = y(x)$ в общем виде, а также в точке x_0, если известно Δx:

7.2.7. $y = x^3 + 2x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$.

7.2.8. $y = x^2 + x - 5$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}5$.

7.2.9. Вычислить приближенно:

1) $\ln 1{,}02$;

2) $\sqrt{24}$.

❍ 1) Воспользуемся приближенной формулой

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Тогда, подставляя $f(x) = \ln x$, получим

$$\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x.$$

Полагая здесь $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, найдем

$$\ln 1{,}02 \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0{,}02 = 0{,}02.$$

Таким образом, $\ln 1{,}02 \approx 0{,}02$.

2) Учитывая, что $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 25$, $\Delta x = -1$, получим

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x, \quad \text{т. е.}$$

$$\sqrt{24} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot (-1) = 4{,}9.$$

Окончательно $\sqrt{24} \approx 4{,}9$. ●

Вычислить приближенно:

7.2.10. $\sqrt[3]{26}$.

7.2.11. $\operatorname{tg} 44°$.

7.2.12. $(1{,}02)^5$.

7.2.13. Найти dy, d^2y и d^3y для функции $y = \sqrt[3]{x}$.

❍ Поскольку

$$dy = y'dx = (\sqrt[3]{x})'dx = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

20 – 2361

то

$$d^2y = d(dy) = d\Big(\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\Big) = \Big(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Big)'(dx)^2 =$$

$$= \frac{1}{3}(x^{-2/3})'dx = -\frac{2}{9}x^{-5/3}dx^2 = -\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

Отсюда

$$d^3y = d(d^2y) = d\Big(-\frac{2}{9}\frac{dx^2}{x^{5/3}}\Big) = -\frac{2}{9}(x^{-5/3})'\,dx^3 =$$

$$= \frac{10}{27}x^{-8/3}dx^3 = \frac{10dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}.$$

То же самое можно было найти иначе, предварительно отыскав производные y', y'' и y''', а затем воспользоваться формулами: $d^2y = y''dx^2$, $d^3y = y'''dx^3$. ●

Найти dy и d^2y:

7.2.14. $y = (x^2+1)^3$. **7.2.15.** $y = \sin^2 x$.

Дополнительные задачи

Найти дифференциалы функций:

7.2.16. $y = 2^{\cos x}$. **7.2.17.** $y = \ln^3 \sin x$.

7.2.18. $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 1}$. **7.2.19.** $S(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{t-1}$.

Найти приращение и дифференциал функции y в общем виде, а также в точке x_0, если известно Δx:

7.2.20. $y = 4x^2 + 1$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$.
7.2.21. $y = |x|$, $x_0 = 10$, $\Delta x = -0{,}1$.

Вычислить приближенно:

7.2.22. $\sin 29°$. **7.2.23.** $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

7.2.24. $(0{,}99)^4$.

Найти dy и d^2y:

7.2.25. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **7.2.26.** $y = x(\ln x - 1)$.

7.2.27. Найти dy, d^2y и d^3y, где $y = x^n$.

Более сложные задачи

7.2.28. Используя дифференциал, доказать приближенную формулу $(1+\alpha)^n \approx 1 + n \cdot \alpha$.

7.2.29. Используя определение, доказать, что функция $y = |x|$ не является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$.

7.2.30. Вычислить приближенно:

1) $\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$ при $x = 1{,}04$;

2) $\sqrt[5]{\dfrac{1{,}98}{2{,}02}}$.

7.2.31. Показать, что если $y = f(u(x))$, то $d^2y \neq y''_u du^2$, т. е. свойство инвариантности для дифференциалов второго порядка не выполняется.

§ 3. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ. ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ. ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Теоремы о среднем

Теорема 7.1 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и принимает на концах отрезка равные значения (т. е. $f(a) = f(b)$). Тогда существует по крайней мере одна точка c на интервале $(a; b)$, для которой $f'(c) = 0$.

Теорема 7.2 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда на интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Теорема 7.3 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a; b)$. Тогда найдется такая точка c на этом интервале, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правила Лопиталя

Первое правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (в этом случае говорят, что в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Второе правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x) \neq 0$ для $\forall x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$ (т. е. в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если отношение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ в свою очередь представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя (при условии выполнения соответствующих ограничений на функции $f'(x)$ и $g'(x)$) можно применять второй раз и т. д.

Формула Тейлора

$\Rrightarrow$ Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные f', f'', ..., $f^{(n)}$. Тогда для любой точки x из этой окрестности имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big) \text{ при } x \to x_0.$$

Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Последнее слагаемое (т. е. остаточный член) в формуле Тейлора иногда записывают в виде $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (в этом случае надо дополнительно предполагать существование $f^{(n+1)}(x)$ в данной окрестности точки x_0). Соответствующая формула тогда называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

В случае $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0$$

и называется *формулой Маклорена.*

Полезно помнить разложения по формуле Маклорена некоторых важнейших элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n).$$

7.3.1. Проверить, справедлива ли теорема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 2x$ на отрезке $[-1; 3]$, найти соответствующее значение c (если оно существует).

◐ Функция непрерывна на отрезке $[-1; 3]$ и дифференцируема на интервале $(-1; 3)$. Кроме того, $f(-1) = f(3) = 3$, поэтому теорема Ролля на данном отрезке для данной функции справедлива. Найдем значение $c \in (-1; 3)$, для которого $f'(c) = 0$, из равенства $(x^2 - 2x)' = 0$, т. е. $2x - 2 = 0$, откуда $x = 1$. Поскольку $1 \in (-1; 3)$, то $c = 1$ — искомое значение. ●

Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

7.3.2. $f(x) = |x| - 2$, $[-2; 2]$.

7.3.3. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, $[0; 4]$.

7.3.4. $f(x) = \cos x$, $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

7.3.5. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $[-1; 1]$.

Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

7.3.6. $f(x) = e^x$, $[0;1]$.

7.3.7. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$.

7.3.8. $f(x) = |x-1|$, $[0;3]$.

Найти точку, в которой касательная к кривой $y = f(x)$ параллельна хорде, соединяющей точки A и B на этой кривой:

7.3.9. $y = x^2 - 4x$, $A(1;-3)$; $B(5;5)$. Сделать поясняющий рисунок.

7.3.10. $y = \ln x$, $A(1;0)$; $B(e;1)$.

7.3.11. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}$.

○ 1) Поскольку $\ln\sin 3x$ и $\ln x$ стремятся к бесконечности при $x \to 0$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 3x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\cos 3x}{\sin 3x} =$$
$$= 3\lim_{x\to 0}\cos 3x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = 3\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}} = 1.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

2) $\lim\limits_{x\to 0}x^3 = \lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x) = 0$, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x} = 6\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 6.$$

В этом примере правило Лопиталя применялось дважды. ●

Найти пределы:

7.3.12. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x-10}{x^3-3x-2}$.

7.3.13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$.

7.3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$.

7.3.15. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$.

7.3.16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$. **7.3.17.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} 2x}$.

7.3.18. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

○ 1) Здесь имеет место неопределенность вида $0\cdot\infty$, которую мы раскроем, предварительно сведя ее к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$; а далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

2) Имеем неопределенность $\infty - \infty$. Сведем ее к неопределенности $\frac{0}{0}$, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Правило Лопиталя в этом примере применялось дважды. ●

Найти пределы:

7.3.19. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-x}$. **7.3.20.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

7.3.21. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$. **7.3.22.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x^3} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$.

7.3.23. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

○ 1) В этом случае имеем неопределенность вида 0^0. Неопределенности этого вида, также как и неопределенности вида 1^∞, ∞^0, можно найти, предварительно вычислив предел от логарифма функции.

Итак, обозначим $y = x^x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\ln(x^x) = \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

(задача 7.3.18). Таким образом,

$$\ln \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \ln y = 0,$$

откуда $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

2) Здесь неопределенность вида 1^∞. Обозначив $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, найдем $\lim\limits_{x\to 0} \ln y$:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos x))'}{x'} = \lim_{x\to 0}(-\operatorname{tg} x) = 0.$$

Отсюда $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \ln y = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1$. ●

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

7.3.24. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}$.

7.3.25. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

7.3.26. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

7.3.27. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$.

7.3.28. Разложить многочлен $P(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ по степеням $x - 1$, используя формулу Тейлора.

○ Так как $P^{(n)}(x) \equiv 0$ при $n \geqslant 5$, то в разложении данного многочлена по формуле Тейлора будут только слагаемые вида $\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)$, где $k \leqslant 4$. Поэтому

$$P(x) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 +$$

$$+ \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{P^{(IV)}(1)}{4!}(x-1)^4.$$

Учитывая, что $P(1) = 2$, $P'(1) = 7$, $P''(1) = 16$, $P'''(1) = 18$, $P^{(IV)}(1) = 24$, получим окончательно

$$P(1) = 2 + 7(x-1) + 8(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4. \quad ●$$

Разложить многочлен $P(x)$ по степеням $x - x_0$, если

7.3.29. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 8$, $x_0 = -1$.

7.3.30. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x + 2$, $x_0 = 2$.

7.3.31. **1)** Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$;

2) Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ до $o(x^3)$.

○ 1) Сначала найдем формулу для n-го члена разложения. Так как

$$f'(1) = -1!,\ f''(1) = 2!,\ f'''(1) = -3!,\ f^{(IV)}(1) = 4!,\ \ldots,\ f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot n!,$$

то $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = (-1)^n \cdot (x-1)^n$. Отсюда

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots \\ \cdots + (-1)^n \cdot (x-1)^n + o((x-1)^n), \quad x \to x_0.$$

2) Необходимо представить данную функцию в виде

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(0) + \frac{\operatorname{arctg}'(0)}{1!}x + \frac{\operatorname{arctg}''(0)}{2!}x^2 + \\ + \frac{\operatorname{arctg}'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \quad \operatorname{arctg}'(0) = \frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = 1,$$

$$\operatorname{arctg}''(0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \operatorname{arctg}'''(0) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0} = -2,$$

получим требуемое разложение:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$ ●

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ в точке x_0:

7.3.32. $f(x) = 2^x$, $x_0 = \log_2 3$.

7.3.33. $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{2}$, $x_0 = 1$.

Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)$ до $o(x^k)$, где

7.3.34. $f(x) = e^{2-x}$, $k = 4$.

7.3.35. $f(x) = \arcsin x$, $k = 3$.

Дополнительные задачи

Проверить, выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

7.3.36. $f(x) = x^2$, $[1; 3]$.

7.3.37. $f(x) = x^3 - 16x$, $[-4; 4]$.

7.3.38. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $\left[-\dfrac{4}{\pi}; \dfrac{4}{\pi}\right]$.

7.3.39. $f(x) = x - [x]$, $[-3; -1]$.

Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

7.3.40. $f(x) = x^3$, $[-3;0]$.

7.3.41. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $[-2;1]$.

7.3.42. $f(x) = \ln x$, $[e;e^2]$.

Найти точку M, в которой касательная к кривой $y = f(x)$ параллельна хорде AB, если:

7.3.43. $y = \sqrt{x}$, $A(1;1)$; $B(4;2)$. Сделать поясняющий чертеж.

7.3.44. $y = -x^2 + x$, $A(0;0)$; $B(2;-2)$.

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

7.3.45. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^{10} - 2x + 1}{x^{20} - 4x + 3}$.

7.3.46. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1} - 1}$.

7.3.47. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$.

7.3.48. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - x}{x^3}$.

7.3.49. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^3} - 1}{\sin^3 x}$.

7.3.50. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(x-2)}$.

7.3.51. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_2 x}{2^x}$.

7.3.52. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - x}{5x^3 + x^2 - 7x + 3}$.

7.3.53. $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$.

7.3.54. $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} t$.

7.3.55. $\lim\limits_{x\to0} x \ln \operatorname{ctg} x$.

7.3.56. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\pi - 2x}\right)$.

7.3.57. $\lim\limits_{\alpha\to0} \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

7.3.58. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)$.

7.3.59. $\lim\limits_{x\to0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

7.3.60. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{2}{\pi} \arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

7.3.61. $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.

7.3.62. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$.

7.3.63. $\lim\limits_{x\to0} (1 - x)^{\ln x}$.

7.3.64. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}$.

Разложить многочлен $P(x)$ по степеням $x - x_0$, если

7.3.65. $P(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$, $x_0 = -2$.

7.3.66. $P(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + \dfrac{7}{8}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ в точке x_0:

7.3.67. $f(x) = xe^x$, $x_0 = -1$.

7.3.68. $f(x) = \ln(2x - 1)$, $x_0 = 1$.

Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)$ до $o(x^k)$, где

7.3.69. $f(x) = \sin^2 x$, $k = 4$.

7.3.70. $f(x) = \operatorname{ch} x$, $k = 5$.

7.3.71. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до $o(x^k)$, $k = 1, 2, 3$ и построить разными цветами в одной системе координат графики $f(x)$ и соответствующих многочленов Тейлора $P_1(x)$, $P_2(x)$ и $P_3(x)$.

Более сложные задачи

7.3.72. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = f(b)$. Следует ли из того, что $f(x)$ дифференцируема не во всех точках интервала $(a; b)$ (т. е. условия теоремы Ролля не выполнены), что не существует такой точки $c \in (a; b)$, что $f'(c) = 0$?

7.3.73. Используя теорему Лагранжа, доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет положительную (соответственно отрицательную) производную на интервале $(a; b)$, то она возрастает (соответственно убывает) на этом отрезке.

Используя теорему Лагранжа, доказать неравенства:

7.3.74. $e^x > 1 + x$ при $x \in \mathbb{R}$.

7.3.75. $n(a - b)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b - a)b^{n-1}$ при $0 < a < b$, $n = 2, 3, \ldots$

7.3.76. Пусть x_1 и x_2 — корни многочлена $P(x)$. Доказать, что у многочлена $P'(x)$ найдется корень, лежащий между x_1 и x_2.

7.3.77. Доказать, что если $f'(x) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, то $f(x) = \text{const}$.

7.3.78. Доказать, что производная функции $f(x) = (x^2 - 1) \cdot x \cdot (x^2 - 4)$ имеет четыре действительных корня, и найти интервалы, в которых они находятся.

Доказать тождества:

7.3.79. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [0; 1]$.

7.3.80. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$.

7.3.81. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$.

7.3.82. Показать, что предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \cos x}{x + \cos x}$ не может быть вычислен по правилу Лопиталя. Найти этот предел другим способом.

Используя формулу Маклорена, доказать неравенства:

7.3.83. $\ln(1 + x) < x$ при $x > 0$.

7.3.84. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

7.3.85. С точностью до 0,0001 вычислить $\sin 1^\circ$, используя формулу Маклорена.

7.3.86. С точностью до 0,001 вычислить $\ln 1{,}3$, используя формулу Маклорена.

Используя формулу Маклорена, вычислить пределы:

7.3.87. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

7.3.88. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$.

7.3.89. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

7.3.90. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \cdot \sin x}$.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Условия монотонности функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$[1] и для любого x из интервала $(a;b)$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) то $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на этом интервале.

Условие же $\forall\, x \in (a;b)$: $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) равносильно тому, что функция $f(x)$ не убывает (соответственно, не возрастает) на интервале $(a;b)$, т. е. $\forall\, x_1, x_2 \in (a;b)$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Экстремумы функции

⇛ Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*локального минимума*), если существует такая окрестность $U(x_0)$ этой окрестности, что

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall\, x \in U(x_0),\ x \neq x_0$$

(соответственно, $f(x) \geqslant f(x_0)$, $\forall\, x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$).

⇛ Точки локального максимума и минимума называются *точками локального экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами* функции.

Теорема 7.4 (Ферма — необходимое условие экстремума). Если x_0 — точка локального экстремума для функции $f(x)$, то в этой точке производная функции либо равна нулю ($f'(x_0) = 0$), либо не существует.

[1] В том числе возможны случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$.

⇛ Точки области определения непрерывной функции $f(x)$, в которых ее производная не существует или равна нулю, называются *критическими точками* функции.

В силу теоремы Ферма экстремумы функции находятся среди ее критических точек.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка локального экстремума (если с «+» на «−» — локальный максимум, если же с «−» на «+» — локальный минимум).

Второе достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные первого и второго порядков. Тогда, если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка локального экстремума. В частности, если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума, а если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — критические точки непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, то наибольшее и наименьшее значения этой функции есть соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n)$, $f(b)$.

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

⇛ Функция $f(x)$, определенная на интервале $(a; b)$, называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) на этом интервале, если точки любой дуги графика функции расположены выше (соответственно, ниже) хорды, стягивающей эту дугу (рис. 83,*а* и *б*).

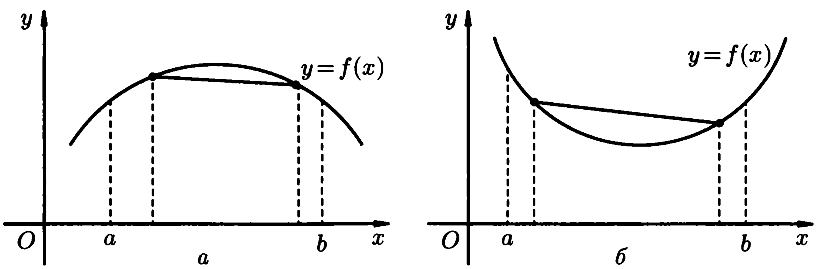


Рис. 83

Иногда выпуклость вверх (соответственно, выпуклость вниз) называют просто *выпуклостью* (соответственно, *вогнутостью*).

График выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале $(a; b)$ функции также называют выпуклым вверх (соответственно, выпуклым вниз).

Можно дать другое, эквивалентное, определение выпуклости вверх (выпуклости вниз): функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале $(a;b)$, если график этой функции при $x \in (a;b)$ расположен ниже (соответственно, выше) касательной, проведенной в любой его точке (рис. 84,*а* и *б*).

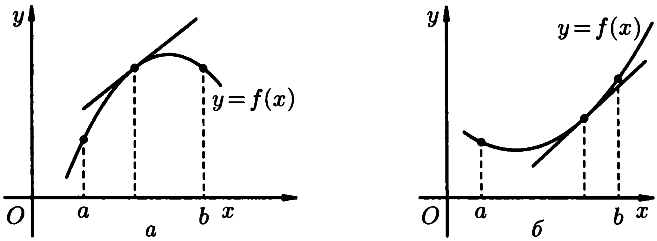


Рис. 84

Достаточное условие выпуклости вверх (вниз). Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале $(a;b)$. Тогда, если $f''(x) \leqslant 0$ (соответственно, $f''(x) \geqslant 0$) на этом интервале, то функция $f(x)$ выпукла вверх (соответственно, выпукла вниз) на нем.

$\Rrightarrow$ Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если при переходе через точку x_0 функция меняет направление выпуклости, то эта точка называется *точкой перегиба функции* $f(x)$. Точка $(x_0, f(x_0))$ при этом называется *точкой перегиба графика функции* $f(x)$ (рис. 85,*а* и *б*).

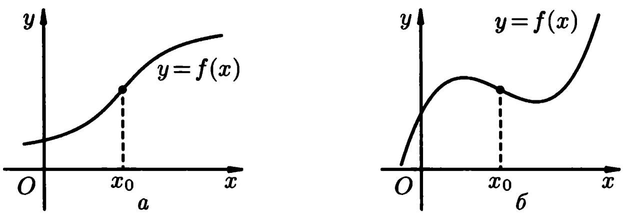


Рис. 85

Необходимое условие точки перегиба. Если x_0 — точка перегиба функции $f(x)$, то в этой точке вторая производная функция либо равна нулю ($f''(x_0) = 0$), либо не существует.

$\Rrightarrow$ Точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими точками 2-го рода.*

Точки перегиба следует искать среди критических точек 2-го рода.

Первое достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет вторую производную в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 — точка перегиба.

Второе достаточное условие точки перегиба. Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до третьего порядка включительно. Тогда если $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка перегиба этой функции.

Асимптоты

Прямая линия m называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние d от точки M, лежащей на этом графике, до прямой m стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат в бесконечность (рис. 86 а), б), в))[2].

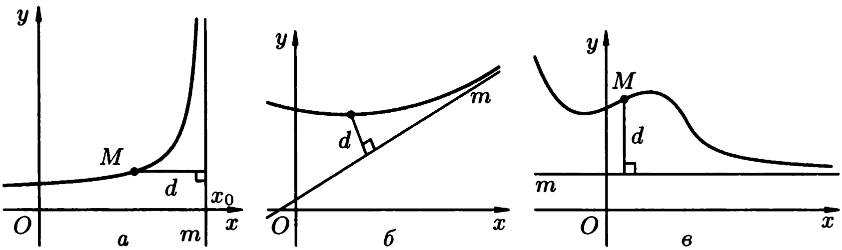


Рис. 86

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

⇛ Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ равен бесконечности (рис. 86 а)).

⇛ Прямая $y = kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - (kx + b)\big) = 0$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) - (kx + b)\big) = 0$) (рис. 86 б)).

Прямая $y = kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = b$$

[2]Приведенное здесь наглядное описание асимптоты не является, вообще говоря, строгим математическим определением.

(соответственно,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b).$$

Частным случаем наклонной асимптоты (при $k=0$) является *горизонтальная асимптота* (рис. 86 в)).

Прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$$

(соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$).

Построение графиков функций

При построении графика данной функции целесообразно пользоваться следующей схемой:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность;

3) найти участки непрерывности функции, а так же точки разрыва с указанием вида разрыва;

4) найти точки пересечения графика с осями координат;

5) найти интервалы знакопостоянства функции;

6) найти асимптоты;

7) найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;

8) найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

7.4.1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=$ $=x^3-6x^2+5$.

◐ Функция определена на всей числовой оси, а ее производная равна $f'(x)=3x^2-12x=3(x-2)(x+2)$. Функция $f(x)$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x))>0$, т.е. $(x-2)(x+2)>0$, откуда $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. Аналогично, данная функция убывает в точности когда $f'(x)<0$, т.е. $(x-2)(x+2)<0$, откуда $x\in(-2;2)$.

Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$, а убывает на интервале $(-2;2)$. ●

Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$:

7.4.2. $f(x)=(x-2)^2\cdot(x+2)$.

7.4.3. $f(x)=\ln(x^2-2x+4)$.

7.4.4. Найти экстремумы функции $f(x)=x^3-9x^2+15x$.

◐ Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, причем $f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$. Критические точки $x_1=1$, $x_2=5$. Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума, для чего найдем $f''(1)$ и $f''(5)$:

$$f''(x) = 6x - 18 \Longrightarrow f''(1) = -12, \; f''(5) = 12.$$

Поскольку $f'(1) = 0$, а $f''(1) < 0$, то $x = 1$ — точка локального максимума, причем $f(1) = 7$. Аналогично, так как $f'(5) = 0$, а $f''(5) > 0$, то $x = 5$ — точка локального минимума, а $f(5) = -25$. ●

Найти экстремумы функций

7.4.5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

7.4.6. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

7.4.7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

❍ Функция определена и дважды дифференцируема на всей действительной оси. Находим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{6\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}{(x^2+1)^3}.$$

Отсюда получим: функция выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f'' < 0$, т. е. $x^2 - \frac{1}{3} < 0$, или $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда $x^2 - \frac{1}{3} > 0$, т. е. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

Таким образом, функция выпукла вверх на $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, выпукла вниз на $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и на $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. Откуда ясно, что точки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ являются точками перегиба данной функции. ●

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций

7.4.8. $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$.

7.4.9. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 6x - 9$.

7.4.10. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

❍ Функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 1$, в которой она терпит разрыв второго рода, причем $\lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$. Отсюда следует, что прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота и других вертикальных асимптот нет.

21 – 2361

Проверим, есть ли у графика функции наклонные асимптоты. Находим

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \text{ откуда}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = x$ — наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$. Аналогично получим, что эта прямая является наклонной асимптотой и при $x \to -\infty$.

Поскольку угловой коэффициент k наклонной асимптоты не равен нулю, то график функции не имеет горизонтальных асимптот. ●

Найти асимптоты графика функции $f(x)$:

7.4.11. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-9}$.

7.4.12. $f(x) = x \cdot e^x$.

7.4.13. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

◐ Область определения $D(f)$ функции — вся числовая ось, за исключением точек $x = -2$ и $x = 2$, т. е.

$$D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$$

Функция непериодическая; исследуем ее на четность и нечетность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x).$$

Следовательно, данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому далее исследуем функцию только при $x \geqslant 0$.

Найдем точки пересечения графика с осями координат:

с осью Oy график пересекается при $x = 0$, откуда

$$y = f(0) = 0,$$

т. е. $M(0;0)$ — точка пересечения с осью Oy;

с осью Ox график пересекается, если $f(x) = 0$, т. е. $\dfrac{x^3}{4-x^2} = 0$, откуда $x = 0$. Таким образом, $M(0;0)$ — единственная точка пересечения графика с осями координат.

Находим интервалы знакопостоянства функции:

$$f(x) > 0 \iff \frac{x^3}{4-x^2} > 0 \iff x(4-x^2) > 0,$$

и так как мы рассматриваем только случай $x \geqslant 0$, то получаем $0 < x < 2$.

Аналогично $f(x) < 0$ при $x > 2$.

Далее,

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3}{4 - x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^3}{4 - x^2} = -\infty,$$

т. е. прямая $x = 2$ — вертикальная асимптота. Отсюда, в силу симметрии, следует, что прямая $x = -2$ — также вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4 - x^2} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{4 - x^2} + x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{4 - x^2} = 0,$$

т. е. прямая $y = -x$ — наклонная асимптота при $x \to +\infty$ (то же и при $x \to -\infty$). Горизонтальных асимптот график не имеет.

Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4 - x^2} \right)' = \frac{x^2(12 - x^2)}{(4 - x^2)^2} = \frac{x^2(2\sqrt{3} - x)(2\sqrt{3} + x)}{(4 - x^2)^2}.$$

Отсюда видно, что при $x \geqslant 0$ (см. рис. 87) функция имеет максимум в точке $x = 2\sqrt{3}$ (причем $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} \approx -5{,}2$), возрастает на $(0; 2)$ и $(2; 2\sqrt{3})$ и убывает на $(2\sqrt{3}; +\infty)$.

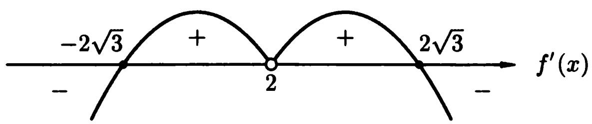


Рис. 87

Чтобы определить интервалы выпуклости и точки перегиба, вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{8x(12 + x^2)}{(4 - x^2)^3}.$$

Отсюда ясно, что при $x \geqslant 0$ функция выпукла вверх (т. е. $f'' < 0$) на $(2; +\infty)$ и выпукла вниз (т. е. $f'' > 0$) на $(0; 2)$, $x = 0$ — точка перегиба.

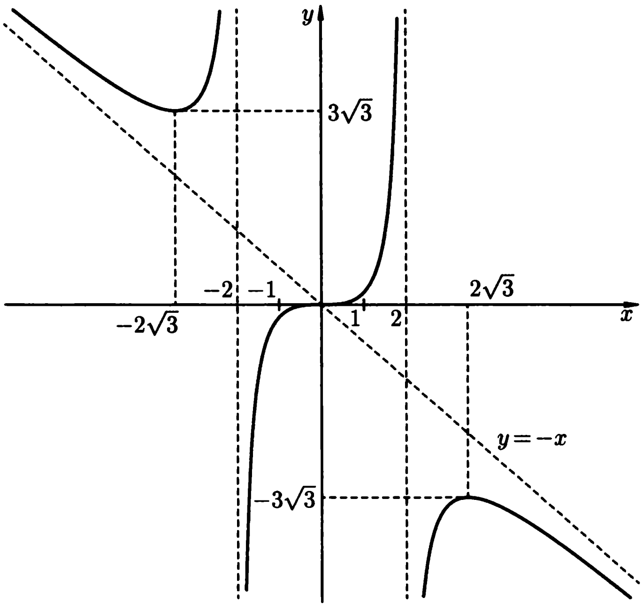


Рис. 88

Учитывая накопленную информацию, строим график функции при $x \geqslant 0$, а затем симметрично отражаем его относительно начала координат (рис. 88). ●

Провести полное исследование и построить графики функций:

7.4.14. $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$.

7.4.15. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Дополнительные задачи

Найти интервалы возрастания и убывания функций:

7.4.16. $f(x) = x + e^{-x}$.

7.4.17. $f(x) = x \ln x$.

7.4.18. $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

7.4.19. $S(t) = t + \cos t$.

Найти экстремумы функций:

7.4.20. $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

7.4.21. $y = e^{x^2 - 4x + 5}$.

7.4.22. $y = x - \operatorname{arctg} x$.

7.4.23. $r = \sqrt{5 - 2\varphi} + \varphi$.

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

7.4.24. $f(x) = e^{-x^2}$.

7.4.25. $y = x^5 - 10x^2 + 7x - 9$.

7.4.26. $y = \cos x$.

7.4.27. $x = t \cdot \operatorname{arctg} t$.

7.4.28. При каком значении α функция $y = x^4 + \alpha \ln x$ имеет единственную точку перегиба при $x = 1$?

Найти асимптоты графиков функций:

7.4.29. $y = \dfrac{3x}{x+2}$.

7.4.30. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

7.4.31. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x - 6}$.

7.4.32. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

Провести полное исследование и построить графики функций:

7.4.33. $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.

7.4.34. $y = \ln(1 - x^2)$.

7.4.35. $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

7.4.36. $y = x^3 - 4x^2 + 3x$.

7.4.37. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

7.4.38. $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

7.4.39. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

7.4.40. $y = \dfrac{3x-2}{5x^2}$.

7.4.41. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

7.4.42. $y = x - \ln x$.

Более сложные задачи

7.4.43. Привести пример дифференцируемой функции, имеющей экстремумы только в точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7.4.44. Доказать, что точка перегиба функции не может быть одновременно ее точкой экстремума.

7.4.45. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени n ($n \geqslant 3$) имеет по крайней мере одну точку перегиба.

7.4.46. Доказать, что всякий четный многочлен с положительными коэффициентами не имеет точек перегиба, но имеет единственную точку минимума.

7.4.47. Показать, что критическая точка 2-го рода не обязательно является точкой перегиба функции.

7.4.48. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема и выпукла вверх (выпукла вниз) на интервале $(a; b)$. Доказать, что функция $f'(x)$ строго убывает (соответственно, возрастает) на этом интервале.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
Вариант 1

1. Найти производную функции
$$y = \operatorname{arctg}^3 \ln \frac{\sqrt{x}}{x+2}.$$
2. Найти производную функции $y = (\sqrt{x})^{\arcsin x}$.
3. Найти производную $y'(x)$ неявной функции
$$\sin(x-2y) + \frac{x^3}{y} = 7x.$$
4. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x = e^{-t} \cdot \cos t$, $y = e^t \cdot \cos t$.
5. Найти предел, используя правило Лопиталя
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$
6. Провести полное исследование функции $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ и построить ее график.

Вариант 2

1. Найти производную функции
$$y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}.$$
2. Найти производную функции $y = x^{\operatorname{arctg} 7x}$.
3. Найти производную $y'(x)$ неявной функции
$$e^{xy} + \frac{y}{x} = \cos 3x.$$
4. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x = \cos t + \sin t$, $y = \sin t - t \cdot \cos t$.
5. Найти предел, используя правило Лопиталя
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$$
6. Провести полное исследование функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ и построить ее график.

Вариант 3

1. Найти производную функции

$$y = 2^{\operatorname{tg}^7\left(\frac{x^2+4}{\sqrt{x}}\right)}$$

2. Найти производную функции $y = (x^2+3)^{\operatorname{tg} x}$.

3. Найти производную $y'(x)$ неявной функции

$$x^3y^2 - \frac{x+1}{y} = \arcsin 4x.$$

4. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x = \frac{t+1}{t}$, $y = \frac{t-1}{t}$.

5. Найти предел, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}.$$

6. Провести полное исследование функции $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ и построить ее график.

Вариант 4

1. Найти производную функции

$$y = \log_3 \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{x-5}\right).$$

2. Найти производную функции $y = (\cos x)^{\frac{2}{x}}$.

3. Найти производную $y'(x)$ неявной функции

$$\frac{y-2}{x^3} - \operatorname{tg}(x+5y) = 7^x.$$

4. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x = e^t \cdot \sin t$, $y = e^t \cdot \cos t$.

5. Найти предел, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x}.$$

6. Провести полное исследование функции $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ и построить ее график.

Глава 8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

❑

§ 1. ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Первообразная функция

⇛ Пусть функция $f(x)$ определена на некотором (конечном или бесконечном) интервале (a, b). Тогда функция $F(x)$ называется *первообра́зной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$[3].

Если $F(x)$ — первообразная функция для функции $f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C — некоторая постоянная, также первообразная для функции $f(x)$. Кроме того, если $F(x)$ и $G(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$, то они отличаются на некоторую постоянную, т. е. существует такое число $C \in R$, что $F(x) - G(x) = C$.

Таким образом, зная только одну первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, мы без труда находим и множество всех первообразных для этой функции, которое совпадает с множеством функций вида $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Если функция $f(x)$ непрерывна на данном интервале, то у нее существует первообразная на этом интервале.

Неопределенный интеграл

⇛ Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$.

Обозначения: $\int f(x)\,dx$ (читается так: «интеграл эф от икс дэ икс»).

Таким образом, если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

(в правой части последнего равенства более правильно было бы написать $\{F(x) + C\}$, поскольку речь идет о множестве всех первообразных, но фигурные скобки, обозначающие множество, обычно не пишут).

Знак $\int$ называется *интегралом*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, а $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*.

⇛ Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется *интегрированием* этой функции.

---

[3] В дальнейшем указание интервала (a, b) будем опускать.

Интегрирование — операция, обратная операции дифференцирования (т. е. операции, заключающейся в нахождении производной от данной функции). У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределенный интеграл.

Основные свойства неопределенного интеграла

Везде далее предлагается, что все рассматриваемые неопределенные интегралы существуют.

1. $\int dF(x) = F(x) + C$.

2. $d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

3. $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$, где $\alpha \neq 0$,

т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.*

4. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$,

т. е. *неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций.*

5. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ где } a \neq 0.$$

Таблица простейших интегралов

Следующие интегралы обычно называются *табличными интегралами*:

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$.

В частности, $\int 1 \cdot dx = x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$.

В частности, $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $(a > 0)$.

В частности, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $(a > 0)$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$.

Иногда к этому списку добавляют еще несколько интегралов:

13. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

14. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

15. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

16. $\operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$.

17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Интегралы, получающиеся из табличных линейным сдвигом аргумента (т. е. интегралы вида $\int \cos 3x\, dx$, $\int \frac{dx}{4x-5}$, $\int e^{7x+1} dx$, ...) будем называть *почти табличными интегралами.*

8.1.1. Используя таблицу, найти следующие интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^3}$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$;

3) $\int 2^x\, dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$.

◐ 1) Воспользуемся табличным интегралом 2 ($\alpha = -3$):

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

2) Аналогично находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

3) Используя табличный интеграл 4 ($a = 2$), находим:

$$\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

4) Подставляя $a = \sqrt{5}$ в табличный интеграл 10, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

5) Воспользуемся табличным интегралом 12 ($\alpha = -7$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - 7}| + C.$$ ●

Найти интегралы, используя таблицу:

8.1.2. $\int x^{10} \, dx.$

8.1.3. $\int \frac{dx}{x^7}.$

8.1.4. $\int \sqrt[4]{x} \, dx.$

8.1.5. $\int \frac{dx}{x^2 + 9}.$

8.1.6. $\int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{2}}.$

8.1.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}.$

8.1.8. Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найти интеграл:
1) $\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7\right) dx$; 2) $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} \, dx.$

❍ 1) Воспользуемся свойствами 3 и 4 неопределенного интеграла:

$$\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7\right) dx = \int 3 \cdot 5^x \, dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \, dx + \int 7 \, dx =$$

$$= 3 \int 5^x \, dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} \, dx + 7 \int dx = \frac{3 \cdot 5^x}{\ln a} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3} + 1} + 7x + C =$$

$$= \frac{3 \cdot 5^x}{\ln a} - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 7x + C.$$

2) Почленно поделим числитель подынтегральной дроби на знаменатель: $\frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} \, dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}} \, dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} \, dx + 5 \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 10x^{\frac{1}{2}} + C. \quad \bullet$$

Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла:

8.1.9. $\int \frac{x^4 + x^2 - 6x}{x^3} dx.$

8.1.10. $\int \left(\frac{5}{x} - \frac{10}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{x^2+7}\right) dx.$

8.1.11. $\int \sqrt{x}(x^2 + 1)\, dx.$

8.1.12. $\int \frac{3 + \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$

8.1.13. $\int \frac{(x^3 + 2)^2}{\sqrt{x}}\, dx.$

8.1.14. $\int \left(4\sin x + 8x^3 - \frac{11}{\cos^2 x}\right) dx.$

8.1.15. Найти «почти табличный» интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}.$$

❍ Поскольку $\sqrt{16 - 9x^2} = \sqrt{16 - (3x)^2}$, то данный интеграл отличается от табличного $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$ заменой x на $3x$. Поэтому в соответствии со свойством 5 интеграла имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C.$$

●

Найти «почти табличные» интегралы:

8.1.16. $\int \cos 2x\, dx.$

8.1.17. $\int (9x + 2)^{17} dx.$

8.1.18. $\int \frac{dx}{8x - 1}.$

8.1.19. $\int 4^{3-5x}\, dx.$

8.1.20. $\int \sqrt{3x + 4} dx.$

8.1.21. $\int \frac{dx}{3x^2 - 25}.$

8.1.22. Найти интегралы:

1) $\int \sin^2 x\, dx;$ 2) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx.$

❍ 1) Воспользуемся формулой понижения степени: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Отсюда

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

2) Преобразуем подынтегральную дробь:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$

Отсюда имеем

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C. \quad \bullet$$

Найти интегралы:

8.1.23. $\int \cos^2 x\,dx.$

8.1.24. $\int \frac{x-2}{x+3}dx.$

8.1.25. $\int \frac{x^2 dx}{x^2-9}.$

8.1.26. $\int \frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx.$

Дополнительные задачи

Найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, удовлетворяющую условию $F(x_0) = y_0$:

8.1.27. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = -2$.

8.1.28. $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = 1$.

Найти интегралы, используя таблицу неопределенных интегралов, и результат проверить дифференцированием:

8.1.29. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}.$

8.1.30. $\int \frac{dx}{x^2+3}.$

8.1.31. $\int \frac{1}{5^x}dx.$

8.1.32. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

8.1.33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$

8.1.34. $\int \frac{dx}{x^2-25}.$

Найти интегралы, используя основные свойства неопределенного интеграла:

8.1.35. $\int \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 dx.$

8.1.36. $\int \frac{dx}{4x^2+1}.$

8.1.37. $\int \left(7^x - \frac{8}{x} + 4\cos x\right) dx.$

8.1.38. $\int \left(\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^4}\right) dx.$

8.1.39. $\int \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx.$

8.1.40. $\int (0{,}7 \cdot x^{-0{,}1} + 0{,}2 \cdot (0{,}5)^x)\,dx.$

8.1.41. $\int (5\operatorname{sh} x - 7\operatorname{ch} x + 1)dx.$

8.1.42. $\int (x^2-1)(\sqrt{x}+4)\,dx.$

8.1.43. $\int \frac{7-\sqrt{x^2+\pi}}{\sqrt{x^2+\pi}}\,dx.$

8.1.44. $\int \left(\frac{\sqrt{x}-5}{x}\right)^3 dx.$

Найти «почти табличные» интегралы:

8.1.45. $\int \sin 7x\,dx.$

8.1.46. $\int \sqrt[5]{2x-8}\,dx.$

8.1.47. $\int (1-4x)^{2001}\,dx.$

8.1.48. $\int \frac{dx}{9x+7}.$

8.1.49. $\int \frac{dx}{(6x+11)^4}.$

8.1.50. $\int \frac{dx}{25x^2+1}.$

8.1.51. $\int 3^{2-11x}\,dx.$

8.1.52. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}.$

Найти интегралы:

8.1.53. $\int \sin^2 3x\,dx.$

8.1.54. $\int \cos^2 8x\,dx.$

8.1.55. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

8.1.56. $\int \frac{4x+1}{x-5}\,dx.$

8.1.57. $\int (3\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)^2\,dx.$

8.1.58. $\int \frac{4\sqrt{1-x^2}+3x^2}{x^2-1}\,dx.$

8.1.59. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

8.1.60. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx.$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

8.1.61. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции и $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$. Верно ли, что $f(x)=g(x)$?

8.1.62. Доказать, что функция

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

не имеет первообразной.

8.1.63. Найти первообразную для функции $y=|x|$.

Найти интегралы:

8.1.64. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2-1}.$

8.1.65. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

8.1.66. $\int \sin 3x\cdot\cos 5x\,dx.$

8.1.67. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

8.1.68. $\int \frac{9-x}{3+\sqrt{x}}\,dx.$

8.1.69. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

8.1.70. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}.$

8.1.71. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)}.$

8.1.72. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$. **8.1.73.** $\int \sin^4 x\,dx$.

8.1.74. $\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}\,dx$.

8.1.75. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны. Верно ли, что

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx,$$

т. е. интеграл от произведения двух функций равен произведению интегралов от них?

§ 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод подстановки (замена переменной)

$\Rrightarrow$ Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx$, при этом функции $\varphi'(x)$ и $f(x)$ непрерывны на заданном интервале. Тогда этот интеграл можно упростить с помощью подстановки $t = \varphi(x)$, используя равенство

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt. \tag{2.1}$$

Эта формула называется формулой *замены переменной* в неопределенном интеграле.

Иногда удобнее делать подстановку не $t = \varphi(x)$, а $x = \psi(t)$, где $\psi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную (т. е. непрерывно дифференцируема). Применяя такую подстановку к интегралу $\int f(x)\,dx$, получим еще одну формулу замены переменной

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt. \tag{2.2}$$

Получающиеся после применения той или иной подстановки интегралы должны быть более удобны для интегрирования, чем исходные.

Не существует общего «рецепта», следуя которому можно всегда понять, какую подстановку надо применить к данному интегралу. Однако следует иметь в виду следующие полезные подсказки:

1) если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, используется подстановка $t = \varphi(x)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\sin\frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t = \frac{1}{x}$, а если e^{x^2} — то $t = x^2$ и т. д.);

2) если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $\varphi(x)$, т. е. выражение $\varphi'(x)\,dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t = \varphi(x)$. Поэтому целесообразно запомнить следующие формулы для наиболее часто встречающихся дифференциалов:

$\cos x\,dx = d(\sin x)$, $\qquad$ $\sin x\,dx = -d(\cos x)$,

$e^x\,dx = d(e^x)$, $\qquad$ $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)$,

$\frac{1}{x}\,dx = d(\ln x)$, $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2d(\sqrt{x})$,

$\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$, $\qquad$ $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$,

$\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = d(\operatorname{tg} x)$, $\qquad$ $\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -d(\operatorname{ctg} x)$ и т. д.

В простых случаях введение новой переменной можно (после приобретения определенного навыка) проводить в уме, мысленно обозначив соответствующую функцию через t или какую-либо иную букву: u, y, $z, \ldots$

Интегрирование по частям (метод стрелок)

$\Rrightarrow$ Пусть производные функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют и непрерывны на заданном интервале. Тогда имеет место равенство

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx. \tag{2.3}$$

Эта формула называется формулой *интегрирования по частям.*

Поскольку $v'(x)\,dx = dv(x)$, $u'(x)\,dx = du(x)$, то формулу (2.3) часто записывают в более компактном виде:

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{2.4}$$

Метод интегрирования по частям целесообразно применять в тех случаях, когда получающийся в правой части формулы (2.3) (или формулы (2.4)) интеграл проще исходного либо подобен ему. Этим методом, например, пользуются, когда под знаком интеграла стоит произведение многочлена на одну из функций $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и т. д. В частности, интегрирование по частям применяют к интегралам вида $\int x^n \cdot e^x\,dx$, $\int x^n \sin x\,dx$, $\int x^n \cos x\,dx$, $\int x^n \ln x\,dx$, $\int x^n \arcsin x\,dx$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ или подобным.

Также с помощью интегрирования по частям находятся интегралы вида $\int \arcsin x\,dx$, $\int \arccos x\,dx$, $\int \operatorname{arctg} x\,dx$, $\int \operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int e^x \cos x\,dx$, $\int e^x \sin x\,dx$ и подобные им.

Более наглядно и просто интегрирование по частям записывается с помощью эквивалентного *метода стрелок*[1]

$$\int f(x) \cdot g(x)\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,dx, \tag{2.5}$$

$$\begin{array}{cc} f(x) & g(x) \\ {\scriptstyle\int}\Big\downarrow & \Big\downarrow{\scriptstyle\prime} \\ F(x) & g'(x) \end{array}$$

[1] Автор С. Н. Федин.

т. е. при интегрировании произведения двух функций под каждой из них рисуется стрелка, при этом на конце одной стрелки $\left(\text{интегральной } \int\!\downarrow\right)$ пишется первообразная соответствующей функции, а на конце другой $\left(\text{дифференциальной } \downarrow\!\prime\right)$ — производная второй функции; тогда в правой части равенства получается произведение функции, стоящей на конце интегральной стрелки, на функцию в начале другой стрелки (эти функции соединены пунктиром в формуле (2.5)) минус интеграл от произведения функций на концах стрелок. Или, более кратко, справа получается: ***конец интегральной стрелки на начало другой минус интеграл от произведения функций на концах стрелок.***

8.2.1. Найти интеграл, используя подходящую подстановку:

1) $\int (7x-1)^{23}dx$;

2) $\int x^2 \cdot \sin(x^3+1)dx$;

3) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

◐ 1) Данный интеграл — почти табличный и поэтому легко вычисляется с помощью свойства 5 интеграла из предыдущего параграфа. Однако такие интегралы можно находить и с помощью замены переменной.

В нашем случае применим подстановку $t = 7x - 1$. Тогда $dt = 7dx$, откуда $dx = \frac{1}{7}dt$. Поэтому

$$\int (7x-1)^{23}dx = \int t^{23} \cdot \frac{1}{7}dt = \frac{1}{7}\int t^{23}dt = \frac{1}{7} \cdot \frac{t^{24}}{24} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим окончательно:

$$\int (7x-1)^{23}dx = \frac{(7x-1)^{24}}{168} + C.$$

2) Подынтегральное выражение содержит сложную функцию $\sin(x^3+1)$, поэтому стоит попробовать подстановку $t = x^3 + 1$. Тогда $dt = d(x^3+1) = 3x^2dx$, откуда $x^2dx = \frac{1}{3}dt$. Таким образом,

$$\int x^2\sin(x^3+1)\,dx = \int \sin(x^3+1)\cdot x^2dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{3}dt =$$
$$= \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(x^3+1) + C.$$

3) Поскольку $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+1)$, а выражение x^2+1 стоит в знаменателе подынтегральной дроби, то целесообразно

сделать замену $t = x^2 + 1$. Тогда

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Мы избавились от знака модуля в последнем выражении, так как $x^2 + 1 > 0$, $\forall x$. ●

Последний из разобранных интегралов является частным случаем интегралов вида $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$ (в числителе подынтегральной дроби здесь стоит производная знаменателя), решаемых с помощью замены $t = f(x)$. Поэтому

$$\boxed{\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.}$$

Найти интегралы, используя подходящую подстановку:

8.2.2. $\int \sqrt{4x-5}dx$.

8.2.3. $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}$.

8.2.4. $\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx$.

8.2.5. $\int e^{x^3} \cdot x^2 dx$.

8.2.6. $\int \frac{\ln^5 x\,dx}{x}$.

8.2.7. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x + 1}$.

8.2.8. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$.

8.2.9. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+1}$.

8.2.10. Найти интеграл с помощью подстановки, предварительно преобразовав подынтегральное выражение:

1) $\int \frac{x - \sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$; 2) $\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

○ 1) Представим исходный интеграл в виде разности двух интегралов:

$$\int \frac{x - \sin\frac{1}{x}}{x^2}dx = \int \left(\frac{x}{x^2} - \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\right)dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx.$$

Первый из двух последних интегралов — табличный, а во втором надо сделать подстановку $t = \frac{1}{x}$. Тогда $dt = -\frac{dx}{x^2}$, откуда $\frac{dx}{x^2} = -dt$. Следовательно,

$$\int \frac{x - \sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \ln|x| - \int \sin t \cdot (-dt) = \ln|x| + \int \sin t\,dt =$$
$$= \ln|x| - \cos t + C = \ln|x| - \cos\frac{1}{x} + C.$$

2) Запишем данный интеграл как разность двух интегралов:

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int\left(\frac{5x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx =$$
$$= 5\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Второй из двух полученных интегралов — табличный, а в первом сделаем подстановку $t = 4 - x^2$. При этом условимся писать все вспомогательные выкладки и обозначения, относящиеся к данной подстановке, в квадратных скобках под соответствующим интегралом. В частности,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\begin{array}{l} t = 4 - x^2 \Rightarrow dt = -2x\,dx \\ \Rightarrow x\,dx = -\frac{1}{2}dt \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{4-x^2} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx = -5\sqrt{4-x^2} - \arcsin\frac{x}{2} + C.$$ ●

Найти интегралы с помощью подстановок, предварительно преобразовав подынтегральные выражения:

8.2.11. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-5}}dx.$

8.2.12. $\int e^{\sin^2 x}\cdot \sin 2x\,dx.$

8.2.13. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

8.2.14. $\int \frac{3x-4}{x^2-4}dx.$

8.2.15. Найти интеграл, используя подходящую подстановку $x = \psi(t)$:

1) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx;$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}.$

○ 1) Сделаем такую замену $x = \psi(t)$, чтобы подкоренное выражение $1 - x^2$ стало полным квадратом. Подходит, например, подстановка $x = \sin t$ (или $x = \cos t$). Тогда

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2} = [x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t\,dt] =$$
$$= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{\sqrt{\cos^2 t}\cdot \cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{\cos^2 t\,dt}{\sin^2 t} =$$
$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt =$$
$$= -\operatorname{ctg} t - t + C.$$

Учитывая, что $t = \arcsin x$, получим окончательно:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = -\operatorname{ctg}(\arcsin x) - \arcsin x + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

2) Сделаем замену $x = t^2$, чтобы корни извлекались нацело:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \left[x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt, \quad t = \sqrt{x}\right] = \int \frac{2t\,dt}{t(1+t)} =$$
$$= 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C. \quad \bullet$$

Найти интегралы, используя подходящую подстановку $x = \psi(t)$:

8.2.16. $\int \sqrt{9-x^2}dx$.

8.2.17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

8.2.18. $\int x\sqrt{2-x}\,dx$.

8.2.19. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+16}$.

8.2.20. Найти интеграл, используя интегрирование по частям:

1) $\int x \cdot e^x\,dx$;

2) $\int \ln x\,dx$;

3) $\int x^2 \cos x\,dx$.

❍ 1) Проинтегрируем по частям, используя метод стрелок:

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

$$\begin{array}{cc} x & e^x \\ \downarrow{\scriptstyle\prime} & \downarrow{\scriptstyle\int} \\ 1 & e^x \end{array}$$

Заметим, что если бы мы поменяли порядок стрелок, то в итоге получился бы более сложный интеграл:

$$\int x \cdot e^x\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \int \frac{x^2}{2}\,e^x\,dx.$$

$$\begin{array}{cc} x & e^x \\ {\scriptstyle\int}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle\prime} \\ \frac{x^2}{2} & \cdot\, e^x \end{array}$$

Умение выбирать нужный порядок стрелок (к счастью, здесь возможны только два варианта) приходит с практикой.

2) Для того, чтобы к этому интегралу можно было применить метод стрелок, необходимо иметь произведение двух

функций под знаком интеграла. Для этого домножим подынтегральную функцию на единицу. Тогда

$$\int \ln x\,dx = \int \begin{array}{c} 1\cdot\ln x\,dx \\ \int\!\downarrow \;\; \downarrow' \\ x\cdot\dfrac{1}{x} \end{array} = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C.$$

3) Воспользуемся методом стрелок:

$$\int \begin{array}{c} x^2\cdot\cos x\,dx \\ '\!\downarrow \;\; \downarrow\!\int \\ 2x\cdot\sin x \end{array} = x^2\cdot\sin x - \int 2x\sin x\,dx.$$

После однократного применения метода стрелок получили более простой интеграл. Тем не менее для его вычисления требуется еще раз применить этот метод:

$$\int \begin{array}{c} 2x\cdot\sin x\,dx \\ '\!\downarrow \;\; \downarrow\!\int \\ 2\cdot(-\cos x) \end{array} = -2x\cdot\cos x - \int 2\cdot(-\cos x)dx =$$

$$= -2x\cdot\cos x + 2\int\cos x\,dx = -2x\cdot\cos x + 2\sin x + C.$$

Отсюда окончательно

$$\int x^2\cdot\cos x\,dx = x^2\cdot\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C. \quad \bullet$$

Найти интегралы, используя интегрирование по частям:

8.2.21. $\int x\sin x\,dx.$

8.2.22. $\int (2x-1)\cdot e^{3x}\,dx.$

8.2.23. $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}.$

8.2.24. $\int x\cdot 2^x\,dx.$

8.2.25. $\int \ln^2 x\,dx.$

8.2.26. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx.$

8.2.27. Найти интеграл $\int e^x\cdot\cos x\,dx.$

○ Используем метод стрелок:

$$\int \begin{array}{c} e^x\cdot\cos x\,dx \\ '\!\downarrow \;\; \downarrow\!\int \\ e^x\cdot\sin x \end{array} = e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\sin x\,dx.$$

К полученному в правой части равенства интегралу (отметим, что он, в сущности, не проще исходного) снова применим метод стрелок:

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)dx =$$

$$e^x \cdot (-\cos x)$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx.$$

Отсюда

$$\int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cdot \cos x\, dx\right) =$$
$$= e^x(\sin x + \cos x) - \int e^x \cdot \cos x\, dx.$$

В итоге снова получили исходный интеграл, и может показаться, что решение зашло в тупик. Однако, перенеся этот интеграл в левую часть равенства, получим[1]

$$2\int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

Теперь окончательно

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C. \qquad \bullet$$

Найти интегралы:

8.2.28. $\int e^x \cdot \sin x\, dx.$ **8.2.29.** $\int \sin \ln x\, dx.$

При вычислении некоторых интегралов приходится комбинировать подстановку с методом интегрирования по частям.

8.2.30. Найти интеграл:

1) $\int \operatorname{arctg} x\, dx;$

2) $\int \sin \sqrt{x}\, dx.$

❍ 1) Сначала воспользуемся методом стрелок:

$$\int 1 \cdot \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2}.$$

$$x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

[1]Появление константы C объясняется тем, что фактически все интегральные формулы, в том числе и формула интегрирования по частям, верны с точностью до константы, которую обычно в этих формулах не пишут. Ну а поскольку в данном случае произвольная константа C неявно присутствует в интеграле из левой части равенства, то она должна появиться и в правой части.

К полученному интегралу применим подстановку $t = 1+x^2$:

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

$$\left[t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt\right]$$

Отсюда находим

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

2) В этом интеграле, наоборот, сначала сделаем подстановку, а потом применим метод стрелок:

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int \sin t \cdot 2t\,dt = -2t\cdot\cos t - \int(-\cos t)\cdot 2dt =$$

$$\begin{bmatrix} x = t^2 \Rightarrow \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} \quad \int \qquad (-\cos t)\cdot 2$$

$$= -2t\cos t + 2\int \cos t\,dt = -2t\cos t + 2\sin t + C =$$

$$= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C. \quad \bullet$$

Найти интегралы:

8.2.31. $\int \arcsin x\,dx.$

8.2.32. $\int \frac{\ln\ln x}{x}\,dx.$

Дополнительные задачи

Найти интегралы, используя подходящую подстановку:

8.2.33. $\int \cos(6x+1)dx.$

8.2.34. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x-2)^4}}.$

8.2.35. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\cos^2 x}.$

8.2.36. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+9}.$

8.2.37. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^6+7}}.$

8.2.38. $\int \frac{dx}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}.$

8.2.39. $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+3x-1)^4}.$

8.2.40. $\int \cos^{11} 2x\cdot\sin 2x\,dx.$

8.2.41. $\int \frac{7^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}.$

8.2.42. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

8.2.43. $\int \frac{\ln 5x\,dx}{x}.$

8.2.44. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

8.2.45. $\int 4x\cdot\sqrt[3]{x^2+8}dx.$

8.2.46. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}.$

8.2.47. $\int \operatorname{tg} 2x\,dx.$

8.2.48. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}.$

8.2.49. $\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx.$

8.2.50. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-4}}.$

8.2.51. $\int \left(8\cos\frac{x}{3}-5\right)^2 \sin\frac{x}{3} dx.$

8.2.52. $\int \frac{(3x^2-2x+7)\,dx}{\sqrt{x^3-x^2+7x-2}}.$

8.2.53. $\int x(2x+1)^{35} dx.$

8.2.54. $\int (x-2)\sqrt{x+4} dx.$

Найти интегралы, предварительно преобразовав подынтегральные выражения:

8.2.55. $\int \frac{3\sqrt{x}-2\cos\frac{1}{x^2}}{x^3} dx.$

8.2.56. $\int \frac{7x+2}{\sqrt{x^2+10}} dx.$

8.2.57. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

8.2.58. $\int \frac{x+8}{x^2+3} dx.$

8.2.59. $\int \frac{x+4\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

8.2.60. $\int \frac{1-6x}{(x+1)(x-1)} dx.$

8.2.61. $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\sqrt[3]{1+\sin 2x}\, dx.$

8.2.62. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 7\sin x + 5\sin 2x}{\cos^2 x}\, dx.$

Найти интегралы, используя подходящую подстановку $x = \psi(t)$:

8.2.63. $\int \sqrt{16-x^2} dx.$

8.2.64. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

8.2.65. $\int x\sqrt{x+3} dx.$

8.2.66. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$

8.2.67. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}.$

8.2.68. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Найти интегралы, используя интегрирование по частям:

8.2.69. $\int x \ln x\, dx.$

8.2.70. $\int (2x+3)\cdot \cos x\, dx.$

8.2.71. $\int x \cdot \operatorname{sh} 5x\, dx.$

8.2.72. $\int \frac{x\cdot \cos x\, dx}{\sin^3 x}.$

8.2.73. $\int x^2 \ln x\, dx.$

8.2.74. $\int (x^2-4x+1)e^{-x}\, dx.$

8.2.75. $\int x^3 e^x\, dx.$

8.2.76. $\int \frac{\arccos x\, dx}{\sqrt{1+x}}.$

8.2.77. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

8.2.78. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2-1)^2}.$

8.2.79. $\int \cos\ln x\, dx.$

8.2.80. $\int e^{3x}\cdot\cos^2 x\, dx.$

Найти интегралы, комбинируя методы интегрирования по частям и подстановки:

8.2.81. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

8.2.82. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$

8.2.83. $\int x^3 \cdot e^{x^2} dx.$

8.2.84. $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx.$

8.2.85. $\int \sin 2x \cdot \ln \sin x\,dx.$

8.2.86. $\int x^2 \arccos 3x\,dx.$

8.2.87. $\int x \cdot \sin\sqrt{x}\,dx.$

8.2.88. $\int \arcsin^2 x\,dx.$

Найти интегралы:

8.2.89. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

8.2.90. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$

8.2.91. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

8.2.92. $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x \cdot \sqrt{3 - \ln x}}.$

8.2.93. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + 8x}{1+x^2}\,dx.$

8.2.94. $\int \frac{3x + 5\sin\left(\frac{1}{e^x}\right)}{e^x}\,dx.$

Более сложные задачи

Пользуясь правилом интегрирования по частям, найти интегралы:

8.2.95. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

8.2.96. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx.$

Найти интегралы:

8.2.97. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}.$

8.2.98. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

8.2.99. $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx.$

8.2.100. $\int \frac{(4x-1)\,dx}{x^2 - 2x + 10}.$

8.2.101. $\int x^2 \ln\frac{x-1}{x+1}\,dx.$

8.2.102. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Используя метод интегрирования по частям, доказать, что

8.2.103. $\int e^{ax} \cdot \cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} \cdot e^{ax} + C.$

8.2.104. $\int e^{ax} \cdot \sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} \cdot e^{ax} + C.$

8.2.105. $\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C.$

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Правильные и неправильные дроби

⇛ *Рациональной дробью* называется выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

⇛ Рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ в ее числителе меньше степени многочлена $Q(x)$ в знаменателе. В противном случае дробь называется *неправильной*.

Всякая неправильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ с помощью деления числителя на знаменатель приводится к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \text{ где}$$

$P_0(x)$ — многочлен (целая часть при делении), а $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ — правильная рациональная дробь (остаток).

Поэтому $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_0(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx.$

Так как интеграл $\displaystyle\int P_0(x)\,dx$ вычисляется элементарно (сводится к сумме табличных), то интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию правильной дроби. Интегрирование правильной рациональной дроби сводится, в свою очередь, к интегрированию простейших дробей.

Разложение правильной дроби на простейшие дроби

⇛ Правильные дроби следующих четырех типов называются *простейшими* (или *элементарными*) *дробями*:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $\quad (k = 2, 3, 4, \dots)$;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $\quad (n = 2, 3, 4, \dots)$.

При этом предполагается, что A, B, p, q — действительные числа, а квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ в дробях III и IV типов не имеет действительных корней (т. е. $p^2 - 4q < 0$).

Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей указанных четырех типов. А именно:

если знаменатель данной правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ разложен на неповторяющиеся линейные и квадратные множители

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot (x - a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - a_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} \cdot \ldots \times \\ \times (x^2 + p_m x + q_m)^{r_m},$$

где $k_1, k_2, \ldots k_n, r_1, r_2, \ldots r_m$ — натуральные числа, то эту дробь можно представить в виде следующей суммы простейших:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{k_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1}} + \\ + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1 - 1}} + \ldots + \frac{B_{r_1} x + C_{r_1}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots . \quad (3.1)$$

Коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, B_1, C_1, \ldots, B_{r_1}, C_{r_1}, \ldots$ в разложении (3.1) находятся с помощью *метода неопределенных коэффициентов* или *метода частных значений* (см. решение задачи 8.3.12.). Отметим, что общее число этих коэффициентов равно степени многочлена $Q(x)$.

Таким образом, интегрируя правильную дробь, мы сначала раскладываем ее на сумму простейших, а затем интегрируем каждое слагаемое в этом разложении.

Вычисляя интегралы от простейших дробей, надо иметь в виду, что:

1) Простейшие дроби первых двух типов — почти табличные:

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \cdot \ln|x - a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x - a)^k} dx = \frac{A}{1 - k} \cdot \frac{1}{(x - a)^{k-1}} + C, \quad k \neq 1;$$

2) При интегрировании простейшей дроби третьего типа $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$, где $p^2 - 4q < 0$, сначала выделяют в числителе производную знаменателя, т. е. $2x + p$:

$$Ax + B = \frac{A}{2} \cdot (2x + p) + B - \frac{Ap}{2}.$$

Отсюда

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{\frac{A}{2} \cdot (2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2 + px + q} dx = \\ = \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p)dx}{x^2 + px + q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$$

В первом из полученных интегралов делаем замену $t = x^2 + px + q$, откуда $dt = (2x + p)dx$ и

$$\int \frac{(2x + p)dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2 + px + q) + C.$$

Во втором интеграле сначала выделяем полный квадрат в знаменателе подытегральной дроби, а потом делаем подходящую линейную подстановку:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \left[y = x + \frac{p}{2} \Rightarrow dy = dx\right] =$$

$$= \int \frac{dy}{y^2+a^2} = \left[a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right] = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Окончательно

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \cdot \ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

3) Если требуется проинтегрировать простейшую дробь четвертого типа $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$ и $p^2 - 4q < 0$, то сначала, как и в пункте 2, в числителе дроби производная от квадратного трехчлена в знаменателе, откуда

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$= \left[t = x^2+px+q\right] = \frac{A}{2} \int \frac{dt}{t^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^n} =$$

$$= \left[y = x + \frac{p}{2}\right] = \frac{A}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dy}{(y^2+a^2)^n},$$

где $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Последний интеграл считается с помощью рекуррентной формулы, позволяющей свести его к более простому интегралу $\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}$:

$$\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{y}{(y^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}.$$

Далее к интегралу $\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}$ снова применяется рекуррентная формула, понижающая степень знаменателя подынтегральной дроби, и так далее, пока не получится табличный интеграл $\int \frac{dy}{y^2+a^2}$.

8.3.1. Найти интеграл $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13}$.

◐ Дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, поэтому данная дробь — простейшая третьего типа.

Сначала найдем производную знаменателя дроби:

$$(x^2+4x+13)'=2x+4.$$

Затем выделим производную знаменателя в числителе дроби:

$$6x-7=3(2x+4)-19.$$

Отсюда, учитывая, что $x^2+4x+13=(x+2)^2+9$, имеем:

$$\int\frac{6x-7}{x^2+4x+13}\,dx=\int\frac{3(2x+4)-19}{x^2+4x+13}\,dx=$$
$$=3\int\frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+13}-19\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}=$$
$$=\begin{bmatrix} t=x^2+4x+13, & y=x+2, \\ dt=(2x+4)\,dx & dy=dx \end{bmatrix}=$$
$$=3\int\frac{dt}{t}-19\int\frac{dy}{y^2+3^2}=3\ln|t|-\frac{19}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{3}+C=$$
$$=3\ln(x^2+4x+13)-\frac{19}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $x^2+4x+13>0$ $(\forall x)$ и, стало быть, $|x^2+4x+13|=x^2+4x+13$. ●

Найти интегралы от простейших дробей первых трех типов:

8.3.2. $\int\frac{4\,dx}{x+3}$.

8.3.3. $\int\frac{dx}{(x-1)^5}$.

8.3.4. $\int\frac{11\,dx}{(x+2)^3}$.

8.3.5. $\int\frac{dx}{x^2+10x+29}$.

8.3.6. $\int\frac{(x+6)\,dx}{x^2-2x+17}$.

8.3.7. $\int\frac{(4x-1)\,dx}{x^2+x+1}$.

8.3.8. Найти интеграл $\int\frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}\,dx$.

○ Поскольку дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, то эта дробь — простейшая четвертого типа. Выделим производную этого трехчлена в числителе дроби:

$$8x+5=4(2x-2)+13.$$

Отсюда

$$\int\frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}\,dx=$$
$$=4\int\frac{(2x-2)dx}{(x^2-2x+17)^2}+13\int\frac{dx}{[(x-1)^2+16]^2}=$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = x^2 - 2x + 17, & y = x - 1, \\ dt = (2x-2)\,dx & dy = dx \end{array}\right] =$$

$$= 4\int \frac{dt}{t^2} + 13\int \frac{dy}{[y^2+16]^2} = -\frac{4}{x^2-2x+17} + 13\int \frac{dy}{(y^2+16)^2}.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся рекуррентной формулой при $n = 2$, $a^2 = 16$. Тогда

$$\int \frac{dy}{(y^2+16)^2} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 16}\cdot\frac{y}{(y^2+16)} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dy}{y^2+4^2} =$$

$$= \frac{y}{32(y^2+16)} + \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{4}\right) + C.$$

Отсюда окончательно

$$\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}dx =$$

$$= \frac{13}{32}\left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{4}\right) - \frac{4}{x^2-2x+17} + C. \quad \bullet$$

Найти интегралы:

8.3.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

8.3.10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+29)^2}$.

8.3.11. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{(x^2+6x+10)^2}dx$.

8.3.12. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}\,dx$;

б) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}\,dx$.

◐ а) Подынтегральная дробь — правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей первого типа:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B, приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)},$$

т. е.

$$7x+4 = A(x+2) + B(x-3). \tag{3.2}$$

Из полученного равенства можно найти коэффициенты A и B двумя способами: с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений. Рассмотрим оба способа.

1. *Метод неопределенных коэффициентов.* Раскроем скобки в правой части равенства (3.2) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x + 4 = (A + B)x + (2A - 3B).$$

Так как многочлены в обоих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной x. Сравнивая эти коэффициенты, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ 2A - 3B = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A = 5$, $B = 2$.

2. *Метод частных значений.* Придадим неизвестной x в равенстве (3.2) частное значение $x = 3$. Тогда получим

$$7 \cdot 3 + 4 = A \cdot (3 + 2), \text{т. е. } 25 = 5A,$$

откуда $A = 5$. Подставляя теперь в уравнение (3.2) значение $x = -2$ (удобнее всего подставлять значения, обращающие одну или несколько скобок в правой части равенства в ноль; эти значения совпадают с действительными корнями знаменателя подынтегральной дроби), получим

$$7 \cdot (-2) + 4 = B \cdot (-2 - 3),$$

откуда $B = 2$.

Таким образом,

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{5}{x - 3} + \frac{2}{x + 2}$$

и, стало быть,

$$\int \frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} dx = 5 \int \frac{dx}{x - 3} + 2 \int \frac{dx}{x + 2} =$$
$$= 5 \ln |x - 3| + 2 \ln |x + 2| + C.$$

б) Подынтегральная дробь — правильная, однако ее знаменатель не до конца разложен на множители. Поэтому сначала преобразуем знаменатель:

$$(x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2.$$

Отсюда

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2}.$$

Разложим эту дробь на простейшие:

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству

$$x^2+5x-2 = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1).$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов A, B и C воспользуемся методом частных значений.

Положим $x = 1$, тогда

$$1^2 + 5\cdot 1 - 2 = A\cdot(1+1)^2,$$

т. е. $4A = 4$, откуда $A = 1$. Аналогично, положим $x = -1$. Тогда

$$(-1)^2 + 5\cdot(-1) - 2 = B\cdot(-1-1),$$

откуда $B = 3$.

Осталось найти коэффициент C. Поскольку «удобных» частных значений уже не осталось, придадим x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким подстановкам. Проще всего положить $x = 0$. Тогда $-2 = A - B - C$, откуда, с учетом найденных значений A и B, получим $-2 = 1 - 3 - C$, т. е. $C = 0$.

Итак,

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x+1)^2},$$

т. е. окончательно

$$\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} + 3\cdot\int\frac{dx}{(x+1)^2} =$$
$$= \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

в) Данная подынтегральная дробь — неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + 0\cdot x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 - 1 & x^3 + x^2 + x \\ \cline{2-2}
-\underline{x^5 + x^4 + x^3 \phantom{{}+0\cdot x^2 - 1}} & x^2 - x \\
- x^4 - x^3 + 0\cdot x^2 - 1 & \\
-\underline{- x^4 - x^3 - x^2} \phantom{{}-1} & \\
x^2 - 1 &
\end{array}$$

т. е.

$$\frac{x^5-1}{x^3+x^2+x} = x^2 - x + \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}.$$

Отсюда

$$\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}\,dx = \int (x^2-x)\,dx + \int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}\,dx = \\ = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}\,dx.$$

Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим ее в виде суммы простейших:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Избавляясь от знаменателей, получим

$$x^2-1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)x.$$

Сначала воспользуемся методом частных значений. Положив $x = 0$, найдем $A = -1$. Далее воспользуемся методом неопределенных коэффициентов (на практике часто приходится комбинировать оба метода). Раскроем скобки в правой части последнего равенства и приведем подобные:

$$x^2-1 = (A+B)x^2 + (A+C)x + A.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при x^2 и x, в левой и правой частях последнего равенства получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ A+C=0, \end{cases}$$

откуда, учитывая, что $A = -1$, найдем оставшиеся коэффициенты: $B = 2$, $C = 1$. Таким образом,

$$\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x} = -\frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+x+1},$$

откуда

$$\int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \\ = \left[t = x^2+x+1 \Rightarrow dt = (2x+1)\,dx\right] = \\ = -\ln|x| + \int \frac{dt}{t} = -\ln|x| + \ln|t| + C = \\ = -\ln|x| + \ln(x^2+x+1) + C = \ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right| + C.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим окончательный ответ:

$$\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right| + C. \qquad \bullet$$

23 – 2361

Найти интегралы:

8.3.13. $\int \frac{2x-3}{(x-5)(x+2)}\,dx.$ **8.3.14.** $\int \frac{x+2}{x^2-6x+5}\,dx.$

8.3.15. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}.$ **8.3.16.** $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$

8.3.17. $\int \frac{dx}{x^3-8}.$ **8.3.18.** $\int \frac{7x^3-10x^2+50x-77}{(x^2+9)(x^2+x-2)}\,dx.$

Дополнительные задачи

Найти интегралы от простейших дробей:

8.3.19. $\int \frac{5\,dx}{x+\sqrt{2}}.$ **8.3.20.** $\int \frac{4\,dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}.$

8.3.21. $\int \frac{7\,dx}{(x+3)^6}.$ **8.3.22.** $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}.$

8.3.23. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}.$ **8.3.24.** $\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$

8.3.25. $\int \frac{6x+1}{x^2-8x+25}\,dx.$ **8.3.26.** $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,dx.$

8.3.27. $\int \frac{x+2}{x^2+3x+5}\,dx.$ **8.3.28.** $\int \frac{2x-1}{5x^2+2x+1}\,dx.$

8.3.29. $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx.$ **8.3.30.** $\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx.$

8.3.31. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}.$ **8.3.32.** $\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x^2-3x+3)^2}.$

Найти интегралы:

8.3.33. $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x+2)}\,dx.$ **8.3.34.** $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx.$

8.3.35. $\int \frac{x\,dx}{x^2-4x-5}.$ **8.3.36.** $\int \frac{2x^2-11}{x^2+x-6}\,dx.$

8.3.37. $\int \frac{-3x^2+x+19}{(x-4)(x-2)(x+1)}\,dx.$ **8.3.38.** $\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2-4)}\,dx.$

8.3.39. $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{(x-1)(x+1)^2}.$ **8.3.40.** $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}\,dx.$

8.3.41. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}.$ **8.3.42.** $\int \frac{dx}{x^3-1}.$

8.3.43. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)}.$ **8.3.44.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$

8.3.45. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x^2-2x+5)(x-1)}\,dx.$ **8.3.46.** $\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{(x^2+1)^2\cdot x}\,dx.$

8.3.47. $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1}\,dx.$

8.3.48. $\int \frac{3x + 5}{x(x^2 + 1)^2}\,dx.$

8.3.49. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}.$

8.3.50. $\int \frac{dt}{t^4 - 1}.$

8.3.51. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x} + 3e^x + 2}.$

8.3.52. $\int \frac{1 + e^x}{(1 - e^{2x})e^x}\,dx.$

8.3.53. $\int \frac{\cos x\,dx}{(\sin x - 1)(\sin x + 2)}.$

8.3.54. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos x}.$

Более сложные задачи

Найти интегралы:

8.3.55. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$

8.3.56. $\int \frac{x^2 - 1}{(x + 2)^{200}}\,dx.$

8.3.57. $\int \frac{(5x^4 + 1)\,dx}{x^2(x^8 + 2x^4 + 1)}.$

8.3.58. $\int \frac{x^{200} + 1}{(x^{200} - 1)x}\,dx.$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Если в рациональной дроби некоторые из слагаемых в числителе или знаменателе заменить корнями от рациональных дробей (в том числе от многочленов), то полученная функция будет называться *иррациональной*[1].

В некоторых случаях интегралы от иррациональных функций удается *рационализировать*, т. е. с помощью подходящей подстановки свести к интегралам от рациональных дробей. Рассмотрим наиболее типичные случаи (везде далее подразумевается, что подынтегральная функция — иррациональная).

1. Если корни в подынтегральном выражении имеют вид:

$$\sqrt[n]{x^m}, \quad \sqrt[q]{x^p}, \quad \sqrt[s]{x^q}$$

и т. д., то оно преобразуется в рациональную дробь с помощью подстановки $x = t^k$, где k — наименьшее общее кратное показателей корней, т. е. чисел n, q, $s, \ldots$

2. Если выражение под знаком интеграла содержит только корни $\sqrt[n]{(ax + b)^m}$, $\sqrt[q]{(ax + b)^p}$, $\sqrt[s]{(ax + b)^r}$ и т. д. (в частности, при $b = 0$, $a = 1$ получаем случай 1), то оно приводится к рациональной дроби с помощью подстановки $ax + b = t^k$, где k — наименьшее общее кратное показателей корней, т. е. чисел n, q, $s, \ldots$

[1]Это определение иррациональной функции не совсем строгое, но оно вполне подходит для наших целей.

3. Если выражение под знаком интеграла содержит только корни $\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}$, $\sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}$, $\sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r}$ и т. д. (в частности, при $c = 0$, $d = 1$ получаем случай 2, а при $c = b = 0$, $d = a = 1$ — случай 1), то оно приводится к рациональной дроби с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k — наименьшее общее кратное показателей корней, т. е. чисел n, q, $s, \ldots$

4. Если подынтегральное выражение представляет собой *дифференциальный бином*, то есть равно $x^m \cdot (a+bx^n)^p\,dx$, где m, n, p — рациональные числа, то данный интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби в следующих трех случаях:

1) p — целое число; тогда интеграл можно рационализировать при помощи подстановки $x = t^k$, где k — общий знаменатель дробей m и n;

2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число; тогда рационализация достигается подстановкой $a + bx^n = t^k$, где k — знаменатель числа p;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число; в этом случае интеграл рационализируется с помощью подстановки $a \cdot x^{-n} + b = t^k$, где k — знаменатель числа p.

8.4.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

◐ В подынтегральном выражении есть корни второй и третьей степеней от x, поэтому делаем подстановку $x = t^6$ (6 — наименьшее общее кратное чисел 2 и 3). Отсюда $dx = 6t^5\,dt$ и, значит,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} =$$

$$= 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}\,dt = 6\left[\int \frac{t^3+1}{t+1}\,dt - \int \frac{dt}{t+1}\right] =$$

$$= 6\left[\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}\,dt - \ln|t+1|\right] =$$

$$= 6\left[\int (t^2-t+1)\,dt - \ln|t+1|\right] =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C. \quad ●$$

Найти интегралы:

8.4.2. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}$.

8.4.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$.

8.4.4. Найти интеграл $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$.

❍ Наименьшее общее кратное показателей корней в подынтегральном выражении равно 6, поэтому делаем подстановку (случай 2) $1+x=t^6$, откуда $x=t^6-1$, $dx=6t^5\,dt$, то есть

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx = \int \frac{(t^6-1)+t^3}{t^2}\cdot 6t^5\,dt = 6\int (t^9+t^6-t^3)\,dt =$$
$$= 6\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = 6t^4\left(\frac{t^6}{10}+\frac{t^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C =$$
$$= 6\sqrt[3]{(1+x)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{10}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C. \quad ●$$

Найти интегралы:

8.4.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$. **8.4.6.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

8.4.7. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

❍ В соответствии с указанной выше рекомендацией (случай 3) сделаем подстановку $\frac{1-x}{1+x}=t^2$. Отсюда $1-x=(1+x)t^2$, т. е. $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, и значит,

$$dx = \frac{(1-t^2)'(1+t^2)-(1+t^2)'(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\,dt = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Таким образом,

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x} = \int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{(-4t)dt}{(1+t^2)^2} =$$
$$= 4\int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}\,dt = 4\int \frac{(t^2-1)+1}{(t^2-1)(t^2+1)}\,dt =$$
$$= 4\left[\int \frac{t^2-1}{(t^2-1)(t^2+1)}\,dt + \int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2+1)}\right] =$$
$$= 4\left[\int \frac{dt}{t^2+1}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right] =$$
$$= 4\int \frac{dt}{t^2+1}+2\int \frac{dt}{t^2-1}-2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= 2\left(\int \frac{dt}{t^2+1}+\int \frac{dt}{t^2-1}\right) = 2\left(\operatorname{arctg} t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right| + C =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C. \quad ●$$

8.4.8. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2 \cdot \sqrt{x-1}}\,dx$.

8.4.9. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1 + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

○ Представим данный интеграл в следующем виде:

$$\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + 3 \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} dx.$$

Отсюда видно, что под знаком интеграла стоит дифференциальный бином (случай 4), при этом $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{3}$. Так как в данном случае $\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2}{3}} = 2$ — целое число, то следует применить подстановку 2), т. е. $1 + 3x^{\frac{2}{3}} = t^3$. Следовательно, $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}(t^3-1)^{\frac{3}{2}}$, и значит, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}(t^3-1)^{\frac{1}{2}} \cdot t^2\,dt$. Таким образом,

$$\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1 + 3\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{t^3-1}}{\sqrt{3}} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{t^3-1} \cdot t^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int (t^3-1)t^3\,dt = \frac{1}{2}\int (t^6 - t^3)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{t^7}{14} - \frac{t^4}{8} + C = \frac{1}{14}\sqrt[3]{(1+3\sqrt[3]{x^2})^7} - \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+3\sqrt[3]{x^2})^4} + C. \quad ●$$

Найти интегралы:

8.4.10. $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^4\,dx$.

8.4.11. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$.

Дополнительные задачи

Найти интегралы:

8.4.12. $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}$.

8.4.13. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

8.4.14. $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 - \sqrt[3]{x})}\,dx$.

8.4.15. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x - \sqrt[3]{x^2}}$.

8.4.16. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 + \sqrt{x}}$.

8.4.17. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 - \sqrt[3]{x}}$.

8.4.18. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}\,dx.$

8.4.19. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}.$

8.4.20. $\int \frac{dx}{(x+1)^{3/2}+(x+1)^{\frac{1}{2}}}.$

8.4.21. $\int \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx.$

8.4.22. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$

8.4.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}.$

8.4.24. $\int \frac{1}{(2-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx.$

8.4.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}.$

8.4.26. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}.$

8.4.27. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$

8.4.28. $\int \frac{dx}{x\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}.$

8.4.29. $\int x^3\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx.$

8.4.30. $\int \frac{dx}{x^{11}\cdot\sqrt{x^4+1}}.$

8.4.31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}.$

8.4.32. $\int x^5\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx.$

8.4.33. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}.$

8.4.34. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3\,dx,$

8.4.35. $\int \sqrt[3]{x^3-4}\cdot x^2\,dx,$

8.4.36. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

8.4.37. $\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{x^2-10x+29}}.$

8.4.38. $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx.$

8.4.39. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$

8.4.40. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx.$

8.4.41. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx.$

8.4.42. $\int x\cdot\sqrt[5]{x-2}\,dx.$

8.4.43. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$

Более сложные задачи

Найти интегралы:

8.4.44. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}.$

8.4.45. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

8.4.46*. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}.$

8.4.47. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx.$

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Интегралы от тригонометрических функций во многих ситуациях удается рационализировать либо существенно упростить. Рассмотрим шесть наиболее типичных случаев.

1. Если под знаком интеграла стоит выражение $R(\sin x, \cos x)$, получающееся из функций $\sin x$ и $\cos x$ и некоторых констант с помощью четырех арифметических действий ($R(\sin x, \cos x)$ называется рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$), то данный интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной дроби при помощи *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Хотя универсальная подстановка позволяет найти любой интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, однако в большинстве случаев она приводит к чересчур громоздким вычислениям, и тогда удобнее пользоваться другими, более эффективными подстановками. Тем не менее некоторые интегралы наиболее быстро считаются именно с помощью этой подстановки. В частности, это относится к интегралам вида $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$, где a или b не равны нулю.

2. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ не меняется при перемене знаков у $\sin x$ и $\cos x$ одновременно, т. е. если

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x), \tag{5.1}$$

то целесообразно применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$. В частности, это относится к интегралам вида $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x + d}$.

3. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$, т. е. если

$$R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \cos x$. В частности, это относится к интегралам вида $\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^{2k} x\, dx$, где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Если же подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$, т. е. если

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \sin x$. В частности, это относится к интегралам вида $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2k+1} x\, dx$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

4. Если подынтегральная функция представляет собой произведение четных степеней синуса и косинуса, то есть данный интеграл имеет вид

$$\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2k} x\, dx, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

то следует упростить ее с помощью формул $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

5. При вычислении интегралов $\int \sin nx \cdot \cos kx\,dx$, $\int \sin nx \cdot \sin kx\,dx$, $\int \cos nx \cdot \cos kx\,dx$, пользуются тригонометрическими формулами преобразования произведения в сумму:

$$\begin{aligned} \sin\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)], \\ \sin\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)], \\ \cos\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

6. Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n\,x\,dx$ и $\int \mathrm{ctg}^n\,x\,dx$ вычисляются с помощью формул $\mathrm{tg}^2\,x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $\mathrm{ctg}^2\,x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, позволяющих понизить степень тангенса или котангенса.

8.5.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5}$.

○ Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой (случай 1):

$$\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} - 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} =$$

$$= \int \frac{2dt}{8t - 3(1-t^2) - 5(1+t^2)} = -\int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} =$$

$$= -\int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 2} + C. \quad \bullet$$

Найти интегралы:

8.5.2. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

8.5.3. $\int \frac{dx}{5\cos x + 3}$.

8.5.4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

○ Поскольку подынтегральная функция удовлетворяет условию (5.1), то применим подстановку $t = \mathrm{tg}\,x$ (случай 2, тогда $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$). Для удобства поделим числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $\cos^2 x$ и воспользуемся тождеством $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2\,x$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{(1+\mathrm{tg}^2\,x) + \mathrm{tg}^2\,x} = [t = \mathrm{tg}\,x] =$$

$$= \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \operatorname{arctg}\frac{t}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x) + C. \quad \bullet$$

Найти интегралы:

8.5.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$. **8.5.6.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^5 x\cdot\cos x}$.

8.5.7. Найти интеграл:
1) $\displaystyle\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx$;
2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}$.

○ 1) Подынтегральная функция меняет знак при замене $\sin x$ на $(-\sin x)$, поэтому применяем (случай 3) подстановку $t = \cos x$. Тогда

$$\int \sin^3 x\cdot\sqrt{\cos x}\,dx = \int \sin^2 x\cdot\sqrt{\cos x}\cdot\sin x\,dx =$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\cdot\sqrt{\cos x}\cdot\sin x\,dx =$$
$$= [t=\cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx] = \int (1-t^2)\sqrt{t}(-dt) =$$
$$= \int (t^{5/2} - t^{1/2})dt = \frac{2}{7}t^{7/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + C =$$
$$= \frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x} - \frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + C.$$

2) Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{\sin x\cdot\sin 2x} = \frac{1}{\sin x\cdot 2\sin x\cdot\cos x} = \frac{1}{2\sin^2 x\cdot\cos x}.$$

Теперь *видно*, что эта функция меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$. Поэтому воспользуемся (случай 3) подстановкой $t = \sin x$, предварительно домножив числитель и знаменатель преобразованной подынтегральной дроби на $\cos x$:

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x\cdot\cos x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)} = [t=\sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx] =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{(1-t^2+t^2)}{t^2(1-t^2)}dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1-t^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin x} + \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\right) + C. \quad \bullet$$

Найти интегралы:

8.5.8. $\int \sin^3 x\,dx.$ **8.5.9.** $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x}.$

8.5.10. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,dx.$

❍ В данном примере имеет место случай 4, поэтому сначала упростим подынтегральное выражение.

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot (\sin x \cos x)^2 dx =$$

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\sin^2 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x\,dx =$$

$$= [t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2\cos 2x\,dx] =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx - \frac{1}{8}\int t^2 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{16}\left(\int dx - \int \cos 4x\,dx\right) -$$

$$- \frac{1}{16}\cdot\frac{t^3}{3} = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C. \quad ●$$

Найти интегралы:

8.5.11. $\int \cos^4 x\,dx.$ **8.5.12.** $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\,dx.$

8.5.13. Найти интеграл $\int \cos 5x \cdot \cos 3x\,dx.$

❍ Здесь удобно воспользоваться формулами (5.2). Учитывая, что $\cos 5x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 8x)$, получим

$$\int \cos 5x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 8x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \cos 2x\,dx + \int \cos 8x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{8}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 8x + C. \quad ●$$

Найти интеграл:

8.5.14. $\int \cos 2x \cdot \sin 4x\,dx.$ **8.5.15.** $\int \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}\,dx.$

8.5.16. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx.$

❍ Имеет место случай 6. Поэтому используем формулу для $\operatorname{tg}^2 x$:

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \left[t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}\right] =$$

$$= \int t^3\,dt - \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x\,dx = \frac{t^4}{4} - \int \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x\,dx = [t = \operatorname{tg} x] =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int t\,dt - \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = [y = \cos x \Rightarrow dy = -\sin x\,dx] =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{t^4}{2} + \int \frac{dy}{y} = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|y| + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C. \quad \bullet$$

Найти интегралы:

8.5.17. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$

8.5.18. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

Дополнительные задачи

Найти интегралы:

8.5.19. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

8.5.20. $\int \frac{dx}{1 - \sin x}.$

8.5.21. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}.$

8.5.22. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}\,dx.$

8.5.23. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$

8.5.24. $\int \frac{1 + \sin x}{(1 + \cos x)\sin x}\,dx.$

8.5.25. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x + 4}.$

8.5.26. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}.$

8.5.27. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}.$

8.5.28. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

8.5.29. $\int \sin^5 x\,dx.$

8.5.30. $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x\,dx.$

8.5.31. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^7 x}.$

8.5.32. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos x}.$

8.5.33. $\int \sin^6 x\,dx.$

8.5.34. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx.$

8.5.35. $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x\,dx.$

8.5.36. $\int \sin x \cdot \sin 3x\,dx.$

8.5.37. $\int \sin \frac{x}{12} \cdot \cos \frac{x}{3}\,dx.$

8.5.38. $\int \cos x \cdot \cos 3x\,dx.$

8.5.39. $\int \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x\,dx.$

8.5.40. $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx.$

8.5.41. $\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2}\,dx.$

8.5.42. $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(5-3x^2)^7}$

2. $\displaystyle\int (x^3+5x)\ln x\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x+3\sin^2 x}$

6. $\displaystyle\int x\arcsin 2x\,dx$

Вариант 2

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[6]{7-x^3}}$

2. $\displaystyle\int \frac{7+5x}{4^x}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{(3x^2-4)\,dx}{(x+7)(x^2-2x+1)}$

4. $\displaystyle\int \frac{(8-x)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$

5. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 2x\,dx$

6. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}\,dx$

Вариант 3

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}3x-4}}{9x^2+1}\,dx$

2. $\displaystyle\int (8x-1)\cdot\sin 2x\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^3+4x}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$

5. $\displaystyle\int \sin^3 2x\,dx$

6. $\displaystyle\int \arccos(3-x)\,dx$

Вариант 4

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \sqrt[7]{\sin 2x+1}\cos 2x\,dx$

2. $\displaystyle\int (x^2-4x)\cdot\log_3 x\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{(x^2-2x)\,dx}{x^3+6x^2+9x}$

4. $\displaystyle\int \frac{(4x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$

6. $\displaystyle\int (x+2)\operatorname{arctg}x\,dx$

Глава 9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

❑

§ 1. ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Основные понятия и свойства

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, так что $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ — выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале $(x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбрана точка c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

⇛ Сумма вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \tag{1.1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

⇛ *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{1.2}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то предел (1.2) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и от выбора точек c_i (*теорема существования* определенного интеграла). Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a; b]$. Более того, если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в нем, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла:

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

2. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt$, т. е. переменную интегрирования можно обозначить любой буквой.

4. $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$

5. $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

6. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx, \quad a < c < b.$

7. Если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$; если $f(x) \leqslant 0$ для всех точек $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant 0.$

8. Если $f(x) \leqslant g(x)$ на отрезке $[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

9. Если M — наибольшее, m — наименьшее значение $f(x)$ на $[a;b]$, то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$

10. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \;\; c \in [a;b]$ (теорема о среднем).

11. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

12. $\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$

Формула Ньютона–Лейбница

Если для непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$ (см. Гл. 8, § 1), то простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ является *формула Ньютона–Лейбница*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1.3}$$

При интегрировании *четных и нечетных функций* в симметричных пределах интегрирования полезно использовать формулу

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases}$$

9.1.1. Используя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить интеграл: $\int\limits_1^4 x^2\,dx$.

○ Подынтегральная функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[1; 4]$ имеет первообразную $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тогда по формуле (1.3) имеем

$$\int\limits_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21. \qquad \bullet$$

9.1.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

○ Подынтегральная функция имеет «почти табличный» вид. Для нахождения первообразной проведем преобразования также, как это делалось ранее (см. задачу 9.1.10).

$$\int\limits_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int\limits_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int\limits_{-4}^{-2} \frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x+2}{3}\Big|_{-4}^{-2} = \arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = \arcsin\frac{2}{3}. \qquad \bullet$$

Используя формулу Ньютона–Лейбница, найти интегралы:

9.1.3. $\int\limits_0^{\pi} (2x + \sin 2x)\,dx$.

9.1.4. $\int\limits_0^{\lg 2} 2^x \cdot 5^x\,dx$.

9.1.5. $\int\limits_2^5 \frac{dx}{2x-3}$.

9.1.6. $\int\limits_1^2 \frac{x+2}{3-x}\,dx$.

9.1.7. $\int\limits_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$.

9.1.8. $\int\limits_0^1 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx$.

9.1.9. $\int\limits_1^5 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

9.1.10. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x-2}\,dx$.

9.1.11. $\int\limits_0^2 x\sqrt{9-\frac{9}{4}x^2}\,dx$.

9.1.12. Найти значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)dx$.

○ Это также «почти табличный» интеграл. Для нахождения первообразной (и использования формулы Ньютона–Лейбница) применим формулу понижения степени (как это сделано в задаче 8.1.22):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4}\left(\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right). \quad \bullet$$

Найти интегралы тригонометрических функций:

9.1.13. $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos^3 x - \frac{3}{4}\cos x)dx.$

9.1.14. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x - \sin^4 x}.$

9.1.15. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x\, dx.$

9.1.16. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cdot \cos 8x\, dx.$

9.1.17. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 - \cos 6x}.$

9.1.18. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\, dx.$

9.1.19. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi.$

9.1.20. Вычислить $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}\, dx.$

❍ Под знаком интеграла стоит рациональная дробь. Для нахождения первообразной используются правила, приведенные в § 3 главы 8. Применим их. Для этого разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Тогда $x^4+1=A(x^2+1)+Bx(x^2+1)+Cx^2(x^2+1)+(Dx+E)x^3$, т.е. $x^4+1=(C+D)x^4+(B+E)x^3+(A+C)x^2+Bx+A$. Отсюда

$$\begin{cases} C+D=1, \\ B+E=0, \\ A+C=0, \\ B=0, \\ A=1. \end{cases}$$

Находим, что $A=1$, $B=0$, $C=-1$, $D=2$, $E=0$. Итак,

$$\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}.$$

Первое и второе слагаемые имеют табличные интегралы, третье — «почти табличные», легко вычисляются после внесения $2x$ под знак дифференциала (см. задачу 9.2.1).

Поэтому

$$\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{2x^2}-\ln x+\ln(x^2+1)\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\ln 2+\ln 1+\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{4}+\frac{3}{8}. \quad \bullet$$

Найти интегралы от рациональных дробей:

9.1.21. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x}$.

9.1.22. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^3+x}$.

9.1.23. $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2+5}{x-2}\,dx$.

9.1.24. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

9.1.25. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx$.

9.1.26. Найти значение интеграла $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, если

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & 0\leqslant x<1; \\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$$

◑ Подынтегральная функция имеет на отрезке $[0; 2]$ одну точку разрыва ($x = 1$) первого рода, ограничена на нем.

Тогда:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 2\,dx =$$

$$= e^x\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 = e - 1 + 4 - 2 = e + 1. \quad \bullet$$

Дополнительные задачи

Вычислить следующие интегралы:

9.1.27. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{3x}\,dx.$

9.1.28. $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2\sin x}\,dx.$

9.1.29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4\,\mathrm{arctg}\,x - x}{1 + x^2}\,dx.$

9.1.30. $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin\ln x}{x}\,dx.$

9.1.31. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{3^x - 2^x}{6^x}\,dx.$

9.1.32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$

9.1.33. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3\,x\,dx.$

9.1.34. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}\,x \cdot \ln\cos x\,dx.$

9.1.35. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x+2}}.$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Вычислить интегралы:

9.1.36*. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}\,d\varphi.$

9.1.37*. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)}\,dx.$

9.1.38*. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^4\,x\,dx.$

9.1.39*. $\displaystyle\int_2^4 |3 - x|\,dx.$

9.1.40*. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$, если $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{при } x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right], \\ \mathrm{tg}\,x, & \text{при } x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$

9.1.41. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$. Ответ неверен. Почему?

9.1.42. Вычислить устно интеграл $\int\limits_{-2}^{2} \frac{3x}{(x^2+1)^3}\,dx$.

9.1.43. Выяснить, не вычисляя, какой из интегралов меньше:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$ или $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$;

б) $\int\limits_{1}^{15} x^5\,dx$ или $\int\limits_{1}^{15} x^6\,dx$;

в) $\int\limits_{0}^{1} 4^{-x}\,dx$ или $\int\limits_{0}^{1} 5^{-x}\,dx$;

г) $\int\limits_{-1}^{0} 4^{-x}\,dx$ или $\int\limits_{-1}^{0} 5^{-x}\,dx$.

9.1.44. Определить, не вычисляя, знак интеграла:

а) $\int\limits_{1}^{2} (x^2 - 4x + 3)\,dx$;

б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x\,dx$.

9.1.45. Известно, что $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \equiv 0$ на $[a; b]$?

Интегрирование подстановкой

При вычислении определенных интегралов часто используется метод подстановки или метод замены переменной интегрирования. Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$. Если функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем

$$a = \varphi(\alpha) \quad \text{и} \quad b = \varphi(\beta), \tag{1.4}$$

то справедлива формула:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{1.5}$$

Формула (1.5) называется *формулой замены переменной интегрирования* в определенном интеграле.

Отметим, что:

1) функцию $x = \varphi(t)$ следует подобрать так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение, получить более простой интеграл;

2) новые пределы интегрирования находить из соотношений (1.4);

3) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется (в отличие от неопределенного интеграла);

4) вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют и подстановку $t = \psi(x)$.

9.1.46. Вычислить интеграл $\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ с помощью замены переменных.

○ Применим подстановку $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$. Находим новые пределы интегрирования: $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 9 \\ \hline t=\sqrt{x} & 1 & 3 \end{array}$.

Применяя формулу (1.5), получим:

$$\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \int\limits_1^3 \frac{2t\,dt}{5+2t} = \int\limits_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}\,dt =$$

$$= \int\limits_1^3 \left(1 - \frac{5}{2t+5}\right) dt = t\Big|_1^3 - 5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3 =$$

$$= 3 - 1 - \frac{5}{2}(\ln 11 - \ln 7) = 2 - \frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}. \quad ●$$

Вычислить интегралы:

9.1.47. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dz}{e^z+1}$.

9.1.48. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

9.1.49. $\int\limits_1^{16} \frac{dx}{x+\sqrt[4]{x}}$.

9.1.50. $\int\limits_{-1}^{7} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

9.1.51. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$ с помощью подстановки.

○ Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда получаем $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Пределы интегрирования $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}$.

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int\limits_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{3+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\limits_0^1 \frac{2}{t^2+5}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}. \quad \bullet$$

9.1.52. При помощи замены переменной вычислить интеграл

$$\int\limits_2^3 x(3-x)^7\,dx.$$

◐ Полагая $t = 3-x$, получим: $x = 3-t$, $dx = -dt$. Пределы интегрирования $\begin{array}{c|c|c} x & 2 & 3 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}$.

$$\int\limits_2^3 x(3-x)^7\,dx = \int\limits_1^0 (3-t)t^7(-dt) = \int\limits_1^0 (t^8-3t^7)\,dt =$$

$$= \left(\frac{t^9}{9} - \frac{3}{8}t^8\right)\Big|_1^0 = -\frac{1}{9}+\frac{3}{8} = \frac{19}{72}. \quad \bullet$$

Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

9.1.53. $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x\,\sqrt[4]{2x-1}\,dx.$

9.1.54. $\displaystyle\int\limits_1^9 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+7}}.$

9.1.55. $\displaystyle\int\limits_{-0,4}^0 (2+5x)^4\,dx.$

9.1.56. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin\left(\frac{5}{4}x - \frac{\pi}{4}\right)dx.$

9.1.57. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx.$

9.1.58. $\displaystyle\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$

9.1.59. Вычислить при помощи подстановки интеграл

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

◐ Пусть $x = \frac{1}{t}$. Тогда $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$. $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$. Получаем

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} = -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \ln\frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}. \quad \bullet$$

9.1.60. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{2\,dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

9.1.61. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2}$ при помощи замены переменной.

○ Применим подстановку $x = 2\operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \frac{2}{\cos^2 t}\,dt$,

x	0	2
t	0	$\frac{\pi}{4}$

:

$$\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2} = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{\cos^2 t(4+4\operatorname{tg}^2 t)^2} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{16\cos^2 t\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{16}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi+2}{64}. \quad \bullet$$

Вычислить интегралы:

9.1.62. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

9.1.63. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \quad (x=\cos t)$.

9.1.64. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$.

9.1.65. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

Дополнительные задачи

Вычислить интегралы:

9.1.66. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\,dx}{1+\cos x}$.

9.1.67. $\int\limits_{0}^{\ln 4} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

9.1.68. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$.

9.1.69. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

9.1.70. $\int\limits_1^2 3x(1-x)^{17}\,dx$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Вычислить интегралы:

9.1.71. $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{4-x}}\,dx$.

9.1.72. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

9.1.73. $\int\limits_{\frac{1}{8}}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}\,dx$.

9.1.74. $\int\limits_0^{\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}}} \frac{6\sin^2 x}{4+3\cos 2x}\,dx$.

9.1.75. $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx$.

9.1.76. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 x\,dx$.

9.1.77. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{6+\sin^2 x}$.

9.1.78. $\int\limits_1^{64} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx$.

9.1.79. $\int\limits_1^4 \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}-\sqrt[3]{3x-4}+1}$.

9.1.80. Решить уравнение $\int\limits_{\sqrt{2}}^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}$.

9.1.81. Вычислить $J = \int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$, сделав подстановку $x=\pi-t$.

9.1.82. а) Можно ли интеграл $\int\limits_0^3 2x\sqrt[3]{4-x^2}\,dx$ вычислить с помощью подстановки $x = 2\cos t$?

б) Можно ли интеграл $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2+1}\,dx$ вычислить с помощью подстановки $x=\frac{1}{\sin t}$?

9.1.83. Вычислить $\int\limits_0^{50} f(z)\,dz : \int\limits_0^1 f(50z)\,dz$.

9.1.84. Вычисляя интеграл $J = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ с помощью подстановки $x = \frac{1}{t}$, получим $J = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -J$. Отсюда: $J + J = 0$, т. е. $J = 0$. Ответ неверен. В чем ошибка?

9.1.85. При вычислении интеграла $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ применим подстановку $x = \sin t$. Новые пределы интегрирования находим из равенств $0 = \sin t$ и $1 = \sin t$. Получаем $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Можно ли в качестве пределов для t взять числа $t_1 = \pi$ и $t_2 = \frac{\pi}{2}$?

Интегрирование по частям

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du\,. \tag{1.6}$$

Формула (1.6) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

9.1.86. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e (x+1)\ln x\,dx$.

◐ Применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = \ln x$, $dv = (x+1)dx$. Тогда $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = \frac{x^2}{2} + x$. По формуле (1.6) имеем

$$\int\limits_1^e (x+1)\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{2} + e - 0 - \left(\frac{x^2}{4} + x\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} + e - \frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{4} + 1 = \frac{e^2+5}{4}\,. \quad ●$$

При помощи формулы интегрирования по частям вычислить интегралы:

9.1.87. $\int\limits_{-1}^{0} x\,e^{-x}\,dx$.

9.1.88. $\int\limits_0^2 \ln(x^2+4)\,dx$.

9.1.89. $\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$.

9.1.90. $\int\limits_{-1}^{0} 9x^2\ln(x+2)\,dx$.

9.1.91. Вычислить $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

◯ Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $v = x$. Имеем

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi - \ln 4}{4}. \quad ●$$

Вычислить интегралы:

9.1.92. $\int\limits_0^1 4x \arcsin x\, dx$.

9.1.93. $\int\limits_0^1 (\arcsin x)^2\, dx$.

9.1.94. $\int\limits_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

9.1.95. Найти значение $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x\, dx$.

◯ Интегрируем по частям: $u = x^2$, $dv = \sin 2x\, dx$, $du = 2x\, dx$, $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

$$J = -\frac{1}{2}x^2 \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos 2x \cdot 2x\, dx = 0 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x\, dx.$$

Снова интегрируем по частям: $u = x$, $dv = \cos 2x\, dx$, $du = dx$, $v = \frac{1}{2}\sin 2x$.

$$J = \frac{1}{2}x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \quad ●$$

Вычислить интегралы:

9.1.96. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos^2 x\, dx$.

9.1.97. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x\, dx$.

9.1.98. $\int\limits_0^1 x^2 3^x\, dx$.

9.1.99. $\int\limits_0^{\pi} x \cos \frac{x}{2}\, dx$.

Дополнительные задачи

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

9.1.100. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

9.1.101. $\int\limits_{0}^{0,2} x\,e^{5x}\,dx$.

9.1.102. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4x\,\mathrm{tg}^2\,x\,dx$.

9.1.103. $\int\limits_{1}^{e^2} \ln^2 x\,dx$.

9.1.104. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx$.

9.1.105. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

9.1.106. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$.

9.1.107. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx$.

9.1.108. $\int\limits_{0}^{9} e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Вычислить интегралы:

9.1.109. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$.

9.1.110. $\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $a>0$.

9.1.111. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\,dx$.

9.1.112. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

9.1.113. Как проще всего вычислить интеграл $\int\limits_{-2,7}^{2,7} \frac{x^2\sin 2{,}7x}{x^2+3}\,dx$?

9.1.114. Доказать, что $\int\limits_{-1}^{1} 2^{\cos x}\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} 2^{\cos x}\,dx$.

9.1.115. Чему равен интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ln\frac{2+x}{2-x}\,dx$?

9.1.116. Показать, что $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{dx}{\arcsin x} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

§ 2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Тогда несобственные интегралы с бесконечными пределами (или I рода) определяются следующим образом:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{2.1}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

где c — произвольное число (обычно $c = 0$).

$\Rrightarrow$ Несобственные интегралы I рода называются *сходящимися*, если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях равенств (2.1). Если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то несобственные интегралы называются *расходящимися*.

Вот некоторые *признаки сходимости и расходимости* несобственных интегралов I рода:

1. Если на промежутке $[a; +\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ («признак сравнения»).

2. Если при $x \in [a; +\infty)$, $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно, («предельный признак сравнения»).

3. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*.

9.2.1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

❍ По определению несобственного интеграла I рода (2.1) имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1}\right) = 1,$$

интеграл сходится и его величина равна 1.

Замечание. Можно показать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. ●

Найти значение несобственных интегралов или установить их расходимость:

9.2.2. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-4x}\,dx.$

9.2.3. $\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx.$

9.2.4. $\int\limits_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}.$

9.2.5. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

9.2.6. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{0} x\cos x\,dx.$

❍ По определению несобственного интеграла I рода

$$\int_{-\infty}^{0} x\cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 x\cos x\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x \end{array}\right] = \lim_{a\to-\infty}\left(x\sin x\Big|_a^0 + \cos x\Big|_a^0\right) =$$

$$= 0 - \lim_{a\to-\infty} a\sin a + 1 - \lim_{a\to-\infty} \cos a,$$

интеграл расходится, т. к. $\lim\limits_{a\to-\infty} a\sin a$, $\lim\limits_{a\to-\infty} \cos a$ не существуют (задача 6.4.125). ●

9.2.7. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos 3x\,dx.$

9.2.8. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

❍ Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, она является четной. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Исходя из определения несобственного интеграла (2.1), имеем

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to+\infty}\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^a = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

интеграл сходится. Следовательно, исходный интеграл также сходится и равен π. ●

9.2.9. Найти значение или установить расходимость несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$.

9.2.10. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

○ Здесь $f(x) = \frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}} > 0$ при $x \in [1; +\infty)$, при этом $\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}} > \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \varphi(x)$. Но интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ расходится так как

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{b\to\infty} 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_1^b = 3\lim_{b\to\infty} b^{\frac{1}{3}} - 3 = \infty.$$

Поэтому, согласно признаку сравнения, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ расходится. ●

9.2.11. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.

9.2.12. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$.

○ Здесь $f(x) = \frac{1}{2+x+3x^5} > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x^5}$, интеграл от которой $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ сходится (см. пример 9.2.1). А так как существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5}{2+x+3x^5}=\frac{1}{3}\neq 0$, то исходный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2+x+3x^5}$ также сходится («предельный признак сравнения»). ●

9.2.13. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$.

Дополнительные задачи

Вычислить следующие несобственные интегралы или установить их расходимость:

9.2.14. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

9.2.15. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

9.2.16. $\int\limits_0^{+\infty} 2x\,\sin x\,dx$.

9.2.17. $\int\limits_{-\infty}^{0} x\,e^x\,dx$.

9.2.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+12}$.

9.2.19. $\int\limits_0^{+\infty} 2\,e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Исследовать на сходимость интегралы:

9.2.20. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^6+2}}$.

9.2.21. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

9.2.22. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-4x}\cos 2x\,dx$.

9.2.23. $\int\limits_1^{+\infty}\ln\frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx$.

9.2.24. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+8}}$.

9.2.25. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{2+3\cos x}{x^4}\,dx$.

9.2.26. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{2+x^3}}\,dx$.

9.2.27. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x+\cos^2 x}$.

9.2.28. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{3x+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt[3]{x^2+2x+x^3}}\,dx$.

9.2.29. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

9.2.30. $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4+2}}$.

9.2.31. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

9.2.32. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt{x+1}}{x^2 + \sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$.

9.2.33. $\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)(x-4)}}$.

9.2.34. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,dx$.

9.2.35. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$.

9.2.36. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

9.2.37. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\operatorname{arctg} x\,dx$.

9.2.38. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$.

9.2.39. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.

9.2.40. Доказать, что интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ сходится.

9.2.41. Доказать, что интеграл «вероятностей» $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится.

Исследовать сходимость следующих интегралов:

9.2.42. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx$.

9.2.43. $\int\limits_{1}^{+\infty} x^x e^{-x^2}\,dx$.

9.2.44. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$.

9.2.45. При каких значениях α интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} x^\alpha\,dx$ сходится?

Интегралы от неограниченных функций (II рода)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a;b)$ и имеет *разрыв II-го рода* (см. Главу 6, § 5) при $x = b$, то несобственный интеграл от неограниченной функции (II рода) определяется следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,. \tag{2.2}$$

$\Rrightarrow$ Если предел, стоящий в правой части равенства (2.2), существует, то несобственный интеграл II рода называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично, если функция $y = \gamma(x)$ терпит *бесконечный разрыв в точке* $x = a$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\,. \tag{2.3}$$

Если функция $y = f(x)$ терпит *разрыв II-го рода во внутренней точке* $c \in [a; b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,. \tag{2.4}$$

В этом случае интеграл называется *сходящимся*, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Приведем некоторые *признаки сходимости и расходимости* для несобственных интегралов второго рода.

1. Если на промежутке $[a; b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x = b$ терпят разрыв II-го рода и удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ («признак сравнения»).

2) Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a; b)$ и в точке $x = b$ терпят разрыв II-го рода. Если существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно («предельный признак сравнения»).

3) Если функция $f(x)$, знакопеременная на отрезке $[a; b]$, имеет разрыв в точке $x = b$, и несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Замечание. В качестве эталона для сравнения функций часто берут функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$. Можно показать, что несобственный интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0) \qquad \begin{matrix}\text{сходится при } \alpha < 1 \quad \text{и} \\ \text{расходится при } \alpha \geqslant 1.\end{matrix} \tag{2.5}$$

Это же относится и к интегралам $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^\alpha}$.

9.2.46. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ или установить его расходимость.

❍ Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 3$ $\left(\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = +\infty\right)$. Согласно формуле (2.2) имеем

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin \frac{x}{3}\Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin \frac{3-\varepsilon}{3} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

интеграл сходится и его величина составляет $\frac{\pi}{2}$. ●

9.2.47. Вычислить значение интеграла $\int\limits_0^1 \ln x\, dx$.

❍ При $x \to 0$ функция $\ln x \to -\infty$. По формуле (2.3) имеем

$$\int\limits_0^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} (x\ln x - x)\Big|_\varepsilon^1 =$$
$$= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0} (\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = -1 - 0 = -1,$$

т. к.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} (-\varepsilon) = 0.$$

Интеграл сходится и равен -1. ●

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

9.2.48. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$.

9.2.49. $\int\limits_0^1 x\ln x\, dx$.

9.2.50. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x\ln x}$.

9.2.51. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

❍ Внутри отрезка интегрирования $[-1; 1]$ функция $\frac{1}{x^2}$, при $x \to 0$, неограниченно возрастает. Согласно формуле (2.4) имеем

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{0+\delta}^{1}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\delta}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}-1+\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}-1=\infty,$$

интеграл расходится. ●

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

9.2.52. $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

9.2.53. $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{(x-4)^2}$.

9.2.54. $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

9.2.55. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{1}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}\,dx$.

○ Функция $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$ терпит бесконечный разрыв в точке $x=1$. Перепишем ее в виде $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$ и сравним ее с функцией $\varphi(x)=\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$. Как известно (см. (2.5)), интеграл $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ сходится $\left(\alpha=\frac{2}{3}<1\right)$. Так как

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}=\frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{4}}\quad(\neq 0,\neq\infty),$$

то, согласно предельному признаку сравнения, исходный интеграл также сходится. ●

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

9.2.56. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

9.2.57. $\int\limits_{0}^{4}\frac{\cos x}{\sqrt{4-x}}\,dx$.

9.2.58. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$.

○ Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ разрывна в точке $x = 0$. Сравним ее с функцией $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Так как $\frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Но несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится (см. (2.5)). Следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ по признаку сравнения также сходится. ●

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

9.2.59. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

9.2.60. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

Дополнительные задачи

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

9.2.61. $\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$.

9.2.62. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\, dx$.

9.2.63. $\int\limits_{-1}^{2,5} \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

9.2.64. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$.

9.2.65. $\int\limits_{-\frac{1}{\ln 2}}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^3}$.

9.2.66. $\int\limits_0^{\frac{1}{\ln 2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^3}$.

9.2.67. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

9.2.68. $\int\limits_1^2 \frac{2\,dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Исследовать несобственные интегралы на сходимость:

9.2.69. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$.

9.2.70. $\int\limits_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

9.2.71. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$.

9.2.72. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$.

9.2.73. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\ln x}$.

9.2.74. $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x}}$.

9.2.75. $\int\limits_0^1 \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

9.2.76. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$.

9.2.77. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

9.2.78. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3 - 2x^2}$.

9.2.79. $\int\limits_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \sin\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3}$.

9.2.80. $J_n = \int\limits_0^1 (\ln x)^n\, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

9.2.81. $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx$.

9.2.82. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{6}{5}} \frac{\sin x}{\sqrt{|1 - x^2|}}\, dx$.

9.2.83. Доказать, что интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$, где $a < b$, расходится.

9.2.84. При каких значениях α интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{\sin^\alpha x}$ сходится?

9.2.85. Доказать, что интеграл Эйлера $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\, dx$, где $\alpha > 0$, сходится.

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление площадей плоских фигур

Все подынтегральные функции, встречающиеся в этом параграфе, предполагаются непрерывными.

Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла. Площадь *криволинейной трапеции*, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$), слева и справа соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу — отрезком $[a; b]$ оси Ox (см. рис. 89), вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\, dx. \tag{3.1}$$

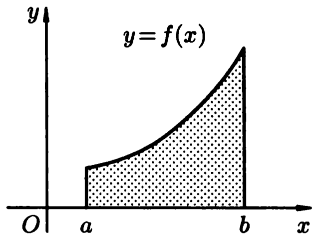


Рис. 89

Если $f(x) \leqslant 0$ при $x \in [a;b]$, то

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Формулы (3.1) и (3.2) можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx\,. \tag{3.3}$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \tag{3.4}$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и отрезком $[c;d]$ оси Oy. Тогда площадь этой трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \varphi(y)\,dy\,. \tag{3.5}$$

Если криволинейная трапеция ограничена сверху *кривой, заданной параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $y(t) \geqslant 0$, $t \in [t_1;t_2]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a;b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt\,, \tag{3.6}$$

где t_1 и t_2 определяются из равенств $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

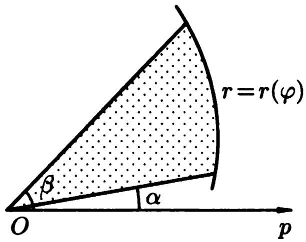


Рис. 90

Площадь *криволинейного сектора*, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, вычисляется по формуле (см. рис. 90):

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{3.7}$$

Отметим, что площадь всякой плоской фигуры, отнесенной к прямоугольной (полярной) системе координат может быть составлена из площадей криволинейных трапеций (секторов).

9.3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x$, прямыми $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

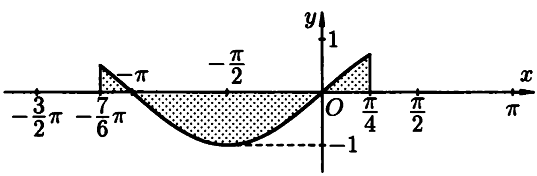


Рис. 91

❍ Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 91. Площадь фигуры находим по формуле (3.3):

$$S = \int\limits_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{4}} |\sin x|\,dx = \int\limits_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi} \sin x\,dx - \int\limits_{-\pi}^{0} \sin x\,dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx =$$

$$= -\cos x\Big|_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi} + \cos x\Big|_{-\pi}^{0} - \cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{2}(8 - \sqrt{3} - \sqrt{2}).$$ ●

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

9.3.2. $y = -x^3$, $y = -9x$.

9.3.3. $y = \arccos x$, $x = -1$, $x = 0$, $y = 0$.

9.3.4. $y = \operatorname{tg}^2 x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

9.3.5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 5x - 6$.

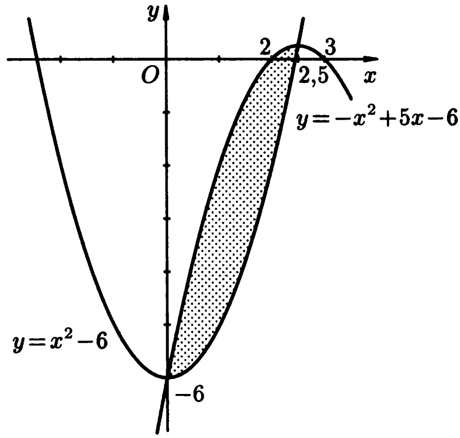


Рис. 92

❍ Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 6, \\ y = -x^2 + 5x - 6. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}5$. Искомую площадь (см. рис. 92) находим по формуле (3.4):

$$S = \int_0^{2,5} (-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6)\,dx = \int_0^{2,5} (-2x^2 + 5x)\,dx = 5\frac{5}{24}. \quad ●$$

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

9.3.6. $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $x = 0$, $x = \frac{7}{4}\pi$.

9.3.7. $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$.

9.3.8. $y^2 = 2x + 1$, $y = x - 1$.

9.3.9. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$, $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.

9.3.10. $y = x^2$, $y = 2x$, $y = x$.

9.3.11. $y = x^3 - 3x$, $y = x$.

9.3.12. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

9.3.13. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

◐ Для вычисления искомой площади воспользуемся формулой (3.5):

$$S = \int_0^8 \sqrt[3]{y^2}\,dy = \int_0^8 y^{\frac{2}{3}}\,dy = \frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8 = \frac{96}{5}.$$

Заметим, что искомую площадь можно найти, используя формулу (3.1) как разность площадей прямоугольника $OABC$ и трапеции OBC (см. рис. 93):

$$S = 4 \cdot 8 - \int_0^4 \sqrt{x^3}\,dx = 32 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{5} = \frac{96}{5}. \qquad \bullet$$

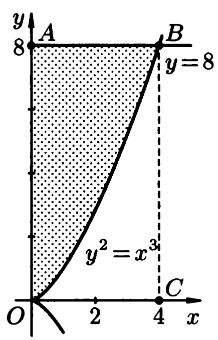


Рис. 93

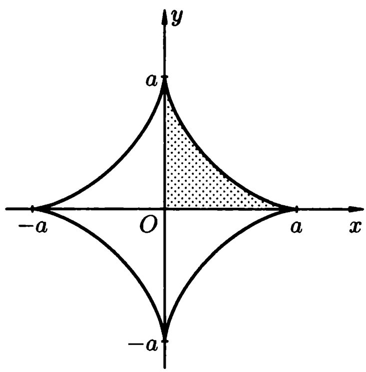


Рис. 94

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

9.3.14. $y = \arcsin x$, $\pi x = 2y$.

9.3.15. $xy = 8$, $y = 8x^3$, $y = 27$.

9.3.16. $y^2 = (4 - x)^3$, $x = 0$.

9.3.17. $(y - x)^2 = x^3$, $x = 1$.

9.3.18. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

◐ Воспользуемся симметрией фигуры (она изображена на рисунке 94) и найдем сначала четвертую часть искомой площади.

Воспользуемся формулой (3.6). Находим, что $t_1 = \frac{\pi}{2}$ (из равенства $0 = a\cos^3 t$) и $t_2 = 0$ (из равенства $a = a\cos^3 t$). Имеем

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t(a\cos^3 t)'\,dt = -a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 t\cdot 3\cos^2 t\sin t\,dt =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t\cos t)^2\sin^2 t\,dt =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\sin^2 t\,dt = \frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 4t)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 2t - \cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\cos 2t - \cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\left(t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{12}\sin 6t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16}a^2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{32}.$$

Значит, $S = \frac{3a^2\pi}{8}$. ●

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

9.3.19. $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t. \end{cases}$

9.3.20. Эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

9.3.21. Петлей $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

9.3.22. $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}$ $x=1$ $(x\geqslant 1)$.

9.3.23. Астроидой $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$.

9.3.24. Первой аркой циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ и прямой $y = \frac{1}{2}$ $(0 < x < 2\pi)$.

9.3.25. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a\sin 3\varphi$.

◔ На рисунке 95 изображен график функции. Найдем сначала шестую часть искомой площади (выделена на рисунке).

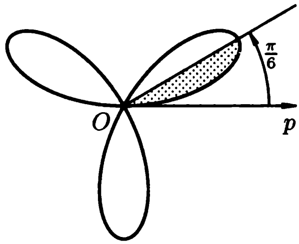


Рис. 95

Используем формулу (3.7):

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (a\sin 3\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi a^2}{24}.$$

Значит, $S = \frac{\pi a^2}{4}$. ●

9.3.26. Найти площадь, ограниченную кардиоидой $r = a(1-\cos\varphi)$ и окружностью $r = a$.

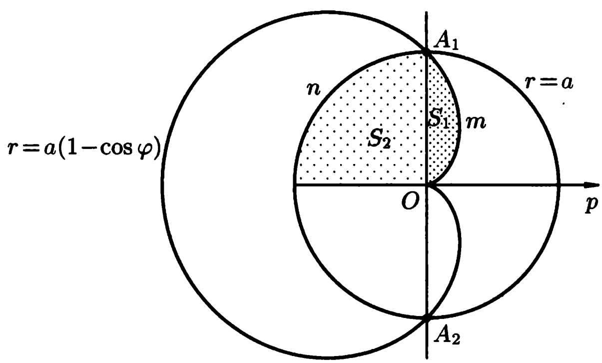


Рис. 96

◐ На рисунке 96 показана фигура, площадь которой требуется найти. Найдем точки пересечения кардиоиды с окружностью. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} r = a(1-\cos\varphi), \\ r = a, \end{cases}$$

находим, что таких точек — две: $A_1\left(a; \frac{\pi}{2}\right)$ и $A_2\left(a; -\frac{\pi}{2}\right)$. Половина искомой площади равна сумме площадей криволинейных секторов OmA_1O и OA_1nO. В первом секторе полярный угол изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а во втором — от $\frac{\pi}{2}$ до π. Итак,

$$\frac{1}{2}S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a(1-\cos\varphi))^2\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi + \frac{1}{2}a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}a^2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right) + \frac{1}{2}a^2\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\right),$$

следовательно, $S = 2a^2\left(\frac{5}{8}\pi - 1\right)$. ●

Найти площадь фигур, ограниченных линиями:

9.3.27. $r = 5\cos\varphi$.

9.3.28. $r = \sqrt{3}\sin\varphi$.

9.3.29. $r = 3(1+\sin\varphi)$.

9.3.30. $r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$.

9.3.31. Одним лепестком «розы» $r = a\cos 2\varphi$, $a > 0$.

9.3.32. Кардиоидой $r = 2a(1-\cos\varphi)$, $a > 0$.

9.3.33. Улиткой Паскаля $r = 2 + \cos\varphi$.

Дополнительные задачи

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

9.3.34. $y = 2 - |x|$, $y = x^2$.

9.3.35. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = 0$, $y = 1$.

9.3.36. $y = \sin|x|$, $y = |x| - \pi$.

9.3.37. $x^2 + y^2 = 16$, $y = 2$, $y = 2\sqrt{2}$.

9.3.38. $y = x^2 + 8x - 12$, $y = 18x - x^2$.

9.3.39. Одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и осью Ox.

9.3.40. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $y = 3$ $(y \geqslant 3)$.

9.3.41. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

9.3.42. $\begin{cases} x = 3{,}5\cos t, \\ y = 3{,}5\sin t. \end{cases}$

9.3.43. $r = 1$, $r = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

9.3.44. $r = 2\sin\varphi$, $r = 2\sqrt{3}\cos\varphi$.

9.3.45. Лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

9.3.46. $y = \cos^2 x$, $y = \sin^2 x$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

9.3.47. $y = \ln(x+2)$, $y = 2\ln x$, $y = 0$.

9.3.48. Параболой $y = x^2 - 4x + 5$, касательной к ней в точке $A(3;2)$, прямой $x = 1$.

9.3.49. Параболой $y^2 = x$, касательными к ней в точках с абциссой 16.

9.3.50. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = 0$.

9.3.51. $y = \frac{8}{x^2+4}$, $y = \frac{x^2}{4}$.

9.3.52. Цепной линией $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, прямыми $x = 0$, $x = a$.

9.3.53. $y = \sin x$, $y = \frac{2x}{\pi}$.

9.3.54. $x^2 + y^2 = 13$, $xy = 6$.

9.3.55. $y = \cos x$, $y = x + 1$, $y = 0$.

9.3.56. Петлей $y^2 = x(x-1)^2$.

9.3.57. Замкнутой линией $x^2 + y^4 = y^2$.

9.3.58. $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - 4y^2 = 4$.

9.3.59. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

9.3.60. $y = 36x(x-1)^2$, $y = 0$.

9.3.61. Петлей $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$

9.3.62. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ прямой $y = 4$ $(y \geqslant 4)$, $(0 < x < 8\pi)$.

9.3.63. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3}$ $(y \geqslant 2\sqrt{3})$.

9.3.64. $r = 2\sin 5\varphi$.

9.3.65. $r = \dfrac{a}{\varphi}$, $\varphi \in \left[\dfrac{\pi}{4}; 2\pi\right]$.

9.3.66. $r = \cos^3 \varphi$.

9.3.67. $r = 4(1 - \cos\varphi)$, $r = 4\cos\varphi$ (общая область).

9.3.68. $r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$, $a > 0$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

9.3.69. $y = \sin x$, $y = \dfrac{3}{\pi}x$, $y = 0$ $(x \geqslant 0)$.

9.3.70. $y = 1 + \cos\pi x$, $y = 2x^2 - 2$ (абсциссы точек пересечения — целые числа).

9.3.71. Петлей декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (перейти к полярным координатам).

9.3.72. $3x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + 3y^2 = 3$ (общая часть).

9.3.73. $y = x^2 e^{-x^2}$, ее асимптотой.

9.3.74. Двумя первыми арками циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $(t \geqslant 0)$, прямой $y = 2$.

9.3.75. $\begin{cases} x = a\sin 2t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

9.3.76. $x = a\cos t$, $y = b\sin t\cos^2 t$ $(a > 0,\ b > 0)$.

9.3.77. $r = a(1 + \sin^2\varphi)$, $r = a$.

9.3.78. $r = 2\cos 3\varphi$, $r = 1$ $(r \geqslant 1)$.

9.3.79. Используя геометрический смысл интеграла, вычислить:

а) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$;

б) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\,dx$;

в) $\displaystyle\int_0^6 |x - 2|\,dx$.

9.3.80. По данным, указанным на рисунке 97, найти площадь заштрихованной фигуры.

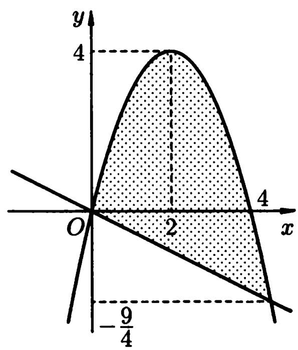


Рис. 97

9.3.81. При каком значении a прямая $x = a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y = |x|$, $x = 1$, $x = \sqrt{3}$ пополам?

9.3.82. Записать площадь заштрихованных фигур (см. рис. 98) как сумму или разность площадей криволинейных трапеций.

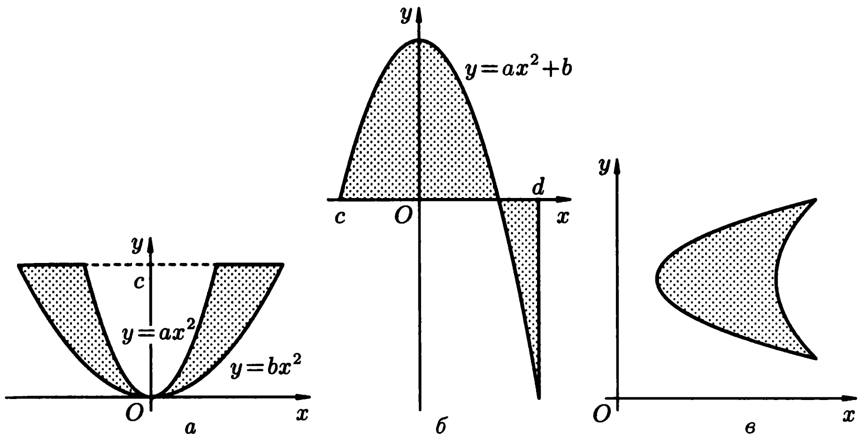


Рис. 98

9.3.83. При каких значениях A, B и C площадь $S = \int\limits_{-1}^{1} (Ax^2+Bx+C)\,dx$ равна нулю? Сколько таких значений A, B, C?

9.3.84. Сравнить, не вычисляя, какая из площадей $\int\limits_0^1 (\sqrt[4]{x} - \sqrt{x})\,dx$ или $\int\limits_0^1 (x^2 - x^4)\,dx$ больше.

Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. На кривой выбраны точки A и B с координатами: $A(a;c)$, $B(b;d)$. Длина l дуги кривой от точки A до точки B вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx; \qquad (3.8)$$

$$l = \int\limits_c^d \sqrt{1 + (x')^2}\,dy\,. \qquad (3.9)$$

Если кривая задана *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

причем $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt. \tag{3.10}$$

Если кривая задана уравнением в *полярных координатах* $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi. \tag{3.11}$$

9.3.85. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\sin x$ от $x_1 = \frac{\pi}{3}$ до $x_2 = \frac{2}{3}\pi$.

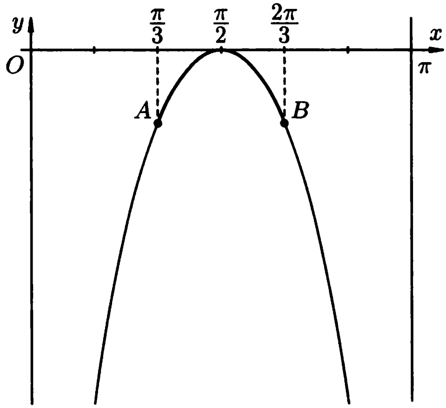


Рис. 99

❍ Изобразим часть графика функции $y = \ln\sin x$ при $x \in (0; \pi)$ (см. рис. 99). Воспользуемся формулой (3.8), предварительно найдя выражение $\sqrt{1 + (y')^2}$:

$$y = \ln\sin x, \quad y' = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sin x},$$

т. к. $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$. Находим длину l дуги AB:

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\ln\sqrt{3}. \quad ●$$

Найти длины дуг кривых:

9.3.86. $y = -x^2 + 2x$ от вершины до точки с абциссой $x = 2$.

9.3.87. $y^2 = \frac{x^3}{6}$ до точки с абциссой $x = 6$.

9.3.88. $y = \ln x$ от $x = \sqrt{8}$ до $x = \sqrt{15}$.

9.3.89. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{2}$, отсеченной осью Ox.

9.3.90. $\frac{3}{2}x = y^{\frac{3}{2}}$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2\sqrt{3};3)$.

9.3.91. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между точками, абсциссы которых равны 0 и a.

9.3.92. Найти длину астроиды: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ (см. рис. 94).

◔ Найдем сначала $l/4$, т. е. длину дуги кривой, лежащей в первой четверти. Воспользуемся формулой (3.10):

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a\cos^3 t)_t'^2 + (a\sin^3 t)_t'^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3a\cos^2 t(-\sin t))^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\, dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(\sin t) = 3a\frac{(\sin t)^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a.$$

Следовательно, $l = 6a$.

Отметим, что уравнение астроиды в прямоугольных координатах имеет вид $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Для нахождения ее длины можно было бы воспользоваться формулой (3.8). ●

Найти длины дуг кривых:

9.3.93. $y^2 = 16x$, отсеченной прямой $x = 4$.

9.3.94. $y^2 = 9 - x$, $y = -3$, $y = 0$.

9.3.95. $5y^3 = x^2$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6$.

9.3.96. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ (одной арки).

9.3.97. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$

9.3.98. $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ (петля).

9.3.99. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

9.3.100. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = 1$.

9.3.101. Найти длину кардиоиды: $r = a(1 + \cos\varphi)$ (см. рис. 100).

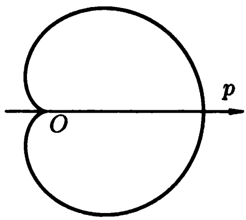


Рис. 100

❍ Воспользуемся формулой (3.11). Сначала найдем половину длины кривой, т. е. $l/2$.

$$\frac{l}{2} = \int_0^\pi \sqrt{(a(1+\cos\varphi))^2 + (a(1+\cos\varphi))'^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = a\int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^\pi 2\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = -4a(0-1) = 4a,$$

значит $l = 8a$. ●

Найти длины дуг кривых:

9.3.102. $r = \sqrt{2}\sin\varphi$.

9.3.103. $r = 3{,}5(1 - \cos\varphi)$.

9.3.104. $r = \frac{1}{\varphi}$ от $\varphi = \frac{3}{4}$ до $\varphi = \frac{4}{3}$.

9.3.105. $r = 5\varphi$, находящейся внутри окружности $r = 10\pi$.

9.3.106. $r = 6(1+\sin\varphi)$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

9.3.107. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Дополнительные задачи

Вычислить длины дуг кривых:

9.3.108. $\begin{cases} x = \frac{1}{6}t^6, \\ y = 2 - \frac{t^4}{4} \end{cases}$ между точками пересечения с осями Ox и Oy.

9.3.109. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = \pi/4$.

9.3.110. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

9.3.111. $y = \ln\frac{e}{\cos x}$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$.

9.3.112. $y = \sqrt{x-1}$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(2;1)$.

9.3.113. $y = \ln(1 - x^2)$ от $x = 0$ до $x = \frac{3}{4}$.

9.3.114. $2y - x^2 + 3 = 0$ между точками пересечения с осью Ox.

9.3.115. $x^2 = (y-1)^3$, отсеченной прямой $y = 2$.

9.3.116. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$ (петля).

9.3.117. $\begin{cases} x = 3\sin t + 4\cos t, \\ y = 4\sin t - 3\cos t. \end{cases}$

9.3.118. $\begin{cases} x = 2\cos^3\frac{t}{4}, \\ y = 2\sin^3\frac{t}{4} \end{cases}$ (астроида).

9.3.119. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

9.3.120. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$.

9.3.121. $r = 2(1 - \cos\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant -\frac{\pi}{2}$.

9.3.122. $r = 5e^{\frac{5}{12}\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

9.3.123. $r = 2\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{12}$.

9.3.124. $r = 3\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{4}$.

9.3.125. $r = 2e^{\varphi}$, находящейся внутри круга радиуса $r = 2$.

Более сложные задачи

9.3.126. Найти длину замкнутой кривой $9y^2 - x(x-3)^2 = 0$.

9.3.127. Найти периметр лунки, образованной окружностями $x^2 + y^2 = 4x$ и $x^2 + y^2 = 2y$.

9.3.128. Вычислить длину замкнутой кривой, состоящей из участков кривых $y^2 = x^3$ и $x^2 + y^2 = 12$.

9.3.129. Вычислить длину кривой $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x} + 3$, $\frac{1}{16} \leqslant x \leqslant 1$.

9.3.130. Вычислить периметр одного из криволинейных треугольников, ограниченных линиями $y = \ln\sin x$, $y = \ln\cos x$, $y = 0$.

9.3.131. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3}$.

9.3.132. На циклоиде $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ найти точку M, которая делит первую ее арку по длине в отношении $1 : 3$.

9.3.133. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}$.

9.3.134. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = \int\limits_1^t \frac{\cos z}{z}\, dz, \\ y = \int\limits_1^t \frac{\sin z}{z}\, dz \end{cases}$$

от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной.

9.3.135. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = \cos^5 t, \\ y = \sin^5 t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

9.3.136. Найти длину кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

9.3.137. Найти длину дуги спирали Архимеда $r = 2\varphi$, находящейся внутри окружности $r = 2\pi$.

9.3.138. Вычислить длину дуги кривой $r = \frac{1}{1 + \cos\varphi}$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

9.3.139. Найти длину кривой $r = 3\cos^4\frac{\varphi}{4}$.

9.3.140. Найти длину дуги кривой $r = ae^{b\varphi}$ $(a > 0,\ b > 0)$, находящейся внутри окружности $r = a$.

Вычисление объемов тел

Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений. Пусть в пространстве задано тело. Пусть построены его сечения плоскостями, перпендикулярными оси Ox и проходящими через точки $x \in [a; b]$ на ней (см. рис. 101). Площадь фигуры, образующейся в сечении, зависит от точки x, определяющей плоскость сечения. Пусть эта зависимость известна и задана непрерывной на $[a; b]$ функцией $S(x)$. Тогда объем части тела, находящейся между плоскостями $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx\,. \tag{3.12}$$

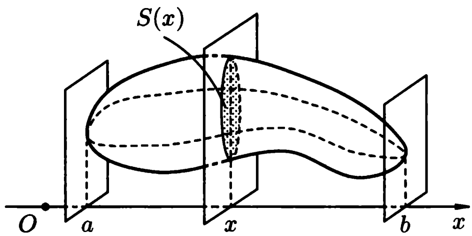


Рис. 101

Объемы тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox (или оси Oy) криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$) и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx\,, \tag{3.13}$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy\,dx\,, \quad a \geqslant 0. \tag{3.14}$$

Заметим, что если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geqslant 0$) и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, то объем тела вращения равен

$$V = \pi \int_c^d x^2\,dy\,. \tag{3.15}$$

9.3.141. Найти объем V пирамиды с площадью основания Q и высотой H.

○ Направим ось Ox перпендикулярно основанию пирамиды, а начало координат совместим с вершиной O данной пирамиды (см. рис. 102). На расстоянии x от точки O проведем поперечное сечение пирамиды. Его площадь обозначим через S, она является функцией от x: $S = S(x)$. Как известно, площади сечения (параллельного основанию) и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины, т. е. $\frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2}$. Отсюда $S(x) = \frac{Q}{H^2}x^2$. По формуле (3.12) находим

$$V = \int_0^H \frac{Q}{H^2}x^2\,dx = \frac{Q}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{1}{3}QH. \quad ●$$

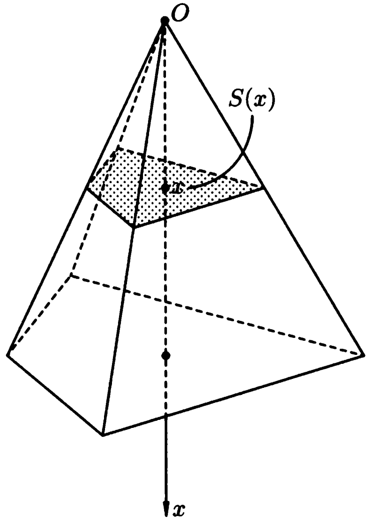


Рис. 102

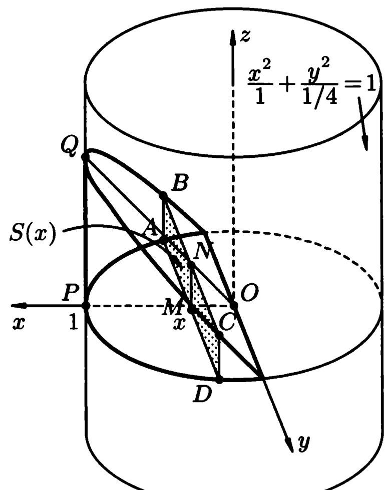


Рис. 103

9.3.142. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + 4y^2 = 1$, $z = x$ $(x \geqslant 0)$, $z = 0$.

○ В результате пересечения эллиптического цилиндра $x^2 + 4y^2 = 1$ плоскостями $z = 0$ и $z = x$ получим тело, изображенное на рисунке 103. Сечение тела, перпендикулярное оси Ox, проведенное на расстоянии x от начала координат представляет собой прямоугольник $ABCD$. Найдем его площадь $S = S(x)$. Высота (ширина) MN прямоугольника равна x, т. е. $|MN| = x$ (в прямоугольном треугольнике $\widehat{NMO}$ угол NOM равен 45°). Точка $D(x; y)$ лежит на эллипсе $x^2 + 4y^2 = 1$. Значит, $MD = y = \sqrt{\frac{1-x^2}{4}}$, т.е. $|MD| = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$. Следовательно, $S(x) = AD \cdot MN = 2MD \cdot MN = 2 \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \cdot x$, т.е. $S(x) = x\sqrt{1-x^2}$. По формуле (3.12) находим

$$V = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad \bullet$$

9.3.143. Найти объем тела, ограниченного двумя цилиндрами $x^2+y^2 = R^2$ и $x^2+z^2 = R^2$.

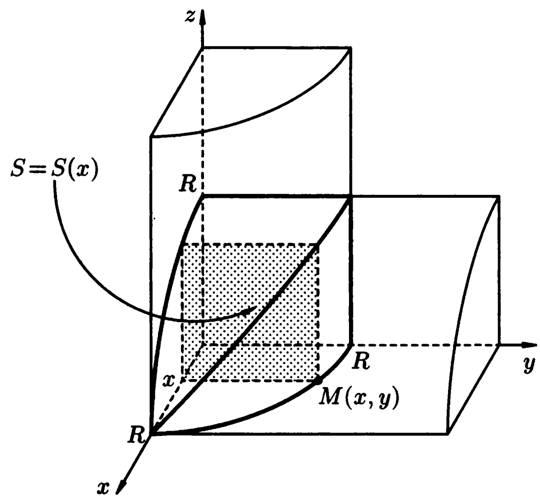


Рис. 104

◔ Изобразим на рисунке восьмую часть тела, расположенную в I октанте (см. рис. 104). В поперечном сечении (перпендикулярном оси Ox) тела получится квадрат. Его сторона a равна ординате точки $M(x;y)$, лежащей на окружности $x^2+y^2=R^2$, т.е. $a = y = \sqrt{R^2-x^2}$. Следовательно, площадь сечения равна $S(x) = (\sqrt{R^2-x^2})^2 = R^2 - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant R$. Используя формулу (3.12) находим

$$\frac{1}{8}V = \int_0^R (R^2-x^2)\,dx = \left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3,$$

т.е. $V = \frac{16}{3}R^3$. $\bullet$

9.3.144. Найти объем шара радиуса R.

9.3.145. Найти объем конуса с радиусом основания R и высотой H.

9.3.146. Найти объем тела, ограниченного параболическим цилиндром $z = x^2$, плоскостями $y = 0$, $y = 6$, $z = 1$.

9.3.147. Найти объем тела, ограниченного параболическим цилиндром $z = 1 - y^2$, плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 12$.

9.3.148. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$.

9.3.149. Найти объем эллипсоида $x^2 + y^2 + 4z^2 \leqslant 4$.

9.3.150. Вычислить объем шарового слоя, вырезанного из шара $x^2+y^2+z^2 = 25$ плоскостями $y = 1$ и $y = 4$.

9.3.151. Найти объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, и плоскостями $z = 0$, $z = 3$.

9.3.152. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = z$ и плоскостью $z = 4$.

9.3.153. Найти объем обелиска, параллельные основания которого квадраты со сторонами a и b $(a > b)$, высота равна h.

9.3.154. Найти объем тела, ограниченного канонической поверхностью $(y-3)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3}$ и плоскостью $y = 1$.

9.3.155. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $\frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{18} = x$, $x = 2$.

9.3.156. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 2z$ (параболоид) и $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = z^2$ (конус).

9.3.157. Цилиндр, основанием которого служит эллипс $4x^2 + 25y^2 = 400$ пересечен наклонной плоскостью, проходящей через малую ось эллипса. Высота полученного «цилиндрического клина» равна 5. Найти его объем.

9.3.158. Найти объем шарового сегмента высотой 2, отсеченного от шара радиуса 4.

9.3.159. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $z = 1$, $z = 4$, если площадь его поперечного сечения обратно пропорциональна квадрату расстояния сечения от начала координат, а при $z = 3$ площадь сечения $S(z) = 20$.

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

9.3.160. $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

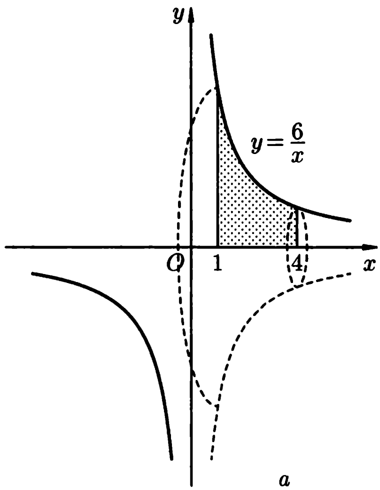
9.3.161. $x^2 + y^2 = 9$, $y + z = 3$, $z = 0$.

9.3.162. $y = x^2$, $z = 0$, $z + y = 6$.

9.3.163. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{144}=1$, $z=0$, $z=3$.

9.3.164. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{25}=1$, $z=\frac{1}{\sqrt{3}}y$ $(y\geqslant 0)$, $z=0$.

9.3.165. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy=6$, $x=1$, $x=4$, $y=0$, вокруг оси Ox и вокруг оси Oy (см. рис. 105).



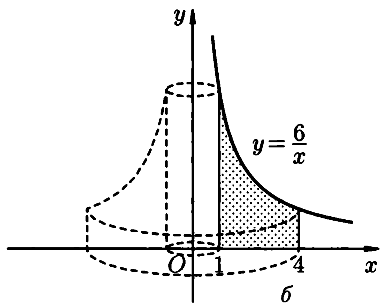


Рис. 105

По формуле (3.13) находим

$$V_x=\pi\int_1^4\left(\frac{6}{x}\right)^2dx=36\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4=27\pi.$$

По формуле (3.14) находим

$$V_y=2\pi\int_1^4 x\cdot\frac{6}{x}\,dx=2\pi\cdot 6x\Big|_1^4=36\pi.$$

9.3.166. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной линиями $y=e^{-x}$, $x=0$, $y=0$ $(x\geqslant 0)$.

Используя формулу (3.15), находим

$$V_y=\pi\int_0^1(-\ln y)^2\,dy=\pi\int_0^1\ln^2 y\,dy=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} u=\ln^2 y & du=2\ln y\cdot\frac{1}{y}\,dy \\ dv=dy & v=y\end{array}\right]=$$

$$= \pi\left(\lim_{\varepsilon\to 0} y\ln y\Big|_{0+\varepsilon}^{1} - 2\int_0^1 \ln y\,dy\right) = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln y & du = \frac{1}{y}\,dy \\ dv = dy & v = y \end{array}\right] =$$

$$= \pi\left(0 - 2\left(\lim_{\varepsilon\to 0} y\ln y\Big|_{0+\varepsilon}^{1} - y\Big|_0^1\right)\right) = -2\pi(0-1) = 2\pi\,.$$

Заметим, что можно использовать формулу (3.14):

$$V_y = 2\pi\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 2\pi\left(\lim_{b\to\infty}(-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^b\right) =$$

$$= 2\pi(0+1) = 2\pi\,. \quad \bullet$$

9.3.167. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

❍ Для нахождения объема тела вращения используем формулу (3.13):

$$V_x = \pi\int_0^{2\pi}(a(1-\cos t))^2\cdot a(1-\cos t)\,dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{3}{2}(1+\cos 2t) - 3\cos t - \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4}\right)dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t - \frac{15}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t\right)dt =$$

$$= \pi a^3\left(\frac{5}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{15}{4}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \pi a^3\cdot 5\pi = 5\pi^2 a^3\,. \quad \bullet$$

9.3.168. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $x = -2$ области, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = -1$, $x = 0$, $y = 4$.

❍ Перенесем начало координат в точку $O_1(-2;0)$, сохранив направление осей (см. рис. 106). В новой системе координат уравнение кубической параболы примет вид $y = (x_1 - 2)^3$, отсюда $x_1 = 2 + \sqrt[3]{y}$. Объем $V_н$ нижней части тела (под осью Ox) найдем как разность двух объемов: $V_н = V_1 - V_2$, где

$$V_2 = \pi\int_{-1}^{0}(2 + \sqrt[3]{y})^2dy = \frac{8}{5}\pi, \quad V_1 = \pi\int_{-1}^{0}1\,dy = \pi$$

(или как объем цилиндра с высотой 1 и радиусом основания 1). Имеем $V_{\text{н}} = \frac{8}{5}\pi - \pi = \frac{3}{5}\pi$. Объем $V_{\text{в}}$ верхней части тела (над осью Ox), очевидно, равен $V_{\text{в}} = 12\pi$ (как разность объемов прямых круговых цилиндров: $V = \pi \cdot 4 \cdot 4 - \pi \cdot 1 \cdot 4 = 12\pi$). Таким образом, $V = V_{\text{н}} + V_{\text{в}} = \frac{3}{5}\pi + 12\pi = \frac{63}{5}\pi$.

Замечание. Искомый объем тела можно найти, используя формулу $V = \int\limits_a^b S(y)\,dy$. Любое сечение тела вращения плоскостью, перпендикулярной оси вращения, есть кольцо, ограниченное концентрическими окружностями. Найдем $S(y)$ для верхней и нижней части тела вращения:

$$S_{\text{в}}(y) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi;$$

$$S_{\text{н}}(y) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(2 + \sqrt[3]{y})^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi(3 + 4\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}).$$

Следовательно,

$$V = V_{\text{в}} + V_{\text{н}} = \int\limits_0^4 3\pi\,dy + \int\limits_{-1}^0 \pi(3 + 4\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})\,dy = \frac{63}{5}\pi. \quad \bullet$$

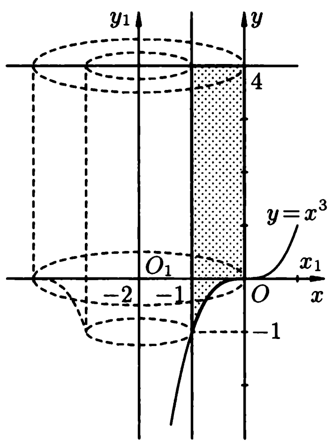


Рис. 106

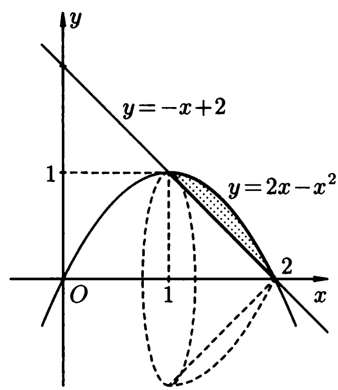


Рис. 107

9.3.169. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

◐ Построим чертеж (см. рис. 107). Графики функций пересекаются в точках $(1;1)$ и $(2;0)$. Используя формулу (3.13), находим

$$V = \int_1^2 (2x - x^2)^2\,dx - \int_1^2 (-x+2)^2\,dx =$$

$$= \int_1^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4 - x^2 + 4x - 4)\,dx =$$

$$= \int_1^2 (x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{5}. \quad \bullet$$

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

9.3.170. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ вокруг оси Ox.

9.3.171. $y = \dfrac{2}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ вокруг оси Ox.

9.3.172. $y^2 = (x+1)^3$, $x = 0$ вокруг оси Oy.

9.3.173. $y^2 = 16 - x$, $x = 0$ вокруг оси Oy.

9.3.174. $y = \sqrt{x}e^x$, $x = 0$, $x = \ln 2$ вокруг оси Ox.

9.3.175. $y = 2\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ вокруг оси Ox.

9.3.176. $y^2 = 4x$, $y^2 = x^3$ вокруг оси Ox.

9.3.177. $y^2 = 6x$, $y = \sqrt{6}x^2$ вокруг оси Ox.

9.3.178. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y = -b$, $y = b$ вокруг оси Oy.

9.3.179. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Oy.

9.3.180. $x^2 + y^2 = 1$ вокруг прямой $x = 2$.

9.3.181. $y = \cos x$, $y = -1$ вокруг прямой $y = -1$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

9.3.182. $y^2 = 6x$, $x = 3$, $x = 5$ вокруг оси Ox.

9.3.183. $3x - y = 0$, $3x - 4y = 0$, $y = 3$ вокруг оси Ox.

9.3.184. $2y = 16 - x^2$, $y - 4 = 0$, $y = 0$ вокруг оси Oy.

9.3.185. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ вокруг оси Oy.

9.3.186. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ вокруг оси Ox.

9.3.187. $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$, $x = -a$, $x = a$ вокруг оси Ox.

9.3.188. $x = (y-2)^2$, $x = 0$, $y = 0$ вокруг оси Oy.

9.3.189. $y = xe^x$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг оси Ox.

9.3.190. $y = \frac{1}{2}x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$ вокруг оси Ox.

9.3.191. $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси Oy.

9.3.192. $\begin{cases} x = 2R\cos t - R\cos 2t, \\ y = 2R\sin t - R\sin 2t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (кардиоида) вокруг оси Ox.

9.3.193. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = 2a$ вокруг оси Ox.

9.3.194. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

9.3.195. $y = x\sqrt{-x}$, $x = -1$, $y = 0$ вокруг оси Oy.

9.3.196. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$ (петля) вокруг оси Ox.

9.3.197. $2y = x^2 + 4x + 4$, $y = 2$ вокруг оси Oy.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

9.3.198. На всех хордах круга радиуса $R = 9$, параллельных одному направлению, построены симметричные параболические сегменты постоянной высоты $H = 4$. Плоскости сегментов перпендикулярны к плоскости круга. Найти объем полученного таким образом тела.

9.3.199. Центр квадрата переменного размера перемещается вдоль диаметра круга радиуса R, причем плоскость, в которой лежит квадрат, остается перпендикулярной к плоскости круга, а две противоположные вершины квадрата перемещаются по окружности. Найти объем тела, образованного этим движущимся квадратом.

9.3.200. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{3}y$, $z = 0$, $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ $(y \geqslant 0)$.

9.3.201. Основание тела есть круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Каждое сечение, перпендикулярное оси Ox есть полукруг. Найти объем тела.

9.3.202. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 72x + 18y + 9 = 0$ и плоскостями $y = -2$ и $y = 1$.

Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями:

9.3.203. $y = x^2$, $y = 4$ вокруг прямой $x = 2$.

9.3.204. $y = x^2 - 1$, $y = 0$ вокруг прямой $y = -1$.

9.3.205. $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ вокруг оси Ox.

9.3.206. $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = 0$ вокруг оси Oy.

9.3.207. $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0{,}5$ вокруг оси Ox.

9.3.208. $(x-4)y^2 = x(x-3)$ вокруг оси Ox.

9.3.209. $y = x^2 e^{-x^2}$ вокруг своей асимптоты $\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

9.3.210. $y = \frac{\sin x}{x}$, $y = 0$ вокруг оси Ox $\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\right)$.

9.3.211. $r = \cos^2\varphi$ вокруг полярной оси.

9.3.212. $x^2 + (y-2)^2 = 1$ вокруг оси Oy.

9.3.213. $y = \frac{1}{x}$, $1 \leqslant x \leqslant a$, $y = 0$. Что происходит с объемом при $a \to +\infty$?

9.3.214. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ вокруг оси Ox.

9.3.215. Может ли фигура, образованная при вращении вокруг оси Ox графика некоторой функции, ограниченной плоскостями $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, иметь объем, меньший 1, при любом значении b?

Вычисление площади поверхности вращения

Если дуга кривой, заданная неотрицательной функцией $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b |y|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,, \tag{3.16}$$

где a и b — абсциссы начала и конца дуги.

Если дуга кривой, заданная неотрицательной функцией $x = \varphi(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, вращается вокруг оси Oy, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_y = 2\pi \int\limits_c^d |x|\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\,dy, \tag{3.17}$$

где c и d — ординаты начала и конца дуги.

Если дуга кривой задана *параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, причем $y(t) \geqslant 0$, то

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt\,. \tag{3.18}$$

Если дуга задана *в полярных координатах* $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$S_x = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta r\,|\sin\varphi|\,\sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\,d\varphi\,. \tag{3.19}$$

9.3.216. Найти площадь поверхности шара радиуса R, рассматривая его как тело вращения.

○ Поверхность шара (сферы) может быть образована вращением дуги кривой $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (полуокружности), $-R\leqslant x\leqslant R$ вокруг оси Ox (или дуги $x=\sqrt{R^2-y^2}$ вокруг оси Oy). Применим формулу (3.16):

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$S_x=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}R\,dx=2\pi Rx\Big|_{-R}^{R}=4\pi R^2;$$

$$\Bigg(\text{или:}\qquad x=\sqrt{R^2-y^2},\quad x'=\frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}},$$

$$S_x=2\pi\int_{-R}^{R}x\sqrt{1+(x')^2}\,dy=$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dy=4\pi R^2\Bigg).$$

Если окружность задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases}x=R\cos t,\\ y=R\sin t\end{cases}$$

то, применив формулу (3.18), находим

$$\frac{1}{2}S_x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin t\sqrt{((R\cos t)'_t)^2+((R\sin t)'_t)^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin t\cdot R\,dt=2\pi R^2(-\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi R^2.$$

Следовательно, $S_x=4\pi R^2$.

Если окружность задана в полярных координатах уравнением $r=R$, то, применяя формулу (3.19), находим

$$\frac{1}{2}S_x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin\varphi\sqrt{R^2+(R')^2}\,d\varphi=2\pi R^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi R^2,$$

т. е. $S_x=4\pi R^2$. ●

9.3.217. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $x^2 = y + 2$, $y = 1$ вокруг оси Oy (см. рис. 108).

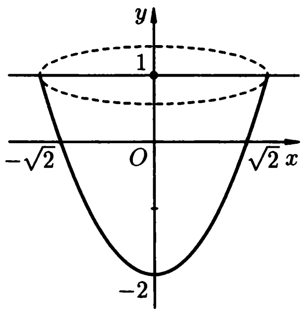


Рис. 108

◑ Воспользуемся формулой (3.17). Имеем:

$$2x \cdot x' = 1, \quad x' = \frac{1}{2x},$$

$$\sqrt{1 + (x'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4(y+2)}} = \frac{\sqrt{4y+9}}{2\sqrt{y+2}}.$$

$$S_y = 2\pi \int\limits_{-2}^{1} \frac{\sqrt{y+2}\sqrt{4y+9}}{2\sqrt{y+2}}\, dy =$$

$$= \pi \int\limits_{-2}^{1} \sqrt{4y+9}\, dy = \frac{\pi}{6}(13\sqrt{13} - 1). \quad ●$$

9.3.218. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением астроиды $\begin{cases} x = R\cos^3 \frac{t}{4}, \\ y = R\sin^3 \frac{t}{4}, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ вокруг оси Ox.

◑ Используем формулу (3.18).

$$x'_t = 3R\cos^2 \frac{t}{4} \cdot \left(-\sin \frac{t}{4}\right) \cdot \frac{1}{4},$$

$$y'_t = 3R\sin^2 \frac{t}{4} \cdot \cos \frac{t}{4} \cdot \frac{1}{4},$$

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}R^2\cos^4 \frac{t}{4}\sin^2 \frac{t}{4} + \frac{9}{16}R^2\sin^4 \frac{t}{4}\cos^2 \frac{t}{4}} =$$

$$= \frac{3}{4}R\sqrt{\sin^2 \frac{t}{4}\cos^2 \frac{t}{4}} = \frac{3}{4}R\sin \frac{t}{4}\cos \frac{t}{4}.$$

$$\frac{1}{2}S_x = 2\pi\int\limits_0^{2\pi} R\sin^3\frac{t}{4}\cdot\frac{3}{4}R\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\pi R^2\int\limits_0^{2\pi} 4\sin^4\frac{t}{4}\,d\Big(\sin\frac{t}{4}\Big) = 6\pi R^2\cdot\frac{\sin^5\frac{t}{4}}{5}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{6\pi R^2}{5},$$

Следовательно, $S_x = \frac{12}{5}\pi R^2$. ●

9.3.219. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $r = \cos^2\varphi$ вокруг полярной оси, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

◐ Используя формулу (3.19), находим

$$S_p = 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin\varphi\sqrt{(\cos^2\varphi)^2 + ((\cos^2\varphi)'_\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin\varphi\sqrt{\cos^4\varphi + 4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\sin\varphi\sqrt{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\sqrt{4 - 3\cos^2\varphi}\,d(\cos\varphi) = [\cos\varphi = t] =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^1 t^3\sqrt{4-3t^2}\,dt = 2\pi\int\limits_0^1 t^2\cdot t\sqrt{4-3t^2}\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} u = t^2 & du = 2t\,dt \\ dv = t\sqrt{4-3t^2}\,dt & v = -\frac{1}{18}\sqrt{(4-3t^2)^3} \end{array}\right] =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{18}t^2\sqrt{(4-3t^2)^3}\Bigg|_0^1 + \frac{2}{18}\int\limits_0^1 t\sqrt{(4-3t^2)^3}\,dt\right) =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{9}\int\limits_0^1 (4-3t^2)^{\frac{3}{2}}\,d(4-3t^2)\cdot\Big(-\frac{1}{6}\Big)\right) =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{18} - \frac{1}{54}\cdot\frac{2\sqrt{(4-3t^2)^5}}{5}\Bigg|_0^1\right) =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{18} - \frac{1}{135}\Big(1 - \frac{1}{32}\Big)\right) = 2\pi\Big(-\frac{1}{18} + \frac{31}{135}\Big) = \frac{47}{135}\pi.$$ ●

Кривая вращается вокруг оси. Вычислить площадь поверхности вращения:

9.3.220. Одна арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox.

9.3.221. Одной арка циклоиды вокруг оси Oy.

9.3.222. Дуга параболы $y^2 = 2x$, $x \in [0; 4]$ вокруг оси Ox.

9.3.223. Дуга синусоиды $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ вокруг оси Ox.

9.3.224. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox.

9.3.225. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Oy.

9.3.226. Окружность $r = 4\sin\varphi$ вокруг полярной оси.

9.3.227. Окружность $r = 2\cos\varphi$ вокруг полярной оси.

9.3.228. Дуга кривой $y = \frac{1}{3}x^3$ от $x = -1$ до $x = 1$ вокруг оси Ox.

9.3.229. Отрезок с началом в точке $O(0; 0)$ и концом в точке $A(R; H)$ вокруг оси Oy.

9.3.230. Дуга цепной линии $y = 2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ вокруг оси Ox.

9.3.231. Дуга кривой $y = \sin 3x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$ вокруг оси Ox.

9.3.232. Астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{2}}$ вокруг оси Oy.

9.3.233. Дуга кривой $y = e^{-x}$, $x \geqslant 0$ вокруг оси Ox.

9.3.234. Кривая $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \leqslant y \leqslant e$ вокруг оси Oy.

9.3.235. Дуга кардиоиды $\begin{cases} x = 2R\cos t - R\cos 2t, \\ y = 2R\sin t - R\sin 2t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ вокруг ее оси.

9.3.236. Дуга линии $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$ вокруг оси Ox.

9.3.237. Дуга кривой $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3}, \\ y = 4 - \dfrac{t^2}{2}, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\sqrt{2}$ вокруг оси Ox.

9.3.238. Дуга кривой $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{24}, \\ y = 4 - \dfrac{t^2}{16}, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 4\sqrt{2}$ вокруг оси Ox.

9.3.239. Кардиоида $r = 10(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

9.3.240. Лемниската $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ вокруг полярной оси.

9.3.241. Дуга кривой $r = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ вокруг полярной оси.

Более сложные задачи

Кривая вращается вокруг оси. Вычислить площадь поверхности вращения:

9.3.242. Окружность $x^2 + (y-2)^2 = 1$ вокруг оси Ox.

9.3.243. Тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{4}$ вокруг оси Ox.

9.3.244. Дуга $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ вокруг стягивающей ее хорды.

9.3.245. Петля кривой $9x^2 = y(3-y)^2$ вокруг оси Oy.

9.3.246. Арка циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, вращающейся вокруг касательной, проходящей через вершину циклоиды, параллельно оси Ox.

9.3.247. Одна арка циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг ее оси симметрии.

9.3.248. Кардиоида $r = 1 + \cos\varphi$ вокруг касательной в ее вершине $(2;0)$.

Физические (механические) приложения определенного интеграла

а) *Путь, пройденный телом,* перемещающимся со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени $[t_1;t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \tag{3.20}$$

б) *Работа переменной силы,* заданной функцией $F = F(x)$ и направленной вдоль оси Ox на отрезке $[a;b]$, равна интегралу

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{3.21}$$

в) *Давление жидкости* на горизонтальную пластину равно весу столба этой жидкости («закон Паскаля»), т. е. $P = g\gamma S h$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, S — площадь пластинки, h — глубина ее погружения.

Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ (см. рис. 109), вычисляется по формуле

$$P = g\gamma \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))x\,dx. \tag{3.22}$$

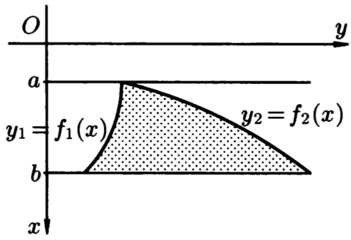


Рис. 109

г) *Статические моменты, относительно координатных осей, моменты инерции и координаты центра тяжести* плоской дуги $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, находятся соответственно по формулам

$$S_x = \int\limits_a^b \gamma y\, dl\,, \quad S_y = \int\limits_a^b \gamma x\, dl\,, \tag{3.23}$$

$$M_x = \int\limits_a^b \gamma y^2\, dl\,, \quad M_y = \int\limits_a^b \gamma x^2\, dl\,, \tag{3.24}$$

где $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$ $\left(\sqrt{(x'_y)^2 + (y'_x)^2}\, dt,\ \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\, d\varphi\right)$ — дифференциал дуги;

$$x_c = \frac{S_y}{m}\,, \quad y_c = \frac{S_x}{m}\,, \quad m = \int\limits_a^b \gamma\sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx \tag{3.25}$$

(здесь x_c, y_c — координаты центра тяжести, а m — масса кривой).

9.3.249. Автобус начинает двигаться с ускорением $1\,\text{м/с}^2$. Какой путь пройдет автобус за 12 секунд от начала движения?

❍ Скорость движения автобуса выражается формулой $v = t\,\text{м/с}$. Согласно формуле (3.20) находим путь, пройденный автобусом за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = 12\,\text{сек.}$: $\int\limits_0^{12} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{12} = 72\,\text{м}$. ●

9.3.250. Скорость тела меняется по закону $v = 0{,}03t^2\,\text{м/с}$. Какой путь пройдет тело за 10 с? Чему равна средняя скорость движения?

9.3.251. Скорость автобуса при торможении изменяется по закону $15 - 3t\,\text{м/с}$. Какой путь пройдет автобус от начала торможения до полной остановки?

9.3.252. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если сила в 20 Н растягивает пружину на 5 см.

❍ Согласно закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т.е. $F(x) = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи сила $F = 20$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}05$ м. Следовательно, $20 = k \cdot 0{,}05$, откуда $k = 400$, $F = 400x$. Искомая работа на основании формулы (3.21) равна

$$A = \int_0^{0,1} 400x\,dx = 200x^2 \Big|_0^{0,1} = 2 \text{ Дж}. \qquad \bullet$$

9.3.253. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из цистерны, имеющей форму параболического цилиндра, размеры которого указаны на рисунке 110.

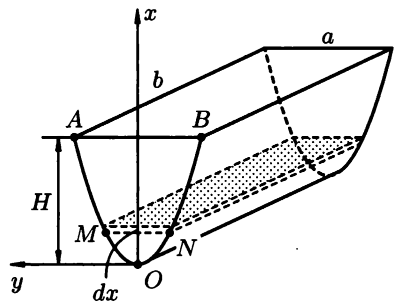


Рис. 110

○ Работа, затрачиваемая на поднятие тела весом p на высоту h, равна ph. Но различные слои жидкости в цистерне находятся на различных глубинах и высота поднятия до края цистерны различных слоев не одинакова. Для решения задачи применим так называемый «метод дифференциала». Введем систему координат так как указано на рисунке.

1. Работа, затрачиваемая на выкачивание слоя жидкости толщиной x ($x \in [0; H]$), есть функция от x, т. е. $A = A(x)$ ($A(0) = 0$, $A(H) = A_0$).

2. Находим главную часть приращения ΔA при изменении x на величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A(x)$.

Ввиду малости dx считаем, что «элементарный слой» жидкости находится на одной глубине x от края цистерны (см. рис. 110). Тогда $dA = dp \cdot x$, где dp — вес этого слоя; он равен $g\gamma\,dv$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, dv — объем «элементарного слоя» жидкости (на рисунке он выделен), т. е. $dp = g\gamma\,dv$. Но $dv = b \cdot MN \cdot dx$. Найдем MN: $\frac{1}{2}MN$ — ордината точки $M(H - x; y)$, лежащей на параболе AOB, уравнение которой в выбранной системе координат

$y^2 = 2px$. Параметр p найдем из условия, что точка $A\left(H; \frac{a}{2}\right)$ принадлежит параболе, следовательно $\frac{a^2}{4} = 2pH$, $p = \frac{a^2}{8H}$, т. е. уравнение параболы есть $y^2 = \frac{a^2}{4H}x$. Точка $M(H - x; y)$ лежит на параболе. Следовательно, $y^2 = \frac{a^2}{4H}(M - x)$. Отсюда находим $y = \frac{a}{2\sqrt{H}}\sqrt{H - x} = \frac{1}{2}MN$, т. е. $MN = \frac{a\sqrt{H - x}}{\sqrt{H}}$. Следовательно, $dv = b\frac{a\sqrt{H - x}}{\sqrt{H}}\,dx$, $dp = g\gamma ba\frac{\sqrt{H - x}}{\sqrt{H}}\,dx$ и $dA = \gamma gab\frac{\sqrt{H - x}}{\sqrt{H}}x\,dx$.

3. Интегрируя это равенство в пределах от $x = 0$ до $x = H$, находим искомую работу:

$$A = \frac{\gamma gab}{\sqrt{H}}\int_0^H x\sqrt{H - x}\,dx = \begin{bmatrix} \sqrt{H - x} = t\,, \ x = H - t^2\,, \\ dx = -2t\,dt \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\gamma gab}{\sqrt{H}}\int_0^{\sqrt{H}} 2(Ht^2 - t^4)\,dt = \frac{\gamma gab}{\sqrt{H}}\cdot 2\left(\frac{Ht^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{H}} =$$

$$= \frac{\gamma gab}{\sqrt{H}}\cdot\frac{4}{15}H^2\sqrt{H} = \frac{4}{15}\gamma gabH^2. \quad \bullet$$

9.3.254. Какую работу надо затратить на преодоление силы тяжести при насыпании кучи песка (плотность γ) конической формы с радиусом основания R и высотой H.

9.3.255. Для растяжения пружины на 4 см необходимо совершить работу 24 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 150 Дж?

9.3.256. Рессора прогибается под нагрузкой 2 т на 1,5 см. Какую работу нужно затратить для деформации рессоры на 3 см? (Сила деформации пропорциональна величине деформации.)

9.3.257. Определить величину давления морской воды на вертикальный круг радиуса $R = 0{,}2$ м, центр которого погружен в воду на глубину $H = 10$ м. Плотность морской воды $\gamma = 1020$ кг/м^3.

◐ Поместим начало координат на поверхности воды, ось Oy направим горизонтально, а ось Ox — вертикально вниз. Воспользуемся формулой (3.22). В данном случае пластинка (т. е. круг) ограничена линиями

$$y_1 = -\sqrt{R^2 - (x - H)^2}, \quad y_2 = +\sqrt{R^2 - (x - H)^2},$$
$$x = H - R, \quad x = H + R.$$

Поэтому

$$P = g\gamma \int\limits_{H-R}^{H+R} \left(\sqrt{R^2-(x-H)^2} - (-\sqrt{R^2-(x-H)^2})\right) x\,dx =$$

$$= 2g\gamma \int\limits_{H-R}^{H+R} x\sqrt{R^2-(x-H)^2}\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} x-H=t\,,\ x=t+H\,,\ dx=dt\,, \\ t_1=-R,\ t_2=R \end{bmatrix} =$$

$$= 2g\gamma \int\limits_{-R}^{R} (t+H)\sqrt{R^2-t^2}\,dt =$$

$$= 2g\gamma\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{-R}^{R}(R^2-t^2)^{\frac{1}{2}}d(R^2-t^2) + H\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-t^2}\,dt\right) =$$

$$=2g\gamma\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{(R^2-t^2)^3}}{3}\Bigg|_{-R}^{R} + H\left(\frac{t}{2}\sqrt{R^2-t^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{-R}^{R}\right)=$$

$$= 2\gamma RH\cdot\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = g\gamma\pi HR^2.$$

Подставляя значения g, γ, H, R, π получаем

$$P = 9{,}81\cdot 1020\cdot\pi\cdot 10\cdot 0{,}04 \approx 12{,}6 \text{ кН.}$$ ●

9.3.258. Найти давление воды (плотность γ) на вертикальную пластинку, имеющую вид равнобедренной трапеции. Высота ее равна h, большее основание — b, меньшее, лежащее на поверхности воды, равно a.

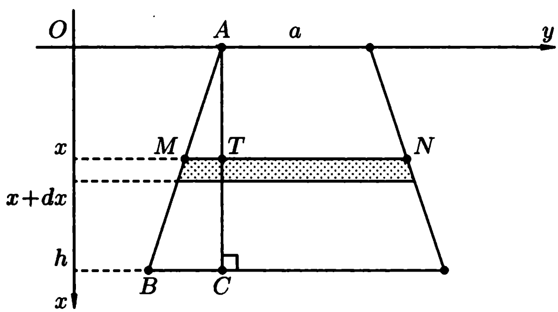


Рис. 111

◑ Введем систему координат так как указано на рисунке 111. Давление жидкости на различные слои пластинки разное: зависит от глубины погружения x. Для решения задачи применим «метод дифференциала».

1. Пусть часть искомой величины p есть функция от x: $p = p(x)$ — давление на часть пластинки (трапеции), соответствующее отрезку $[0; x]$ $x \in [0; h]$, $p(0) = 0$, $p(h) = P$.

2. Дадим аргументу приращение $\Delta x = dx$. Функция $p(x)$ получит приращение Δp (на рисунке: полоска — слой толщины dx). Найдем дифференциал dp этой функции. Ввиду малости dx будем приближенно считать полоску прямоугольником, все точки которого находятся на одной глубине x. Тогда по закону Паскаля $dp = g\gamma \underbrace{|MN|\,dx}_{S} \cdot \underbrace{x}_{h}$. Найдем $|MN|$. Очевидно, $|MN| = a + 2|MT|$. Длину $|MT|$ находим из подобия треугольников MTA и BCA: $\frac{x}{|MT|} = \frac{h}{\frac{b-a}{2}}$, $|MT| = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{x}{h}$. Тогда $|MN| = a + \frac{b-a}{h}\,x$ и $dp = g\gamma\Big(a + \frac{b-a}{h}x\Big)x\,dx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = 0$ до $x = h$, получим

$$P = g\gamma \int_0^h \Big(ax + \frac{b-a}{h}\,x^2\Big)\,dx = \frac{1}{6}\,g\gamma h^2(a + 2b)\,. \qquad \bullet$$

9.3.259. Найти силу давления воды (плотность γ) на круглый иллюминатор диаметром D (в вертикальном борту судна) наполовину погруженный в воду.

9.3.260. Вычислить силу давления воды (плотность γ) на прямоугольные ворота шлюза, ширина которых a, высота b, если шлюз заполнен водой на одну треть.

9.3.261. Вода заполняет полностью резервуар кубической формы с ребром, равным 0,5 м. Найти силу давления воды на:

а) дно резервуара;

б) боковую стенку.

9.3.262. Найти статический момент однородной (плотность $\gamma = \mathrm{const}$) дуги кривой $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, относительно оси Ox.

◐ Используем формулы (3.23). Так как $y = \cos x$, то

$$dl = \sqrt{1 + (\cos x)'}\,dx = \sqrt{1 + \sin^2 x}\,dx.$$

Имеем

$$S_x = \gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}\,dx = \gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (\sin x)^2}\,d(\sin x) =$$

$$= \gamma\Big(\frac{\sin x}{2}\sqrt{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\big|\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\,\big|\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \gamma\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2})\Big) = \frac{1}{2}\gamma\big(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\big). \qquad \bullet$$

9.3.263. Вычислить массу и момент инерции плоского однородного стержня ($\gamma = 1$) длины l относительно его конца.

◐ Совместим стержень с отрезком оси Ox, $0 \leqslant x \leqslant l$, (левый конец стержня — в точке O). Для нахождения массы стержня используем формулу (3.25), положив в ней $y = 0$, $y' = 0$:

$$m = \int\limits_0^l \gamma\sqrt{1+0^2}\,dx = \gamma x\Big|_0^l = \gamma l$$

(результат известен: стержень однородный). Момент инерции стержня равен моменту инерции его относительно оси Oy. Применим формулу (3.23):

$$M_y = \int\limits_0^l \gamma x^2\sqrt{1+0^2}\,dx = \gamma\frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{\gamma l^3}{3},$$

т. е. $M_y = \dfrac{\gamma l^3}{3} = \dfrac{ml^2}{3}$, где m — масса стержня. ●

9.3.264. Найти центр тяжести одной арки однородной ($\gamma = \text{const}$) циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $a \leqslant t \leqslant 2\pi$.

◐ Первая арка циклоиды симметрична относительно прямой $x = \pi a$. Поэтому абсцисса центра тяжести кривой равна πa, т. е. $x_c = \pi a$. По формулам (3.23) и (3.25) находим $y_c = \dfrac{S_x}{m}$ и $x_c = \dfrac{S_y}{m}$:

$$y_c = \frac{\gamma\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{\left[a(t-\sin t)'\right]^2 + \left[a(1-\cos t)'\right]^2}\,dt}{\gamma\int_0^{2\pi}\sqrt{\left[a(t-\sin t)'\right]^2 + \left[a(1-\cos t)'\right]^2}\,dt} =$$

$$= \frac{a\displaystyle\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot a\cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt}{a\displaystyle\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt} = \frac{2a\displaystyle\int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt}{-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}} =$$

$$= \frac{-2\cdot 4a\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)}{8} =$$

$$= -a\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -a\left(-1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}a,$$

$$x_c = \frac{\gamma\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt}{\gamma\cdot 8a} =$$

$$= \frac{2a^2\int_0^{2\pi}\left(t\cdot\sin\frac{t}{2} - \sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt}{8a} = \frac{1}{4}a(4\pi - 0) = \pi a. \quad ●$$

9.3.265. Найти координаты центра тяжести однородной дуги ($\gamma = \text{const}$) окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в третьей координатной четверти.

9.3.266. Вычислить момент инерции относительно оси Oy окружности $x^2 + y^2 = R^2$, масса которой равна m.

9.3.267. Найти координаты центра тяжести однородной дуги астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, расположенной левее оси Oy.

Дополнительные задачи

9.3.268. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха, равна $v = v_0 - gt$, где t — протекшее время, g — ускорение свободного падения. На каком расстоянии от начального положения будет находится тело через t секунд от момента бросания? На какую максимальную высоту поднимется тело?

9.3.269. Скорость движения точки $v = te^{-0{,}05t}$ м/с. Найти путь пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

9.3.270. Найти работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость (плотность γ) из вертикального цилиндрического резервуара высоты H и радиусом основания R.

9.3.271. Найти работу, затраченную на выкачивание жидкости (плотность γ) из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого H, радиус R.

9.3.272. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Размеры трапеции (плотины): $a = 7$ м (низ), $b = 12$ м (верх), $h = 5$ м. Считать, что плотность воды $\gamma = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

9.3.273. Пластинка в виде треугольника с основанием a и высотой h вертикально погружена в воду вершиной вниз так, что его основание находится на поверхности воды. Вычислить силу давления воды.

9.3.274. Найти давление спирта ($\gamma = 830$ кг/м^3), находящегося в цилиндрическом баке высотой 3 м и радиусом 4 м на боковую стенку бака.

9.3.275. Найти статические моменты и моменты инерции однородной дуги ($\gamma = \text{const}$) астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, расположенной в первой четверти.

9.3.276. Найти моменты инерции окружности ($\gamma = 1$) радиуса R относительно ее диаметра.

9.3.277. Найти центр тяжести четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первом координатном углу, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна произведению координат точки.

9.3.278. Найти центр тяжести однородной ($\gamma = \text{const}$) дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, стягивающей угол α.

9.3.279. Найти массу и статические моменты относительно координатных осей Ox и Oy дуги астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, расположенной в первой четверти, если линейная плотность в каждой ее точке равна $\gamma = x$.

9.3.280. Найти статический момент окружности $r = 4\sin\varphi$ относительно полярной оси.

Более сложные задачи

9.3.281. Точка оси совершает гармонические колебания около начала координат со скоростью $v = v_0 \cos\omega t$, где t — время, ω — угловая скорость, v_0 начальная скорость. Найти закон колебания точки и среднее значение абсолютной величины скорости за период колебаний.

9.3.282. Скорость движения точки меняется по закону $v = 12t - 3t^2$ м/с, где t — время. Найти: путь, пройденный точкой за вторую секунду; среднюю скорость движения за промежуток времени $[0; 2]$; перемещение точки за первые 6 секунд движения.

9.3.283. Из одной точки в одном направлении одновременно начинают двигаться два тела со скоростями $v = 2t^2 - 4t$ м/с и $5t + \frac{5}{2}$ м/с соответственно. Через сколько секунд и на каком расстоянии тела снова будут вместе?

9.3.284. Пластинка в форме параболического сегмента с основанием a, высотой h, толщиной d вращается вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью ω. Плотность материала пластины γ. Найти кинетическую энергию пластинки.

Указание. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна $K = \frac{1}{2}\omega^2 J$, где ω — угловая скорость, J — момент инерции; момент инерции материальной точки относительно оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния до оси.

9.3.285. Дубовая прямоугольная балка плавает в воде. Ее размеры: $a = 4$ м, $b = 2$ м, $c = 0{,}5$ м; плотность $\gamma = 0{,}8$ кг/дм^3. Вычислить работу, необходимую для извлечения ее из воды.

9.3.286. Какую работу надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса R, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра. (Плотность железа γ. Работа равна кинетической энергии шара.)

9.3.287. Какую работу затрачивает подъемный кран при извлечении медного конуса из морской воды? Конус с вертикальной осью погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды. Высота конуса $H = 1$ м, радиус основания $R = 1$ м, плотность меди $\gamma_1 = 8900$ кг/м^3,а морской воды $\gamma_2 = 1020$ кг/м^3.

9.3.288. Тело, температура которого 30°, погружено в термостат (в котором поддерживается температура 0°). За какое время тело охладится до 10°, если за 20 минут оно охлаждается до 20°?

Указание. скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} x^2 \cdot \sqrt[3]{(3-x^3)^2}\,dx$;

б) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^4 x}\,dx$.

2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\displaystyle\int\limits_3^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$;

б) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^3$, $y = x^2$, $x = -2$, $x = 1$;

б) $r = 3 - 2\cos\varphi$, $r = \frac{1}{2}$.

4. Вычислить длину дуги кривой:

а) $\begin{cases} x = 2(r\cdot\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3}$;

б) $y = 1 - \ln\sin x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{4}$.

5. а) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + 5y^2$, $z = 5$.

   б) Найти объем шарового сегмента высотой 3, отсеченного $\bar{a}$ шара радиуса 6.

Вариант 2

1. Вычислить интегралы:

   а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$;

   б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \cdot (2x-1)^8\, dx$;

   в) $\int\limits_{0}^{3} (x-3)e^{-x}\, dx$.

2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

   а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$;

   б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x(x-2)}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

   а) $y = (x-5) \cdot (1-x)$, $y = 4$, $x = 1$;

   б) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 5$ $(y \geqslant 5)$.

4. Вычислить длину дуги кривой:

   а) $x = \ln\cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{3}$;

   б) $r = 3 \cdot (1 + \sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant 0$.

5. а) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = 1$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

   б) Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2x - y - 2 = 0$, $y = 0$, $x = 3$.

Вариант 3

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sin x}{5 - 3\cos x}\, dx$;

б) $\int\limits_{2}^{14} \frac{5x\, dx}{\sqrt{x+2}}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} x \cdot \ln(1+x)\, dx$.

2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{5}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 8x + 20}$;

б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x^5}}\, dx$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \frac{x}{x-3}$, $y = x$, $x = -2$;

б) $r = 2\sin\varphi$ $r = 4\sin\varphi$.

4. Вычислить длину дуги кривой

а) $r = 2 \cdot \varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{4}$;

б) $y = \ln x$, от точки $A(1;0)$ до точки $B(\sqrt{3}; \ln\sqrt{3})$.

5. а) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = 2$, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$.

б) Отрезок прямой, соединяющий начало координат с точкой $(-3;-2)$ вращается вокруг оси Oy. Найти объем тела вращения.

Вариант 4

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{x^4 - 2}{x^2 + 1}\, dx$;

б) $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{2 + \sqrt{8x - 7}}$;

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos 4x \cdot dx$.

2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$;

б) $\int\limits_{3}^{5} \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 8x - 15}}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y = x^4$, нормалью к ней проведенной в точке с абсциссой $x = 1$, прямой $x = 0$;
б) $r = \cos\varphi$ $r = \sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2})$.

4. Вычислить длину дуги кривой
а) $r = 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$;
б) $y = 4 - x^2$, $x = -2$, $x = 2$.

5. а) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 9$, $z = y$, $z = 0$ $(y \geqslant 0)$.
б) найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$.

❑

Глава 10. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

⇛ *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, первое из которых x называется его *действительной частью*, а второе число y — *мнимой частью*. Обозначение: $z = x+iy$.Символ i называется *мнимой единицей*.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*, если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — мнимой частью, $y = \operatorname{Im} z$.

⇛ Два комплексных числа $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2 = x_2+iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части называются *сопряженными*.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ *можно изобразить точкой* $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот.

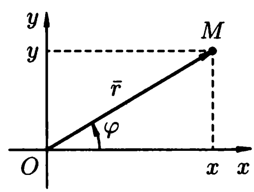


Рис. 112

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают $\mathbb{C}$). Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой*.

Комплексное число $z = x+iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$.

Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z (см. рис. 112), называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.1}$$

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm, 2, \ldots$, где $\arg z = \varphi$ — *главное значение аргумента,* заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, то есть $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

Замечание. В качестве значения аргумента можно брать величину принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$.

⇛ Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Запись числа z в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.2}$$

называется *тригонометрической формой.*

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент z можно найти, используя формулу $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{при } x > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0,\ y > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

⇛ Запись числа z в виде

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{или} \quad z = |z|e^{i\arg z} \tag{1.4}$$

называют *показательной формой* (или экспоненциальной) комплексного числа.

10.1.1. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 2 + 2i$; **б)** $z = -1 + i\sqrt{3}$;
в) $z = -5i$; **г)** $z = -3 - 2i$;
д) $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

◐ Используем формулы (1.1)–(1.4).

а) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$. Здесь $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, $|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит,

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

б) Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi$. Значит,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi}.$$

в) Имеем: $r = \sqrt{0+25} = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Значит,

$$-5i = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

г) Имеем: $r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{-3}\right) - \pi = \operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi$. Значит,

$$-3 - 2i = \sqrt{13}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right)\right) = \sqrt{13}e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right)}.$$

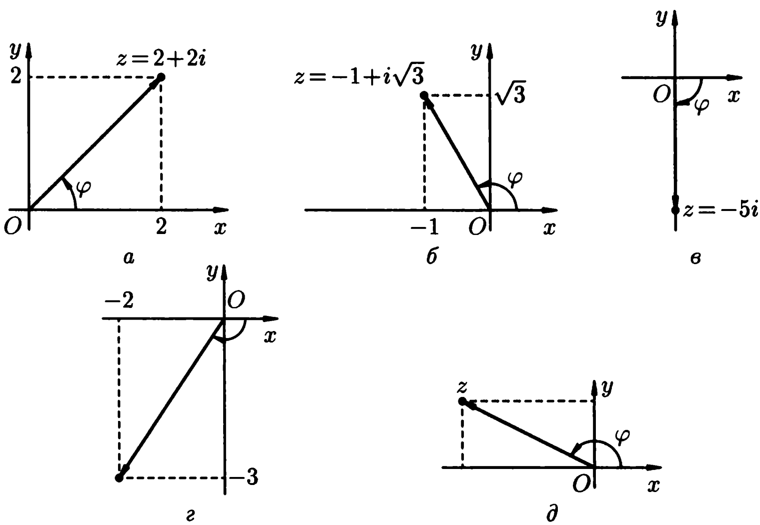


Рис. 113

д) Запись $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа (см. формулу (1.2)).

Перепишем z в виде $z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Надо найти такой угол φ, что $\cos\varphi = -\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{5}$. Таким углом является $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$, т.е. $\varphi = \frac{4}{5}\pi$. Значит,

$$z = 3\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right) = 3 \cdot e^{i\cdot\frac{4}{5}\pi}.$$

Изображения чисел представлены на рис. 113. ●

10.1.2. Построить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ векторы, соответствующие комплексным числам z. Найти $|z|$ и $\arg z$:

а) $z = -5$;

б) $z = 2{,}3i$;

в) $z = -1 - i$;

г) $z = 3 - i$.

10.1.3. Дана точка $z = 2 + 3i$. Построить на этой же плоскости точки: $-2 + 3i$, $-2 - 3i$, $2 - 3i$, $2 + 0i$, $0 + 3i$, $-2 + 0i$, $0 - 3i$.

10.1.4. Представить в алгебраической форме числа:

а) $2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$;

б) $-\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

10.1.5. Даны комплексные числа

а) $z = 5 - 5i$;

б) $z = 2$.

Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

10.1.6. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $2 + 4i$;

б) $\sqrt{3} - i$;

в) 2001;

г) $2\cos\frac{\pi}{3} - 2i\sin\frac{\pi}{3}$.

10.1.7. Представить в показательной форме комплексные числа:

а) $12i$;

б) $1 - \sqrt{3}$;

в) $-4 - 3i$;

г) $\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$.

10.1.8. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 2$;

б) $\arg z = \frac{\pi}{3}$;

в) $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1{,}5$;

г) $\operatorname{Re} z > 1$;

д) $\begin{cases} |z| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3}{4}\pi. \end{cases}$

◐ а) Согласно формуле (1.1), имеем $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, т. е. $x^2 + y^2 = 4$. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z| = 2$, т.е. $x^2 + y^2 = 4$ представляет собой окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.

б) Точки z лежат на луче, выходящем из точки $O(0;0)$ под углом $\frac{\pi}{3}$ к действительной оси.

в) Неравенство $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1{,}5$ можно переписать так $0 \leqslant \leqslant y < 1{,}5$.

г) Условие $\operatorname{Re} z > 1$ или $x > 1$ определяет множество всех точек, расположенных справа от прямой $x = 1$.

д) Множества точек, расположенных внутри и на границе круга $|z| \leqslant 1$, заключенных между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ удовлетворяют условию $\begin{cases} |z| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

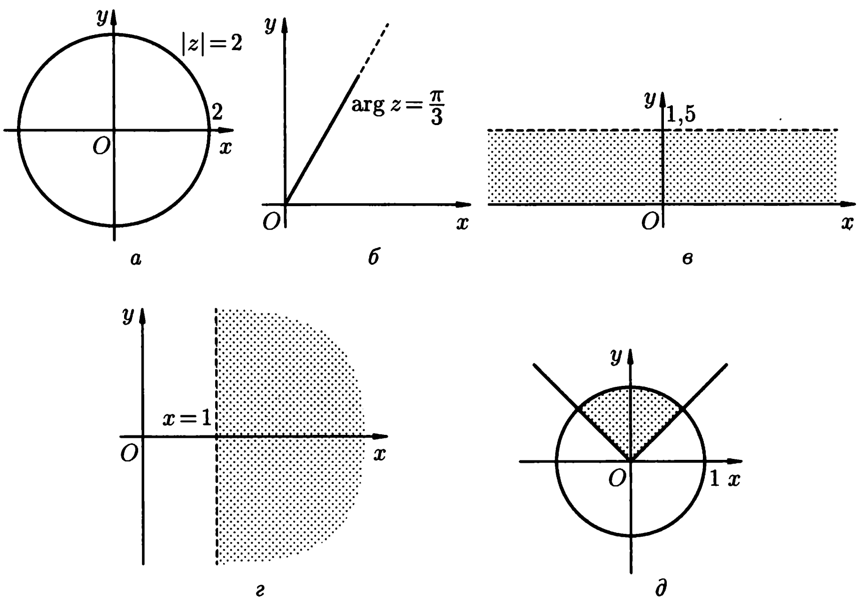


Рис. 114

Множества точек а)–д) изображены на рис. 114. ●

10.1.9. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $|z| > 2$;

б) $|\operatorname{Im} z| < 2$;

в) $-\frac{\pi}{4} < \arg z \leqslant 0$.

10.1.10. Указать на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям:

а) $1 \leqslant |z| \leqslant 4$, $|\operatorname{Re} z| \geqslant \sqrt{2}$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant 0{,}7$;

б) $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$, $|z| > 0{,}2$;

в) $\arg z = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Дополнительные задачи

10.1.11. Найти все значения аргумента комплексного числа:

а) -6;

б) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

10.1.12. Найти главное значение аргумента комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, если:

а) $\sin\varphi = -0{,}5$;

б) $\sin\varphi = 0{,}5$, $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.1.13. Представить в тригонометрической и алгебраической формах числа:

а) $5e^{-\frac{\pi}{2}i}$;

б) $-2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$.

10.1.14. Представить в тригонометрической и показательной формах числа:

а) $-3+4i$;

б) $3(\cos 10^\circ - i\sin 10^\circ)$;

в) $1 + i\cdot\operatorname{tg} 1$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

10.1.15. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $1 + \cos 22^\circ + i\sin 22^\circ$;

б) $\sin\varphi + i\cos\varphi$;

в) $1 - i\operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

г) $5\left(\cos\frac{4}{3}\pi - i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$.

10.1.16. Найти наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если $z = 2\sin\alpha + i\cos\alpha$.

10.1.17. При каких значениях x и y комплексные числа $z = x + 2i$ и $z = 4 + \sqrt{3}yi$.

а) равны?

б) сопряжены?

10.1.18. Могут ли быть сопряженными: два действительных числа? два чисто мнимых? действительное и мнимое число?

10.1.19. Пусть $\arg z = \frac{3}{7}\pi$. Чему равен $\arg \bar{z}$?

10.1.20. Какое из чисел больше: $z = 2 - i$ или $z = -2 + i$?

10.1.21. Каковы условия равенства комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме?

§ 2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданные *в алгебраической форме*, определяются следующими равенствами:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{2.1}$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{2.2}$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2), \tag{2.3}$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{2.4}$$

$$(\text{при } z_2 \neq 0).$$

Из равенства (2.2) следует, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}, \tag{2.5}$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Из равенства (2.3) следует, что

$$i^2 = -1.$$

При умножении комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме* их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Отсюда следует *формула Муавра для возведения комплексных чисел* в натуральную степень:

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{2.6}$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$$\text{где } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, n - 1. \tag{2.7}$$

10.2.1. Найти z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1=1+2i$, $z_2=2-i$.

❍ Используя формулы (2.1)–(2.4), находим:

$$z_1+z_2=(1+2i)+(2-i)=3+i;$$
$$z_1-z_2=(1+2i)-(2-i)=-1+3i;$$
$$z_1\cdot z_2=(1+2i)\cdot(2-i)=2-i+4i-2i^2=4+3i;$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5i}{5}=i.$$ ●

10.2.2. Найти $(-1-i\sqrt{3})^{15}$.

❍ Запишем число $z=-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме: $|z|=r=\sqrt{1+3}=2$, $\arg z=\varphi=\operatorname{tg}\dfrac{(-\sqrt{3})}{(-1)}-\pi=-\frac{2}{3}\pi$, т. е.

$$-1-i\sqrt{3}=2\Big(\cos\Big(-\frac{2}{3}\pi\Big)+i\sin\big(-\frac{2}{3}\pi\big)\Big).$$

По формуле Муавра (2.6) имеем

$$(-1-i\sqrt{3})^{15}=\Big[2\Big(\cos\Big(-\frac{2}{3}\pi\Big)+i\sin\Big(-\frac{2}{3}\pi\Big)\Big)\Big]^{15}=$$
$$=2^{15}\cdot(\cos(-10\pi)+i\sin(-10\pi))=2^{15}(1+0i)=2^{15}=32768.$$ ●

10.2.3. Вычислить:
а) $(1-i)\cdot(-3+2i)$;
б) $\dfrac{1+2i}{3-i}+(1-i)^2$.

10.2.4. Вычислить:
а) $\dfrac{2+3i}{4-2i}+\dfrac{1-3i}{2i}$;
б) $i^2+i^3+i^4+i^5$.

10.2.5. Найти:
а) $\left(\dfrac{i^{16}+3}{i^6+3}\right)^5$;
б) $(1+i)^{10}$.

10.2.6. Найти:
а) $\dfrac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}$;
б) $(-1+i)^5$.

10.2.7. Доказать, что:
а) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$;
б) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$.

10.2.8. Доказать, что:
а) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$;
б) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

10.2.9. Вычислить: $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots i^{100}$.

10.2.10. Вычислить: $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+i^{44}+i^{54}+i^{64}+i^{74}+i^{84}$.

10.2.11. Решить уравнение $z^5+32=0$ на множестве комплексных чисел.

❍ Перепишем уравнение в виде $z=\sqrt[5]{-32}$. Число (-32) представим в тригонометрической форме:

$$-32=32(\cos\pi+i\sin\pi).$$

По формуле (2.7) находим

$$z = \sqrt[5]{32(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, 4$, получим

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) \approx 1{,}6180 + 1{,}1756 \cdot i,$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right) \approx -0{,}6180 + 1{,}9021 \cdot i,$$

$$z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right) \approx -0{,}6180 - 1{,}9021 \cdot i,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right) \approx 1{,}6180 - 1{,}1756 \cdot i.$$

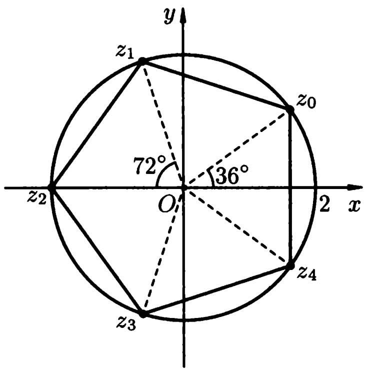


Рис. 115

Найденным корням уравнения соответствуют вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (рис. 115). ●

10.2.12. Найти действительные решения уравнения:

а) $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$;

б) $x + y + ixy = i$.

10.2.13. Найти:

а) действительные решения;

б) комплексные решения

системы уравнений $\begin{cases} (2 + i)x + (2 - i)y = 6, \\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8. \end{cases}$

10.2.14. Вычислить $\dfrac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24}-i\cdot(1+i)^{24}}$.

10.2.15. Вычислить $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

10.2.16. Найти все значения корня $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

10.2.17. Решить уравнение $z^3+1=0$.

10.2.18. Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

а) $\begin{cases} 1 \leqslant z\cdot\bar{z} \leqslant 2, \\ -\sqrt{3} \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0; \end{cases}$

б) $|z-i| = |z+2|$;

в) $\begin{cases} |z-i| < 1, \\ \arg z \geqslant \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z+1-i) \leqslant \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

а) Так как $z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$, а $\operatorname{Im} z = y$, то данную систему неравенств можно записать в виде $\begin{cases} 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2, \\ -\sqrt{3}\leqslant y\leqslant 0. \end{cases}$

Неравенства $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R=1$ и $R=2$ с центром в начале координат. Неравенства $-\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми $y=-\sqrt{3}$ и $y=0$, включая прямые $y=-\sqrt{3}$ и $y=0$. Искомое множество точек z заштриховано на рисунке 116.

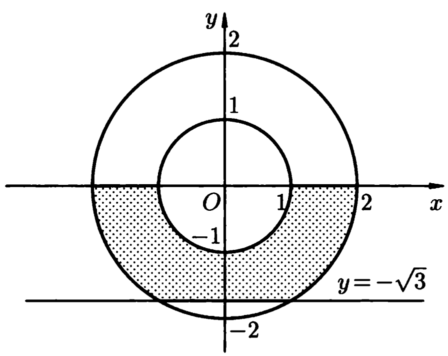


Рис. 116

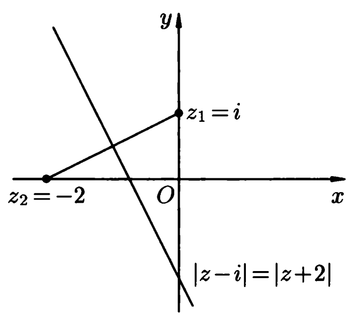


Рис. 117

б) Согласно формуле (2.5), равенству $|z-i| = |z-(-2)|$ удовлетворяет множество точек z, равноудаленных от точек $z_1=i$ и $z_2=-2$. Это множество точек представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z_1 = i$ и $z_2 = -2$ (см. рис. 117).

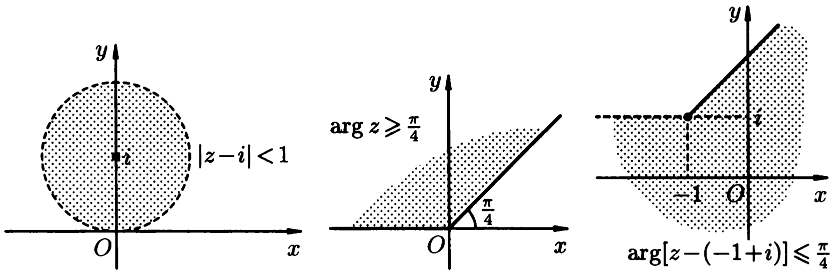


Рис. 118

в) Изобразим на отдельных рисунках множества точек, удовлетворяющих каждому из неравенств условия (см. рис. 118).

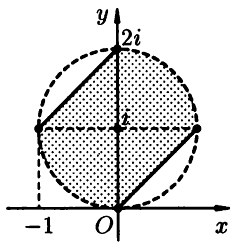


Рис. 119

Находим пересечение трех полученных областей — это и будет искомое множество (выделено на рис. 119). ●

10.2.19. Изобразить на рисунке множество точек z, удовлетворяющих условию $|z-3| = 2 \cdot |z|$.

10.2.20. Изобразить на комплексной плоскости множество точек z, для которых выполняется условие $|3+iz| \leqslant |z|$.

Дополнительные задачи

10.2.21. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если

а) $z = (2-i)^2 \cdot (3+4i)$;

б) $z = i^8 + \dfrac{5+i}{1-3i}$.

10.2.22. Решить уравнения:

а) $z^2 + \bar{z} = 0$;

б) $|z| - 3z = -12i$.

10.2.23. Вычислить:

а) $\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right)^{12}$;

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

10.2.24. Доказать справедливость тождеств:

а) $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$;

б) $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.

Указание. Использовать формулу Муавра: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$.

10.2.25. Найти все значения корня:

а) $\sqrt[3]{-i}$;

б) $\sqrt[4]{8 - 8\sqrt{3}\cdot i}$;

в) $\sqrt[4]{-16}$;

г) $\sqrt[5]{1+i}$.

10.2.26. Найти расстояние между точками:

а) $1 - 6i$ и $2i$;

б) $1 + 4i$ и $3 - 2i$.

10.2.27. Найти комплексные числа, каждое из которых сопряжено со своим квадратом.

10.2.28. Решить уравнение ($x \in \mathbb{C}$):

а) $x^2 - 4x + 8 = 0$;

б) $3x^2 - x + 2 = 0$.

10.2.29. Выполнить действия:

а) $\frac{8(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)}{16(\cos(-50^\circ) + i\sin(-50^\circ))}$;

б) $\sqrt{2}\cdot(1-i)(1+i\sqrt{3})(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

10.2.30. Выполнить действия. Результат предоставить в алгебраической форме:

а) $\left(\sqrt{2}\cdot e^{\frac{2\pi}{9}i}\right)^3$;

б) $3\cdot e^{\frac{\pi}{5}i}\cdot 4e^{\frac{4}{5}\pi i}$.

10.2.31. На плоскости $\mathbb{C}$ нарисовать область, заданную неравенствами:

а) $|z+i| < 1,\ |z+1| \geqslant 1$;

б) $|z-2-i| \geqslant 1,\ 1 \leqslant \operatorname{Re} z < 3,\ 0 < \operatorname{Im} z \leqslant 3$;

в) $|z| < 2,\ \operatorname{Re} z \geqslant 1,\ \arg z < \frac{\pi}{4}$.

10.2.32. Дано: $z = \frac{1}{\sqrt{2}(1-i)} - \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$. Найти: $\bar{z}$ и $\frac{1}{z}$.

10.2.33. Доказать формулы Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{2.8}$$

10.2.34. Используя формулы Эйлера, выразить через косинусы и синусы кратных дуг функции:

а) $\cos^4 x$;

б) $\sin^2 x$.

10.2.35. Решить уравнения:

а) $z^2 - (2i - 5)z + 5 - 5i = 0$;

б) $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

10.2.36. Доказать, что последовательность чисел $\{z_n\}$, где $z_n = \cos nx + i \sin nx$ есть геометрическая прогрессия. Найти ее знаменатель.

10.2.37. Доказать, что если $|z| = 1$, то $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

10.2.38. Из всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - \sqrt{3} + i| \leqslant 1$ найти число, имеющее наименьшее значение главного аргумента.

10.2.39. Найти число с наибольшим модулем среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z + 3 - 4i| = 3$.

10.2.40. Найти $(1 + \sin\varphi + i\cos\varphi)^{16}$.

10.2.41. Найти модуль и аргумент комплексного числа z, если:

а) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$;

б) $z = \dfrac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})^4}{\left(\sin\frac{3\pi}{10} + i\cos\frac{7\pi}{10}\right)^2}$;

в) $z = \left(1 - \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 \cdot \left(1 - i\operatorname{ctg}\frac{11}{10}\pi\right)^3$.

10.2.42. Пользуясь формулой Муавра (см. (2.6)), выразить $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

10.2.43. Найти сумму:

а) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$; $\quad (n \in \mathbb{N})$;

б) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$; $\quad (n \in \mathbb{N})$.

Указание. Использовать формулы Эйлера (см. (2.8)).

10.2.44. Решить уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$;

б) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$;

в) $|\bar{z}| - 2z = 2i - 1$.

10.2.45. При каких действительных значениях x и y числа $z_1 = x^2 + 4y - yi$ и $z_2 = 4 + y - \frac{2}{i} - x^2 \cdot i$ будут сопряженными?

10.2.46. Зная точку z, на комплексной плоскости построить точку:

а) $z' = z - 3$;

б) $z' = iz$;

в) $z' = z + (2 - i)$.

10.2.47. Сколько и какие значения имеет произведение $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4}$?

10.2.48. При каком условии квадрат комплексного числа $x+iy$ является чисто мнимым числом?

10.2.49. Указать на плоскости $\mathbb{C}$ точки z, для которых:

а) $\bar{z} = \frac{1}{z}$;

б) $\bar{z} = -\frac{1}{z}$.

10.2.50. Вычислить:

а) $|e^{i\varphi}|$;

б) $|\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi|$.

10.2.51. Может ли сумма квадратов двух комплексных чисел быть отрицательной?

10.2.52. Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z в результате умножения этого числа на:

а) 2;

б) $2i$;

в) $-2i$.

10.2.53. Вычислить:

а) $\sqrt{1}$;

б) i^{2001}.

10.2.54. Нарисовать на плоскости $\mathbb{C}$ область, заданную неравенствами:

а) $|z+i| \leqslant 2,\ \operatorname{Re} z > \sqrt{2}$;

б) $|\operatorname{Re} z| \leqslant 2,\ |\operatorname{Im} z| < 1$;

в) $|z-1| < 1,\ \arg z \leqslant \frac{\pi}{4},\ \arg(z-1) > \frac{\pi}{4}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Вычислить:

а) $\frac{1+3i}{-2+i} \cdot (-2i) + 1$;

б) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{160}$.

2. Найти модуль и аргумент комплексного числа z:

а) $z = (-5+i) \cdot (-5-i)$;

б) $z = \left(\frac{4+3i}{5}\right)^{10}$.

3. Решить уравнение:

а) $z^2 - 8iz - 15 = 0$;

б) $z^3 + 8i = 0$.

4. Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z, удовлетворяющих условию:
   а) $|z-2|-|1-2\bar{z}|=0$;
   б) $|z-1+i| \geqslant 1$, $\operatorname{Re} z < 1$, $\operatorname{Im} z \leqslant -1$.

5. Найти число с наименьшим аргументом среди чисел z, удовлетворяющих условию: $|z-8|=4$.

Вариант 2

1. Вычислить:

   а) $1 - i^5 + i^{10} - i^{15} + \dots + i^{50}$;

   б) $\dfrac{3+4i}{i} + \dfrac{4-i}{3+2i}$.

2. Вычислить $(z_1 \cdot z_2)^{10}$, если $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \dfrac{1}{4}(\sin 30^\circ + i\cos 30^\circ)$.

3. Решить уравнение:
   а) $z^2 - 4z + 20 = 0$;
   б) $\bar{z} \cdot |z| = 4 - 3i$.

4. Изобразить на комплексной области множества всех точек z, удовлетворяющих условию:
   а) $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$;
   б) $|z-1-i| < 1$, $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

5. Где расположены точки $1+2z$, для которых $|z| = 1$?

Вариант 3

1. Найти:

   а) $\dfrac{(2+3i)(5-i)}{2+i}$;

   б) $(2i-1)^4 - (2i+1)^4$.

2. Представить в тригонометрической и показательной формах числа:
   а) $z = 1 - \sqrt{3}$;
   б) $z = -2 - 4i$;
   в) $z = 3\left(\sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}\right)$;

3. Решить уравнение:

   а) $z^2 - z + 5 = 0$;

   б) $z^6 = \frac{1}{i}$.

4. Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z, удовлетворяющих условию:

а) $\begin{cases} 1 \leqslant |z + 2i| \leqslant 3, \\ -\frac{2}{1} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{5}{2}. \end{cases}$

б) $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{2}$.

5. Вычислить: $\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n-\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Вариант 4

1. Вычислить:

а) $(1 = 2i)^3 - \frac{4i}{4 - 3i}$;

б) $i^3 + i^{13} + i^{23} + \cdots + i^{53}$.

2. Представить в тригонометрической и показательной формах числа:

а) $z = -17{,}2i$;

б) $z = -0{,}3 + 2{,}4i$;

в) $z = -\operatorname{ctg}\alpha + i$ $(0 < \alpha < \pi)$.

3. Решить уравнения:

а) $z^2 + 8z + 41 = 0$;

б) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

4. Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z, удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$;

б) $|z - 2i| \leqslant \left|\sin\frac{3}{2} - i\cos\frac{3}{2}\right|$.

5. Найти число с наименьшим модулем среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию: $|2 - 2iz| = |z - 4|$.

Глава 11. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГРАФИК И ЛИНИИ УРОВНЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение функции нескольких переменных

$\Rrightarrow$ Переменная z называется *функцией двух переменных* x и y, если каждой упорядоченной паре $(x;y)$ значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ соответствует единственное число z.

Обозначения: $z = f(x;y)$, $z = F(x;y)$, $z = z(x;y)$ и так далее.

$\Rrightarrow$ Переменная величина u называется *функцией* от n переменных $x;y;z;\ldots;t$, если каждому набору этих переменных соответствует единственное значение переменной u: $u = f(x;y;z;\ldots;t)$.

Всякая функция нескольких переменных становится функцией меньшего числа переменных, если часть переменных (аргументов) зафиксировать.

Например, функции $u = f(x;y;z)$, $u = f(x;y;a)$, $u = f(x;b;a)$, где a и b — постоянные, являются функциями соответственно трех, двух и одной переменной.

В дальнейшем, в основном, будем рассматривать функции двух переменных $z = f(x;y)$ или $z = z(x;y)$. Под функцией $z = f(x;y)$ будем понимать также функцию точки $M(x;y)$ с координатами x и y.

$\Rrightarrow$ Множество D всех точек $(x;y)$, при которых $z = f(x;y)$ имеет смысл, называется *областью определения*, а множество значений z, принимаемых функцией $z = f(x;y)$ при $(x;y) \in D$, называется *областью изменения* или *множеством значений* функции.

График функции двух переменных. Линии уровня

$\Rrightarrow$ Множество точек пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами $(x;y;z) = (x;y;f(x,y))$ при всех $(x;y) \in D$ называется *графиком функции* $z = f(x;y)$.

Для наглядного геометрического представления используют *линии уровня* для функции двух переменных и *поверхности уровня* для функции трех переменных.

⇛ *Линией уровня* функции $z = f(x; y)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, в которых функция z принимает постоянное значение, т. е. $f(x; y) = c$, где c — постоянная.

⇛ *Поверхностью уровня* функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ называется множество всех точек пространства $Oxyz$, в которых функция u принимает постоянное значение, т. е. $f(x; y; z) = c$, где $c = \text{const}$.

11.1.1. Выразить объем прямоугольного параллелепипеда, вписанного в шар радиуса R как функцию двух его измерений x и y. Найти область определения этой функции.

❍ Исходим из построенного чертежа (рис. 120). Обозначим два измерения, скажем, $AB = x$, $AC = y$. Пусть R — радиус шара, тогда $BD = 2R$. Объем параллелепипеда (прямоугольного) равен $V = xyh$ ($h = CD$) и нам надо выразить h через R, x и y. Из $\triangle DBC$ имеем $h^2 = 4R^2 - BC^2$, а из $\triangle ABC$ получаем $BC^2 = x^2 + y^2$. Значит, $h^2 = 4R^2 - x^2 - y^2$, а тогда $V = xy\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$ — искомая функция двух переменных. Ее область определения: $4R^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, т. е. круг $x^2 + y^2 \leqslant 4R^2$ радиуса $2R$ с центром в начале координат. ●

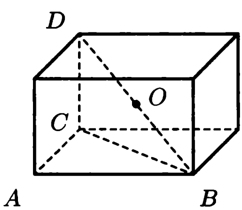


Рис. 120

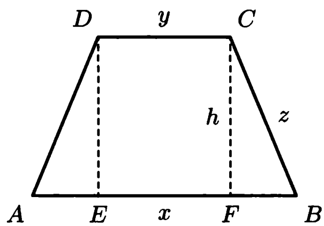


Рис. 121

11.1.2. Выразить площадь S равнобочной трапеции как функцию трех величин: длин оснований x и y и боковой стороны z.

❍ Имеем $S = S_{\text{трап}} = \frac{1}{2}(x + y)h$ (см. рис. 121), а из $\triangle FCB$ имеем $h^2 = z^2 - BF^2$, где $BF = AE = \frac{1}{2}(x - y)$. Искомая функция имеет вид $S = \frac{1}{2}(x + y)\sqrt{z^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2}$. Это функция трех переменных $x; y; z$ с областью определения $0 \leqslant x - y \leqslant 2z$. ●

11.1.3. Выразить площадь треугольника как функцию длин двух его сторон x и y при условии, что известен полупериметр треугольника p.

11.1.4. В шар радиуса R вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник, а вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Составить зависимость объема V пирамиды как функцию сторон x и y ее основания. Однозначна или нет эта функция? Найти область определения функции.

11.1.5. Выразить объем V конуса как функцию его образующей l и высоты h. Указать область определения этой функции.

11.1.6. Дано $f(x;y) = \dfrac{(x+y)^2}{2xy}$. Найти:

а) $f(2;3)$;

б) $f\left(1;\frac{y}{x}\right)$;

в) $f(x;-x)$;

г) $f(0;y)$;

д) $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$.

○ а) Чтобы найти $f(2;3)$, надо в выражении для $f(x,y)$ подставить $x = 2$, $y = 3$ и выполнить указанные в f действия. Имеем $f(2;3) = \dfrac{(2+3)^2}{2\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{25}{12}$.

б) $f\left(1;\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2}{2\cdot 1\cdot \frac{y}{x}} = \dfrac{(x+y)^2}{2xy} = f(x;y)$.

в) $f(x;-y) = \dfrac{\left(x+(-x)\right)^2}{2x(-x)} = 0$.

г) $f(0;y) = \dfrac{0+y}{2\cdot 0\cdot y}$ — не существует.

д) $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2}{2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} = \dfrac{(x+y)^2}{2xy} = f(x;y)$. ●

11.1.7. Для функции $f(x;y) = \dfrac{x^2-y^2}{2xy}$ найти:

а) $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$;

б) $f(-x;-y)$;

в) $f(y;x)$;

г) $\dfrac{1}{f(x;y)}$.

11.1.8. Для функции $f(x;y) = xy + \dfrac{x}{y}$ найти:

а) $f(1;-1)$;

б) $f\left(\dfrac{1}{2};3\right)$;

в) $f(y;x)$;

г) $f\left(1; \frac{y}{x}\right)$;

д) $f\left(\frac{x}{y}; \frac{y}{x}\right)$;

е) $f(x-y; x+y)$.

11.1.9. Дано $f(x+y; x-y) = (x+y)^2 y^2$. Найти $f(x;y)$.

◔ Введем обозначения

$$\begin{cases} x+y=u, \\ x-y=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2}, \\ y=\dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x+y, x-y) = f(u,v) =$$
$$= \left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = u^2 \cdot \frac{(u-v)^2}{4}.$$

Из $f(u;v) = u^2 \dfrac{(u-v)^2}{4}$ следует, что $f(x;y) = x^2 \dfrac{(x-y)^2}{4}$. ●

11.1.10. Найти $f(x)$, если $f\left(\frac{y}{x}\right) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, $(x>0)$.

11.1.11. Найти $f(x;y)$, если $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

11.1.12. Пусть $z = x + y + f(x-y)$. Известно, что $z = x^2$ при $y=0$. Определить вид f и z.

11.1.13. Найти область определения и множество значений функции $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Построить график этой функции и линии уровня $z = c$.

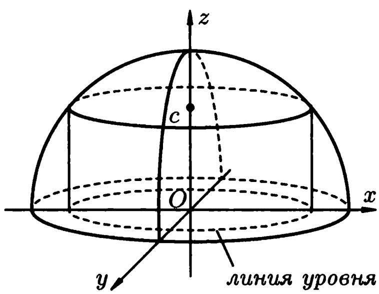


Рис. 122

◔ Действие извлечение квадратного корня возможно при условии $R^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$. Это неравенство определяет замкнутый круг радиуса R с центром в начале координат $O(0;0)$. Данная функция определяется уравнением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а значит ее графиком Г является верхняя полусфера (рис. 122). Линиями уровня являются окружности $x^2 + y^2 = R^2 - c^2$ при условии $0 \leqslant c \leqslant R$. Отсюда, в частности, следует, что множество значений функции — отрезок $z \in [0, R]$. ●

Примечание. Для успешного решения последующих примеров рекомендуем вспомнить (см. гл. 5):

а) определения и канонические уравнения линий второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола) и их элементы (фокусы, полуоси, асимптоты, эксцентриситет и пр.);

б) канонические уравнения поверхностей второго порядка (сфера, эллипсоид, параболоиды эллиптический и гиперболический, гиперболоиды однополостный и двуполостный, конусы, цилиндры и пр.), их геометрические изображения и метод параллельных сечений.

11.1.14. Найти область определения функции $z = \ln(x^2 - y^2 - R^2)$, $R > 0$, а также построить некоторые линии уровня для этой функции.

◐ Область определения этой функции характеризуется неравенством $x^2 - y^2 > R^2$. Она ограничена гиперболой с уравнением $\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1$ с асимптотами $y = \pm x$, полуосями $a = b = R$ (ее фокусы расположены в точках $F_1(-R\sqrt{2}; 0)$, $F_2(R\sqrt{2}; 0)$; напомним $c^2 = a^2 + b^2 = 2R^2$). Для того, чтобы найти точки $(x; y) \in D$, удовлетворяющие неравенству $x^2 - y^2 > R^2$, нужно проверить, верно или неверно оно в конкретных точках, не лежащих на самой гиперболе. Например, точки $(x; 0)$ оси Ox превращают неравенство $x^2 - y^2 > R^2$ в неравенство $x^2 > R^2$, и оно выполняется при $x > R$ и $x < -R$ (на двух лучах), а точки $(0; y)$ оси Oy превращают неравенство $x^2 - y^2 > R^2$ в неверное неравенство $-y^2 > R^2$. Таким образом, область $D = \{(x; y) : x^2 - y^2 > R^2\}$ определяет внутреннюю часть гиперболы (это части плоскости, ограниченные гиперболой и содержащие ее фокусы, на рис. 123 они заштрихована).

Функция $z = \ln(x^2 - y^2 - R^2)$ принимает постоянное значение $z = c$ в точках $x^2 - y^2 - R^2 = e^c$, т. е. на гиперболе $\frac{x^2}{R^2 + e^c} - \frac{y^2}{R^2 + e^c} = 1$ (на рис. 123 изображена линия уровня $c = 1$). Отметим, что плоскости $z = c$, параллельные плоскости Oxy, пересекают график Г функции $z = \ln(x^2 - y^2 - R^2)$ по линиям, проекции которых и есть линии уровня. При этом, если $c > 0$, то сечения Г с плоскостью расположены над плоскостью Oxy, а при $c < 0$ — под ней. ●

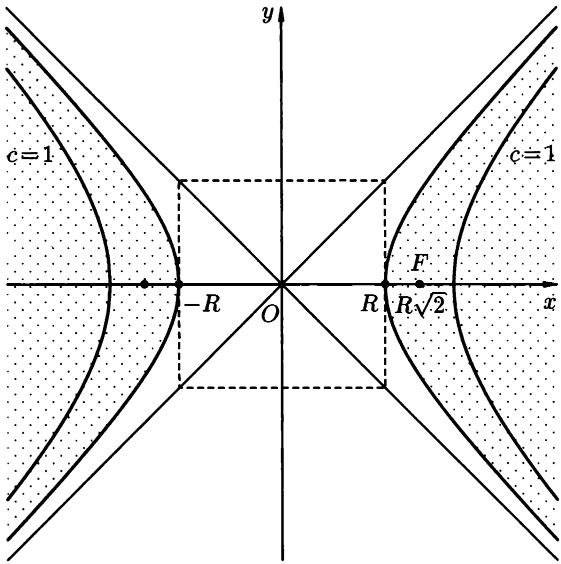


Рис. 123

Примечание. Представим себе, что поверхность Γ (график функции $z = f(x;y)$) пересечен плоскостями $z = c_1, z = c_2, \ldots z = c_n, \ldots$, равноотстоящими друг от друга. Тогда проекции полученных сечений на плоскость Oxy принадлежат D и представляют собой линии уровня функции. Густота или разреженность этих линий в некоторой области позволяет судить о степени роста поверхности $z = f(x;y)$ в соответствующей области. На рисунке 124 изображено несколько линий уровня функции $z = f(x;y)$. В точке $M_0(x_0;y_0)$ функции $f(x;y)$ имеет экстремум (максимум или минимум). Слева от M_0 линии уровня гуще, а $f(x;y)$ растет (убывает) быстрее; справа от M_0 линии уровня реже, а $f(x;y)$ растет (убывает) медленнее.

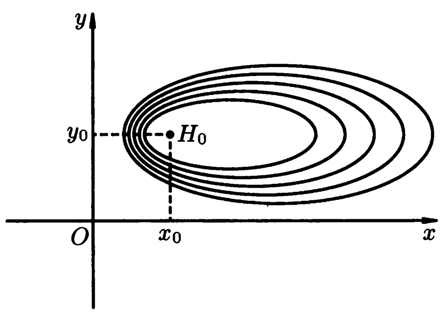


Рис. 124

Найти и изобразить области определения следующих функций:

11.1.15. $z = \sqrt{y \sin x}$.

11.1.16. $z = \sqrt{1 + \sqrt{-(x+y)^2}}$.

11.1.17. $z = x + \arccos y$.

11.1.18. $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.

11.1.19. $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.

11.1.20. Найти области определения функции $u(x; y; z) = \arccos \frac{x}{2} + \arcsin \frac{y}{2} + \operatorname{arctg} z$.

❍ Область определения этой функции задается неравенствами $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, $z \in (-\infty, \infty)$. Первые два неравенства определяют квадрат в плоскости Oxy, а условие $z \in \mathbb{R}$ означает, что каждая прямая, проходящая через точку квадрата перпендикулярно ему, принадлежит области определения. Значит, D — бесконечный в направлении Oz параллелепипед (рис. 125). ●

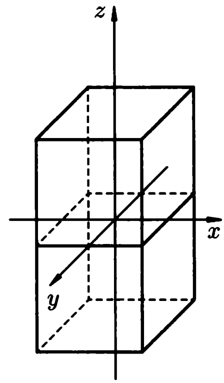


Рис. 125

11.1.21. Найти области определения функции $u(x; y; z) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$.

❍ Неравенство $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ определяет замкнутую внутренность эллипсоида. ●

Найти области определения функции трех переменных:

11.1.22. $u = \sqrt{z - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

11.1.23. $u = \sqrt{z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$.

11.1.24. $u = \ln xyz$.

11.1.25. $u = \sqrt{1 - x - y - z}$.

11.1.26. Найти линии уровня функции $z = \frac{x}{\sqrt{y}}$.

❍ Линия уровня $z = c$ определяется уравнением $x = c\sqrt{y}$. Это полупарабола, расположенная в первой четверти при $c > 0$, во второй четверти плоскости Oxy при $c < 0$, и полуось Oy ($x = 0$, $y > 0$), если $c = 0$. ●

Найти линии уровня данных функций:

11.1.27. $z = x + y$.

11.1.28. $z = \sqrt{xy}$.

11.1.29. $z = x^2 - y^2$.

11.1.30. $z = (1 + x + y)^2$.

11.1.31. Найти поверхности уровня функции $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

◐ Поверхности уровня этой функции — это эллипсоиды $\frac{x^2}{ua^2} + \frac{y^2}{ub^2} + \frac{z^2}{uc^2} = 1$ при $u > 0$, а при $u = 0$ — это точка $O(0;0;0)$. ●

Найти поверхности уровня функций трех переменных:

11.1.32. $u = x + y + z$.

11.1.33. $u = x^2 + y^2 + z^2$.

11.1.34. $u = x^2 + y^2 - z^2$.

Дополнительные задачи

11.1.35. Дано $f(x;y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - \frac{x+y}{x-y}$. Найти:

а) $f(y;x)$;

б) $f\left(\frac{1}{x};\frac{1}{y}\right)$;

в) $f(-x;-y)$;

г) $f\left(1;\frac{y}{x}\right)$.

11.1.36. Найти значение функции $f(x;y) = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{10 - x^2 - y^2}$ в точках окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

11.1.37. Даны функции $f(x;y) = x^2 + y^2$ и $g(x;y) = x^2 - y^2$. Найти:

а) $f\big(g(x;y);y^2\big)$;

б) $g\big(f(x;y);g(x;y)\big)$.

11.1.38. Даны функции $f(x;y) = e^x \cos y$, $g(x;y) = e^x \sin y$. Доказать равенства:

а) $f^2(x;y) - g^2(x;y) = f(2x;2y)$;

б) $2f(x;y)g(x;y) = g(2x;2y)$.

11.1.39. Даны функции $f(x;y) = x^2 - y^2$, $g(x) = \cos x$, $\varphi(x) = \sin x$. Найти:

а) $f\big(g(x);\varphi(x)\big)$;

б) $g\big(f(x;y)\big)$.

Найти (описать, изобразить) область определения данных функций:

11.1.40. $z = \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$.

11.1.41. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(9 - x^2 - y^2)}$.

11.1.42. $z = \log_3(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

11.1.43. $z = \arccos \frac{x+y}{x^2 + y^2}$.

11.1.44. $z = \sqrt{1 + y - x^2} - \sqrt{1 - y - x^2}$.

11.1.45. $z = \arcsin \frac{x}{y}$.

11.1.46. $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$.

11.1.47. $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.

11.1.48. $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

11.1.49. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ $(r < R)$.

11.1.50. $u = \arccos \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$.

Более сложные задачи

11.1.51. Подобрать аналитическое выражение функции двух переменных $z = f(x; y)$ так, чтобы областью определения такой функции были бы следующие множества:

а) плоскость с выброшенной точкой $A(2; -3)$;

б) плоскость с выброшенными точками $A(2; -3)$ и $B(3; -2)$;

в) плоскость с выброшенной окружностью $x^2 + y^2 = 4$;

г) плоскость, из которой выброшены парабола $x^2 = 2y$ и прямая $x = -2$;

д) плоскость, из которой выброшены точки вида $A(m; 0)$, где $m \in \mathbb{Z}$ (напомним, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел);

е) плоскость, из которой выброшены точки вида $B(0; n)$ $n \in \mathbb{Z}$;

ж) плоскость, из которой выброшены точки $C(m; n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$;

з) полукруг $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $y < 0$;

и) полукруг $x^2 + y^2 < 4$, $y \leqslant 0$;

к) внешняя часть круга $x^2 + (y - 3)^2 > 9$;

л) часть плоскости, ограниченная параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x - y - 4 = 0$;

м) область, ограниченная параболами $y^2 = x$ и $y^2 = 4x$ и гиперболами $xy = 4$, $xy = 8$.

11.1.52. Подобрать функции $f(x)$ и $g(x)$ так, чтобы имели место формулы:

а) $f(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$;

б) $g(x + y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$;

в) $f(x + y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$;

г) $f(x + y) = f(x)f(y)$.

11.1.53. Показать, что функция $F(x; y) = \ln x \cdot \ln y$ удовлетворяет уравнению $F(xy; uv) = F(x; u) + F(x; v) + F(y; u) + F(y; v)$.

11.1.54. Выразить функцию $z = (x^2 + y^2)^4 \ln \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ через переменные u и v, если $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.

11.1.55. Пусть $z = g(u; v) = \arcsin(u + v)$, а $u = 2x - 3y$, $v = x + y$. Указать область определения функции $z = \varphi(x; y)$.

§ 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА МНОЖЕСТВЕ

Предел функции в точке

Под *d-окрестностью* точки $M_0(x_0; y_0)$ будем понимать круг (открытый) радиуса d с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$, т. е. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < d^2$.

Если из этого круга удалить его центр, то получим проколотую d-окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$, т. е. $0 < (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < d^2$.

Предположим, что функция двух переменных $z = f(x; y)$ определена в некоторой проколотой d-окрестности точки M_0.

$\Rrightarrow$ Число A называется пределом функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого) найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $M(x; y)$, отличных от $M_0(x_0; y_0)$ и отстоящих от M_0 меньше, чем на δ, выполняется неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Обозначения $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(M) = A$, $\lim\limits_{\Delta r \to 0} f(x,y) = A$ $(\Delta r = |M_0M|)$.

Очевидно, что процесс поиска предела функции двух переменных, а тогда и доказательство равенства

$$A = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x; y)$$

существенно сложнее случая одной переменной хотя бы потому, что условия

$$M \to M_0 \iff \begin{cases} x \to x_0, \\ y \to y_0 \end{cases} \iff \Delta r \to 0$$

сложнее и разнообразнее: в них заложено произвольное приближение точки $M(x; y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$.

Наряду с определением предела, приведенным выше, который также называется *двойным пределом*, имеет смысл рассматривать и так называемые *повторные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(\lim\limits_{y\to y_0} f(x; y)\Big)$ и $\lim\limits_{y\to y_0}\Big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x; y)\Big)$. При определенных условиях эти пределы могут оказаться равными и совпадающими с двойным. Но этот вопрос мы обсуждать не будем, отсылая к более полным руководствам (например, Г.М. Фихтенгольц, том 1).

Замечание. Данное определение двойного предела будем сохранять и в том случае, когда функция $f(x; y)$ определена только на некотором множестве E, имеющем предельную точку M_0. Точка M_0 называется предельной точкой (или точкой сгущения) множества E, если каждая окрестность M_0 содержит хотя бы одну точку множества E. В таком случае $x \to x_0$, $y \to y_0$ или $(x; y) \to (x_0; y_0)$ означает, что точка $M(x; y)$ принадлежит только множеству E.

При вычислении двойных пределов можно и нужно использовать известные теоремы о пределах для функции одной переменной. Для краткости, будем писать $f(M)$ вместо $f(x;y)$.

Теорема 11.1 (о пределах). Пусть $f(M)$ и $g(M)$ — две функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки M_0 и $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=B$. Тогда

1) $\lim\limits_{M\to M_0}(f\pm g)(M)=A\pm B$;
2) $\lim\limits_{M\to M_0}(f\cdot g)(M)=A\cdot B$;
3) $\lim\limits_{M\to M_0}\frac{f}{g}(M)=\frac{A}{B}(B\neq 0)$;
4) $\lim\limits_{M\to M_0}(f(M))^{g(M)}=A^B(A>0)$.

Непрерывность функции в точке

⇛ Функция $z=f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0,
2) имеет предел в этой точке: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$,
3) этот предел равен значению функции в этой точке: $A=f(M_0)$.

Замечание. Данное определение непрерывности функции в точке M_0 будем сохранять и в том случае, когда $f(x;y)$ определена только на некотором множестве E, содержащем точку M_0. В этом случае условие 2) определения предела имеет вид $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in E}} f(M)=A$.

Если функция $f(x;y)$ не определена в точке $M_0(x_0;y_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)\neq f(x_0;y_0)$, то $M_0(x_0;y_0)$ называется точкой разрыва.

Имеют место свойства, аналогичные свойствам непрерывных функций одной переменной.

Теорема 11.2 (о переходе к пределу). Если $f(M)$ непрерывна в точке M_0, то $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f\Big(\lim\limits_{M\to M_0} M\Big)$.

Теорема 11.3 (о сохранении знака). Если $f(M)$ непрерывна в точке M_0 и $f(M_0)>0$ ($f(M_0)<0$), то найдется d-окрестность точки M_0, в которой $f(M)>0$ ($f(M)<0$).

Теорема 11.4 (о непрерывных функциях). Пусть $f(M)$ и $g(M)$ — две функции, определенные в некоторой окрестности точки M_0 и непрерывные в этой точке. Тогда в этой точке непрерывны также функции $(f \pm g)(M)$, $(f \cdot g)(M)$, $\dfrac{f}{g}(M)$ при $g(M_0) \neq 0$, $(f(M))^{g(M)}$ при $f(M_0) > 0$.

Теорема 11.5 (о непрерывности сложной функции). Пусть $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 и непрерывна в точке M_0, при этом значения $f(M)$ попадают в некоторую окрестность точки P_0, причем $f(M_0) = P_0$. Пусть $g(P)$ определена в окрестности точки P_0 и непрерывна в этой точке. Тогда сложная функция (суперпозиция) $g[f(M)] = \varphi(M)$ непрерывна в точке M_0.

Функции непрерывные на множестве

$\Rrightarrow$ Функция, непрерывная в каждой точке некоторого множества точек E называется *непрерывной на этом множестве.*

Для функций непрерывных на множестве имеют место аналоги теорем для функций одной переменной.

$\Rrightarrow$ Множество E называется *связным*, если две любые его точки можно соединить некоторой непрерывной кривой, полностью принадлежащей этому множеству.

Теорема 11.6 (Коши об обращении в ноль). Если $z = f(M)$ непрерывна на связном множестве E и в двух различных его точках принимает значения разных знаков, то в E найдется точка P такая, что $f(P) = 0$.

$\Rrightarrow$ Множество E называется *ограниченным*, если оно целиком принадлежит некоторому кругу $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

$\Rrightarrow$ Множество E называется *открытым*, если каждая точка принадлежит ему вместе с некоторой окрестностью.

$\Rrightarrow$ Открытое связное множество называется *областью.* Если к точкам области D присоединить точки ее границы, то такая область называется *замкнутой* и обозначается $\bar{D}$.

Под *граничной точкой* области D имеется в виду такая точка P, в каждой окрестности которой имеются как точки области D, так и точки не принадлежащие D. Граница области обозначается ∂D. Следовательно, $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Для функций непрерывных в замкнутых областях имеют место теоремы Вейерштрасса, которые объединены в одну.

Теорема 11.7 (Вейерштрасса). Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то она ограничена в ней. При этом непрерывная функция достигает в замкнутой области свои наибольшее и наименьшее значения.

11.2.1. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$?

○ Функция $\dfrac{x-y}{x+y}$ определена в проколотой окрестности точки $O(0;0)$ вне прямой $x+y=0$ (см. замечание на с. 457), поэтому условие $(x;y) \to (0;0)$ означает, что $x+y \neq 0$.

Если применить здесь обычный метод «проб и ошибок», то можно получить такие результаты.

1) Обозначая $f(x;y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ и устремляя $M(x;y)$ к $O(0;0)$ вдоль оси Ox, т.е. принимать $y=0$, а $x \to 0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y) =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-0}{x+0} = 1$.

2) Если устремим $M(x;y)$ к $O(0;0)$ вдоль оси Oy, т.е. принимать $x=0$, $y \to 0$, то $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x;y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-y}{0+y} = -1$.

Разные «предельные числа» означают, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$ не существует (предел должен быть единственным).

Предлагаем самостоятельно получить еще некоторые предельные числа, рассматривая приближение $M(x;y)$ к $O(0;0)$ по разным направлениям, например, вдоль прямых $y = kx$ с различными k, вдоль парабол $y = kx^2$ или $x = ky^2$ и пр. ●

11.2.2. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{e^{y(x+y-2)}-1}{3(1+x)(x+y-2)}$.

○ Исходя из того, что $x+y-2 \to 0$ при $x \to 0$ и $y \to 2$, используя известную формулу $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha} = 1$ и теорему 11.1, легко заключаем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{e^{y(x+y-2)}-1}{y(x+y-2)} \cdot \dfrac{y}{3(1+x)} = \dfrac{2}{3}$. ●

11.2.3. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\sin(x+2y-3)}{(x+2y)^2-9}$.

○ Будем использовать первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ с $\alpha = x+2y-3$ стремящемся к нулю при $x\to 1$, $y\to 1$. Имеем $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\sin(x+2y-3)}{(x+2y-3)(x+2y+3)} = \dfrac{1}{6}$. ●

11.2.4. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x-y^2)\cdot\sin\dfrac{1}{x+y}\cdot\cos\dfrac{x}{x-y}$.

○ Если $x\to 0$ и $y\to 0$, то $x-y^2\to 0$, т.е. $x-y^2$ — величина бесконечно малая. Множители $\sin\dfrac{1}{x+y}$ и $\cos\dfrac{x}{x-y}$ являются величинами ограниченными, а потому согласно теореме, произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая, т.е. (считаем $x\to 0$, $y\to 0$ и $x+y\neq 0$, $x-y\neq 0$) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x-y^2)\cdot\sin\dfrac{1}{x+y}\cdot\cos\dfrac{x}{x-y}=0$. ●

11.2.5. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -3}} \dfrac{\ln(3+x^2+y)}{2+y+x^2}$.

○ Обозначим $t=2+y+x^2$. Тогда при $x\to 1$ и $y\to -3$ имеем $t\to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -3}} \dfrac{\ln(3+x^2+y)}{2+y+x^2} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$. ●

Вычислить пределы:

11.2.6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cdot\cos\dfrac{1}{y}$.

11.2.7. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{2(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$.

11.2.8. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{\operatorname{tg}(x+y)\cdot e^{x-y}}{x^2-y^2}$.

11.2.9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\sin x(y^2+2y-4)}{x(y^2+2)}$.

11.2.10. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

11.2.11. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

○ Условие $(x;y)\to(\infty;\infty)$ преобразуем в условие $(z;t)\to(0;0)$ при помощи подстановок $x=\dfrac{1}{z}$, $y=\dfrac{1}{t}$. Получаем $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ t\to 0}} \dfrac{(z+t)zt}{z^2-tz+t^2}$.

Из известного неравенства (Коши) имеем $z^2+t^2\geqslant 2tz$. А тогда $t^2+z^2-tz\geqslant tz$, и поэтому $\left|\dfrac{(z+t)zt}{z^2-tz+t^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{(z+t)zt}{zt}\right|\leqslant|z+t|$.

И поскольку $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ t\to 0}}(z+t)=0$, то заключаем, что $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ t\to 0}} \dfrac{(z+t)zt}{z^2-tz+t^2}=0$. ●

Найти пределы:

11.2.12. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

11.2.13. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}(x^2+y^2)e^{-3(x+y)}$.

11.2.14. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(1+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

11.2.15. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3y-\sin x}{\sqrt{9+\sin x-\operatorname{tg}^2 3y}-3}$.

○ Числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела умножим на сопряженное знаменателя. После сокращения дроби результат получаем подстановкой

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(\operatorname{tg}^2 3y-\sin x)(\sqrt{9+\sin x-\operatorname{tg}^2 3y}+3)}{9+\sin x-\operatorname{tg}^2 3y-9}=-6. \quad ●$$

11.2.16. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

○ При вычислении пределов в некоторых случаях полезно переходить к полярным координатам: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Ясно, что если $x\to0$, $y\to0$, то $r\to0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^3\cos\varphi\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\lim_{r\to0}r\cos\varphi\sin\varphi=0. \quad ●$$

Найти пределы:

11.2.17. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin^3\dfrac{1}{xy}$.

11.2.18. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to-2}}\dfrac{(x-1)^5(y+2)}{(x-1)^2+(y+2)^2}$.

11.2.19. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$.

11.2.20. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x-y^2}{\sqrt{4-x+y^2}-2}$.

11.2.21. Непрерывна ли функция $f(x;y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ при $x\neq0$, $y\neq0$ и $f(0;0)=0$.

○ Проверяем условия непрерывности функции в точке $O(0;0)$.

1) Функция $f(x;y)$ определена в окрестности этой точки.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$, так как имеем $x+y\to0$, а $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|$ ограничена.

3) Предел в точке равен значению функции в этой точке $f(0;0)=0$. Функция непрерывна в точке $O(0;0)$.

Добавим, что эта функция непрерывна в каждой точке $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ как комбинация непрерывных элементарных функций.

Замечание. Если бы функция $f(x;y)$ была бы неопределена в точке $O(0;0)$, то, доопределив ее в этой точке нулем, мы бы получили непрерывную функцию. ●

Исследовать на непрерывность данные функции в указанных точках:

11.2.22. $f(x;y) = \begin{cases}(x+y)\arccos\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{при } x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0, & \text{при } x=0,\ y=0\end{cases}$ в точке $O(0;0)$.

11.2.23. $f(x;y) = \begin{cases}(x-y-3)\cos\dfrac{x+y-1}{x-y+3}, & \text{при } x\neq 4,\ y\neq 1,\\ 0, & \text{при } x=4,\ y=1\end{cases}$ в точке $M_0(4;1)$.

11.2.24. $f(x;y) = \begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy^2)}{3xy^2}, & \text{при } x\neq 0,\ y\neq 0,\\ \dfrac{1}{3} & \text{при } x=0,\ y=0\end{cases}$ в точке $O(0;0)$.

11.2.25. Функция $f(x;y)=(x^2+y)^{\frac{1}{x^2+y-1}}$, $x\neq 0$, $y\neq 1$ не определена в точке $M_0(0;1)$. Можно ли ее доопределить в этой точке так, чтобы она стала непрерывной?

◐ Данная функция не определена в точках параболы $y=1-x^2$, а значит не определена в проколотой окрестности точки $O(0;1)$. Тогда находимся в условиях замечания на с. 458, где в качестве множества E принимаем произвольную окрестность точки $O(0;1)$, из которой исключены точки параболы. Остается найти соответствующий предел.

Имеем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(x^2+y)^{\frac{1}{x^2+y-1}} = \left\{\begin{matrix} t=x^2+y-1, x^2+y=1+t\\ (x;y)\to(0;1)\Longrightarrow t\to 0\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Значит, если положить $f(0;1)=e$, то соответствующая функция непрерывна в точке $(0;1)$. Добавим, что рассматриваемую функцию можно доопределить как непрерывную в каждой точке $(x_0;y_0)$ параболы $y=1-x^2$, если положить $f(x_0;y_0)=e$. ●

Доопределить до непрерывной данную функцию в указанной точке (см. примечание к задаче 11.2.21):

11.2.26. $f(x;y) = \dfrac{(x-1)^3(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$, $M_0(1;2)$.

11.2.27. $f(x;y) = \dfrac{(x-1)(y-1)^2}{(x-1)(y-1)+(x-1)^2+(y-1)^2}$, $M_0(1;1)$.

11.2.28. $f(x;y) = \dfrac{x(y-1)^2}{6-\sqrt{x(y-1)^2+36}}$, $M_0(0;1)$.

11.2.29. $f(x;y) = \dfrac{\ln(1+xy^2)}{3xy^2}$, $M_0(0;4)$.

11.2.30. $f(x;y) = (x-y)\arcsin\dfrac{2\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|}$, $M_0(0;0)$.

11.2.31. Исследовать точки разрыва функции $f(x;y) = \dfrac{x^2+3x-y^2+2}{x^2+y^2}$.

○ Данная функция имеет единственную точку разрыва $M_0(0;0)$. В этой точке функция не определена, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y) = +\infty$. По аналогии с функцией одной переменной имеем дело с точкой бесконечного разрыва (разрыв второго рода). В остальных точках функция непрерывна. ●

11.2.32. Исследовать точки разрыва функции $f(x;y) = \dfrac{3x^2+y^2}{x^2+y^2-1}$.

○ Эта функция не определена в каждой точке окружности $x^2+y^2=1$. Если $(x;y)\to(x_0;y_0)$, где $(x_0;y_0)$ — произвольная точка окружности, то $f(x,y)\to\infty$. Точнее: если $(x;y)$ лежит внутри единичного круга и приближается к $(x_0;y_0)$, то $f(x,y)\to-\infty$, а если $(x;y)$ расположена вне единичного круга и приближается к $(x_0;y_0)$, то $f(x;y)\to+\infty$. В остальных точках плоскости функция $f(x;y)$ непрерывна. ●

11.2.33. Найти и исследовать точки разрыва функции $f(x;y;z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

○ Для этой функции трех переменных все точки конуса $x^2+y^2-z^2=0$ являются точками разрыва. В окрестности каждой точки поверхности конуса (разрыва) функция $f(x;y;z)$ бесконечно велика. ●

Найти и исследовать точки разрыва данных функций:

11.2.34. $f(x;y) = e^{-\frac{3}{x^2+y^2}}$.

11.2.35. $f(x;y) = e^{\frac{2}{x^2+y^2}}$.

11.2.36. $f(x;y) = \dfrac{x^2+y^2+1}{(x-y)^4}$.

11.2.37. $f(x;y) = \dfrac{1}{y-x^2}$.

Дополнительные задачи

Вычислить пределы

11.2.38. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{5\sin^3 x - \sin y^2}{\sqrt{25 + \sin y^2 - 5\sin^3 x} - 5}$.

11.2.39. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$.

11.2.40. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+y^2-4y+4}$.

11.2.41. $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 5}} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

11.2.42. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y^2)\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{y}\right)$.

11.2.43. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\arcsin x^2y}{xy^2}$.

11.2.44. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2+3(x^4+y^4)}{7(x^4+y^4)}$.

11.2.45. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -1}} \dfrac{e^{\sin xy}-1}{2x(x^2+y^2)}$.

11.2.46. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$.

11.2.47. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+3x^2+2y^2)^{\frac{2+x^2-y^2}{3x^2+2y^2}}$.

§ 3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Определение частных производных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$, определенную и непрерывную в некоторой области D. Считаем, что точки с координатами $(x;y)$, $(x+\Delta x;y)$, $(x;y+\Delta y)$, $(x+\Delta x;y+\Delta y)$, где $\Delta x, \Delta y$ — приращения аргументов, также принадлежат области D.

⇛ *Частными приращениями* функции $z = f(x;y)$ по независимым переменным x и y называются разности $\Delta_x z = f(x+\Delta x;y) - f(x;y)$, $\Delta_y z = f(x;y+\Delta y) - f(x;y)$.

⇛ *Полным приращением* функции $z = f(x;y)$, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy, называется разность $\Delta z = f(x+\Delta x;y+\Delta y) - f(x;y)$.

Заметим, что в общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

⇛ *Частной производной* функции $z = f(x;y)$ по переменным x и y называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ или $\Delta_y z$ к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Приняты также обозначения: z'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}z$, $\dfrac{\partial}{\partial x}f$, $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x;y)$ (аналогично по другой переменной).

Геометрический смысл частной производной

Исходим из рис. 126, на котором изображен график Г функции $z = f(x;y)$; $P_0(x_0;y_0;z_0)$ — точка на графике, $M_0(x_0;y_0)$ — проекция P_0 на плоскость Oxy, $z_0 = M_0P_0$. Через прямую M_0P_0 проведены две плоскости p_1 и p_2: p_1 параллельна плоскости Oxz, p_2 параллельна плоскости Oyz.

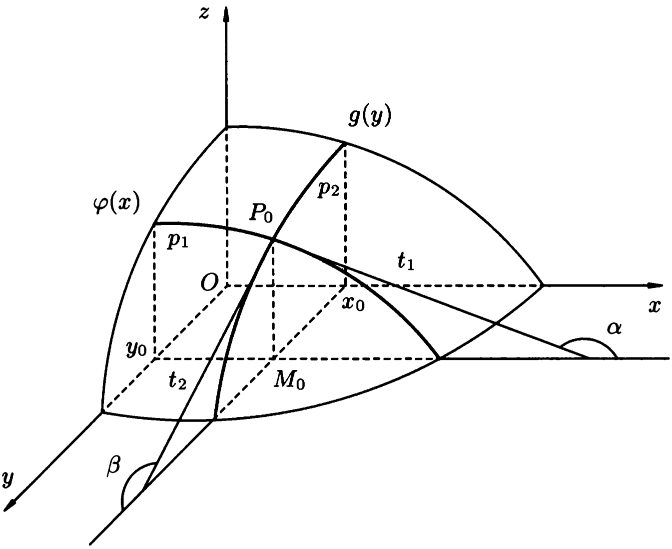


Рис. 126

Сечение Г с первой плоскостью представляет собой кривую $z = f(x;y_0) = \varphi(x)$ — функцию переменной x, а сечение Г с p_2 представляет кривую $z = f(x_0;y) = g(y)$ — функцию переменной y. На чертеже изображены также касательные t_1 к $\varphi(x)$ в точке P_0 и t_2 — к $g(y)$ в точке P_0. Тогда $z'_x(x_0;y_0) = \varphi'(x_0) = k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ — угловой коэффициент t_1, α_1 — угол наклона t_1 к Ox, $z'_y(x_0;y_0) = g'(y_0) = k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ — угловой коэффициент t_2, α_2 — угол наклона t_2 к Oy.

Дифференциал функции. Линеаризация функций

Если функция $f(x;y)$ обладает частными производными f'_x и f'_y, непрерывными в точке $M_0(x_0;y_0)$, то теорема Лагранжа (конечных приращений) для функции одной переменной позволяет получить следующее приближенное равенство (при $\Delta x \sim 0$, $\Delta y \sim 0$):

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0) = \\ &= f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0+\Delta y) + f(x_0; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0) = \\ &= f'_x(x_0+\theta_1\Delta x; y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0; y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y \approx \\ &\approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y\end{aligned}$$

($0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_1 < 1$ — некоторые числа, фигурирующие в теореме Лагранжа).

Таким образом, полное приращение функции приближенно равно $f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$.

$\Rrightarrow$ Это выражение представляет собой главную, линейную часть приращения функции и называется *дифференциалом* этой функции в данной точке.

Обозначение: $dz = z'_x dx + z'_y dy$ (здесь $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — произвольные приращения аргументов). Приняты также обозначения: $d_x z = z'_x dx$, $d_y z = z'_y dy$ — частные дифференциалы функции z. Тогда $dz = d_x z + d_y z$ — полный дифференциал функции z.

Как правило, под дифференциалом функции будем понимать полный дифференциал.

$\Rrightarrow$ Если полное приращение Δz функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ можно представить в виде $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$, где A и B не зависят от Δx и Δy, а $(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \to (0, 0)$ при $(\Delta x; \Delta y) \to (0; 0)$, то функция $f(x; y)$ называется дифференцируемой в точке M_0.

Теорема 11.8. Для того, чтобы функция $z = f(x; y)$ была дифференцируемой в данной точке, достаточно, чтобы она обладала частными производными, непрерывными в этой точке.

Сравнивая Δz и dz, заключаем, что они являются величинами одинакового порядка малости при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, т.е. $\Delta z \approx dz$ ($\Delta x \sim 0$, $\Delta y \sim 0$). Это приближенное равенство (тем точнее, чем меньше Δx и Δy), записанное в виде

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$$

называется *линеаризацией* функции $z = f(x; y)$ в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$.

Это соотношение применяется в приближенных вычислениях: дифференцируемую функцию можно заменить линейной функцией в окрестности рассматриваемой точки.

Замечание. Понятие частных производных, дифференциала, линеаризации распространяются на функции трех и более переменных.

11.3.1. Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2 - \frac{x}{y}$ в точке $M_0(3;-2)$ при приращениях аргументов $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}05$.

○ Принимаем $x_0 = 3$, $y_0 = -2$, $x_0+\Delta x=x=3{,}1$, $y_0+\Delta y=y= -2{,}05$, $M_1(3{,}1;-2{,}05)$. Сначала определим $z(M_0) = z(3;-2) = 3(-2)^2 + \frac{3}{2} = 13{,}50$. Далее,

$$z(x_0 + \Delta x; y_0) = z(3{,}1;-2) = 3{,}1\cdot(-2)^2 + \frac{3{,}1}{2} = 13{,}95;$$

$$z(x_0; y_0 + \Delta y) = z(3;-2{,}05) = 3\cdot(-2{,}05)^2 + \frac{3}{2{,}05} = 14{,}07;$$

$$z(M_1) = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = z(3{,}1;-2{,}05) = \\ = 3{,}1\cdot(-2{,}05)^2 + \frac{3{,}1}{2{,}05} = 14{,}54.$$

Таким образом,

$$\Delta_x z = z(x_0 + \Delta x; y_0) - z(x_0; y_0) = 0{,}45;$$

$$\Delta_y z = z(x_0; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0) = 0{,}57;$$

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0) = 14{,}54 - 13{,}50 = 1{,}04.$$

Очевидно, что $\Delta z = 1{,}04 \neq 0{,}45 + 0{,}57 = 1{,}02 = \Delta_x z + \Delta_y z$. ●

Найти частные и полное приращения данной функции в данной точке и при данных приращениях аргументов:

11.3.2. $z = x^2y$; $M_0(1;2)$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = -0{,}2$.

11.3.3. $z = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 - (x-y)^2}$; $M_0(2;2)$; $\Delta x = -0{,}2$; $\Delta y = 0{,}1$.

11.3.4. $z = \left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)^2$; $M_0(1;1)$; $\Delta x = -0{,}1$; $\Delta y = -0{,}1$.

Найти полные приращения данных функций в данных точках (или при переходе от точки M_0 к точке M_1):

11.3.5. $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$; $M_0(2;1)$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$.

11.3.6. $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$; $M_0(2;1)$; $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = 0{,}02$.

11.3.7. $z = x^2 - xy + y^2$; $M_0(2;1)$; $M_1(2{,}1;1{,}2)$.

11.3.8. $z = \lg(x^2 + y^2)$; $M_0(2;1)$; $M_1(2{,}1;0{,}9)$.

11.3.9. Найти частные производные функции $z = \frac{x}{y^3} + \frac{y}{x^3} - \frac{1}{6x^2y}$.

◯ Частные производные функции двух и более переменных определяются по тем же формулам и правилам, что и функции одной переменной. Следует помнить только одно правило: если по одной переменной дифференцируем, то остальные считаются постоянными.

Имеем $\left(\text{напомним, что } \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}\right)$:

$$z'_x = \frac{1}{y^3}(x)' + y\left(\frac{1}{x^3}\right)' - \frac{1}{6y}\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{y^3} - \frac{3y}{x^4} + \frac{1}{3x^3y};$$

$$z'_y = x\left(\frac{1}{y^3}\right)' + \frac{1}{x^3}(y)' - \frac{1}{6x^2}\left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{3x}{y^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{6x^2y^2}.$$ ●

11.3.10. Найти частные производные функции $z = \frac{x^2 - 2xy}{y^2 + 2xy + 1}$.

◯ Здесь используем правило дифференцирования дроби.

$$z'_x = \frac{(2x - 2y)(y^2 + 2xy + 1) - (x^2 - 2xy)2y}{(y^2 + 2xy + 1)^2};$$

$$z'_y = \frac{-2x(y^2 + 2xy + 1) - (2y + 2x)(x^2 - 2xy)}{(y^2 + 2xy + 1)^2}.$$ ●

Найти частные производные данных функций:

11.3.11. $z = e^{x^2+y^2}$.

11.3.12. $u = t^5 \sin^3 z$.

11.3.13. $v = x^4 \cos^2 y - y^4 \sin^3 x^5$.

11.3.14. $z = x^2 \cos 2xy - y^2 \sin(x+y)$.

11.3.15. $u = x^y + (xy)^z + z^{xy}$.

11.3.16. Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал функции $z = \cos \frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$.

◯ Здесь имеем дело с производными сложной функции и дроби.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin \frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right)'_x =$$

$$= -\sin \frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \frac{2x(x^3 + y^3) - 3x^2(x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2}.$$

Ввиду симметрии выражения $\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$ относительно x и y можно писать сразу

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin \frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \frac{2y(x^3 + y^3) - 3y^2(x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2}.$$

После преобразований получаем ответы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-x^4-3x^2y^2+2xy^3}{(x^3+y^3)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-y^4-3x^2y^2+2x^3y}{(x^3+y^3)^2};$$

$$d_xz = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\,dx;$$

$$d_yz = \frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\,dy;$$

$$dz = \frac{1}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\times$$
$$\times\Big[x(x^3+3xy^2-2y^3)dx + y(y^3+3x^2y-2x^3)\,dy\Big]. \qquad ●$$

11.3.17. Найти полный дифференциал функции $u = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

○ Так как

$$u'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad u'_y = \frac{-xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}, \quad u'_z = \frac{-xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}},$$

то полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xy\,dy + xz\,dz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}. \qquad ●$$

11.3.18. Вычислить приближенно $1{,}07^{3{,}97}$.

○ Число $1{,}07^{3{,}97}$ есть частное значение функции $f(x;y) = x^y$ при $x = 1{,}07$, $y = 3{,}97$. Известно, что $f(1;4) = 1$. Поэтому принимаем $x_0 = 1$, $y_0 = 4$. Тогда $\Delta x = x - x_0 = 0{,}07$, $\Delta y = y - y_0 = -0{,}03$. Значение $f(x+\Delta x; y+\Delta y)$ вычислим при помощи формулы линеаризации: $f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0)$. Имеем:

$$f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y\ln x, \quad f'_x(1;4) = 4, \quad f'_y(1;4) = 0,$$
$$df(1;4) = 4\cdot 0{,}07 + 0\cdot(-0{,}03) = 0{,}28.$$

Таким образом, $1{,}07^{3{,}97} \approx 1 + 0{,}28 = 1{,}28$. ●

Вычислить приближенно:

11.3.19. $1{,}04^{2{,}03}$.

11.3.20. $\sqrt{(1{,}04)^2+(3{,}01)^2}$.

11.3.21. $\sin 28^\circ\cdot\cos 61^\circ$.

11.3.22. Вычислить приближенно $\sqrt{(\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015})^5}$.

◐ 1) Принимаем $f(x;y) = (\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{5}{2}}$, $x_0 = 1{,}571 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$, $x = 1{,}55$, $\Delta x = x - x_0 = 1{,}55 - 1{,}571 = -0{,}021$, $y = 0{,}015$, $\Delta y = 0{,}015$.

2) $f(x_0;y_0) = (\sin\frac{\pi}{2} + 8e^0)^{\frac{5}{2}} = 243$.

3) $f'_x = \frac{5}{2}(\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin 2x$, $f'_y = \frac{5}{2}(\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{3}{2}} \cdot 8e^y$, $f'_x(x_0;y_0)=0$, так как $\sin 2x_0 = \sin\pi = 0$, $f'_y(x_0;y_0) = 20(1+8)^{\frac{3}{2}} = 540$, $df(x_0;y_0) = 540 \cdot 0{,}015 = 8{,}1$.

Окончательно,

$$\sqrt{(\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015})^5} \approx 243 + 8{,}1 = 251{,}1. \quad \bullet$$

Вычислить приближенно:

11.3.23. $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$.

11.3.24. $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$.

11.3.25. $\ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$.

11.3.26. Вычислить приближенно $\cos 2{,}36 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2{,}05}$.

◐ Имеем дело с функцией трех переменных $f(x;y;z) = \cos x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot 3^z$. $x_0 = \frac{3\pi}{4} = 2{,}356$, $x = 2{,}36$, $\Delta x = 0{,}004$, $y_0 = 1$, $y = 0{,}97$, $\Delta y = -0{,}03$, $z_0 = 2$, $z = 2{,}05$, $\Delta z = 0{,}05$. Наконец,

$$f(x_0;y_0;z_0) = \cos\frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{arctg} 1 \cdot 3^2 = -\frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \approx -4{,}9957.$$

Найдем сначала дифференциал в общем виде

$$df = -\sin x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot 3^z \Delta x + \frac{\cos x \cdot 3^z}{1+y^2}\Delta y + \cos x \operatorname{arctg} y \cdot 3^z \ln 3 \cdot \Delta z.$$

А теперь составим числовое выражение дифференциала в точке.

$$df(x_0;y_0;z_0) = -9\frac{\sqrt{2}\pi}{8} \cdot 0{,}004 - \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot 0{,}03 - 9\ln 3\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}05 \approx$$
$$\approx -0{,}0199 - 0{,}0954 - 0{,}2744 = -0{,}3718.$$

Окончательно,

$$\cos 2{,}36 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2{,}05} \approx -4{,}9957 - 0{,}3718 = -5{,}3675. \quad \bullet$$

Вычислить приближенно:

11.3.27. $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$.

11.3.28. $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98 \cdot \sqrt[4]{1{,}05^3}}}$.

Дополнительные задачи

Найти частные производные, частные дифференциалы данных функций по каждой из независимых переменных $(x, y, z, t, \ldots)$ и полный дифференциал:

11.3.29. $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$.

11.3.30. $v = \operatorname{arctg}\frac{u}{t}$.

11.3.31. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

11.3.32. $z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

11.3.33. $z = \sqrt{u + \sqrt{u^2 + v^2}}$.

11.3.34. $z = \ln\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$.

11.3.35. $z = \arccos\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

11.3.36. $z = \sin\frac{x}{y} \cdot \cos\frac{y}{x}$.

11.3.37. $z = (x^2 + y^2)\frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

11.3.38. $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$.

11.3.39. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

11.3.40. $u = x^{y^z}$.

11.3.41. Найти $u'_x + u'_y + u'_z$ при $x = y = z = 1$, если $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$.

11.3.42. Найти $\frac{z'_x + z'_y}{z'_x z'_y}$ при $x = 1$ и $y = 2$, если $z = x^3y - xy^3$.

11.3.43. Найти $\frac{\partial u}{\partial z}$ при $x=0$, $y=0$, $z=\frac{\pi}{4}$, если $u=\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$.

11.3.44. Найти значение полного дифференциала функции $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

11.3.45. Найти значение полного дифференциала функции $z = e^{xy}$ при $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = 0{,}1$.

11.3.46. Вычислить приближенно изменение функции $z = \frac{x + 3y}{y - 3x}$ при переходе x от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}5$ и y от $y_1 = 4$ до $y_2 = 3{,}5$.

Вычислить приближенно:

11.3.47. $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

11.3.48. $\sin 29° \sin 46°$.

11.3.49. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$.

11.3.50. $2{,}003^2 \cdot 3{,}998^3 \cdot 1{,}002^2$.

11.3.51. Высота конуса $H = 10$ см, радиус основания $R = 5$ см. Как изменится объем конуса при увеличении высоты на 2 мм и уменьшении радиуса на 2 мм?

11.3.52. Одна сторона прямоугольника $a = 6$ дм, другая $b = 8$ дм. Как изменится диагональ прямоугольника, если a уменьшить на 4 см, а b укоротить на 1 см?

11.3.53. Радиус основания конуса равен $10{,}2 \pm 0{,}1$ см, образующая равна $44{,}6 \pm 0{,}1$ см. Найти объем конуса и указать погрешность, вызванную неточностью данных.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Случай одной независимой переменной

Предположим, что $z = f(x;y)$ — дифференцируемая функция двух переменных x и y в некоторой области D, а аргументы x и y являются дифференцируемыми функциями некоторой переменной t, т. е. $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда $z = f[x(t);y(t)] = \varphi(t)$ — функция одной переменной t.

Теорема 11.9. Имеет место равенство

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Если t совпадает с одним из аргументов, скажем, $t = x$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

и $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной функции z по x.

Случай нескольких независимых переменных

Если аргументы x и y функции $z = f(x;y)$ являются функциями двух переменных, скажем, $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, то $z = f[x(u;v);y(u;v)]$ также является функцией двух переменных u и v.

Теорема 11.10. Пусть $z = f(x;y)$, $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ — дифференцируемые функции своих аргументов. Имеют место формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

Дифференциал сложной функции

Дифференциал сложной функции $z = z(x;y)$, где $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, можно получить, если в формуле дифференциала

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

заменить $dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$ и $dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$.

В результате подстановки и перегруппировки членов при du и dv приходим к формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

показывающей, что форма (вид) дифференциала не зависит от того, являются ли x и y независимыми переменными или функциями других независимых переменных. Это свойство называется *инвариантностью* формы первого дифференциала.

Неявная функция одной переменной

Функция $y = y(x)$ называется неявной функцией, если она определяется уравнением $F(x; y) = 0$, неразрешенным относительно y.

Это значит, что при каждом значении x_0, при котором неявная функция определена, она принимает единственное значение y_0 так, что $F(x_0; y_0) = 0$.

Теорема 11.11. Если $F(x; y)$ — дифференцируемая функция переменных x и y в некоторой области D и $F'_y(x; y) \neq 0$, то уравнение $F(x; y) = 0$ определяет однозначно неявную функцию $y(x)$, также дифференцируемую, и ее производная находится по формуле

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x; y)}{F'_y(x; y)}.$$

В частности,

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0; y_0)}{F'_y(x_0; y_0)}.$$

Неявная функция двух переменных

Функция $z = z(x; y)$ называется неявной функцией переменных x и y, если она определяется уравнением $F(x; y; z) = 0$, неразрешенным относительно z.

Теорема 11.12. Если функция $F(x; y; z)$ дифференцируема по переменным x, y, z в некоторой пространственной области D и $F'_z(x; y; z) \neq 0$, то уравнение $F(x; y; z) = 0$ определяет однозначную неявную функцию $z(x; y)$, также дифференцируемую и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}.$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $P_0(x_0; y_0; z_0)$ фиксированная точка на поверхности Γ, заданной функцией $z = f(x; y)$ или уравнением $F(x; y; z) = 0$.

$\Rrightarrow$ *Касательной плоскостью* к Γ в точке P_0 называется плоскость t, проходящая через точку P_0 и такая, что угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через P_0 и любую точку P поверхности Γ, стремится к нулю, когда P стремится к P_0 вдоль Γ. *Нормалью* называется прямая n, проходящая через P_0 перпендикулярно t.

Из определения t и n следует, что нормальный вектор касательной плоскости t и направляющий вектор прямой n совпадают.

Уравнения t и n имеют вид:

а) если Γ задана явно функцией $z = f(x; y)$, то:

$$(t): \quad z - z_0 = z'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0; y_0)(y - y_0),$$

$$(n): \quad \frac{x - x_0}{z'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1};$$

б) если Γ задана уравнением $F(x; y; z) = 0$, то:

$$(t): \quad F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0,$$

$$(n): \quad \frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

11.4.1. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z = e^{x^2+y^2}$, если $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

❍ В этом примере подстановка x и y в z приводит к $z(t) = e^{a(\cos^2 t + \sin^2 t)} = e^a$. Следовательно, $\frac{dz}{dt} = 0$. ●

11.4.2. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$, и $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{arctg} t$.

❍ Непосредственная подстановка очевидно не упрощает функцию z. Действуем согласно теореме 11.9.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}.$$

В результате можно как сохранить переменные x и y, так и заменить их через t (в зависимости от того, что проще). Ответ оставим в таком виде:

$$\frac{dz}{dt} = -2(5x^4 + 2y)\sin 2t + (2x - 3y^2)\frac{1}{1+t^2}.$$ ●

11.4.3. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = xy + xyv + yuv$, а $x = \sin t$, $y = \ln t$, $u = e^t$, $v = \operatorname{arctg} t$.

❍ Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=y+yv$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x+xv+uv$, $\frac{\partial z}{\partial u}=yv$, $\frac{\partial z}{\partial v}=xy+uy$.

$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t},\quad \frac{du}{dt}=e^t,\quad \frac{dv}{dt}=\frac{1}{1+t^2}.$$

Составим соответствующую сумму произведений

$$\frac{dz}{dt}=y(1+v)\cos t+(x+xv+uv)\frac{1}{t}+yve^t+\frac{x+u}{1+t^2}y. \qquad \bullet$$

Найти $\frac{dz}{dt}$, *если* $z=z(x;y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$:

11.4.4. $z=x^2+y^2+xy$, $x=a\sin t$, $y=a\cos t$.

11.4.5. $z=\cos(2t+4x^2-y)$, $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{\sqrt{t}}{\ln t}$.

11.4.6. $z=x^2y^3u$, $x=t$, $y=t^2$, $u=\sin t$.

11.4.7. $z=e^{xy}\ln(x+y)$, $x=t^3$, $y=1-t^3$.

11.4.8. $z=xy\operatorname{arctg}(xy)$, $x=t^2+1$, $y=t^3$.

11.4.9. $z=e^{2x-3y}$, $x=\operatorname{tg}t$, $y=t^2-t$.

11.4.10. $z=x^y$, $x=\ln t$, $y=\sin t$.

11.4.11. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=3^{x^2}\operatorname{arctg}y$, $x=\frac{u}{v}$, $y=uv$.

❍ Применим формулы из теоремы 11.10:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3^{x^2}\cdot 2x\ln 3\operatorname{arctg}y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3^{x^2}}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{u}{v^2},\quad \frac{\partial y}{\partial u}=v,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=u.$$

Составляем суммы соответствующих произведений:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=3^{x^2}\cdot\frac{2x\ln 3\operatorname{arctg}y}{v}+\frac{3^{x^2}}{1+y^2}v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-3^{x^2}\cdot\frac{2xu\ln 3\operatorname{arctg}y}{v^2}+\frac{3^{x^2}}{1+y^2}u.$$

Ответ можно оставить в такой форме, или выразить через u и v (т. е. основные переменные):

$$z'_u=2\frac{u}{v^2}\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}\ln 3\operatorname{arctg}(uv)+\frac{v}{1+u^2v^2}3^{\frac{u^2}{v^2}},$$

$$z'_v=-2\frac{u^2}{v^3}\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}\ln 3\operatorname{arctg}(uv)+\frac{u}{1+u^2v^2}\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}. \qquad \bullet$$

11.4.12. Найти дифференциал функции $z=\frac{x^2}{y}$, если $x=u-2v$, $y=2u+v$.

❍ Поскольку $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, то найдем все эти величины.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2},$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = du - 2dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = 2du + dv.$$

Подставляем в dz:

$$dz = 2\frac{x}{y}(du - 2dv) - \frac{x^2}{y^2}(2du + dv).$$

Подставим выражения для x и y и перегруппируем члены, выделяя множители при du и dv:

$$\begin{aligned} dz = \left(\frac{2x}{y} - 2\frac{x^2}{y^2}\right)du + \left(-\frac{4x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\right)dv &= \\ = \frac{x}{y}\left[2\left(1 - \frac{x}{y}\right)du - \left(4 + \frac{x}{y}\right)dv\right] &= \\ = \frac{u-2v}{2u+v}\left[2\left(1 - \frac{u-2v}{2u+v}\right)du - \left(4 + \frac{u-2v}{2u+v}\right)dv\right] &= \\ = \frac{u-2v}{(2u+v)^2}\left[2(u+3v)\,du - (9u+2v)\,dv\right]. \end{aligned}$$ ●

11.4.13. Дано $z = \ln(u^2+v^2)$, $u = x\cos y$, $v = y\sin x$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и dz.

❍ Здесь имеем другой порядок букв, а значит, формулы выглядят так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

где $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2+v^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = y\cos x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x.$$

Подставим

$$dz = \frac{2u}{u^2+v^2}(\cos y\,dx - x\sin y\,dy) + \frac{2v}{u^2+v^2}(y\cos x\,dx + \sin x\,dy) =$$

$$= \left(\frac{2u}{u^2+v^2}\cos y + \frac{2v}{u^2+v^2}y\cos x\right)dx + \left(-\frac{2ux\sin y}{u^2+v^2} + \frac{2v}{u^2+v^2}\sin x\right)dy.$$

Дальнейшая подстановка вместо u и v не улучшает структуру ответа. ●

Для данных $z = f(x; y)$, $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$ найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ и dz:

11.4.14. $z = x^3 + y^3$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

11.4.15. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, где $x = u^v$, $y = u \ln v$.

11.4.16. $z = \cos xy$, где $x = ue^v$, $y = v \ln u$.

11.4.17. $z = \operatorname{arctg} xy$, где $x = \sqrt{u^2 + v^2}$, $y = u - v$.

11.4.18. $z = \sqrt{x + y}$, где $x = u \operatorname{tg} v$, $y = u \operatorname{ctg} v$.

11.4.19. $z = \ln \sqrt[7]{x^2 + 3y^5}$, где $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.

11.4.20. Уравнение с двумя переменными $2x^2 - 3y^2 + 5xy - y^3x + x^5 = 37$ имеет решение $(x_0; y_0) = (2; -3)$. Определяет ли это уравнение неявную функцию $y = y(x)$ в окрестности точки $x = 2$ и если да, то найти $y'(x)$ и $y'(2)$.

◐ Обозначим $F(x; y) = 2x^2 - 3y^2 + 5xy - y^3x + x^5 - 37$. Имеем $F(2; -3) = 0$, $F'_y = -6y + 5x - 3y^2x$, $F'_x = 4x + 5y - y^3 + 5x^4$, $F'_x(2; -3) = 100$, $F'_y(2; -3) = -26$. Условие $F'_y(x_0; y_0) \neq 0$ обеспечивает существование неявной функции $y = y(x)$, дифференцируемой в некоторой окрестности точки $x_0 = 2$ и

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{4x + 5y - y^3 + 5x^4}{6y - 5x + 3y^2x}.$$

В частности, $y'(2) = \frac{100}{26} = \frac{50}{13}$.

Замечание. Производную $y'(x)$ можно найти также следующим образом. Перепишем данное уравнение с учетом того, что $y = y(x)$ есть функция от x:

$$2x^2 - 3y^2(x) + 5xy(x) - xy^3(x) + x^5 - 37 = 0.$$

Тогда полная производная левой части этого равенства (тождества) также равна нулю, т. е.

$$4x - 6y(x) \cdot y'(x) + 5y(x) + 5x \cdot y'(x) - y^3(x) - 3xy^2(x)y'(x) + 5x^4 = 0.$$

Отсюда (аргумент x в записи $y(x)$ опускаем)

$$y'(x) = \frac{4x + 5y - y^3 + 5x^4}{6y - 5x + 3xy^2}.$$ ●

11.4.21. Дано уравнение $-8x^2 + xy^2 + 2x^3y - 7 = 0$. Соответствующая линия пересекает прямую $x = 1$ в нескольких точках. Найти, сколько однозначных функций $y = y(x)$ определяет данное уравнение в окрестности $x = 1$, и составить уравнения касательных к этим кривым.

◐ 1) Обозначим $F(x; y) = -8x^2 + xy^2 + 2x^3y - 7$. Тогда $F(1; y) = y^2 + 2y - 15$ и $y^2 + 2y - 15 = 0$ при $y = 3$ и $y = -5$. Надо полагать, что уравнение $F(x; y) = 0$ определяет в окрестности

$x = 1$ две однозначные функции (ветви). Проверим это. Имеем $\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + 2x^3$ и $\frac{\partial F}{\partial y}(1;3) = 8$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1;-5) = -8$. Следовательно, $F(x;y)$ определяет две однозначные функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$: $y_1(1) = 3$, $y_2(1) = -5$.

2) Имеем $\frac{\partial F}{\partial x} = -16x + y^2 + 6x^2y$ и $\frac{\partial F}{\partial x}(1;3) = 11$, $\frac{\partial F}{\partial x}(1;-5) = -21$. Следовательно, $y_1'(1) = -\frac{11}{8}$, $y_2'(1) = -\frac{21}{8}$.

3) Касательные t_1 к $y_1(x)$ в $(1;3)$ и t_2 к $y_2(x)$ в $(1;-5)$ имеют вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = y_1'(1)$ или $y_2'(1)$. Получаем

$$(t_1):\quad y - 3 = -\frac{11}{8}(x-1) \quad \text{или} \quad 11x + 8y - 35 = 0,$$

$$(t_2):\quad y + 5 = -\frac{21}{8}(x-1) \quad \text{или} \quad 21x + 8y + 19 = 0.$$ ●

Найти производные $y'(x)$ неявных функций, заданных уравнениями:

11.4.22. $xe^{2y} - y\ln x = 8$.

11.4.23. $e^y + 9x^2e^{-y} - 26x = 0$.

11.4.24. $\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

11.4.25. $x^2\ln y - y^2\ln x = 0$.

11.4.26. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

11.4.27. Составить уравнения касательной и нормали в точке $M_0(1;1)$ к кривой $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^3 + 2xy^3 - yx^4 - 2 = 0$.

◐ Положим $F(x;y) = x^3 + 2xy^3 - yx^4 - 2$. Тогда $F(1;1) = 0$. Далее имеем $F_y' = 6xy^2 - x^4$, $F_y'(1;1) = 5$, $F_x' = 3x^2 + 2y^3 - 4x^3y$, $F_x'(1;1) = 1$. Условие $F_y'(1;1) \neq 0$ обеспечивает существование однозначной неявной функции $y(x)$ в окрестности точки $x_0 = 1$. Уравнение касательной к $y = y(x)$ имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = y'(x_0) = -\frac{1}{5}$, т.е. (t): $y - 1 = -\frac{1}{5}(x-1)$. Уравнение нормали имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$, т.е. (n): $y - 1 = 5(x-1)$.

Ответ. $(t): x + 5y - 6 = 0$, (n): $5x - y - 4 = 0$. ●

Составить уравнение касательной прямой и нормали к кривой $y = y(x)$, заданной уравнением $F(x;y) = 0$ в точке $M_0(x_0;y_0)$:

11.4.28. $x^3y - y^3x = 6$, $\quad M_0(2;1)$.

11.4.29. $x^2y^2 - x^4 - y^4 + 13 = 0$, $\quad M_0(2;1)$.

11.4.30. Дано уравнение $x^2y - xy^2 - xyz + 6 + xyz^3 = 0$. Оно имеет решение $(x_0;y_0;z_0) = (-2;1;2)$. Показать, что в окрестности этой точки данное уравнение определяет однозначную неявную функцию $z = z(x;y)$ и найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, dz в точке $(x_0;y_0) = (-2;1)$ и в ее окрестности.

○ Положим $F(x;y;z) = x^2y - xy^2 - xyz + xyz^3 + 6$. Имеем $F(-2;1;2) = 4 + 2 + 4 - 16 + 6 = 0$. Кроме этого,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy - y^2 - yz + yz^3, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 2xy - xz + xz^3,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = -xy + 3xyz^2.$$

Вычислим эти частные производные в данной точке:

$$\frac{\partial F(-2;1;2)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial F(-2;1;2)}{\partial y} = -4, \quad \frac{\partial F(-2;1;2)}{\partial z} = -22.$$

Условие $\dfrac{\partial F(-2;1;2)}{\partial z} \neq 0$ обеспечивает существование единственной неявной функции $z = z(x;y)$ такой, что $z(-2;1) = 2$. При этом

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{2xy - y^2 - yz + yz^3}{xy - 3xyz^2},$$
$$z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{x^2 - 2xy - xz + xz^3}{xy - 3xyz^2},$$
$$dz(x;y) = \frac{(2xy - y^2 - yz + yz^3)\,dx + (x^2 - 2xy - xz + xz^3)\,dy}{xy - 3xyz^2};$$

в частности, $z'_x(-2;1) = \frac{1}{22}$, $z'_y(-2;1) = -\frac{2}{11}$, $dz(-2;1) = \frac{1}{22}dx - \frac{2}{11}dy$. ●

11.4.31. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x;y)$, определенной неявно уравнением $x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 15$ в точке $P_0(2;-3;2)$.

○ Обозначим

$$F(x;y;z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 15.$$

Имеем $F(2;-3;2) = 0$,

$$\begin{aligned} &F'_x = 2x, && F'_y = 6y, && F'_z = -8z,\\ &F'_x(2;-3;2) = 4, && F'_y(2;-3;2) = -18, && F'_z(2;-3;2) = -16. \end{aligned}$$

В качестве нормального вектора плоскости t можно брать $\bar{N} = (2;-9;-8)$. Тогда

$$(t): \quad 2(x-2) - 9(y+3) - 8(z-2) = 0,$$
$$\text{т. е. } 2x - 9y - 8z - 15 = 0.$$
$$(n): \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-9} = \frac{z-2}{-8}.$$ ●

11.4.32. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 676$ найти точки, где касательные плоскости параллельны плоскости $3x + 4y + 12z = 15$.

◔ Предполагая, что искомая точка имеет координаты $P_0(x_0; y_0; z_0)$, имеем

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 676. \tag{4.1}$$

Обозначим $F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 676 = 0$. Тогда координаты нормального вектора $\overline{N}$ к плоскости t должны быть $(2x_0; 2y_0; 2z_0) = \overline{N}$, а сама касательная плоскость имеет уравнение

$$(t): \quad 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0,$$

или $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$. Поскольку эта плоскость параллельна данной плоскости, то их нормальные векторы коллинеарны:

$$(x_0; y_0; z_0) \parallel (3; 4; 12) \Longleftrightarrow x_0 = 3\alpha,\ y_0 = 4\alpha,\ z_0 = 12\alpha.$$

Подставим эти равенства в (4.1): $9\alpha^2 + 16\alpha^2 + 144\alpha^2 = 676$. Отсюда $\alpha = \pm 2$. Если $\alpha = 2$, то $P_0(6; 8; 24)$, а если $\alpha = -2$, то $P_0(-6; -8; -24)$. Это и есть искомые точки. ●

11.4.33. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и dz для неявной функций $z = z(x; y)$, определенной уравнением $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 0$.

◔ Обозначим $F(x; y; z) = z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x$.

Способ 1, основанный на формулах теоремы 11.12. Найдем частные производные функции F:

$$F'_x = 6xy + z - 2, \quad F'_y = 3x^2 + 2yz^2 + 1, \quad F'_z = 3z^2 + x + 2y^2z.$$

Значит,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{6xy + z - 2}{3z^2 + x + 2y^2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{2 - z - 6xy}{3z^2 + x + 2y^2z}dx - \frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}dy.$$

Способ 2 заключается в том, что если уравнение определяет неявную функцию $z = z(x; y)$, то имеем следующее тождество

$$z^3(x; y) + 3x^2y + xz(x; y) + y^2z^2(x; y) + y - 2x \equiv 0.$$

Дифференцируем это тождество сначала по x, затем по y (для краткости в $z(x; y)$ аргументы опускаем):

$$3z^2z'_x + 6xy + z + xz'_x + 2zy^2z'_x - 2 \equiv 0,$$
$$3z^2z'_y + 3x^2 + xz'_y + 2yz^2 + 2y^2zz'_y + 1 \equiv 0.$$

Из первого тождества

$$z'_x = -\frac{6xy + z - 2}{3z^2 + x + 2y^2 z},$$

из второго

$$z'_y = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2 z}.$$

Дифференциал составим по определению. ●

11.4.34. Найти z'_x и z'_y, если $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$.

◑ Действуем способом 2 (задача 11.4.33), дифференцируя это равенство сначала по x, затем по y, считая, что $z = z(x; y)$.

$$1 + z'_x = e^{-(x+y+z)}(-1 - z'_x), \quad 1 + z'_y = e^{-(x+y+z)}(-1 - z'_y).$$

Исходя из данного уравнения, в полученных равенствах заменим $e^{-(x+y+z)}$ на $x + y + z$. Получаем

$$1 + z'_x = (x + y + z)(-1 - z'_x), \quad 1 + z'_y = (x + y + z)(-1 - z'_y).$$

Отсюда $z'_x = \dfrac{-(x + y + z) - 1}{x + y + z + 1} = -1$, $z'_y = -1$, $dz = -dx - dy$. ●

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и dz для неявных функций $z = z(x; y)$, определяемых следующими уравнениями:

11.4.35. $z^3 - 3xyz = R^2$.

11.4.36. $x + y + z = e^z$.

11.4.37. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

11.4.38. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

11.4.39. К эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ провести касательные плоскости, отсекающие на координатных плоскостях равные по величине отрезки.

11.4.40. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 2x$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

11.4.41. Показать, что сфера $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$ и конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ касаются друг друга в точках $(0; \pm b; c)$.

Дополнительные задачи

Найти $\frac{dz}{dt}$ (или dz) для данных функций $z = z(x; y)$ или $z = z(x; y; u)$ если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$:

11.4.42. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

11.4.43. $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2,\ x = e^{2t},\ y = e^{2t}.$
11.4.44. $z = xy + \frac{x}{y},\ x = \operatorname{tg} t,\ y = \ln t.$
11.4.45. $z = \frac{x}{y^2}$, $x = \operatorname{arctg} 2t$, $y = \arcsin t$.
11.4.46. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad x = 5^{t^2},\quad y = \arccos 2t.$
11.4.47. $z = x\sin(x+y),\ x = \frac{1}{t^3},\quad y = (t-1)^2.$
11.4.48. $z = \frac{\cos x^2}{y},\ x = \ln(t+2),\quad y = \operatorname{tg} t.$
11.4.49. $z = \operatorname{tg}\frac{x^2}{y},\ x = \cos^2 t,\quad y = \sin 2t.$

Доказать, что уравнение касательной плоскости t, проведенной к данной поверхности в данной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет указанный вид:

11.4.50. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, (t): $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1$.
11.4.51. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, (t): $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{c^2}z = 1$.
11.4.52. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, (t): $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{c^2}z = -1$.
11.4.53. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, (t): $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{c^2}z = 0$.
11.4.54. $z = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$, (t): $z + z_0 = \frac{2x_0}{p^2}x + \frac{2y_0}{q^2}y$.
11.4.55. $z = \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2}$, (t): $z + z_0 = \frac{2x_0}{p^2}x - \frac{2y_0}{q^2}y$.

Установить, определяет ли уравнение $F(x; y) = 0$ однозначную неявную функцию $y = y(x)$ в окрестности данной точки $M_0(x_0; y_0)$:

11.4.56. $F(x; y) = x^2y^3 + x^3y^2 - 3xy + y^3$, $M_0(1; 1)$.
11.4.57. $F(x; y) = x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y)^2$, $M_0(0; 0)$.
11.4.58. $F(x; y) = x^3 - y^3 + 7x^2y + 5xy^2 - 12$, $M_0(1; 1)$.
11.4.59. $F(x; y) = x^3 + y^3 - 3axy$, $M_0(a\sqrt[3]{4}; a\sqrt[3]{2})$.
11.4.60. $F(x; y) = 3y^2 + 2x^3y + x^4 - 4y - 3x^2 - 5$, $M_0(-1; 1)$.
11.4.61. $F(x; y) = y^3 + 3x^2y + 2xy^2 - 4x - 6y$, $M_0(-1; 1)$.

Из следующих уравнений выразить явно y как функцию от x:

11.4.62. $y^4 - 6x^2y^2 + \operatorname{arctg} 2x = 0$.
11.4.63. $e^{-x+y^3} - 20x - 18x^3 - 1 = 0$.
11.4.64. $\operatorname{tg}(x^2 + y^4) - 3x^2 - 17 = 0$.
11.4.65. $x^2y^4 - 3y^3 - 6y^2 + 3y + x^2 = 0$.

11.4.66. Уравнение $x^2 + 2xy^2 + 3y^2 - 5x - 12xy + 2x + 6 = 0$ имеет решение $x_0 = 1, y_0 = 2$. Найти сколько однозначных неявных функций

$y = y(x)$ определяет данное уравнение в окрестности $x_0 = 1$. Составить уравнения касательных к этим кривым в соответствующих точках. Найти также, сколько однозначных неявных функций $x = x(y)$ определяет данное уравнение в окрестности точки $y_0 = 2$.

11.4.67. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u^2 \ln v$, где $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

11.4.68. Найти dz, если $z = f(u; v)$, где $u = \dfrac{2y}{x+y}$, $v = x^2 - 3y$.

11.4.69. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u; v)$, где $u = \ln(x^2 - y^2)$, $v = xy^2$.

11.4.70. Найти dz, если $z = u^2 v - uv^2$, где $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

11.4.71. Найти dz, если $z = f(u; v)$, где $u = \cos(xy)$, $v = x^5 - 7y$.

11.4.72. Найти dz, если $z = f(u; v)$, где $u = \sin \frac{x}{y}$, $v = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Выразить dz через x, y, z, dx и dy, если:

11.4.73. $x = \dfrac{u^2 + v^2}{2}, \quad y = \dfrac{u^2 - v^2}{2}, \quad z = uv.$

11.4.74. $x = \sqrt{a}(\sin u + \cos v), \quad y = \sqrt{a}(\cos u - \sin v), \quad z = 1 + \sin(u - v).$

11.4.75. $x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = u^2 v^2.$

11.4.76. $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u^2.$

11.4.77. $x = v \cos u - u \cos u + \sin u, \quad y = v \sin u - u \sin u - \cos u, \quad z = (u - v)^2.$

11.4.78. Показать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

Более сложные задачи

11.4.79. Пусть $F(x; y) = \int\limits_a^{x+y} f(t)\,dt$ ($f(t)$ — непрерывна). Найти F'_x, F'_y, dF.

11.4.80. Пусть $F(x, y) = \int\limits_x^{y} f(t)\,dt$ ($f(t)$ — непрерывна). Найти F'_x, F'_y.

11.4.81. Пусть $F(x, y) = \int\limits_a^{xy} f(t)\,dt$ ($f(t)$ — непрерывна). Найти dF.

Найти полные дифференциалы функций:

11.4.82. $u = f(x^2 y^3 z^4)$, где $x = \arcsin \frac{u}{v}$, $\quad y = \sqrt{v^2 - u^2}$, $\quad z = \ln v$.

11.4.83. $z = f(x, y)$, где $x = u \sin v$, $\quad y = u^2$.

11.4.84. $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$.

11.4.85. Показать, что функция $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, где $x = u + v$, $y = u - v$, удовлетворяет соотношению $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{u - v}{u^2 + v^2}$.

11.4.86. Показать, что функция $z = f(x^2 + y^2)$, где f — дифференцируемая функция, удовлетворяет соотношению $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

11.4.87. Пусть $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$. Показать, что какова бы ни была дифференцируемая функция F, выполняется равенство $\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x \cos y$.

11.4.88. Пусть $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$. Показать, что $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ независимо от того, какова дифференцируемая функция f.

11.4.89. Показать, что функция $z = \sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0;0)$, имеет в этой точке частные производные $f'_x(0;0)$, $f'_y(0;0)$, но сама функция не дифференцируема в точке $(0;0)$. Выяснить поведение z'_x и z'_y в окрестности точки $(0;0)$.

11.4.90. Показать, что функция $f(x;y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, если $x = 0$, $y = 0$ и $f(0;0) = 0$ в окрестности $(0;0)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные $f'_x(x;y)$, $f'_y(x;y)$, однако эта функция недифференцируема в точке $(0;0)$.

11.4.91. Показать, что функция $f(x;y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0;0) = 0$, имеет в окрестности точки $(0;0)$ частные производные $f'_x(x;y)$ и $f'_y(x;y)$, которые разрывны в точке $(0;0)$ и неограничены в любой окрестности этой точки. Тем не менее, показать, что эта функция дифференцируема в точке $(0;0)$.

§ 5. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение частных производных второго порядка

Если задана функция $z = f(x;y)$ и вычислены ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$, то они, вообще говоря, могут быть также дифференцируемыми функциями двух независимых переменных x и y. Приняты обозначения:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ — вторая частная производная по x;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ — смешанные частные производные второго порядка;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ — вторая частная производная по y.

Теорема 11.13 (Шварца). Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой. Другими словами, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка.

Дифференциал второго порядка

Выражение

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

называется *вторым дифференциалом* или дифференциалом второго порядка для функции z.

Производные и дифференциалы высших порядков

По аналогии можно определить частные и смешанные производные высших порядков, часть которых, согласно теореме Шварца, равны между собой.

Таким образом, имеем три различных производных второго порядка, четыре различных производных третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и так далее.

Число разных частных производных порядка n от функции двух переменных равно $n+1$:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^2 \partial y^{n-2}}, \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

Дифференциалы высших порядков определяются по аналогии:

$$d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Выражение для $d^n z$ формально можно записать в виде

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n (z),$$

напоминающем формулу бинома Ньютона.

11.5.1. Найти все частные производные первого, второго и третьего порядка для функции $z = x^3 - x^2y - y^3$.

○ 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -x^2 - 3y^2$.

2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 2xy) = 6x - 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy) = -2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 - 3y^2) = -2x \quad \left(\text{Видим, что } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3y^2) = -6y.$$

3) $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 2y) = 6;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 2y) = -2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2x) = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}(-6y) = -6.$$

Очевидно, все последующие частные производные четвертого порядка равны нулю

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^i \partial y^j} = 0 \quad (i + j = 4).$$ ●

11.5.2. Для функции $z = e^{xy^3}$ найти: $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$.

❍ 1) Дифференцируем по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^3 e^{xy^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^6 e^{xy^3}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y^9 e^{xy^3}; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \underline{y^{12} e^{xy^3}}.$$

2) Находим другие смешанные производные:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y^9 e^{xy^3}) = \underline{9y^8 e^{xy^3} + 3y^{11} x e^{xy^3}}.$$

3) Далее,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(y^6 e^{xy^3}) = 6y^5 e^{xy^3} + 3y^8 x e^{xy^3} = 3y^5 e^{xy^3}(2 + y^3 x).$$

Окончательно,

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[3y^5 e^{xy^3}(2+y^3x)\right] =$$

$$= 3\left[5y^4 e^{xy^3}(2+y^3x) + 3xy^7 e^{xy^3}(2+y^3x) + 3y^7 x e^{xy^3}\right] =$$

$$= \underline{3y^4 e^{xy^3}\left[10 + 14xy^3 + 3x^2y^6\right]}.$$

Нужные частные производные подчеркнуты. ●

11.5.3. Найти $d^2 z$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

❍ 1) Находим первый дифференциал:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

2) Далее отдельно считаем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

и, наконец, составляем второй дифференциал

$$d^2 z = \frac{2[xy\,dx^2 + (y^2-x^2)dx\,dy - xy\,dy^2]}{(x^2+y^2)^2}.$$ ●

11.5.4. Найти $d^2 z$, если $z = \frac{xy}{x-y}$. Доказать, что $z''_{x^2} + 2z''_{xy} + z''_{y^2} = \frac{2}{x-y}$.

❍ Находим $d^2 z$:

$$z'_x = -\frac{y^2}{(x-y)^2}, \quad z'_y = \frac{x^2}{(x-y)^2},$$

$$z''_{x^2} = \frac{2y^2}{(x-y)^3}, \quad z''_{xy} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}, \quad z''_{y^2} = \frac{2x^2}{(x-y)^3},$$

$$d^2\left(\frac{xy}{x-y}\right) = \frac{2(y^2\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2\,dy^2)}{(x-y)^3}.$$

Далее,

$$z''_{x^2} + 2z''_{xy} + z''_{y^2} = \frac{2y^4 - 4xy + 2x^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x-y)^2}{(x-y)^3} = \frac{2}{x-y}.$$ ●

11.5.5. Найти $d^3 z$, если $z = \frac{xy}{x+y}$.

◯ Имеем последовательно (ниже мы будем использовать формулы: $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$, $\left(\frac{1}{f^2}\right)' = -\frac{2f'}{f^3}$; кроме того, некоторые действия мы опускаем ввиду того, что подобные встречались неоднократно):

1) $z'_x = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}$; $z'_y = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}$;

2) $z''_{x^2} = -\dfrac{2y^2}{(x+y)^3}$; $z''_{xy} = \dfrac{2xy}{(x+y)^3}$; $z''_{y^2} = -\dfrac{2x^2}{(x+y)^3}$;

3) $$d^2z = -\frac{2y^2}{(x+y)^3}dx^2 + 4\frac{xy}{(x+y)^3}dx\,dy - \frac{2x^2}{(x+y)^3}dy^2 = \\ = -\frac{2(y^2\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2\,dy^2)}{(x+y)^3} = -2\frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{(x+y)^3}.$$

4) $d^3z = z'''_{x^3}dx^3 + 3z'''_{x^2y}dx^2dy + 3z'''_{xy^2}dxdy^2 + z'''_{y^3}dy^3$.

$$d^3z = \frac{6}{(x+y)^4}\left[y^2dx^3 - (2xy - y^2)dx^2dy - \right. \\ \left. - (2xy - x^2)dxdy^2 + x^2dy^3\right].$$ ●

11.5.6. Найти d^2z, если $z = \ln(x^2 + y^2)$.

◯ При решении этого примера применим другой прием, а именно исходим из определения: $d^2z = d(dz)$. Имеем $dz = 2\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$. При последующих дифференцированиях принимаем dx и dy постоянными.

$$d^2z = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}\right)dx + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}\right)dy = \\ = 2\frac{(x^2+y^2)dx - 2x(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}dx + \\ + 2\frac{(x^2+y^2)\,dy - 2y(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}dy = \\ = 2\frac{(y^2 - x^2)dx^2 - 4xy\,dx\,dy + (x^2 - y^2)dy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$ ●

Для данных функций найти требуемую частную производную или дифференциал:

11.5.7. $z = \sin x \sin y$, d^2z.

11.5.8. $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

11.5.9. $z = xy + \sin(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

11.5.10. $z = \ln \operatorname{tg}(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11.5.11. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11.5.12. $z = x^2 \ln(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11.5.13. $z = x \sin xy + y \cos xy$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

11.5.14. $z = \sin(x + \cos y)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

11.5.15. $z = \ln \sqrt{x^2+y^2}$, $d^2 z$.

11.5.16. $z = \cos(x+y)$, $d^2 z$.

Найти dz и d^2z от следующих функций:

11.5.17. $z = x^2 y - xy^2 + 7$.

11.5.18. $z = xy - \dfrac{y}{x}$.

11.5.19. $z = (x^2+y^2)^3$.

11.5.20. $z = (\sin x)^{\cos y}$.

11.5.21. $z = x - 3 \sin y$.

11.5.22. $z = \ln \sqrt{x^2 + y}$.

11.5.23. Для функции $y(x)$, определенной неявно уравнением $x^3y^2 - xy^5 + 5x - y = 0$, найти $y'''(0)$.

○ Продифференцируем три раза по x данное уравнение с учетом того, что $y = y(x)$. Получаем

$$3x^2y^2 + 2x^3 y\, y' - y^5 - 5xy^4\, y' + 5 - y' = 0, \tag{5.1}$$

$$6xy^2 + 6x^2 y\, y' + 6x^2 y\, y' + 2x^3(y')^2 + 2x^3 y\, y'' - 5y^4\, y' - \\ - 5y^4\, y' - 20xy^3(y')^2 - 5xy^4\, y'' - y'' = 0,$$

т. е.

$$6xy^2 + 12x^2yy' + 2x^3(y')^2 + 2x^3 y\, y'' - 10y^4\, y' - \\ - 20xy^3(y')^2 - 5xy^4y'' - y'' = 0, \tag{5.2}$$

$$6y^2 + 12xyy' + 24xyy' + 12x^2(y')^2 + 12x^2 y\, y'' + \\ + 6x^2(y')^2 + 4x^3y'y'' + 6x^2yy'' + 2x^3y'y'' + 2x^3yy''' - \\ - 40y^3(y')^2 - 10y^4y'' - 20y^3(y')^2 - 60xy^2(y')^3 - 40xy^3y'y'' - \\ - 5y^4y'' - 20xy^3y'y'' - 5xy^4y''' - y''' = 0. \tag{5.3}$$

Подставим в данное уравнение $x = 0$ и получаем $y = 0$. Подставляем в (5.1) $x = 0$, $y = 0$ и находим $y'(0) = 5$. Подставляем в (5.2) $x = 0$, $y = 0$, $y'(0) = 5$ и находим $y''(0) = 0$. Подставляем в (5.3) $x = 0$, $y = 0$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 0$ и находим $y'''(0) = 0$. ●

11.5.24. Для функции $y(x)$, определенной неявно уравнением $ye^x+e^y=0$ найти y''.

○ После последовательных двух дифференцирований данного уравнения с учетом $y = y(x)$ получаем

$$y'e^x + e^x y + e^y y' = 0, \tag{5.4}$$

$$y''e^x + e^x y' + e^x y + e^x y' + e^y (y')^2 + e^y y'' = 0. \tag{5.5}$$

Из (5.5) находим

$$y'' = -\frac{2e^x y' + e^x y + e^y (y')^2}{e^x + e^y}. \tag{5.6}$$

Из (5.4) находим $y' = -\dfrac{ye^x}{e^x + e^y}$ и это подставляем в (5.6):

$$y'' = -\frac{-2e^x \frac{ye^x}{e^x+e^y} + e^x y + e^y \left(\frac{ye^x}{e^x+e^y}\right)^2}{e^x + e^y} =$$

$$= -\frac{-2e^{2x}y(e^x + e^y) + e^x y(e^x + e^y)^2 + y^2 e^y e^{2x}}{(e^x + e^y)^3}. \quad \bullet$$

11.5.25. Найти y', y'' и y''' для неявной функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1$ при $x = 0$, если $y(0) = 1$.

11.5.26. Найти $d^2 z$ в точке $(1;0)$ для неявной функции $z(x;y)$, определенной уравнением $xz^5 + y^3 z - x^3 = 0$, если $z(1;0) = 1$.

11.5.27. Найти $d^2 z$ в точке $(1;2)$ для неявной функции $z(x;y)$, определенной уравнением $x - yz + e^z = 2$, если $z(1;2) = 0$.

11.5.28. Найти $y'(2)$, $y''(2)$, если $y(2) = 1$ и $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = 5 + \ln 5$.

11.5.29. Найти y', y'', y''', если $x^2 + yx + y^2 = 3$.

11.5.30. Найти y' и y'', если $y^x = x^y$.

11.5.31. Найти y' и y'', если $y^2 - 3x^2 + 2x + 3y - 9 = 0$.

○ Краткое решение. Заметим, что уравнение имеет решение $(x_0; y_0) = (1;2)$. После первого дифференцирования сравнительно просто получим $y' = 2\dfrac{3x-1}{2y+3}$. Теперь продифференцируем эту функцию, как частное, опять с учетом $y = y(x)$.

$$y'' = 2\frac{3(2y+3) - 2y'(3x-1)}{(2y+3)^2},$$

а здесь заменим $y' = 2\dfrac{3x-1}{2y+3}$. Получаем

$$y'' = 2\frac{3(2y+3)^2 - 4(3x-1)^2}{(2y+3)^3}.$$

Для получения последующих производных можно продифференцировать последнее равенство, а затем подставлять значение y'.

Можно идти другим путем: уравнение

$$2yy' - 6x + 2 + 3y' = 0 \tag{5.7}$$

можно далее продифференцировать многократно:

$$2(y')^2 + 2yy'' - 6 + 3y'' = 0, \tag{5.8}$$

$$4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' + 3y''' = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{5.9}$$

Из (5.7) надо найти y', полученное выражение подставить в (5.8), и отсюда найти y'', которое можно подставить в (5.9) и так далее.

Очевидно, что процедура существенно упростится, если идет речь о производных в данной точке. ●

11.5.32. Дано $(xy - a)^2 + (xy - b)^2 = R^2$. Найти y', y'' для неявной функции $y(x)$.

11.5.33. Дано $x + y - e^{x+y} = 0$. Найти $y'(x)$, $y''(x)$.

11.5.34. Дано $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. Найти $y'(x)$, $y''(x)$.

11.5.35. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если функция $z(x;y)$ задана неявно уравнением

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0. \tag{5.10}$$

◔ Высшие производные для функций, заданных неявно как функции двух и более переменных, находят практически по тем же правилам, что и первые производные. Данное уравнение дифференцируем по x (y — постоянная).

$$2x + 6zz'_x + y - z'_x = 0. \tag{5.11}$$

Отсюда

$$z'_x = \frac{2x + y}{1 - 6z}. \tag{5.12}$$

Дифференцируем (5.11) по x: $2 + 6(z'_x)^2 + 6zz''_{x^2} - z''_{x^2} = 0$, следовательно,

$$z''_{x^2} = 2\frac{1 + 3(z'_x)^2}{1 - 6z}. \tag{5.13}$$

Дифференцируем (5.11) по y: $6z'_y z'_x + 6zz''_{xy} + 1 - z''_{xy} = 0$, значит,

$$z''_{xy} = \frac{1 + 6z'_x z'_y}{1 - 6z}. \tag{5.14}$$

Дифференцируем (5.10) по y:

$$4y + 6zz'_y + x - z'_y = 0, \tag{5.15}$$

$$z'_y = \frac{x + 4y}{1 - 6z}. \tag{5.16}$$

Дифференцируем (5.15) по y: $4 + 6(z'_y)^2 + 6zz''_{y^2} - z''_{y^2} = 0$, следовательно,

$$z''_{y^2} = \frac{4 + 6(z'_y)^2}{1 - 6z}. \tag{5.17}$$

Для получения искомых производных необходимо в правых частях (5.13), (5.14) и (5.17) заменить z'_x и z'_y на соответствующие выражения из (5.12) и (5.16).

Подставляем (5.12) в (5.13):

$$z''_{x^2} = 2\frac{1+3\left(\frac{2x+y}{1-6z}\right)^2}{1-6z} = 2\frac{(1-6z)^2+3(2x+y)^2}{(1-6z)^3}.$$

Подставляем (5.12) и (5.16) в (5.14):

$$z''_{xy} = \frac{1+6\frac{(2x+y)(x+4y)}{(1-6z)^2}}{1-6z} = \frac{(1-6z)^2+6(2x+y)(x+4y)}{(1-6z)^3}.$$

Подставляем (5.16) в (5.17):

$$z''_{y^2} = \frac{4+6\left(\frac{x+4y}{1-6z}\right)^2}{1-6z} = \frac{4(1-6z)^2+6(x+4y)^2}{(1-6z)^3}.$$ ●

11.5.36. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ при $x=1$, $y=-2$, $z=1$, если

$$x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$$

(см. предыдущую задачу).

❍ Поскольку соответствующие частные производные найдены в предыдущем примере, то наше замечание состоит только в том, что искомые величины можно найти как из равенств (5.12)–(5.14) и (5.16)–(5.17), так и из последних трех равенств предыдущей задачи. В любом случае, при $x=1$, $y=-2$, $z=1$ имеем $z''_{x^2} = -\dfrac{2}{5}$, $z''_{xy} = -\dfrac{1}{5}$, $z''_{y^2} = -\dfrac{394}{125}$. ●

Найти dz и d^2z, если $z=z(x;y)$ — неявная функция, определяемая уравнениями:

11.5.37. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

11.5.38. $xyz=x+y+z$.

11.5.39. $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+1$.

11.5.40. $x+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{z-x}=z$.

Дополнительные задачи

11.5.41. Дано $z=\cos(ax+e^y)$. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

11.5.42. Дано $z=\dfrac{x^4-8xy^3}{x-2y}$. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

11.5.43. Дано $u=x\ln(xy)$. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$.

11.5.44. Дано $u=x^3\sin y+y^3\sin x$. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

11.5.45. Дано $u = e^{xyz}$. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

11.5.46. Дано $z = \ln \dfrac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}}$. Найти $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial u \partial v}$.

11.5.47. Дано $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$. Найти $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$.

11.5.48. Дано $u = \dfrac{x+y}{x-y}$. Найти $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$.

11.5.49. Дано $u = (x^2 + y^2)e^{x+y}$. Найти $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$.

11.5.50. Дано $u = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

Найти дифференциалы:

11.5.51. $d^{10}u$, если $u = \ln(x+y)$.

11.5.52. $d^4 u$, если $u = \ln(x^x y^y z^z)$.

11.5.53. $d^n u$, если $u = e^{ax+by}$.

11.5.54. $d^n u$, если $u = e^{ax+by+cz}$.

11.5.55. Доказать, что из равенства $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ следует, что $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$.

Найти $d^2 z$ для функций $z(x; y)$:

11.5.56. $z = \left(\dfrac{y}{x}\right)^x$.

11.5.57. $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

11.5.58. $z = \dfrac{x}{y} e^{xy}$.

11.5.59. Вычислить первые, вторые и третьи частные производные для функции $z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$.

11.5.60. Найти частные производные второго порядка для функции $z = e^{xy}$.

11.5.61. Для $u = \sin xyz$ найти u'''_{xyz}.

11.5.62. Показать, что функции $z = \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, и $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

11.5.63. Показать, что функция $u = \dfrac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

11.5.64. Известно, что $z = f(u; v)$, а переменные u и v являются функциями независимых переменных x и y: $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$. Определить $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11.5.65. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = z(u; v)$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

11.5.66. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = z(u; v)$, $u = x + y$, $v = x - y$.

11.5.67. Доказать, что функция $z = xf(x+y) + y\varphi(x+y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

11.5.68. Найти $d^3 z$, если $z = \cos(x + 2y^2)$.

§ 6. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Определение производной по направлению

Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ представляют собой производные от функции $z = f(x; y)$ по двум частным направлениям осей Ox и Oy.

Пусть $z = f(x; y)$ — дифференцируемая функция в некоторой области D, $M(x_0; y_0) \in D$. Пусть $\bar{l}$ — некоторое направление (вектор с началом в точке M_0), а $\bar{e} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ — орт этого направления. Пусть $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ — точка в направлении $\bar{l}$ от M_0. Обозначим $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Тогда $\frac{\Delta x}{\Delta \rho} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta \rho} = \sin\alpha$.

$\Rrightarrow$ Предел отношения

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \frac{\Delta_l f}{\Delta \rho} = \lim_{\Delta\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta \rho} = \frac{\partial f}{\partial l}(x_0; y_0)$$

называется производной функции f по направлению $\bar{l}$.

Существование этого предела и выражение его через $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ вытекает из следующего соотношения:

$$\frac{\Delta_l f}{\Delta \rho} = \frac{f(x_0 + \Delta\rho\cos\alpha; y_0 + \Delta\rho\sin\alpha) - f(x_0; y_0 + \Delta\rho\sin\alpha)}{\Delta\rho\cos\alpha}\cos\alpha +$$
$$+ \frac{f(x_0; y_0 + \Delta\rho\sin\alpha) - f(x_0; y_0)}{\Delta\rho\sin\alpha}\sin\alpha \to \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha, \quad \Delta\rho \to 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha.$$

Теорема 11.14. Производная по направлению, касательному к линии уровня поверхности $z = f(x; y)$, равна нулю.

Случай нескольких переменных

По аналогии со случаем функции двух переменных можно определить производную по направлению для функции трех переменных $u = f(x;y;z)$. Окончательная формула такова:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\bar{e} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ — орт направления $\bar{l}$ или $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы направления $\bar{l}$.

Теорема 11.15. Производная по направлению, касательному к поверхности уровня функции $u = f(x;y;z)$, равна нулю.

Градиент

Градиентом функции $z = f(x;y)$ (скалярного поля) называется вектор с координатами $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Обозначение $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Теорема 11.16. Имеет место равенство $\frac{\partial f}{\partial l} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z \cdot \bar{e}$, т. е. производная по направлению $\bar{l}$ равна скалярному произведению векторов градиента и орта направления $\bar{l}$.

Следствие. Вектор $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z$ в каждой точке направлен по нормали к линии уровня, проходящей через данную точку в сторону возрастания функции. При этом

$$\max_{\{l\}} \frac{\partial f}{\partial l} = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Теорема 11.17. Скорость изменения функции f по некоторому направлению $\bar{l}$ равна проекции вектора градиента на это направление, т. е. $\frac{\partial f}{\partial l} = \text{пр}_{\bar{l}}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

11.6.1. Найти производную функции $z = 2{,}5x^2 - 5xy + 3y^2 + 5y$ в точке $A(1;2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол 30°. Определить направление максимального роста данной функции в данной точке.

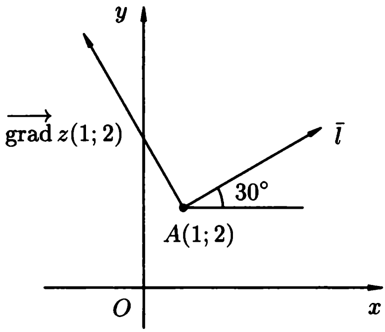


Рис. 127

❍ Имеем $z'_x = 5x - 5y$, $z'_y = -5x + 6y + 5$, $z'_x(1;2) = -5$, $z'_y(1;2) = 12$. Следовательно, если через $\bar{l}$ обозначим данное направление, то $\frac{\partial f}{\partial l} = -5\cos 30° + 12\sin 30° = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + 6$. Градиент функции поля в данной точке имеет вид $\overrightarrow{\text{grad}}\, z(1;2) = (-5;12) = -5\bar{i} + 12\bar{j}$. Этот вектор указывает направление, в котором функция растет быстрее, чем по другим направлениям. На рис. 127 схематически изображены точка $A(1;2)$, направление $\bar{l}$ с $\alpha = 30°$ и направление $\overrightarrow{\text{grad}}\, z$. Максимальное значение производной в точке $A(1;2)$ равно модулю градиента: $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. ●

11.6.2. Найти производную функции $z = f(x;y) = 3x^2 + 5y^2$ в точке $A(1;-1)$ по направлению к точке $B(2;1)$.

❍ Имеем $\overline{AB} = \bar{l} = (2-1;1+1) = (1;2)$, $|\bar{l}| = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $\bar{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ — орт направления $\bar{l}$. Далее, имеем $z'_x = 6x$, $z'_y = 10y$, $z'_x(1;-1) = 6$, $z'_y(1;-1) = -10$, а значит $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1;-1)} = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{5}} = -\frac{14}{\sqrt{5}}$. Отрицательность $\frac{\partial z}{\partial l}$ означает, что функция в этом направлении убывает. ●

11.6.3. Найти направление максимального роста функции $z = 3x^2 + xy - 2y^2$ в точке $A(2;1)$. Найти также наибольшее из значений производных по разным направлениям в точке A.

❍ Имеем

$$z'_x = 6x + y, \quad z'_y = x - 4y, \quad z'_x(2;1) = 13, \quad z'_y(2;1) = -2.$$

Градиент функции z в данной точке — это вектор $\overrightarrow{\text{grad}}\, z(2;1) = (13;-2)$. Этот вектор (его направление) указывает на направление максимального роста функции в точке $A(2;1)$. Наибольшее значение производной в $A(2;1)$ равно $\sqrt{13^2+2^2} = \sqrt{173}$. ●

11.6.4. Даны функция $z = x^2 + 3y^3 - xy$, точка $A(1;1)$ и вектор $\bar{a} = (-5;12)$. Найти

а) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(A)$;

б) производную в точке A по направлению $\bar{a}$.

❍ а) Имеем $z'_x = 2x - y$, $z'_y = 9y^2 - x$, $z'_x(1;1) = 1$, $z'_y(1;1) = 8$, значит, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(1;1) = (1;8)$.

б) Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{a}$, $|a| = 13$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$. Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial a} = -1\cdot\frac{5}{13} + 8\cdot\frac{12}{13} = 7$.

Максимальная производная в точке $A(1;1)$ равна $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(1;1)\right| = \sqrt{1^2+8^2} = \sqrt{65}$, а по направлению $\bar{a}$ величина производной равна 7. ●

11.6.5. Построить линию уровня функции $z = 4 - x^2 - y^2$, проходящую через точку $A(1;1)$. Построить $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(1;1)$ и убедиться, что он перпендикулярен построенной линии уровня.

11.6.6. Для функции $z = \mathrm{arctg}\, \frac{y}{x}$ построить линии уровня и градиент. Сравнить их направления в точках $(1;1)$ и $(1;-1)$.

11.6.7. Найти наибольший рост (наибольшую крутизну) поверхности $z = xy$ в точке $(4;2)$.

11.6.8. Найти производную функции $z = \ln(e^x + e^y)$ в направлении параллельном биссектрисе координатного угла.

11.6.9. Определить производную функции $f(x;y;z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$ в точке $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем с осями Ox, Oy, Oz углы соответственно α, β, γ, а также градиент этой функции, его величину и направляющие косинусы.

❍ Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y^2+z^2); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x^2+z^2); \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z(y^2+x^2).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 2x(y^2+z^2)\cos\alpha + 2y(x^2+z^2)\cos\beta + 2z(y^2+x^2)\cos\gamma.$$

В точке A значение $\frac{\partial f}{\partial l}$ равно $\frac{\partial f(A)}{\partial l} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$.

С другой стороны,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = 2x(y^2+z^2)\bar{i} + 2y(x^2+z^2)\bar{j} + 2z(x^2+y^2)\bar{k},$$

а $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A) = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k} = (1;1;1)$. Следовательно, $\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. Направляющие косинусы градиента равны $\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. В направлении градиента $\frac{\partial z}{\partial l}$ достигает наибольшего значения. ●

11.6.10. Найти градиент функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ и ее производную в точке $A(1;1;1)$ в направлении $\bar{l} = (\cos 45°, \cos 60°, \cos 60°)$. Построить поверхность уровня через A.

11.6.11. Построить поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 - 2z$, а также найти и построить $\overrightarrow{\text{grad}}\, u$ в точках пересечения поверхности $u = 4$ с осью Ox.

§ 7. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Формула Тейлора для функций двух переменных

⇛ Пусть $z = f(x;y)$ — функция, непрерывная вместе со всеми частными производными до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$. Тогда для любой точки $M(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ этой окрестности имеет место равенство

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0;y_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0;y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x; y_0+\theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1,$$

которая называется *формулой Тейлора*, а первые $(n+1)$ слагаемых в правой части — *многочленом Тейлора степени* n. При $(x_0;y_0) = (0;0)$ имеем формулу и многочлен Маклорена.

Определение экстремума функции двух переменных в точке

Рассмотрим функцию $z = f(x;y)$ двух переменных, определенную в некоторой области D.

⇛ Функция $f(x;y)$ имеет строгий *локальный максимум (минимум)* в точке $M_0(x_0;y_0)$, если неравенство $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ $\big(f(x_0;y_0) < f(x;y)\big)$ имеет место во всех точках $M(x;y) \neq M_0$ из некоторой достаточно малой окрестности точки M_0.

Вопрос определения экстремумов (максимумов или минимумов) в некоторых случаях решается просто, если $f(x;y)$ дифференцируемая функция в окрестности точек экстремума.

Теорема 11.18 (необходимые условия экстремума). Если $f(x;y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$ и имеет экстремум в этой точке, то ее дифференциал равен нулю:

$$df(x_0;y_0) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f'_x(x_0;y_0) = 0, \\ f'_y(x_0;y_0) = 0. \end{cases}$$

$\Rrightarrow$ Точка $(x_0;y_0)$ называется *стационарной* точкой функции $f(x;y)$, если $df(x_0;y_0) = 0$.

Пусть $(x_0;y_0)$ — стационарная точка функции $f(x;y)$. Обозначим $A = \dfrac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}$.

Теорема 11.19 (достаточные условия экстремума).

1. Если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, то $(x_0;y_0)$ — точка максимума.
2. Если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то $(x_0;y_0)$ — точка минимума.
3. Если $AC - B^2 < 0$, то $(x_0;y_0)$ не является точкой экстремума.
4. Если $AC - B^2 = 0$, то точка $M_0(x_0;y_0)$ может как быть, так и не быть точкой экстремума, поэтому требуется дополнительное исследование.

Экстремум функции в области

Речь идет о нахождении наибольшего и (или) наименьшего значения данной функции $z = f(x;y)$ в замкнутой области $\bar{D}$. Для этого следует найти сначала все локальные экстремумы внутри области D, а затем также наибольшее и наименьшее значения на ее границе ∂D. В результате сравниваем полученные величины, и задача завершена.

Добавим, что как правило, граница ∂D состоит из совокупности отдельных участков, на каждом из которых задача сводится к исследованию на экстремум функции одной переменной $z = \varphi_i(t)$, где i — номер участка, а t — независимая переменная на этом участке, которая может совпасть с x или y или быть отдельным параметром.

Условный экстремум

Под условным экстремумом имеется в виду поиск экстремума некоторой функции $z = f(x;y)$ при условии, что $(x;y)$ удовлетворяют еще некоторым условиям, например, уравнению $\varphi(x;y) = 0$.

Такая задача сводится к задаче на обычный экстремум для новой функции

$$F(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y),$$

которая называется функцией Лагранжа, а λ — множитель Лагранжа. Заметим, что $F(x;y;\lambda)$ — функция трех переменных, а для таких функций или функций большего числа переменных достаточные условия формулируются в терминах знакоопределенности квадратичной формы, совпадающей со вторым дифференциалом рассматриваемой функции в испытуемой точке. Теорема 11.19 является частным случаем, выражающем знакоопределенность квадратичной формы с двумя переменными dx и dy.

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов является непосредственным результатом применения исследования на экстремум функции нескольких переменных и заключается в следующем. На плоскости Oxy имеется система из n точек $(x_1;y_1),(x_2;y_2),\ldots,(x_n;y_n)$. Требуется подобрать некоторую функцию $y = f(x)$, которая «сглаживала» бы все точки этой системы, т. е. величина

$$\delta^2(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2$$

была бы минимальной; $(f(x_i) - y_i)^2$ — квадрат отклонения ординаты функции f в точке x_i от ординаты данной точки.

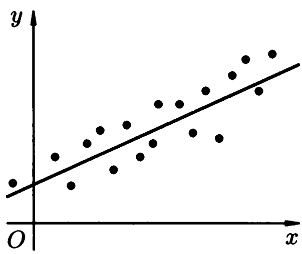


Рис. 128

В случае, если $f(x) = ax + b$, речь идет о поиске прямой, квадратическое отклонение которой (рис. 128)

$$\delta^2(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$$

от данной системы точек было бы минимальным.

Существование минимума такой функции очевидно, поэтому соответствующие коэффициенты a и b прямой можно найти, используя только необходимые условия экстремума для функции двух переменных a и b:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\delta^2(a,b) = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial b}\delta^2(a,b) = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0, \end{cases}$$

которые сводятся к линейной системе

$$\begin{cases} A_1a + B_1b = C_1, \\ A_2a + B_2b = C_2, \end{cases} \tag{7.1}$$

где $A_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $B_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $C_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$, $A_2 = B_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $B_2 = n$, $C_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$.

11.7.1. Функцию $f(x;y) = 3x^2 + 2xy - 1$ представить в виде многочлена Тейлора по степеням $x - 1$, $y + 2$.

○ Принимаем $x + 0 = 1$, $y_0 = -2$ и последовательно находим:

$$f(1;-2) = -2,$$

$$df(1;-2) = ((6x + 2y)\Delta x + 2x\Delta y)\Big|_{x=1,\ y=-2} = 2\Delta x + 2\Delta y,$$

$$d^2f(1;-2) = (6\Delta x^2 + 4\Delta x\Delta y)\Big|_{x=1,\ y=-2} = 6\Delta x^2 + 4\Delta x\Delta y.$$

Заменив $\Delta x = x - 1$, $\Delta y = y + 2$ в формуле Тейлора, получим

$$3x^2 + 2xy - 1 = -2 + 2(x-1) + 2(y+2) + 3(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2).$$

В правой части равенства имеем многочлен Тейлора второй степени по степеням $(x - 1)$, $(y + 2)$. ●

Данные функции представить в виде многочлена Тейлора по степеням $x - x_0$, $y - y_0$.

11.7.2. $f(x;y) = 2x^3 + x^2y - 4xy^2 - 4x^2 + 4y^2 - 18xy - 14x + 17y + 16$, $x_0 = 1$, $y_0 = -2$.

11.7.3. $f(x;y) = x^2 + 2y^2y - 3xy + 3y + 4$, $x_0 = -1$, $y_0 = -1$.

11.7.4. Вычислить приближенно функцию $f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке (11,8; 5,3), используя формулу Тейлора с $n = 2$.

○ Принимаем $x_0 = 12$, $\Delta x = -0{,}2$, $y_0 = 5$, $\Delta y = 0{,}3$. Имеем

$$f(12;5) = 13,$$

$$df(12;5) = \frac{x\Delta x + y\Delta y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Bigg|_{(12;5)} = \frac{-12 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}3}{13} \approx -0{,}0692,$$

$$d^2f(12;5) = \frac{y^2\Delta x^2 - 2xy\Delta x\Delta y + x^2\Delta y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\Bigg|_{(12;5)} \approx 0{,}0096.$$

Таким образом, $\sqrt{11{,}8^2 + 5{,}3^2} \approx 13-0{,}0692+\frac{1}{2}\cdot 0{,}0096 = 12{,}9356$. ●

Вычислить приближенные значения данных функций в точке (x_0, y_0), используя формулу Тейлора с $n = 2$.

11.7.5. $f(x;y) = \sqrt[3]{x^2 - y^2}$, $x_0 = 5{,}8$, $y_0 = 3{,}2$.

11.7.6. $f(x;y) = \operatorname{tg} x \cdot \sin y$, $x_0 = 47°$, $y_0 = 28°$.

11.7.7. Исследовать на экстремум функцию $f(x;y) = 4x^2y+24xy+y^2 + 32y - 6$.

○ Область определения $D(f)$ — вся плоскость Oxy, $f(x;y)$ — дифференцируема в каждой точке $M(x;y) \in D(f)$.

1. Определим стационарные точки (применим теорему 11.18).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 8xy + 24y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 + 24x + 2y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+3) = 0, \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} y = 0: \ x^2 + 6x + 8 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = -4, \ x_2 = -2, \\ x = -3, \ y = 2. \end{array}\right.$$

Получили три стационарные точки: $M_1(-4;0)$, $M_2(-2;0)$, $M_3(-3;2)$.

2. Эти точки исследуем согласно теореме 11.19 на достаточность условий экстремума. Сначала определим отдельно

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8x + 24, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

А теперь для каждой точки вычислим соответствующие (см. теорему 11.19) A, B, C, определим знаки величин $\Delta = AC - B^2$ и A.

а) $M_1(-4;0)$: $A_1=0$, $B_1=-32+24=-8$, $C_1=2$, $A_1C_1 - B_1^2 = -64 < 0$, т.е. $M_1(-4;0)$ не является точкой экстремума.

б) $M_2(-2;0)$: $A_2=0$, $B_2=-16+24=8$, $C_2=2$, $A_2C_2 - B_2^2 < 0$, т.е. $M_2(-2;0)$ не является точкой экстремума.

в) $M_3(-3;2)$: $A_3 = 16$, $B_3 = 0$, $C_3 = 2$, $A_3C_3 - B_3^2 = 32 > 0$. При этом $A > 0$. Вывод: $M_3(-3;2)$ — точка локального минимума функции $f(x;y)$ с $f_{\min} = f(-3;2) = -10$.

Ответ. $\min f(x;y) = f(-3;2) = -10$. ●

Исследовать на экстремум следующие функции:

11.7.8. $f(x;y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 5\frac{2}{3}$.

11.7.9. $f(x;y) = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 3y - 20.$

11.7.10. Исследовать на экстремум функцию $f(x;y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ внутри квадрата $\{(x;y):\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$.

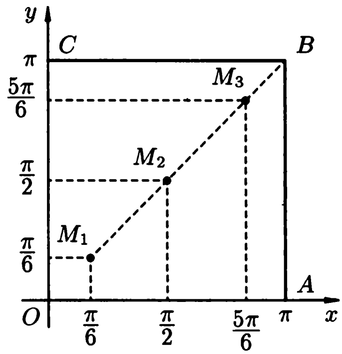


Рис. 129

❍ Область D определения функции есть вся плоскость $\mathbb{R}^2$, но нас интересует только открытый квадрат $OABC$ (см.рис. 129).

1. Стационарные точки определим из системы

$$\begin{cases} f'_x = \cos x - \sin(x+y) = 0, \\ f'_y = \cos y - \sin(x+y) = 0. \end{cases}$$

После вычитания друг из друга этих уравнений получаем

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x - y = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

В нашем квадрате может иметь место только условие $x - y = 0$ ($n = 0$), а тогда, присоединив к этому уравнению первое уравнение системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} y = x, \\ \cos x - \sin 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x, \\ x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

Тем самым, получили три стационарные точки $M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$, $M_2\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$.

2. Достаточные условия.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x - \cos(x+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin y - \cos(x+y).$$

Для точек $M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ и $M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$:

$$A_1=-1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad C_1=-1,\quad A_1C_1-B_1^2>0,\quad A_1<0.$$

Поэтому M_1 и M_3 — точки максимума с $f_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)=$ $=f\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$. Для точки $M_2\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

$$A_2=0,\quad B_2=1,\quad C_2=0,\quad A_2C_2-B_2^2<0.$$

Поэтому M_2 не является точкой экстремума.

Таким образом, в данном квадрате данная функция имеет две точки максимума $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ с $f_{\max}=\frac{3}{2}$. ●

11.7.11. Исследовать на экстремум функцию $f(x;y)=\sin x+\sin y+$ $+\cos(x+y)$ в квадрате $\{(x;y):\ 0<x<2\pi,\ 0<y<2\pi\}$.

11.7.12. Исследовать на экстремум функцию $f(x;y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$ в открытом квадрате $\{(x;y):\ 0<x<\pi,\ 0<y<\pi\}$.

11.7.13. Исследовать на экстремум функцию $z(x;y)$, заданную неявно уравнением $\frac{x^3}{3}+2y^2-z^2x+z=0$.

◐ Схема исследования та же, только все параметры задачи надо определить по методам функций, заданных неявно.

1. Необходимые условия. Положим $f(x;y;z)=\frac{x^3}{3}+2y^2-$ $-z^2x+z$

$$\begin{cases} f'_x=x^2-z^2,\\ f'_y=4y,\\ f'_z=-2zx+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} z'_x=-\dfrac{x^2-z^2}{-2zx+1}=0,\\ z'_y=-\dfrac{y}{-2zx+1}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=z,\ x=-z,\\ y=0,\\ \dfrac{x^3}{3}+2y^2-z^2x+z=0.\end{cases}$$

В третьей системе приходится присоединять уравнение, определяющее нашу неявную функцию.

Условие $y=0$ и $z=x$ приводит исходное уравнение к виду $\frac{x^3}{3}-x^3+x=0$, откуда $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\left(z=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Условие $y=0$ и $z=-x$ приводит исходное уравнение к виду $\frac{x^3}{3}-x^3-x=0$, откуда $x=0$.

Получаем пары

$$(x=0;y=0),\quad \left(x=\sqrt{\frac{3}{2}};y=0\right),\quad \left(x=-\sqrt{\frac{3}{2}};y=0\right).$$

Если $x = 0$, $y = 0$ то $z = 0$, $f'_z = 0$, а тогда в окрестности точки $(0;0)$ уравнение не определяет однозначную функцию, и эта точка не подлежит исследованию. Остаются фактически две стационарные точки: $M_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}};0\right)$ и $M_2\left(-\sqrt{\frac{3}{2}};0\right)$.

2. Для проверки достаточных условий найдем вторые частные производные по правилам дифференцирования неявных функций:

$$z''_{x^2}=\left(\frac{z^2-x^2}{1-2xz}\right)'_x=\frac{(2zz'_x-2x)(1-2xz)+(z^2-x^2)(2z+2xz'_x)}{(1-2xz)^2},$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{z^2 - x^2}{1 - 2xz}\right)'_y = \frac{2zz'_y(1 - 2xz) + (z^2 - x^2)2xz'_y}{(1 - 2xz)^2},$$

$$z''_{y^2} = -\left(\frac{y}{1 - 2xz}\right)'_y = -\frac{1 - 2xz + y \cdot 2x}{(1 - 2xz)^2}.$$

Преобразуем сначала в общем виде эти выражения с учетом $y = 0$, $z = x$, $z'_x = z'_y = 0$:

$$z''_{x^2} = \frac{-2x(1 - 2x^2)}{(1 - 2x^2)^2} = -\frac{2x}{1 - 2x^2}, \quad z''_{xy} = 0, \quad z''_{y^2} = -\frac{1}{1 - 2x^2}.$$

3. Только теперь, собственно говоря, переходим к проверке достаточных условий на экстремум.

$M_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$: $A_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $B_1 = 0$, $C_1 = \frac{1}{2}$, $A_1C_1 - B_1^2 > 0$, $A > 0$ — минимум;

$M_2\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$: $A_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $B_2 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $A_2C_2 - B_2^2 <$ < 0 — экстремума нет.

Кстати, мы значение экстремума знаем:

$$z = x = \sqrt{\frac{3}{2}} = z_{\min}.$$ ●

Исследовать на экстремум неявную функцию $z(x;y)$, определяемую данным уравнением:

11.7.14. $2(x^2 + z^2) + 3(2y^2 + 1) + 8(xz - y) - 4x = 0$.

11.7.15. $x^2 + y^2 + 4xz + \frac{z^2 + z}{2} = -4$.

11.7.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$ в замкнутой области D: $\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} \leqslant 1$.

◐ 1. Исследуем функцию на локальный экстремум внутри D.

$$\begin{cases} z'_x = -10y^2 + 2x + 10 = 0, \\ z'_y = -20xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -5, \\ y = 0. \end{cases}$$

Получили три стационарные точки, которые все лежат в области $\bar{D}$: $M_1(0;1)$, $M_2(0;-1)$, $M_3(-5;0)$.

Примечание. При поиске наибольшего и наименьшего значений функции в области не обязательно находить характер точек экстремума, т. е. достаточные условия можно опускать. Надо найти значения функции в этих стационарных точках и среди них выбирать наибольшее и наименьшее.

Итак, имеем $z(0;1) = 1$, $z(0;-1) = 1$, $z(-5;0) = -24$.

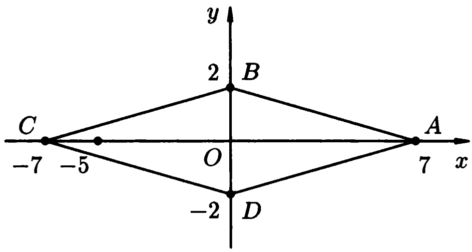


Рис. 130

2. Исследуем функцию на границе ∂D области D: $\left|\frac{x}{7}\right| + \left|\frac{y}{2}\right| = 1$ — представляет собой ромб $ABCD$ (см. рис. 130).

Заметим, что $z(y) = z(-y)$, т. е. функция принимает одинаковые значения в точках $(x;y)$ и в точках $(x;-y)$ (имеем четность по переменной y). Отсюда следует вывод о достаточности рассмотрения границы ABC ромба $ABCD$.

Один из способов дальнейшего исследования такой. Составим уравнения для AB и BC, подставим их в z, получим функции одной переменной, которые исследуем на экстремум.

Другой способ — это условный экстремум. На отрезке AB рассмотрим первый способ, т. е. обычный экстремум, а на BC — условный экстремум.

а) Уравнение отрезка AB — это $y = 2 - \frac{2x}{7}$, $0 \leqslant x \leqslant 7$. Подставляем его в выражение нашей функции

$$z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1 = -10x\left(2 - \frac{2x}{7}\right)^2 + x^2 + 10x + 1 =$$

$$= -40x + \frac{80}{7}x^2 - \frac{40}{49}x^3 + x^2 + 10x + 1 = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{87}{7}x^2 - 30x + 1.$$

Дифференцируем:

$$z' = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30 = 0,$$

отсюда $x = \left(\frac{87}{7} \pm \frac{63}{7}\right) \cdot \frac{49}{120}$, $x_1 = \frac{35}{4}$ — не принадлежит отрезку $[0; 7]$, $x_2 = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

Нам необязательно знать, что это за точка — максимума или минимума. Вычислим $z\left(\frac{7}{5}\right)$. Поскольку при $x = 1{,}4$ получаем $y = 2 - \frac{2x}{7} = 1{,}6$, то достаточно вычислить

$$z(x; y) = z(1{,}4; 1{,}6) = -10 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}6^2 + 1{,}4^2 + 10 \cdot 1{,}4 + 1 = \\ = -35{,}84 + 1{,}96 + 14 + 1 = -18{,}88.$$

Отдельно считаем $z(A)$ и $z(B)$, т. е. $z(7; 0) = 120$, $z(0; 2) = 1$.

б) На BC займемся условным экстремумом. Поскольку уравнение прямой BC — это $-\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$, то составим функцию Лагранжа:

$$F(x; y; \lambda) = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1 + \lambda\left(-\frac{x}{7} + \frac{y}{2} - 1\right).$$

Ищем стационарные точки этой функции:

$$\begin{cases} F'_x = -10y^2 + 2x + 10 - \frac{\lambda}{7} = 0, & \times 7 \\ F'_y = -20xy + \frac{\lambda}{2} = 0, & \times 2 \\ F'_\lambda = -\frac{x}{7} + \frac{y}{2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 7, второе — на 2 и сложим результаты. Этим исключим параметр λ из системы:

$$\begin{cases} -70y^2 - 40xy + 14x + 70 = 0, \\ x = \frac{7y}{2} - 7. \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой приходим к уравнению, которое после сокращений имеет вид $30y^2 - 47y + 4 = 0$. Отсюда находим $y = \frac{47 \pm 41{,}6}{60}$. Сразу получим точки $(y_1 = 1{,}5,\ x_1 = -1{,}75)$, $(y_2 = 0{,}1,\ x_1 = -6{,}65)$, т. е. $M_1(-1{,}75; 1{,}5)$, $M_2(-6{,}65; 0{,}1)$.

Результаты вычислений значений функции в M_1, M_2 и C таковы: $z(M_1) \approx -25{,}935$, $z(M_2) \approx -22{,}9$, $z(C) = 20$.

Сравнивая все полученные величины, приходим к выводу: наибольшее значение функции в D, т. е. $\max\limits_{(x;y)\in D} f(x; y) = f(7; 0) = 120$, а наименьшее значение, т. е. $\min\limits_{(x;y)\in D} f(x; y) = f(-5; 0) = -24$. ●

Найти наибольшее и наименьшее значение данных функций $z = f(x; y)$ в данных замкнутых областях D:

11.7.17. $z = x^2 + y^2$, D: ромб $3|x| + 4|y| \leqslant 12$.

11.7.18. $z = xy + x + y$, D: квадрат $1 \leqslant x \leqslant 2$, $2 \leqslant y \leqslant 3$.

11.7.19. $z = 1 - x^2 - y^2$, $\bar{D}$: круг $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$.

11.7.20. Дана система точек, координаты которых указаны в таблице, число точек $n = 6$.

x	-1	0	1	2	3	4
y	0	2	3	3,5	3	4,5

Требуется построить прямую с уравнением $y = ax + b$ так, чтобы она отличалась как можно меньше от данной системы точек в смысле наименьших квадратов.

◐ Очевидно, что точки с данными координатами не могут быть расположены на одной прямой, а построить прямую как бы «сглаживающую» эти точки, можно. Для этого достаточно решить систему уравнений, приведенную в соответствующей теоретической части. Для удобства расчетов строим рабочую таблицу.

№	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	ax_i+b	ax_i+b-y_i	$(ax_i+b-y_i)^2$
1	-1	0	1	0	0,81	0,81	0,6561
2	0	2	0	0	1,55	$-0,45$	0,2025
3	1	3	1	3	2,29	$-0,71$	0,5041
4	2	3,5	4	7	3,03	$-0,47$	0,2209
5	3	3	9	9	3,77	0,77	0,5929
6	4	4,5	16	18	4,51	0,01	0,001
$\sum$	9 A_2, B_1	16 C_2	31 A_1	37 C_1			2,1766

Первый столбец обозначает номер по порядку записи точек (координат). Из сумм столбцов при x_i, y_i, x_i^2, x_iy_i составляются коэффициенты системы (7.1) для определения параметров a и b прямой $y = ax + b$. Система имеет вид:

$$\begin{cases} 31a + 9b = 37, \\ 9a + 6b = 16. \end{cases}$$

Решим ее методом определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 31 & 9 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 105, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 37 & 9 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 78, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 31 & 37 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} = 163,$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{105} = 0{,}74, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{163}{105} = 1{,}55.$$

Искомое уравнение $y = 0{,}74x + 1{,}55$.

Замечание. В столбце $ax_i + b$ вычислены ординаты точек полученной прямой при данных значениях абсцисс. Сравнение этого столбца со столбцом значений y_i показывает, что часть данных точек находится под прямой, другая часть — над ней. Разность $ax_i + b - y_i$ называется отклонением ординаты прямой от ординаты данной точки, а $(ax_i + b - y_i)^2$ — квадрат этого отклонения. Это обозначено в последнем столбце. Сумма квадратов отклонения обозначена в последней строке последнего столбца $\delta_2^2 = 2{,}1766$, а если эту сумму поделить на $n = 6$, то получим «среднее квадратическое отклонение» прямой от системы точек, т. е. среднее отклонение, которое приходится на одну точку:

$$\delta_{\text{ср}}^2 = \frac{\delta^2}{6} = \frac{2{,}1766}{6} \approx 0{,}36, \quad \delta_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{\delta^2}{6}} = 0{,}6.$$

Извлечение корня означает, что среднее отклонение должно измеряться в единицах длины. ●

Построить по методу наименьших квадратов прямую $y = ax + b$ для данной системы точек и оценить ее среднее квадратическое отклонение от этой системы:

11.7.21.

x	0,5	0,1	2,0	2,5	3,0
y	0,62	1,64	3,7	5,02	6,04

11.7.22.

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Дополнительные задачи

Найти стационарные точки и исследовать на экстремум данные функции:

11.7.23. $f(x;y) = -x^2 + xy - y^2 - 9y + 6x - 35.$

11.7.24. $f(x;y) = 6x^2 - 7xy + 2y^2 + 6x - 3y.$

11.7.25. $f(x;y) = 4x^2 - 5xy + 3y^2 - 9x - 8y.$

11.7.26. $f(x;y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + \frac{x^2}{2} - 3xy - 2x + y^2 + 3y.$

11.7.27. $f(x;y) = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 10.$

11.7.28. $f(x;y) = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y.$

11.7.29. $f(x;y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

11.7.30. $f(x;y) = x^3y^2(12 - x - y).$

11.7.31. $f(x;y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$

Для данных функций $z(x;y)$ найти наибольшее и наименьшее значения в замкнутой области D:

11.7.32. $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$, D — замкнутый треугольник, ограниченный осями координат и прямой $x + y = -5$.

11.7.33. $z = x^2+y^2-6x+4y+2$, D — прямоугольник $ABCD$ с вершинами $A(4;-3)$, $B(4;2)$, $C(1;2)$, $D(1;-3)$.

Исследовать на экстремум функции $z(x;y)$, заданные неявно уравнениями:

11.7.34. $x^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$.

11.7.35. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

11.7.36. $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$.

Исследовать на условный экстремум функции:

11.7.37. $z = e^{xy}$ при условии $x + y = 1$.

11.7.38. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

11.7.39. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 1$.

11.7.40. $z = 6 - 4x - 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

11.7.41. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данный объем V, найти тот, полная поверхность которого наименьшая.

11.7.42. При каких размерах открытая прямоугольная ванна объема V имеет наименьшую поверхность?

11.7.43. Найти прямоугольный параллелепипед с данной площадью поверхности S, имеющий наибольший объем.

11.7.44. Через точку $M(a;b;c)$ провести плоскость, образующую с координатными плоскостями тетраэдр наименьшего объема.

11.7.45. В эллипсоид вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

11.7.46. Найти наибольшее значение функции $f(x;y;z) = x^2y^2z^2$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти полный дифференциал функции $z = \cos^2 \frac{x - y^2}{x^2 - y}$.

2. Для функции $z = u^{\sin v}$, где $u = \arccos\sqrt{xy}$, $v = \arcsin(x - y)$, найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. Показать, что функция $z = \arcsin(xy)$ удовлетворяет уравнению $\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{2}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

4. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} \frac{7{,}02}{6{,}97}$.

5. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x(y+z)(xy-z)+8=0$ в точке $(2;1;3)$.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения производной по направлению функции $f(x,y)=3x^2-6xy+y^2$ в точке $M_0\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

7. На эллипсе $x^2+4y^2=4$ даны две точки $A\left(-\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$ и $\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. На этом же эллипсе найти такую третью точку C, чтобы треугольник ABC имел наибольшую площадь (площадь треугольника выразить через координаты его вершин).

Вариант 2

1. Найти полный дифференциал фукнции $u(x,y,z)=\frac{xy}{z}\ln(x^2+y^2+z^2)$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\operatorname{tg} 2u}{v^2}$, если $u=\operatorname{arctg}\sqrt{xy}$, $v=\frac{y}{x}$.

3. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $z=z(x;y)$, определяемой уравнением $z\operatorname{tg}(x+y+z)-\frac{xy^2}{z}=0$.

4. Вычислить приближенно изменение функции $z=x^2-xy+y^2$, если x изменяется от 2 до 2,15, а y изменяется от 1 до 1,25.

5. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z=$ $=4x-xy+y^2$ параллельной плоскости $4x+y+2z+9=0$.

6. Показать, что функция $z=\operatorname{tg} xy+\frac{x}{y}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

7. Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали равной d, имеющей наибольший объем.

Вариант 3

1. Найти частные и полное приращение функции $f(x,y)=3x^2+xy-$ $-y^2+1$ в точке $M_0(1;2)$ при $\Delta x=0{,}15$, $\Delta y=-0{,}25$.

2. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = e^{\frac{x+y}{y}}$, а $y = \cos^4 x$.

3. Доказать, что функция $z = xy + x \cdot f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

4. Показать, что поверхности $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ и $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ имеют общую касательную плоскость в точке $M_0(2; -3; 1)$.

5. Найти точки разрыва функции $z = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y$.

6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 10$ в точке $M_0(-1; 1; -1)$.

7. На эллипсе $4x^2 + 36y^2 = 9$ найти точки наиболее и наименее удаленные от прямой $4x + 9y = 25$.

Вариант 4

1. Найти разность $\Delta u - du$ для функции $u = x^3y^2$ в точке (2;1) при $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = -0{,}18$.

2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для неявной функции $z = z(x, y)$, определяемой уравнением $\operatorname{arctg}(xz) + \dfrac{x^2 + y^2}{z} = 0$.

3. Показать, что функция $u = e^{xyz}$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2x\frac{\partial u}{\partial x} - u = 0.$$

4. Найти производную функции $z = x^4 + 3x^3y + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3$ в точке (1;1) по направлению к точке (2;2). Найти также направления, по которым $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ принимает значения: наибольшее, наименьшее, равное нулю.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{4 - \sqrt{x^2 y + 16}}$.

6. Составить уравнение нормали к поверхности $x^2 - 2x + 6y - z^2 = 4$, параллельной прямой $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{4}$.

7. В полушар радиуса $R = 10$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

❏

ОТВЕТЫ

Глава 1. Матрицы и определители

§ 1. Операции над матрицами

1.1.2. $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$. **1.1.3.** $\begin{pmatrix} -7 & -9 & 10 \\ 22 & 11 & -23 \\ -12 & -6 & 40 \end{pmatrix}$.

1.1.4. $\begin{pmatrix} 29 & -10 & -3 & -8 \\ 28 & 2 & 3 & 13 \\ 17 & 1 & 10 & 20 \end{pmatrix}$. **1.1.6.** $AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{pmatrix}$.

1.1.7. $AB = (31)$, $BA = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.8. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}$. **1.1.9.** $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.10. AB — не существует, $BA = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 4 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. **1.1.12.** $\begin{pmatrix} 6 & 95 \\ 0 & -70 \end{pmatrix}$.

1.1.13. $\begin{pmatrix} -24 & 12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix}$. **1.1.14.** $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}$. **1.1.15.** $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.16. Нет. **1.1.17.** Нет. **1.1.18.** Да. **1.1.19.** Нет. **1.1.22.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1.1.23. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **1.1.24.** $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^TA = (14)$.

1.1.25. $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 20 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 20 \end{pmatrix}$.

1.1.26. $AA^T = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 43 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 21 & -1 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 21 & -3 & 26 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

1.1.30. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.1.31.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.32. $\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 13\\ 0 & 10 & -10 & -30\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. **1.1.33.** $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 11\\ 0 & 5 & -1 & -28\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1.1.34. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. **1.1.35.** $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -45 & 45\end{pmatrix}$.

1.1.36. $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & 16\end{pmatrix}$. **1.1.37.** $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. **1.1.38.** $\begin{pmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & -2-\lambda\end{pmatrix}$.

1.1.39. $\begin{pmatrix}4 & -22 & -29 & 47\\ 64 & -7 & -33 & 4\\ -8 & -18 & 14 & -19\end{pmatrix}$. **1.1.40.** $\begin{pmatrix}-20 & -7 & 8\\ 28 & 19 & -6\\ -5 & 18 & 27\end{pmatrix}$.

1.1.41. $AB = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix}-3 & -4\\ 7 & 10\end{pmatrix}$.

1.1.42. $AB = (-1)$, $BA = \begin{pmatrix}5 & -10 & 15 & 0\\ -3 & 6 & -9 & 0\\ -4 & 8 & -12 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

1.1.43. $AB = \begin{pmatrix}7\\ 3\end{pmatrix}$, BA — не существует.

1.1.44. $AB = \begin{pmatrix}-14 & 11\\ 10 & 8\end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix}14 & 2 & -2\\ -9 & -15 & 3\\ 17 & 23 & -5\end{pmatrix}$.

1.1.45. $AB = \begin{pmatrix}2 & -9 & 14\\ 5 & -22 & -11\\ -18 & 19 & -32\end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix}-18 & -2 & 16\\ -13 & -13 & -5\\ -18 & -9 & -21\end{pmatrix}$.

1.1.46. $A(BC) = (AB)C = \begin{pmatrix}13 & -8\\ -13 & 8\end{pmatrix}$. **1.1.47.** $A(BC) = (AB)C = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

1.1.48. $A(BC) = (AB)C = \begin{pmatrix}3 & -17 & -68 & 38\end{pmatrix}$.

1.1.49. $A(BC) = (AB)C = \begin{pmatrix}33\\ -18\\ -31\\ 32\end{pmatrix}$. **1.1.50.** $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. **1.1.51.** $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1.1.52. $A^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $n \geqslant 3$. **1.1.53.** $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$.

1.1.54. $\begin{pmatrix}21 & -60\\ 0 & 61\end{pmatrix}$. **1.1.55.** $\begin{pmatrix}18 & -20\\ 30 & -2\end{pmatrix}$. **1.1.56.** $\begin{pmatrix}-102 & 105\\ 35 & -32\end{pmatrix}$.

1.1.57. $\begin{pmatrix}0 & 0 & -3\\ 3 & -3 & 1\\ 0 & -12 & -3\end{pmatrix}$. **1.1.58.** $\begin{pmatrix}-25 & 60 & -6\\ 60 & -18 & 44\\ 70 & 23 & -63\end{pmatrix}$.

1.1.59. $\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ 3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$. **1.1.60.** $\begin{pmatrix}-100 & -256 & 145\\ 38 & 251 & -79\\ -44 & 35 & -59\end{pmatrix}$.

1.1.61. Не коммутируют: AB — матрица 1×1, BA — матрица 3×3.

1.1.62. Не коммутируют: $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.63. Не коммутируют: $AB = \begin{pmatrix} 12 & -13 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

1.1.64. Не коммутируют: $AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -32 & 9 & -25 \\ -30 & 22 & -59 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 8 & -11 & 25 \\ -30 & 22 & -39 \end{pmatrix}$.

1.1.65. Коммутируют: $AB = BA = \begin{pmatrix} a\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d\delta \end{pmatrix}$.

1.1.66. Не коммутируют: $AB = \begin{pmatrix} -30 & 36 & -42 \\ -66 & 81 & -96 \\ -102 & 126 & -150 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} -14 & -16 & -18 \\ -26 & -31 & -36 \\ -38 & -46 & -54 \end{pmatrix}$.

1.1.67. Не коммутируют:

$$AB = \begin{pmatrix} -10 & -26 & 30 & -26 \\ 46 & 44 & -6 & 112 \\ 70 & -44 & -38 & -20 \\ 6 & 72 & -30 & -8 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} -8 & -30 & 72 & 6 \\ -20 & -38 & -44 & 70 \\ 112 & -6 & 44 & 46 \\ -26 & 30 & -26 & -10 \end{pmatrix}.$$

1.1.68. Коммутируют: $AB = BA = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1.1.69. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. **1.1.70.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$. **1.1.71.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1.1.72. $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$.

1.1.73. $AA^T = (30)$, $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$.

1.1.74. $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -6 \\ -7 & 83 & -21 \\ -6 & -21 & 21 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 26 & 9 & -29 \\ 9 & 30 & -33 \\ -29 & -33 & 53 \end{pmatrix}$.

1.1.75. $AA^T = A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$.

1.1.76. $AA^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1.1.77. $AA^T = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \\ 50 & 122 & 194 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{pmatrix}$.

1.1.78. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\end{pmatrix}$. **1.1.79.** $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. **1.1.80.** $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 8 & -13 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1.1.81. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1 & 8\\ 0 & -5 & -10 & 5 & -15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. **1.1.82.** $\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -3 & 4\\ 0 & 3 & -12 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1.1.83. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 4\\ 0 & -4 & -4 & -4 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -29\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. **1.1.84.** $\begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & -10\\ 0 & -16 & -8 & 40\\ 0 & 0 & 40 & 40\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1.1.85. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. **1.1.86.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -7 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 12 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 28\end{pmatrix}$.

1.1.87. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & -6 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. **1.1.88.** Нет. **1.1.89.** Нет. **1.1.90.** Да.

1.1.91. Да. **1.1.92.** Да. **1.1.93.** Да. **1.1.94.** A. **1.1.95.** Да. **1.1.96.** Да.
1.1.97. Да. **1.1.98.** Верно, если $AB = BA$. **1.1.99.** Верно, если $AB = BA$.
1.1.100. Нет. **1.1.101.** Да. **1.1.102.** Нет. **1.1.103.** Нет.
1.1.104. В произведении AB поменяются местами i-я и j-я строки.
1.1.105. В произведении AB к i-й строке прибавится j-я строка, умноженная на c.
1.1.106. В произведении AB поменяются местами i-й и j-й столбцы.
1.1.107. В произведении AB к i-му столюцу прибавится j-й столбец, умноженный на c.

1.1.108. $\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$, где $a^2 + bc = 1$. **1.1.109.** $\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$, где $a^2 + bc = 0$.

1.1.110. $\begin{pmatrix}1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \dots & n\\ 0 & 1 & n & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & n & \dots & C_n^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$. **1.1.111.** $\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$.

1.1.112. $A = \begin{pmatrix}a & b\\ 1{,}5b & a + 1{,}5b\end{pmatrix}$.

§ 2. Определители

1.2.2. 2. **1.2.3.** 0. **1.2.4.** 0. **1.2.5.** $ad - bc$. **1.2.6.** 1. **1.2.7.** $\frac{1}{\cos^2\varphi}$. **1.2.8.** 13.
1.2.9. 1; 2. **1.2.10.** 1; 5. **1.2.11.** (2; −3). **1.2.12.** $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1.2.14.** 0.
1.2.15. 40. **1.2.16.** −12. **1.2.17.** 1. **1.2.18.** 20. **1.2.19.** 6. **1.2.21.** −6.

1.2.22. $-xyz$. **1.2.23.** 0. **1.2.26.** -8. **1.2.27.** 0. **1.2.28.** 3. **1.2.29.** 4.
1.2.30. $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$. **1.2.31.** 5. **1.2.32.** $x \geqslant -\frac{41}{21}$.
1.2.33. -3; $\frac{-5}{2}$. **1.2.34.** -4; 1; 2. **1.2.38.** 0. **1.2.39.** 0. **1.2.40.** 0. **1.2.43.** $abcd$.
1.2.44. $(be-cd)^2$. **1.2.45.** 100. **1.2.46.** $8a+15b+12c-19d$. **1.2.47.** 17.
1.2.48. 52. **1.2.51.** $(-1)^{n-1}\cdot n!$ **1.2.52.** $n!$ **1.2.53.** $n\cdot(-1)^{\frac{1+n}{2}\cdot n}$. **1.2.54.** $2n+1$.
1.2.55. $(2n-1)\cdot(n-1)^{n-1}$. **1.2.57.** $2^{n+1}-1$.
1.2.58. $-(a_2a_3a_4\ldots a_{n-1}a_n+a_1a_3a_4\ldots a_{n-1}a_n+a_1a_2a_4\ldots a_{n-1}a_n+$
$+a_1a_2a_3\ldots a_{n-2}a_n+a_1a_2a_3\ldots a_{n-2}a_{n-1})$.
1.2.59. 7. **1.2.60.** 0. **1.2.61.** 0. **1.2.62.** 0. **1.2.63.** $\cos 2\varphi$. **1.2.64.** 1. **1.2.65.** 4,5.
1.2.66. 5. **1.2.67.** 1; $-\frac{1}{2}$. **1.2.68.** $(2;-1)$. **1.2.69.** $(-1;2)$. **1.2.70.** $\frac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$.
1.2.71. 1. **1.2.72.** 1. **1.2.73.** -87. **1.2.74.** $3abc-\left(a^3+b^3+c^3\right)$. **1.2.75.** $\alpha\beta\gamma$.
1.2.76. 2. **1.2.77.** $-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. **1.2.78.** 0. **1.2.79.** 14. **1.2.80.** -14.
1.2.81. 27. **1.2.82.** xyz. **1.2.83.** $\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma$. **1.2.84.** 2.
1.2.85. $\left(-\infty;-\frac{36}{5}\right]$. **1.2.86.** $-\frac{5}{3}$; 2. **1.2.87.** 1. **1.2.88.** $(-\sqrt{23};\sqrt{23})$.
1.2.89. *Указание.* Рассмотреть три определителя, полученных из исходного при вычитании, соответственно, из первой строки — второй, из второй строки — третьей, из третьей строки — первой. **1.2.92.** 0. **1.2.93.** 0.
1.2.94. $-xyzuv$. **1.2.95.** 60. **1.2.96.** $2a-8b+c+5d$. **1.2.97.** -6. **1.2.98.** 150.
1.2.99. 5. **1.2.100.** $(-2)^{n-1}$. **1.2.101.** $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
1.2.102. $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. **1.2.103.** 0. **1.2.104.** $(a_0+a_1+\cdots+a_n)\cdot x^n$.
1.2.105. $(-1)^n+(-1)^{n-1}\cdot a_1+(-1)^{n-2}a_1a_2+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-2}-a_1a_2\cdots a_{n-1}+$
$+a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$.
1.2.106. $9-2^{n+1}$. **1.2.107.** Нет. **1.2.108.** Единичная и нулевая матрицы.
1.2.109. $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$. **1.2.110.** Да. **1.2.111.** Да. **1.2.112.** Да.
1.2.113. Нет. **1.2.114.** $n\cdot\det A$. **1.2.115.** Нет. **1.2.116.** Не изменится.
1.2.117. Умножится на $(-1)^{n-1}$. **1.2.118.** $(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^{n-1})^2+(C_n^n)^2$.
1.2.119. $C_n^1\cdot C_m^1+C_n^2\cdot C_m^2+\cdots+C_n^{n-1}\cdot C_m^{n-1}+C_n^n\cdot C_m^n$ (при $n\leqslant m$).
1.2.120. Да. **1.2.121.** Да. **1.2.122.** $(1-a_{11}x)(1-a_{22}x)\times\cdots\times(1-a_{nn}x)$.
1.2.123. 0. **1.2.124.** *Указание.* Любой минор 2-го порядка принимает одно из трех значений $\{-2;\ 0;\ 2\}$. **1.2.125.** *Указание.* Дискриминант квадратного уравнения равен $(a-c)^2+4b^2$. **1.2.126.** *Указание.* Прибавить к 3-му столбцу определителя 1-й столбец, умноженный на 100, и 2-й столбец, умноженный на 10. **1.2.127.** Не изменится. **1.2.128.** $5\cdot 2^{n-1}-4\cdot 3^{n-1}$.

§ 3. Ранг матрицы

1.3.2. 2. **1.3.3.** 3. **1.3.4.** 3. **1.3.5.** 3. **1.3.6.** 3. **1.3.7.** 4. **1.3.9.** 3; $|A|$.
1.3.10. 2; $\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}$. **1.3.11.** 2; $\begin{vmatrix}1&-2\\3&2\end{vmatrix}$. **1.3.12.** 3; $\begin{vmatrix}1&-2&1\\3&2&3\\5&-2&4\end{vmatrix}$. **1.3.13.** 2; $\begin{vmatrix}-1&3\\-2&5\end{vmatrix}$.
1.3.14. 3; $\begin{vmatrix}1&3&-1\\2&-1&4\\7&7&1\end{vmatrix}$. **1.3.15.** $r=3$ при $\lambda=\frac{2}{3}$, $r=4$ при $\lambda\neq\frac{2}{3}$.

1.3.16. $r = 2$ при $\lambda = 3$, $r = 3$ при $\lambda \neq 3$. **1.3.17.** 2. **1.3.18.** 3. **1.3.19.** 3.

1.3.20. 3. **1.3.21.** 2. **1.3.22.** 2. **1.3.23.** 2; $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$. **1.3.24.** 3; $|A|$.

1.3.25. 2; $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. **1.3.26.** 3; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. **1.3.27.** 3; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

1.3.28. 2; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. **1.3.29.** $r = 3$ при $\lambda = 3$, $r = 4$ при $\lambda \neq 3$.

1.3.30. $r = 2$ при $\lambda = 0$, $r = 3$ при $\lambda \neq 0$.

1.3.31. $r = 1$ при $\lambda = 1$, $r = 3$ при $\lambda \neq 1$. **1.3.32.** Да; нет; нет. **1.3.33.** r; r; 0.

1.3.34. Не изменится. **1.3.35.** Может не измениться или увеличиться на 1.

1.3.36. Может не измениться или уменьшиться на 1.

1.3.37. *Указание.* Воспользоваться равенством $a_{ij}a_{lk} = a_{lj}a_{jk}$, $\forall\, i, j, k, l$.

1.3.38. $r(A \pm B) \leqslant r_1 + r_2$. **1.3.39.** Не изменится.

1.3.40. *Указание.* Использовать задачу 1.3.37. **1.3.41.** n. **1.3.42.** n.

1.3.47. $n - 1$.

§ 4. Обратная матрица. Матричные уравнения

1.4.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **1.4.3.** $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. **1.4.4.** $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.4.5. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **1.4.6.** $\begin{pmatrix} 2/3 & -5/12 & -1/12 \\ -1/3 & 7/12 & -1/12 \\ -1/3 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$.

1.4.7. A^{-1} не существует. **1.4.8.** $\begin{pmatrix} 1/19 & -1/19 & -3/19 \\ 9/19 & 10/19 & 11/19 \\ -13/19 & -25/19 & -18/19 \end{pmatrix}$.

1.4.10. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.11.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. **1.4.12.** $\begin{pmatrix} -x & -z \\ -y & x \end{pmatrix}$.

1.4.13. A^{-1} не существует. **1.4.15.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.16.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.17. $\begin{pmatrix} 4/3 & 7/3 & -5/3 \\ -2/3 & -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. **1.4.18.** A^{-1} не существует.

1.4.19. $\begin{pmatrix} -1/6 & -1/5 & -61/60 & 23/60 \\ 1/3 & 3/10 & 11/15 & -11/30 \\ -1/6 & 0 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & -1/10 & -1/20 & 3/20 \end{pmatrix}$. **1.4.20.** A^{-1} не существует.

1.4.22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3} & (-1)^{n-4} & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.23. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.24.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1.4.25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.26.** $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.29. $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. **1.4.30.** $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **1.4.31.** X не существует. **1.4.32.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.33. $\begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. **1.4.34.** $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. **1.4.35.** X не существует.

1.4.36. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. **1.4.37.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$. **1.4.38.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1.4.39. $\begin{pmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. **1.4.40.** $\begin{pmatrix} 11/41 & 6/41 & -4/41 \\ -5/41 & 1/41 & 13/41 \\ 14/41 & -11/41 & -20/41 \end{pmatrix}$.

1.4.41. A^{-1} не существует. **1.4.42.** $\begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 & -1/8 \\ 1/26 & 2/13 & 3/26 \\ -7/104 & 1/52 & 31/104 \end{pmatrix}$. **1.4.43.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.4.44. $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.45.** $\begin{pmatrix} -19/60 & 1/4 & 1/5 & -13/60 \\ 3/40 & 1/8 & -1/10 & 1/40 \\ 11/60 & -1/4 & 1/5 & 17/60 \\ 23/60 & -1/4 & 1/10 & 11/60 \end{pmatrix}$.

1.4.46. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-a)^n & (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & \dots & -a & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.47. $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.48.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.49. $\dfrac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$. **1.4.50.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.51. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$. **1.4.52.** X не существует. **1.4.53.** $\begin{pmatrix} t \\ 2-t \end{pmatrix}$.

1.4.54. $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. **1.4.55.** $\begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.56.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.4.57.** $\begin{pmatrix} 15/7 \\ -16/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}$.

1.4.58. $\begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix}$. **1.4.59. а)** Да. **б)** Да.

1.4.60. *Указание.* Воспользоваться определением обратной матрицы.

1.4.61. а) Да. **б)** Нет. **в)** Да. **г)** Нет. **д)** Да. **е)** Да.

1.4.62. а) Нет. **б)** Нет. **в)** Да. **г)** Да. **1.4.63.** Да.

1.4.64. а) Нет. **б)** Нет. **в)** Нет. **1.4.65. а)** Да. **б)** Да.

1.4.66. а) Да. **б)** Нет. **в)** Нет. **г)** Да.

1.4.67. а) Да, если $|A| \neq 0$. **б)** Нет. **в)** Нет. **г)** Нет.

1.4.68. а) Поменяются местами i-й и j-й столбцы (i-я и j-я строчки). **б)** i-й столбец (строка) умножится на λ^{-1}. **в)** Из j-го столбца (строки) вычтется i-й столбец (строка), умноженный на λ.

1.4.69. *Указание.* При $|A| \neq 0$ умножить обе части уравнения на матрицу A^{-1}. **1.4.70.** *Указание.* Воспользоваться задачей 1.4.61 д).

1.4.71. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.72.** *Указание.* $(E-A)(E+A+\dots+A^{k-1})$.

1.4.73. $\begin{pmatrix} E_k & -A \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$ **1.4.75.** *Указание.* Воспользоваться задачами 1.4.61 д) и 1.4.68 а). **1.4.77.** *Указание.* Воспользоваться задачей 1.4.76. Если $A = A_1 E_r A_2$, то одно из решений $X = A_2^{-1} E_r^T A_1^{-1}$.

Глава 2. Системы линейных уравнений

§ 1. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Метод Гаусса

2.1.5. Система совместна и определенна; общее решение (о. р.) = частное решение (ч. р.) $(1;2)$. **2.1.6.** Несовместна. **2.1.7.** Совместна и неопределенна; о. р. $(t+1;t)$; ч. р. $(1;0)$. **2.1.8.** Совместна и неопределенна; о. р. $(3-t_1-t_2;t_1;t_2)$; ч. р. $(3;0;0)$. **2.1.9.** Несовместна. **2.1.10.** Совместна и неопределенна; о. р. $(-3t;t;5t)$; ч. р. $(0;0;0)$. **2.1.11.** Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(0;0;0)$. **2.1.12.** Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(2;3;5)$. **2.1.13.** Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(0{,}5;1)$. **2.1.14.** Совместна и неопределенна; о. р. $(-3t;t;5t+1)$; ч. р. $(0;0;1)$. **2.1.15.** Несовместна. **2.1.16.** Совместна и неопределенна; о. р. $(2+t_1-t_2;3-2t_1+t_2;t_1;t_2)$; ч. р. $(2;2;1;1)$. **2.1.17.** Совместна и неопределенна; о. р. $(t_1;t_2;5-8t_1+4t_2;-3;1+2t_1-t_2)$; ч. р. $(0;0;5;-3;1)$. **2.1.18.** Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(3;0;-5;11)$. **2.1.19.** Совместна и неопределенна; о. р. $(1+2t_1+t_2-3t_3;t_1;1;t_2;t_3)$; ч. р. $(1;0;1;0;0)$. **2.1.20.** Совместна и неопределенна; о. р. $(t;3t-13;-7;0)$; ч. р. $(1;-10;-7;0)$. **2.1.22.** Совместна и неопределенна; о. р. $(n-t_1-t_2-\ldots-t_{n-1};t_1;t_2;\ldots;t_{n-1})$; ч. р. $(n;0;0;\ldots;0)$. **2.1.23.** Несовместна. **2.1.24.** Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $\left(\frac{n(3-n)}{2};1;2;3;\ldots;n-1\right)$. **2.1.25.** Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(n;0;0;\ldots;0)$. **2.1.27.** При любом λ система совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(0{,}25\lambda+2;0{,}5\lambda-4)$. **2.1.28.** При $\lambda=-4$ система несовместна; при $\lambda=4$ система совместна и неопределенна, о. р. $(3-2t;t)$, ч. р. $(3;0)$; при $\lambda\neq-4$, $\lambda\neq4$ система совместна и определенна, о. р. = ч. р. $\left(\frac{12}{\lambda+4};\frac{6}{\lambda+4}\right)$.

2.1.29. При $\lambda=2$ система совместна и неопределенна, о. р. $(5+t_1-2t_2;t_1;t_2)$, ч. р. $(6;1;0)$; при $\lambda\neq2$ система совместна и неопределенна, о. р. $(0;2t-5;t)$, ч. р. $(0;-5;0)$. **2.1.30.** При $\lambda\neq8$ система совместна и определенна, о. р. = ч. р. $(3;-1;0)$; при $\lambda=8$ система совместна и неопределенна, о. р. $(3+2t;-1-t;t)$, ч. р. $(3;-1;0)$. **2.1.31.** При $\lambda=0$ или $\lambda=-3$ система несовместна; при $\lambda\neq0$, $\lambda\neq-3$ система совместна и определенна, о. р. = ч. р. $\left(\frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)};\frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)};\frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}\right)$. **2.1.32.** Несовместна.

2.1.33. Совместна и неопределенна; о. р. $\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}t;t\right)$; ч. р. $\left(\frac{5}{3};0\right)$.

2.1.34. Несовместна. **2.1.35.** Совместна и неопределенна; о. р. $(1+t\sqrt{3};t)$; ч. р. $(1;0)$. **2.1.36.** Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(-1;2)$. **2.1.37.** Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(2;-1;3)$. **2.1.38.** Несовместна. **2.1.39.** Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(0;0;0)$. **2.1.40.** Совместна и неопределенна; о. р. $(11t;2t;7t)$ ч. р. $(11;2;7)$. **2.1.41.** Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(2;-2;3)$. **2.1.42.** Совместна и неопределенна; о. р. $\left(\frac{1+t_1-t_2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}};t_1;t_2\right)$; ч. р.

$(-1; -1; 2)$. **2.1.43.** Неопределенна; о. р. $\left(\frac{1-4t_1-t_2}{3}; t_1; t_2; 1\right)$ ч. р. $(-1; 1; 0; 1)$.

2.1.44. Определенна; о. р. = ч. р. $(1; -1; 0; 1)$. **2.1.45.** Определенна; о. р. = ч. р. $(1; 2; -4; -3)$. **2.1.46.** Неопределенна; о. р. $(t_1; t_2; 13; 19-3t_1-2t_2; -34)$ ч. р. $(1; 8; 13; 0; -34)$. **2.1.47.** Несовместна. **2.1.48.** Неопределенна; о. р. $(1-2t_1-3t_2-\ldots-nt_{n-1}; t_1; t_2; \ldots; t_{n-1})$. **2.1.49.** Несовместна.

2.1.50. Определенна; о. р. = ч. р. $\left(\frac{n(n-1)}{2}; -(n-1); \ldots; -3; -2; -1\right)$.

2.1.51. Определенна; о. р. = ч. р. $(2; 1; 1; \ldots; 1)$. **2.1.52.** Определенна; о. р. = ч. р. $(-1; 1; 1; \ldots; 1; 2)$. **2.1.53.** При $\lambda \neq -2$ система совместна и определенна, о. р. = ч. р. $(1; 2-\lambda)$; при $\lambda = -2$ система совместна и неопределенна; о. р. $(0{,}5t-1; t)$, ч. р. $(-1; 0)$. **2.1.54.** При $\lambda = 2$ система несовместна; при $\lambda = -2$ система совместна и неопределенна; о. р. $(-2t-1; t)$, ч. р. $(-1; 0)$; при $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq -2$ система совместна и определенна, о. р. = ч. р. $\left(\frac{2}{\lambda-2}; \frac{1}{\lambda-2}\right)$.

2.1.55. При $\lambda = -2$ система несовместна; при $\lambda = 2$ совместна и неопределенна, о. р. $(2t+1; t)$ ч. р. $(1; 0)$; при $\lambda \neq \pm 2$ система совместна и определенна, о. р. = ч. р. $\left(\frac{2}{\lambda+2}; -\frac{1}{\lambda+2}\right)$. **2.1.56.** При любом λ система совместна и неопределенна; о. р. $(30-2\lambda-21t; 9t+\lambda-12; t)$, ч. р. $(30-2\lambda; \lambda-12; 0)$. **2.1.57.** При $\lambda = -2$ система несовместна; при $\lambda = 1$ система совместна и неопределенна, о. р. $(3-t_1-t_2; t_1; t_2)$, ч. р. $(2; 0; 1)$; при $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq 1$ система совместна и определенна, о. р. = ч. р. $\left(\frac{3}{2+\lambda}; \frac{3}{2+\lambda}; \frac{3}{2+\lambda}\right)$.

2.1.58. При $\lambda = -3$ система несовместна; при $\lambda = 1$ система совместна и неопределенна, о. р. $(4-t_1-t_2-t_3; t_1; t_2; t_3)$, ч. р. $(1; 1; 1; 1)$; при $\lambda \neq -3$, $\lambda \neq 1$ система совместна и определенна, о. р. = ч. р. $\left(\frac{4}{3+\lambda}; \frac{4}{3+\lambda}; \frac{4}{3+\lambda}; \frac{4}{3+\lambda}\right)$.

2.1.59. Не изменится или сузится. **2.1.60.** Может стать совместной или остаться несовместной. **2.1.61.** Матрицы не обязательно равны; ранги матриц равны. **2.1.62.** Да. **2.1.63.** Да; неоднородные. **2.1.64.** Множество решений — все возможные наборы значений переменных. **2.1.65.** Таких систем не существует. **2.1.66.** Да. **2.1.67.** **а)** Да. **б)** Да. **в)** Да. **г)** Нет. **2.1.68.** Да; нет; нет. **2.1.71.** В любом решении $x_1 = 0$. Если равны нулю коэффициенты при всех неизвестных, кроме x_1 и x_i $(i \neq 1)$, то $x_i = \mathrm{const}$ в любом решении, все остальные неизвестные x_j $(j \neq 1, j)$ могут принимать любые значения. Если не равны нулю коэффициенты при x_1, x_i, x_j (1, i, j — три разных числа), то все неизвестные, кроме x_1 могут принимать любые значения. **2.1.72.** k-й столбец не является линейной комбинацией остальных столбцов матрицы системы. **2.1.73.** k-й столбец является линейной комбинацией остальных столбцов расширенной матрицы системы. **2.1.75.** $(1; 4; 0{,}5)$.

Указание. Прологарифмировать левые и правые части всех уравнений.

2.1.76. $x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $z = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

2.1.78. $x = \frac{f(d)}{(d-a)f'(a)}$; $y = \frac{f(d)}{(d-b)f'(b)}$; $z = \frac{f(d)}{(d-c)f'(c)}$, где $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. **2.1.79.** Если $D = abc-a-b-c+2 \neq 0$, то система

имеет единственное решение $x = \frac{1}{D}(D + 2b + 2c - 2bc - 2)$,
$y = \frac{1}{D}(D + 2a + 2c - 2ac - 2)$, $z = \frac{1}{D}(D + 2a + 2b - 2ab - 2)$. Если $D = 0$ и все числа a, b, c не равны 1, то система несовместна. Если $D = 0$ и $a = b = c = 1$, то общее решение имеет вид $x = 1 - y - z$, где y и z — свободные неизвестные. Если $D = 0$ и два из чисел a, b и c равны 1, а третье — не равно, например, $a \neq b = c = 1$, то общее решение имеет вид $x = 1$, $y = -z$, где z — свободное неизвестное.

§ 2. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Формулы Крамера

2.2.4. $(-3; 1)$. **2.2.5.** $(\sqrt{3}; 4)$. **2.2.6.** $\left(-b; -\frac{2}{3}a\right)$ при $ab \neq 0$; невозможно решить при $ab = 0$. **2.2.7.** $\left(\frac{f_1 d - f_2 b}{ad - bc}; \frac{af_2 - cf_1}{ad - bc}\right)$ при $ad - bc \neq 0$; невозможно решить при $ad - bc = 0$. **2.2.8.** $(-2; 2; 1)$. **2.2.9.** $(1; 2; -3)$. **2.2.10.** Невозможно решить.
2.2.11. $(-3; 3; 0)$. **2.2.12.** $\left(-\frac{a+1}{a+2}; \frac{1}{a+2}; \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$ при $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 2$; невозможно решить при $\lambda = 1$ или $\lambda = 2$. **2.2.13.** $(-2; 0; 1; -1)$.
2.2.14. $(2; -3; 2; -1)$. **2.2.15.** $(0; 0; 0; 0)$. **2.2.16.** $a = -1$, $b = 3$, $c = 2$.
2.2.17. $a = -2$, $b = 3$, $c = 2$. **2.2.18.** $(2; -3)$. **2.2.19.** $(2\sqrt{5}; 2)$.
2.2.20. $\left(\frac{2\alpha + 1}{\alpha^2 + 2}; \frac{\alpha + 4}{\alpha^2 + 2}\right)$. **2.2.21.** $\left(\frac{1}{a+b}; \frac{1}{3(a+b)}\right)$ при $a \neq \pm b$; невозможно решить при $a = \pm b$. **2.2.22.** $(-1; 1; 3)$. **2.2.23.** $(2; -3; 2)$. **2.2.24.** Невозможно решить. **2.2.25.** $(-4; 1; 2)$.
2.2.26. $\left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}; \frac{ab + b - 2}{b(a-1)(a+2)}; \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\right)$ при $b(a-1)(a+2) \neq 0$; невозможно решить при $b(a-1)(a+2) = 0$. **2.2.27.** $(0; 0; 0; 0)$.
2.2.28. $(-1; 1; 2; -2)$. **2.2.29.** $(3; -2; 0; 1)$. **2.2.30.** $a = -1$, $b = -3$, $c = 5$.
2.2.31. $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$. **2.2.32.** Нет. **2.2.33.** Да. **2.2.34.** Нет. **2.2.35.** Да; нет. **2.2.36.** *Указание.* Записать разложение определителей D_i по i-му столбцу, $i = 1, 2, \ldots, n$. **2.2.37.** $x_i = \frac{f(b)}{(b - a_i)f'(a_i)}$ где $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$. **2.2.38.** $C^T A^{-1} B$, где C, и B — вектор-столбцы, составленные соответственно из чисел $\{c_i\}$ и $\{b_i\}$.

§ 3. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений

2.3.4. Общее решение $(0; 0)$; фундаментальной системы решений нет.
2.3.5. $(-t; t)$, $(-1; 1)$. **2.3.6.** $(3t; 2t)$, $(3; 2)$. **2.3.7.** $(0; t; t)$, $(0; 1; 1)$. **2.3.8.** $(\sqrt{3}t; t)$, $(\sqrt{3}; 1)$. **2.3.9.** $(t; 2t)$, $(1; 2)$. **2.3.10.** $(t_2 - t_1; t_1; t_2)$, $(-1; 1; 0)$, $(1; 0; 1)$.
2.3.11. $(t; -2t; t)$, $(1; -2; 1)$. **2.3.12.** Общее решение $(0; 0; 0; 0; 0; 0)$; фундаментальной системы решений нет. **2.3.13.** $(2t_1 - 3t_2; t_1; t_2)$, $(2; 1; 0)$; $(-3; 0; 1)$. **2.3.14.** $(t_1; t_2; t_2 - 2t_1)$, $(1; 0; -2)$; $(0; 1; 1)$. **2.3.15.** Общее решение

$(0;0;0)$; фундаментальной системы решений нет.
2.3.16. $(8t_1 - 7t_2; -6t_1 + 5t_2; t_1; t_2)$, $(8;-6;1;0)$; $(-7;5;0;1)$.
2.3.17. $(-2t;7t;0;9t)$, $(-2;7;0;9)$. **2.3.18.** $(-3t_1 - 5t_2; 2t_1 + 3t_2; t_1; 0; t_2)$, $(-3;2;1;0;0)$; $(-3;3;0;0;1)$. **2.3.19.** При $\lambda = 6$ общее решение $(7t;2t;3t)$, фундаментальная система решений $(7;2;3)$. При $\lambda \neq -6$ общее решение $(0;0;0)$; фундаментальной системы решений нет. **2.3.20.** При $\lambda = 2$ общее решение $(t;0;-2t)$, фундаментальная система решений $(1;0;-2)$. При $\lambda = -4$ общее решение $(5t;-24t;-4t)$, фундаментальная система решений $(5;-24;-4)$. При $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq -4$ общее решение $(0;0;0)$; фундаментальной системы решений нет. **2.3.22. а)** $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$; **б)** B_2; **в)** о.р. одн. сист. $(2t;-t)$; о.р. неодн. сист. $(2t-2;3-t)$ или $(2t;2-t)$. **2.3.23. а)** Система несовместна; **б)** B_3; **в)** о.р. одн. сист. $(13t;2t;7t)$. **2.3.24. а)** $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_3$; **б)** B_2 и B_3; **в)** о.р. одн. сист. $(t_1;t_2;t_1+t_2)$ или $(2t_1 - t_2; -t_1 + 2t_2; t_1 + t_2)$; о.р. неодн. сист. $(1+t_1; 1+t_2; 1+t_1+t_2)$ или $(1+2t_1-t_2; 1-t_1+2t_2; 1+t_1+t_2)$ или $(t_1; 1+t_2; t_1+t_2)$ или $(2t_1-t_2; 1-t_1+t_2; t_1+t_2)$. **2.3.25. а)** $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$; **б)** B_3; **в)** о.р. одн. сист. $(3t;0;4t;0)$; о.р. неодн. сист. $(3t-1;-2;4t+1;2)$ или $(3t+2;-2;4t+5;2)$ или $(3t-4;-2;4t-3;2)$. **2.3.26.** $(t;2t)$; $(1;2)$.
2.3.27. $(t\sqrt{3};t)$; $(\sqrt{3};1)$. **2.3.28.** $(0;0)$; фундаментальной системы решений нет.
2.3.29. $(-2t;t)$; $(-2;1)$. **2.3.30.** $(t_1+t_2;t_1;t_2)$; $(1;1;0)$; $(1;0;1)$.
2.3.31. $(t;7t;-5t)$; $(1;7;-5)$. **2.3.32.** $(0;0;0)$; фундаментальной системы решений нет. **2.3.33.** $(t;-t;t)$; $(1;-1;1)$. **2.3.34.** $(2t_1 - 3t_2; t_1; t_2)$; $(2;1;0)$; $(-3;0;1)$. **2.3.35.** $(t;3t;5t)$; $(1;3;5)$. **2.3.36.** $(t_1-t_2; t_1-t_3; t_1; t_2; t_3)$; $(1;1;1;0;0)$; $(-1;0;0;1;0)$; $(0;-1;0;0;1)$. **2.3.37.** $(0;0;0;0)$; фундаментальной системы решений нет. **2.3.38.** $(2t_1+2t_2; t_1; -5t_2; 7t_2)$; $(2;1;0;0)$; $(2;0;-5;7)$.
2.3.39. $(0; t_1 - 2t_2; 3t_1; 0; 3t_2)$; $(0;1;3;0;0)$; $(0;-2;0;0;3)$. **2.3.40.** При $a=-1$ общее решение $(-5t;t;3t)$, фундаментальная система решений $(-5;1;3)$. При $a \neq -1$ общее решение $(0;0;0)$ фундаментальной системы решений нет.
2.3.41. При $\lambda = 3$ общее решение $(2t_1 + 5t_2; 3t_1 - 3t_2; 7t_1; 7t_2)$, фундаментальная система решений $(2;3;7;0)$, $(5;-3;0;7)$. При $\lambda = 3$ общее решение $(5t;-3t;0;7t)$, фундаментальная система решений $(5;-3;0;7)$.
2.3.42. Нет; да; да. **2.3.43.** Да. **2.3.44.** Да; нет; нет. **2.3.45.** Нет; да.
2.3.46. Нет; да. **2.3.47.** Да. **2.3.48.** Да; нет. **2.3.49.** Нет. **2.3.50.** Да — у определенной системы. **2.3.51. а)** Да. **б)** Нет. **2.3.52.** Нет. **2.3.53.** Нет; да.
2.3.54. При $m > n$ — ничего; при $m \leqslant n$ — фундаментальная система решений содержит не менее одного решения (здесь m — число уравнений, n — число неизвестных системы). **2.3.55.** Множество решений первой системы содержит множество решений второй системы.
2.3.56. $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. **2.3.57.** $e = ad - bc$.

Глава 3. Векторная алгебра

§ 1. Векторы. Линейные операции над ними. Разложение векторов

3.1.4. Да. $\bar{d} = -\sqrt{3}\bar{c}$. **3.1.5.** $(-\infty;0) \cup (1;\infty)$. **3.1.6.** $(-\infty;-1) \cup (0;2)$. **3.1.7.** 22.
3.1.8. 13; 13. **3.1.9.** $\overline{AB} = 3\bar{a} - \bar{b}$; $\overline{BC} = 2\bar{b} - 3\bar{a}$. **3.1.10.** $\overline{BD} = 2\bar{b} - 2\bar{a}$;

$\overline{AD} = \frac{4}{3}\bar{b} - \frac{2}{3}\bar{a}$. **3.1.21.** $x = y = z = \sqrt{3}$. **3.1.22.** 45°. **3.1.23.** $\alpha = -2$.

3.1.24. $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|} = 2$; в одну. **3.1.25.** $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$. **3.1.26.** (0;1;0). **3.1.27.** (7;0) и $(-1;0)$. **3.1.28.** 7. **3.1.29.** $-48\bar{i} + 45\bar{j} - 36\bar{k}$. **3.1.30.** $\alpha = 2$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\overline{DA} = -\frac{1}{2}\overline{BC}$. **3.1.32.** $\bar{q} - \bar{p}$; $-\bar{p}$; $-\bar{q}$; $\bar{p} - \bar{q}$; $\bar{p} + \bar{q}$; $2\bar{q}$; $2\bar{q} - \bar{p}$. **3.1.34.** $\sqrt{129}$; 7.
3.1.35. $2\bar{n} - 2\bar{m}$; $2\bar{n} + 2\bar{m}$; $3\bar{m} + \bar{n}$; $2\bar{m} - \bar{n}$. **3.1.37.** $\bar{0}$. **3.1.38.** $\bar{c} = -2\bar{a} + 2\bar{b}$.
3.1.39. $-12\bar{i} - 21\bar{j} + 12\bar{k}$. **3.1.40.** $-5\bar{i} + 10\bar{j} + 10\bar{k}$. **3.1.41. 1)** $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}; 0\right)$ **2)** $\left(3; \frac{11}{2}; 0\right)$ **3)** $-2\bar{j}$ **4)** 6. **3.1.42.** $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 + \bar{r}_3$. **3.1.44.** $(-4; 4; 4\sqrt{2})$. **3.1.45.** 7; $\left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right)$. **3.1.46.** 15. **3.1.47.** $R = \{23, 173\}$; $\alpha \approx 18°$; $\beta \approx 27°$. **3.1.48.** 54°; 7,7 м/с. **3.1.49.** $|\bar{F}_1| = 10\sqrt{3}$ (Н); $|\bar{F}_2| = 20\sqrt{3}$ (Н).
3.1.50. $\overline{OM} = \frac{n}{m+n}\overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB}$. **3.1.53.** 1; −2. **3.1.54.** $\frac{2}{5}\bar{m} + \frac{3}{5}\bar{n} + \frac{3}{5}\bar{p}$.

3.1.55. $\frac{2}{3}\bar{c} + \frac{1}{3}\bar{b}$. **3.1.56.** $\bar{x} = \frac{5}{3}\bar{i} + \frac{35}{3}\bar{j} + \frac{10}{3}\bar{k}$. **3.1.57. 1)** $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ — острый; **2)** $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ — тупой; **3)** одинаково направлены; **4)** противоположно направлены.
3.1.58. Вектор суммы не изменится по модулю, но будет повернут на тот же угол. **3.1.59. а)** возможно, единственное; **б)** возможно единственное; **в)** 0, 1 или 2 решения в зависимости от модулей слагаемых. **3.1.60.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, если $\bar{c} = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, если $\bar{c} \parallel \bar{b}$; $\lambda_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 0$, если $\bar{c} \parallel \bar{a}$. **3.1.61.** Да.
3.1.62. Да. **3.1.63.** Нет.

§ 2. Скалярное произведение векторов

3.2.2. $\sqrt{13}$. **3.2.3.** $\sqrt{73}$. **3.2.6.** $\frac{\pi}{2}$. **3.2.7.** $-\frac{3}{2}\bar{i} + \frac{3}{4}\bar{j} + \frac{3}{2}\bar{k}$. **3.2.9.** −4.

3.2.10. а) −3; **б)** 26. **3.2.11.** 5. **3.2.13.** −1,5. **3.2.14.** 7. **3.2.15.** $2i - 3j$.
3.2.18. $(2; 4; -6)$. **3.2.19. а)** 3; **б)** $\approx 77°$; **в)** $\approx 0{,}7$; **г)** 1. **3.2.20.** 20.
3.2.21. 2 (ед. раб.). **3.2.22.** −5. **3.2.23. а)** 3; 3; $\sqrt{2}$; **б)** $\approx 76°$; $\approx 76°$; $\approx 27°$; **в)** $\approx 50°$. **3.2.24.** $\approx 122°$; $\approx 37°$; $\approx 74°$. **3.2.26.** −3. **3.2.27.** −1.

3.2.28. $\frac{\pi}{2}$; $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **3.2.29.** −13. **3.2.30.** 60°. **3.2.31.** $\frac{\pi}{3}$.

3.2.32. $c = (1; 0; -1)$ или $c = \left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **3.2.34.** $8\bar{i} + 8\bar{j} + 7\bar{k}$. **3.2.35.** 5.

3.2.37. Плоскость, перпендикулярная к оси вектора $\bar{a}$. **3.2.38.** $\varphi = \arccos\frac{5}{6}$.

3.2.41. Нет. **3.2.44.** $\bar{a} \parallel \bar{c}$, $\bar{b} \perp \bar{a}$ и $\bar{b} \perp \bar{c}$. **3.2.45.** Нет. Нет. Да. **3.2.46.** Нет.
3.2.47. Нет. **3.2.48. а)** Да; **б)** Нет, т.к. из 2-го $\not\Rightarrow$ 1-ое; **в)** Да.

§ 3. Векторное произведение векторов

3.3.2. (5;1,7). **3.3.3.** (10;10;10); $10\sqrt{3}$. **3.3.4.** $\sqrt{3}$; $5\sqrt{3}$. **3.3.6.** $\frac{\sqrt{195}}{2}$.

3.3.7. $18\sqrt{2}$. **3.3.8.** $50\sqrt{2}$. **3.3.10.** $-10\bar{i} + 13\bar{j} + 11\bar{k}$; $\alpha \approx 120°$; $\beta \approx 49°$; $\gamma \approx 56°$.

3.3.11. $|M| = 15$; $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\beta = -\frac{2}{3}$; $\cos\gamma = -\frac{1}{3}$. **3.3.12. а)** 3; **б)** $2(\bar{a} \times \bar{c})$; **в)** $34\bar{i} - 7\bar{j} + 26\bar{k}$. **3.3.13.** Удвоенная площадь параллелограмма равна площади параллелограмма, построенного на его диагоналях. **3.3.15.** $30\sqrt{3}$. **3.3.16.** ± 30. **3.3.17.** $\pm\frac{1}{3\sqrt{10}}(5\bar{i} - \bar{j} - 8\bar{k})$. **3.3.18.** $\pm\left(0; \frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$. *Указание.* $\bar{e} \perp \bar{i}$.

3.3.19. $42\sqrt{2}$. **3.3.20.** $4\sqrt{2}$. **3.3.21.** $(-40; 40; 20)$; $\frac{5}{\sqrt{29}}$; 60.

3.3.22. $-46\bar{i} + 29\bar{j} - 12\bar{k}$; $-7\bar{i} + 7\bar{j} + 7\bar{k}$. **3.3.23.** (45;24;0). **3.3.24.** $\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$.

3.3.25. $\frac{5\sqrt{17}}{21}$. **3.3.26.** 5. **3.3.27.** (7;5;1). **3.3.29.** $\frac{58}{\sqrt{17}}$. **3.3.33.** См. 3.3.14

3.3.34. $\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}$.

3.3.35. $\frac{11}{6\sqrt{3}}$; $\frac{143\sqrt{2}}{108}$. **3.3.37.** $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$. Векторы попарно перпендикулярны. **3.3.40.** $\bar{a} \parallel \bar{b}$. **3.3.41.** $\alpha = \frac{3}{2}$; $\beta = \frac{14}{3}$. **3.3.42.** Нет.

3.3.45. Нет. Из 2-го $\not\Rightarrow$ 1-ое. **3.3.46.** Да, если $\bar{a} \perp \bar{b}$; среди них есть вектор $\bar{x}$, наименьшей длины $|\bar{x}| = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$; нет, если $\bar{b} = \bar{0}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ или $\bar{a} \not\perp \bar{b}$.

§ 4. Смешанное произведение векторов

3.4.2. а) Да; **б)** Нет. **3.4.3.** $\frac{1}{3}$. **3.4.5.** 12. **3.4.6.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **3.4.7.** $\frac{25}{6}$. **3.4.9.** 0.
3.4.10. $3\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. **3.4.11. а)** Левую; **б)** Правую. **3.4.12.** 24. **3.4.13.** (3;3;0).
3.4.14. -10. **3.4.15.** ± 27. **3.4.16.** 20. **3.4.18.** 11. **3.4.19.** (0;8;0) или $(0; -7; 0)$.
3.4.20. а) 12; **б)** $2\sqrt{26}$; **в)** $\frac{6}{\sqrt{26}}$; **г)** $\arccos\frac{16\sqrt{10}}{75}$. **3.4.21. а)** $\sqrt{17}$; $2\sqrt{13}$; $5\sqrt{2}$; **б)** 14; **в)** $\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{26}}\right)$; **г)** 30; **д)** $6\frac{3}{7}$. **3.4.24.** $(8; -17; -13)$.

3.4.25. $\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{pmatrix}\right|$ при $V = 0$. **3.4.27.** $(\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b} = 0$.

3.4.28. Когда $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ взаимно перпендикулярны. **3.4.29.** $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Глава 4. Аналитическая геометрия на плоскости

4.1.2. $(3; 2)$; $(-3; -2)$; $(-3; 2)$. **4.1.3. 1)** $(-4; -2)$; **2)** $(4; 2)$. **4.1.6.** $(-1; 3)$.
4.1.7. 6. **4.1.10.** $\left(\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right)$. **4.1.11.** $(0; -4)$ и $(0; -12)$. **4.1.12.** $\sqrt{8}$; $\frac{3}{4}\pi$.
4.1.13. $\left(2; -\frac{7}{3}\right)$ и $\left(3; \frac{1}{3}\right)$. **4.1.14.** $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$. **4.1.15.** $(5; 2)$ или $(2; 2)$. **4.1.16.** $(4; 0)$ или $(-2; 0)$. **4.1.17.** $(5; 5)$ и $(13; 13)$. **4.1.18.** Да, $\angle BAC$.
4.1.19. $\sqrt{82}$. **4.1.20.** 34. **4.1.21.** 26. **4.1.22.** $(3; -2)$; 10. **4.1.23.** $2\sqrt{5}$.

4.1.24. $(6;-2)$ и $(2;-4)$. **4.1.25.** $(-4;3)$; $(2;7)$; $(6;-1)$. **4.1.26.** 5; $\frac{24\sqrt{2}}{7}$.
4.1.27. $\left(-\frac{13}{2};-7\right)$; $(-5;-6)$; $\left(-\frac{7}{2};-5\right)$; $(10;4)$. **4.1.28.** $(3;0)$ и $(-7;0)$.
4.1.29. $(0;4)$ и $(-1;-3)$. **4.1.30.** 60°. **4.1.31.** $(4;-5)$. **4.1.32.** $(5;5)$. **4.1.33.** 20.
4.1.34. $x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3}{m_1+m_2+m_3}$; $y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+y_3m_3}{m_1+m_2+m_3}$. **4.1.35.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.
4.1.37. $(-5;0)$ и $(-2;-4)$ или $(3;6)$ и $(6;2)$. **4.1.38.** $(8;0)$ или $(-1;3\sqrt{3})$.
4.1.39. 7. **4.1.40.** $\left(\frac{196}{65};\frac{112}{65}\right)$. **4.1.41.** **1)** I и III; **2)** II и IV; **3)** I и III; **4)** I, III, IV; **5)** II и IV. **4.1.42.** $(-9;11)$. **4.1.44.** $(2x_2-x_1;y_1)$ и $(x_2;2y_1-y_2)$ или $(x_1;2y_2-y_1)$ и $(2x_1-x_2;y_2)$. **4.1.47.** $A(3;0)$; $B(1;-\sqrt{3})$; $C(0;5)$; $D(0;0)$; $E\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **4.1.49.** $A\left(3\sqrt{2};\frac{3}{4}\pi\right)$; $B\left(5;-\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(2\sqrt{2};-\frac{3}{4}\pi\right)$; $D(4;\pi)$; $E\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$.
4.1.51. $(1;0)$; $\left(\sqrt{3};\frac{\pi}{6}\right)$; $\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$; $\left(\sqrt{3};\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(1;\frac{2}{3}\pi\right)$. **4.1.52.** $\left(3;\frac{5}{9}\pi\right)$; $\left(5;-\frac{\pi}{4}\right)$.
4.1.53. 8. **4.1.54.** $\sqrt{3}-1$. **4.1.55.** $\left(1;-\frac{2}{3}\pi\right)$. **4.1.57.** **а)** $\left(2;-\frac{3}{4}\pi\right)$; $\left(1;\frac{2}{3}\pi\right)$; $(3;\pi)$; **б)** $\left(2;-\frac{\pi}{4}\right)$; $\left(1;\frac{\pi}{3}\right)$; $(3;0)$. **4.1.58.** 25. **4.1.59.** $\frac{49\sqrt{3}}{4}$. **4.1.60.** $3(4\sqrt{3}-1)$.
4.1.61. **а)** На окружности радиуса r с центром в точке O. **б)** На луче, выходящем из полюса под углом $\left(\frac{\pi}{9}\right)$ к полярной оси. **в)** На полярной оси.
4.1.62. $(7;0)$. **4.1.65.** $3x+y-4=0$. **4.1.66.** $y^2=4x-12$. **4.1.68.** $y=\pm\frac{x}{3}$.
4.1.69. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$. **4.1.71.** $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t.\end{cases}$ **4.1.72.** $r=2R\sin\varphi$.
4.1.73. $\varphi=\frac{\pi}{6}$. **4.1.75.** A_1 и A_3. **4.1.76.** $(0;6)$; $(6;0)$; $(-1;0)$. **4.1.77.** $(-3;4)$ и $(4;3)$. **4.1.78.** **а)** $(3;4)$ и $(3;-4)$; **б)** $(\sqrt{25-y_0^2};y_0)$ и $(-\sqrt{25-y_0^2};y_0)$.
4.1.79. **а)** $x-2y+2=0$, прямая; **б)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, эллипс; **в)** $y^2-x=0$, парабола. **4.1.80.** $\frac{x^2}{5}+y^2=1$. **4.1.81.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$, гипербола.
4.1.82. $r^2=2a^2\cos2\varphi$. Кривая называется лемнискатой Бернулли.
4.1.83. $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$. Эта кривая называется циклоидой.
4.1.84. $r=a\sin2\varphi$. **4.1.85.** $x^2-4x-6y+13=0$. **4.1.86.** $xy=\frac{S}{2}$.
4.1.87. $y^2=2\rho x$. **4.1.88.** **а)** Оси координат. **б)** Ось Oy и биссектриса II и IV координат углов.

§ 2. Прямая на плоскости

4.2.2. $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-3}=1$. **4.2.3.** **а)** $\alpha=0$; $\alpha=1$; **б)** $\alpha=\frac{1}{3}$. **4.2.4.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
4.2.5. $15x-5y+32=0$. **4.2.7.** Расстояния: **а)** $\frac{6\sqrt{13}}{13}$; **б)** 2,5; **в)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **г)** 0.

4.2.9. $k=-\frac{2}{3}$; $b=\frac{5}{3}$. **4.2.10.** $\left(0;\frac{5}{3}\right)$. **4.2.11.** 1. **4.2.13.** $3x+y-3=0$.

4.2.15. а) $y=\sqrt{3}x-6$; **б)** $y=2$; **в)** $4x+3y-12=0$. **4.2.16.** $x+2y-8=0$. **4.2.17.** $x+y-7=0$. **4.2.18.** $\frac{\pi}{4}$. **4.2.19.** (1;0); $x+y-1=0$. **4.2.20.** $\alpha=3$; $\beta=-4$. **4.2.21.** $2x-y-4=0$ или $x-2y+4=0$. **4.2.22.** $5x+y-3=0$. **4.2.23.** $3x-4y-25=0$. **4.2.24.** $x=3$; $y=2$; $2x+y-14=0$. **4.2.25.** $x-y+2=0$. **4.2.26.** 5. **4.2.27.** $r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$. **4.2.28.** $y=0$; $y=3$; $x+y-5=0$; $x-y+5=0$. **4.2.29.** $x+2y-8=0$; $x-2y+4=0$. **4.2.30.** $y=-x+3$. **4.2.31.** 6; -9. **4.2.32.** $x+y-1=0$. **4.2.33.** $5x+13=0$. **4.2.34.** $x+y-6=0$. **4.2.35.** $x+y+4=0$ и $x-y-8=0$. **4.2.36.** (2;0); $(0;-3)$ или $(-4;0)$; $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **4.2.37.** (1;0). **4.2.38.** $2x+y+4=0$; $2x-y+4=0$; $2x+y-4=0$. **4.2.40.** $y+2=0$. **4.2.41.** $A=B$. **4.2.42.** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+4$.

4.2.43. $\alpha=1$. **4.2.50.** $C=\pm 90$. **4.2.51.** $y=-\frac{2}{3}x+b$. **4.2.53. 1)** $\frac{\pi}{4}$; **2)** 0; **3)** $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$; **4)** $\frac{\pi}{2}$. **4.2.54. а)** $\frac{\pi}{4}$; **б)** $\operatorname{arctg}\frac{19}{9}$. **4.2.55. 1)** Перпендикулярны; **2)** Пересекаются; **3)** Совпадают; **4)** Параллельны; **5)** Совпадают; **6)** Перпендикулярны; **7)** Пересекаются; **8)** Параллельны; **9)** Пересекаются; **10)** Перпендикулярны. **4.2.56. 1)** а) 4; б) -9; **2)** а) 8; б) -2; **3)** а) $\frac{3}{4}$; б) -12; **4)** а) $-\frac{3}{2}$; б) $\frac{2}{3}$. **4.2.58. а)** $2x-y+4=0$; **б)** $3x-y+5=0$. **4.2.59. а)** $x-3y-11=0$; **б)** $x+y+1=0$. **4.2.63.** 5. **4.2.64.** 49. **4.2.65.** $4x+y-6=0$ или $3x+2y-7=0$. **4.2.66.** $5x-12y-52=0$, $5x-12y+26=0$. **4.2.69.** $\sqrt{13}$. **4.2.70.** $5{,}1\cdot\sqrt{2}$. **4.2.71.** 4. **4.2.72.** $y-5=0$ или $5x+12y-65=0$. **4.2.73.** (1;3). **4.2.74.** (2;4). **4.2.75.** $3x+2y-11=0$. **4.2.76.** $(-3;-1)$. **4.2.77.** (6;6). **4.2.78.** $x+2y-10=0$. **4.2.80.** $7x-56y+83=0$ и $32x+4y+73=0$. **4.2.81.** $4x-3y+7=0$, $x=2$. **4.2.82.** $4x-3y-7=0$. **4.2.83.** (2;1) и (5;2) или (0;7) и (3;8). **4.2.84.** $5x-3y-2=0$, $7x+6y+4=0$, $\varphi=\operatorname{arctg}3$. **4.2.85.** Да; $\lambda_1=-10$; $\lambda_2=6$. **4.2.86.** $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$. **4.2.87.** $a=\frac{b}{\sqrt{3}}$; $a=b\sqrt{3}$. **4.2.88.** в) и г).

4.2.89. $\pm\sqrt{2}$. **4.2.90.** $\frac{\pi}{4}$. **4.2.91.** $4a-b-1=0$. **4.2.92.** $\alpha=3$, $\alpha=4$.

4.2.93. (1;6). **4.2.94.** Пересекаются. **4.2.96.** 13. **4.2.97. а)** $x=-2$; **б)** $y=-x-1$; **в)** $2x+y+3=0$; **г)** $y=x+3$; **д)** $x+6y-4=0$; **е)** $2x-y+5=0$ или $3x+y+5=0$. **4.2.98.** $7x-y=0$, $17y-28=0$. **4.2.99.** $\operatorname{arctg}2$.

4.2.100. а) (4;4); **б)** $\frac{\pi}{2}$. **4.2.101.** $2x+11y-26=0$. **4.2.102.** $\frac{\sqrt{149}}{32}$.

4.2.103. $x+2y-7=0$, $x-4y-1=0$, $x-y+2=0$. **4.2.104.** $(2;-3)$. **4.2.105.** $3x-3y-8=0$. **4.2.106.** (0;2); (4;0); (2;4); $(-2;6)$. **4.2.107.** $(-3;1)$. **4.2.108. а)** $(-3;\pm 3\sqrt{3})$; **б)** $(-3;\pm\sqrt{3})$. **4.2.109.** $3x-4y-9=0$, $3x-4y+16=0$, $4x+3y-37=0$ или $4x+3y+13=0$. **4.2.110.** Квадрат со сторонами, лежащими на прямых $3x+y=\pm 5$, $x-3y=\pm 5$. **4.2.111.** $2x+7y+22=0$; $7x+2y-13=0$; $x-y+2=0$. **4.2.112. 1)** 5; 5; **2)** $4x+3y-27=0$ и $3x-4y-14=0$; **3)** $4x+3y-27=0$; **4)** 5;

5) $2x - y - 6 = 0$; 6) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$; 7) $x + 7y - 13 = 0$; 8) $\left(\frac{11}{3}; \frac{4}{3}\right)$; 9) $\frac{25}{2}$; 10) $\frac{\pi}{2}$.
4.2.113. $3x + y - 14 = 0$ и $x - 3y + 12 = 0$. **4.2.114.** $y = 2x$, $x - 3y = 15$, $3x + y = 25$. **4.2.115.** $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$ или $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y + 26 = 0$. **4.2.116.** $3x + 4y - 12 = 0$. **4.2.117.** К стороне AB.
4.2.118. $3x - 4y - 25 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$. **4.2.120.** $r\sin(\theta - \varphi) = r_1 \sin(\theta - \varphi_1)$.
4.2.121. $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$.

§ 3. Кривые второго порядка

4.3.2. а) $(2; -3)$; $R = 4$; **б)** $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$; $R = \frac{\sqrt{19}}{3}$. **4.3.4.** $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$, $(x-10)^2 + (y+10)^2 = 100$. **4.3.5.** $y = 0$ и $4x - 3y = 0$. **4.3.6.** $\left(-\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$; $R = \frac{7}{5}$.
4.3.8. а) $(x+2)^2 + y^2 = 4$; **б)** $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 25$; **в)** $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$.
4.3.9. $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$. **4.3.10.** 4. **4.3.11.** $3x - 4y + 7 = 0$. **4.3.12.** $(4;1)$; $(-2; -5)$. **4.3.13.** $x + y - 6 = 0$. **4.3.14.** $(-3; -2)$; $R = 5$.
4.3.15. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$. **4.3.16.** $\pi - \operatorname{arctg}\frac{24}{7}$. **4.3.17.** $0 < k < \frac{8}{15}$; $k = 0$ и $k = \frac{8}{15}$. **4.3.18.** $y = 2x \pm 5$. **4.3.19.** $xx_0 + yy_0 = R^2$. **4.3.20.** 7.
4.3.21. $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 1$. **4.3.22.** Нет. **4.3.23.** Да. **4.3.24.** Точка C.
4.3.25. $x^2 + y^2 + 2ax - 6y + a^2 = 0$. **4.3.26.** $x^2 + y^2 + 12y - 64 = 0$. **4.3.29.** 5 и 4; $(3;0)$ и $(-3;0)$; $\varepsilon = 0{,}6$; $x = \pm\frac{25}{3}$. **4.3.30. 1)** $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$;
2) $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$. **4.3.32. 1)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; **2)** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} = 1$; **3)** $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$;
4) $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$. **4.3.33. 1)** $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$; **2)** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; **3)** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$;
4) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. **4.3.35.** $|\alpha| < \sqrt{6}$; $\alpha = \pm\sqrt{6}$. **4.3.36.** $\frac{(x-7)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{4{,}9} = 1$.
4.3.38. 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$; **2)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$. **4.3.39.** 4. **4.3.40.** $\left(\frac{25}{9}; \pm\frac{8\sqrt{14}}{9}\right)$.
4.3.41. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **4.3.42.** $12\sqrt{2}$. **4.3.43.** $\left(\pm\frac{4\sqrt{6}}{3}; \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **4.3.44.** $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Указание. $4 - \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. **4.3.45.** $\frac{(x+4)^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$.
4.3.46. $\left(-\frac{11}{13}; \frac{8\sqrt{3}}{13}\right)$; $\left(-\frac{11}{13}; -\frac{8\sqrt{3}}{13}\right)$. **4.3.47.** $\frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$. **4.3.48.** $x - 2y \pm 3 = 0$.
4.3.49. $(-3; 2)$; $\sqrt{13}$. **4.3.50.** $\left(-\frac{15\sqrt{2}}{4}; \pm\frac{\sqrt{126}}{4}\right)$;. **4.3.51.** $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.
4.3.53. $\frac{x^2}{31} + \frac{y^2}{2} = 1$. **4.3.54.** Эллипс. *Указание.* стороны угла принять за оси координат. Ввести угол φ между отрезками и осью Oy. Исключить параметр φ из полученных выражений для x и y. **4.3.56.** $\varepsilon \approx 0{,}08$. **4.3.57.** 1; 0; 2.
4.3.58. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.3.59.** 20. **4.3.62. 1)** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; **2)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$;

3) $\frac{25}{324}x^2 - \frac{y^2}{36} = 1$. **4.3.63. 1)** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; **2)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; **3)** $x^2 - y^2 = 1$. **4.3.65.** $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$. **4.3.66.** $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **4.3.68.** $3x - 4y - 18 = 0$ и $3x + 4y + 6 = 0$. **4.3.70.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. **4.3.71.** $\varepsilon = 2$. **4.3.72.** $\left(\frac{32}{5}; \pm\frac{3\sqrt{39}}{5}\right)$. **4.3.73.** $3x + 2y - 6 = 0$ и $-3x + 2y + 6 = 0$. **4.3.74.** $x + y \pm 1 = 0$. **4.3.75. а)** Гипербола $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$; **б)** Гипербола $x^2 - y^2 = 1$. **4.3.78.** 3. **4.3.79.** 100. **4.3.80.** $\frac{1}{\cos\alpha}$. **4.3.81.** 9,6. **4.3.82.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$. **4.3.83.** $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **4.3.84.** $5\sqrt{2}$. **4.3.85.** $5\sqrt{10}$; $3\sqrt{10}$; 7,5; 12,5. **4.3.86.** $\left(\frac{8\sqrt{15}}{15}; -\frac{\sqrt{15}}{15}\right)$; $\frac{\sqrt{15}-2}{\sqrt{5}}$. **4.3.87.** $2\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}$. **4.3.88.** $|\alpha| > \sqrt{10}$; $\alpha = \pm\sqrt{10}$. **4.3.89.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **4.3.90.** $\frac{(x-2)^2}{64} - \frac{(y-2)^2}{36} = 1$. **4.3.91.** $x^2 - y^2 = \frac{9}{2}$. **4.3.92.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. **4.3.93.** $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$. **4.3.94.** $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$. **4.3.95.** $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$; $x > 0$. **4.3.97.** 4. **4.3.99.** См. 4.3.98. **4.3.100.** Нет. $|k| \geqslant \frac{b}{a}$. **4.3.101. 1)** Ветвь гиперболы в нижней полуплоскости; **2)** Ветвь гиперболы в левой полуплоскости. **4.3.102.** 90°. **4.3.103.** 4. **4.3.104.** Через B. **4.3.107.** $y^2 = -3x$. **4.3.108.** 3. **4.3.110.** $4x - 2y + 1 = 0$. **4.3.111.** $k < \frac{5}{4}$; $k = \frac{5}{4}$. **4.3.112.** $x^2 = y$. **4.3.113.** $(2; \pm2\sqrt{3})$. **4.3.114.** 12. **4.3.115.** $4\sqrt{3}p$. **4.3.116.** $8\sqrt{2}$. **4.3.117.** 1,6 м. **4.3.118.** 7 м. **4.3.119.** $(-1; 2)$. **4.3.120.** $y = \pm x$. **4.3.121.** $x^2 = 16y$; $y^2 = -9{,}6x$. **4.3.122.** $x^2 = 2y$. **4.3.123.** $4\sqrt{5}$. **4.3.125.** $y^2 = 8(x+2)$. **4.3.126.** $4x - 2y + 7 = 0$. **4.3.127.** 24. **4.3.128.** $x - y + 9 = 0$; $9x - y + 1 = 0$. **4.3.129.** $9x - 5y + 9 = 0$. **4.3.132.** $y - 18 = 0$. См. 4.3.131. **4.3.133.** $2x - y - 4 = 0$. **4.3.135.** $x^2 = 4y$; $y^2 = -4x$; $x^2 = -4y$. **4.3.136.** $x^2 = 14y$. **4.3.137.** Парабола. $y^2 = \frac{9}{2}x$; $P = \frac{9}{4}$; $F\left(\frac{9}{8}; 0\right)$; $x = -\frac{9}{8}$. **4.3.139.** 8.

Глава 5. Аналитическая геометрия в пространстве

§ 1. Метод координат в пространстве

5.1.2. $\left(\frac{19}{2}; 24; 0\right)$. **5.1.5.** Относительно плоскостей Oxy, Oyz, Oxz — соответственно $(3; -4; -2)$, $(-3; -4; 2)$, $(3; 4; 2)$; относительно осей Ox, Oy, Oz — соответственно $(3; 4; -2)$, $(-3; -4; -2)$, $(-3; 4; 2)$; относительно точки O — $(-3; 4; -2)$. **5.1.6.** $\sqrt{65}$. **5.1.9.** $\left(6; 3; \frac{20}{3}\right)$. **5.1.10.** $(4; -1; 3)$. **5.1.11.** (0;0;6);

(0;0;2). **5.1.12.** $0{,}75\cdot\sqrt{10}$. **5.1.13.** Да. **5.1.14. 1)** 1,3,5,7; **2)** 2,3,5,8; **3)** 1,3,5,7; **4)** 2,4,5,7. **5.1.15.** $(3;-3;-3)$, $R=3$. **5.1.16.** $|AO|=5\sqrt{2}$, расстояния до осей Ox, Oy, Oz соответственно равны $\sqrt{41}$; $\sqrt{34}$; 5. **5.1.17.** $C(7;-1;7)$; $D(10;-3;6)$. **5.1.18.** 3,5. **5.1.20.** *Указание.* Доказать, что середины этих отрезков имеют одинаковые координаты. **5.1.21.** $A\in Oz$, $B\in Oxy$, $C\in Oyz$. **5.1.22.** 5.

5.1.23. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **5.1.27.** $(1;0;-3)$, $R=4$. **5.1.28.** Вне сферы; внутри; внутри.

5.1.30. 1) Две плоскости $y=2$, $y=-2$; **2)** Параболический цилиндр; **3)** Точка $O(0;0;0)$; **4)** Плоскость $z=0$ и $y=-z$. **5.1.31. 1)** Плоскость $x=0$, $y=0$, $z=0$; **2)** Две плоскости, проходящие через ось Oz и делящие пополам двугранные углы, образованные плоскостями Oxy и Oyz; **3)** Никакой; **4)** Круговой цилиндр с $R=2$ и осью параллельной оси Oz. **5.1.33.** Сфера $\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+(y-4)^2+z^2=\frac{100}{9}$. **5.1.34.** Окружность, лежащая в плоскости $y=2$, с радиусом $R=\sqrt{5}$ и центром в точке (3;2;0). **5.1.35. 1)** Ось Oz; **2)** Прямая параллельная оси Ox; **3)** Окружность с $R=2\sqrt{5}$ и центром в точке (4;0;0). **5.1.36.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=49$.

5.1.37. $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9,\\ y=0.\end{cases}$ **5.1.38.** $y=x$. **5.1.39.** $y-3=0$.

5.1.40. $x^2+y^2=2pz$, где p — расстояние от точки до плоскости.

5.1.41. $x^2+y^2+z^2=a^2$. **5.1.42.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1$. **5.1.43.** Эллипс.

5.1.44. Цилиндр. **5.1.45.** A_1 лежит, A_2 не лежит.

§ 2. Плоскость в пространстве

5.2.2. 1) $z-1=0$; **2)** $x+2z=0$. **5.2.3. 1)** $x-5=0$; **2)** $x+y+z-7=0$.

5.2.5. $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\cos\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$, $\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.2.8.** $9x+y+11z-7=0$.

5.2.9. $8x+3y-2z-5=0$. **5.2.11.** $10x-5y-4z+20=0$.

5.2.13. $x+5y+2z-8=0$. **5.2.14.** $3y-8z+13=0$. **5.2.15.** 37,5. **5.2.16.** 10; $\arccos\frac{4}{21}$. **5.2.17.** $x-2y+2z-18=0$. **5.2.18.** $2x-y-3z+5=0$.

5.2.19. $3x-2y+4z-8=0$. **5.2.20.** $x-2y+z-3=0$.

5.2.21. $5x-2y-3z+4=0$. **5.2.22.** $5x-2y+5z-16=0$. **5.2.23.** 2.

5.2.24. $x+y+z-4=0$. **5.2.25.** $x+y+3z-15=0$. **5.2.26.** $x-y-3z-2=0$.

5.2.27. 1) $(1;-2;2)$; **2)** Нет общей точки. **5.2.29.** $\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a_x & a_y & a_z\\ A & B & C\end{vmatrix}=0.$

5.2.30. $9x+10y-11z=0$. **5.2.31.** 27. **5.2.32.** $(-40;-8;44)$. **5.2.33.** 6.

5.2.34. $3x+2y+z-10=0$. **5.2.35.** 1) и 4). **5.2.36.** Да, через A и C.

5.2.37. $(-6;0;0)$; $(0;-3;0)$; $(0;0;2)$. **5.2.39.** $x+2y-3z+4=0$.

5.2.40. $15x-5y-4z-7=0$. **5.2.42. 1)** $\arccos\frac{\sqrt{21}}{14}$; **2)** $\arccos\frac{1}{3}$.

5.2.44. 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; **2)** 8. **5.2.45.** 4. **5.2.47.** $3x-4y+2z=0$.

5.2.48. 1) Параллельны; **2)** Совпадают; **3)** Перпендикулярны.
5.2.49. $2x - y - z - 6 = 0$. **5.2.50.** $(0;1;0)$; $(0;-15;0)$. **5.2.51.** 4.
5.2.52. $3x - 6y - 2z - 20 = 0$; $3x - 6y - 2z + 36 = 0$. **5.2.54.** 8.
5.2.55. $x - 3y + 4z - 21 = 0$; $x - 4 = 0$; $y + 2z - 1 = 0$.
5.2.56. $x + 2y + 5z + 1 = 0$. **5.2.57.** $x - z = 0$. **5.2.58.** $x - 4y + 3z + 8 = 0$; $3x - z + 2 = 0$. **5.2.59.** $4x - 3y + z + 3 = 0$. **5.2.60.** $\pm\sqrt{5}\cdot x + 2y + z - 2 = 0$.
5.2.61. $(A_1D_2 - A_2D_1)x + (B_1D_2 - B_2D_1)y + (C_1D_2 - C_2D_1)z = 0$.
5.2.62. $\begin{vmatrix} x & z & 1 \\ a_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. **5.2.63. 1)** $\alpha = 3$, $\beta = -4$; **2)** $\alpha = -\frac{6}{5}$, $\beta = -\frac{15}{2}$.
5.2.64. 1) 13; **2)** 1. **5.2.65.** Да.

§ 3. Прямая в пространстве

5.3.2. $(0;1;0)$. **5.3.3.** $\frac{x}{-8} = \frac{y-7}{22} = \frac{z+1{,}5}{-9}$. **5.3.4.** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = 0$; $\cos\gamma = -\frac{4}{5}$. **5.3.6. 1)** $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = -1. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = 2, \\ z = 2 - t. \end{cases}$
5.3.8. 1) $\frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-5}{1}$ (т.е. $x = 3$, $y = -2$); **2)** $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{1}$.
5.3.9. Да. **5.3.10.** Нет. **5.3.11.** $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **5.3.12.** $(4;-4;0)$; $(2;0;10)$; $(0;4;20)$. **5.3.13.** $(2;2;0)$; $\left(\frac{7}{3};0;\frac{5}{3}\right)$; $(0;14;-10)$. **5.3.14.** $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0}$.
5.3.15. $\frac{x-1}{-15} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-2}{14}$. **5.3.16.** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{\sqrt{2}}$.
5.3.17. $D = -20$. **5.3.18.** $x = -3 + t$, $y = 2$, $z = 8 - 4t$.
5.3.19. $\frac{x-7}{11} = \frac{y-8}{1} = \frac{z+8}{1}$. **5.3.20.** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{8}$.
5.3.21. 1) $D_1 = 0$, $D_2 = 0$; **2)** $B_1 = 0$, $B_2 = 0$; **3)** $\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$; **4)** $A_1 = D_1 = 0$, $A_2 = D_2 = 0$. **5.3.22.** $3x - 5y + 2 = 0$; $13x - 10z + 32 = 0$; $13y - 6z + 14 = 0$.
5.3.23. $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ **5.3.24.** $\begin{cases} x = 3t, \\ y = -t, \\ z = -2t. \end{cases}$ **5.3.26. 1)** $\frac{\pi}{4}$; **2)** $\arccos\frac{2}{\sqrt{66}}$.
5.3.28. 1) Совпадают; **2)** скрещиваются (перпендикулярны).
5.3.30. $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$. **5.3.31.** $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{16} = \frac{z-3}{17}$. **5.3.32.** $2\sqrt{10}$. **5.3.33.** 3.
5.3.34. Нет. **5.3.35.** $n = -26$; $\left(\frac{3}{4};\frac{9}{2};-\frac{3}{4}\right)$. **5.3.37. 1)** $x = -3$, $7y - 2z = 0$; **2)** $y = 2$, $z = 7$. **5.3.38.** $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. **5.3.39.** 135°.
5.3.40. $\left(\frac{5}{8};-\frac{11}{4};\frac{3}{2}\right)$. **5.3.41.** 2. **5.3.42.** $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$. **5.3.43.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

5.3.44. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{-1}$. **5.3.45.** Да. **5.3.46. а)** $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$;

б) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}$. **5.3.47.** $\begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$

§ 4. Прямая и плоскость в пространстве

5.4.2. $(-6;-12;4)$. **5.4.4.** $3x+5y+2z-9=0$. **5.4.5.** $2x+y-2z+7=0$.
5.4.7. $\frac{\pi}{4}$. **5.4.9. 1)** $l \parallel Q$; **2)** Пересекаются в точке (2;4;6).

5.4.10. $17x+y+11z+22=0$. **5.4.11.** $2x+y-z-1=0$. **5.4.12.** $(-3;-4;0)$.
5.4.13. $(5;1;-1)$. **5.4.14.** (4;2;3). **5.4.15.** 6. **5.4.16.** $C=-1$, $D=-3$.

5.4.17. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$. **5.4.18.** $6x+5y-2z+1=0$. **5.4.19.** $\sqrt{33}$.

5.4.20. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **5.4.21.** $y-z=0$. **5.4.22.** $5x+2y-8z-6=0$,

$2x-y+z-3=0$. **5.4.23. 1)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **2)** $\frac{6}{7}\sqrt{42}$. **5.4.24.** $(1;-2;2)$. **5.4.25.** 7.

5.4.26. $\begin{cases} 2x-3y+z-4=0, \\ x+y+z+2=0. \end{cases}$ **5.4.27.** $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$

5.4.28. $\left(\frac{100}{17};-\frac{10}{17};\frac{89}{17}\right)$. **5.4.29.** $x-z+4=0$ и $x+20y+7z-12=0$.
5.4.31. Нет. **5.4.32.** $x=y=z$. **5.4.33.** Да; нет. **5.4.34.** $p=-1{,}5$; $B=-8$.
5.4.35. $A=2$.

§ 5. Поверхности второго порядка

5.5.2. $x^2+(y-4)^2+z^2=9$. **5.5.5. 1)** $(x-4)^2+y^2+(z-2)^2=21$
2) $(x-5)^2+y^2+(z-3)^2=18$ **3)** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$
4) $(x-5)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=56$ **5)** $(x+5)^2+(y-1)^2+z^2=46$
6) $(x+5)^2+(y-3)^2+z^2=121$. **5.5.8. а)** $1<|m|<\sqrt{2}$ **б)** $|m|<1$.

5.5.9. а) $m\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(0;+\infty)$ **б)** $m=0$. **5.5.11. 1)** Эллипсоид: $a=2$, $b=4$, $c=9$. **2)** Двуполостной гиперболоид с осью Oz. **3)** Эллиптический параболоид с вершиной в точке $(0;0;2)$ направленной «вверх» при $a>0$, «вниз» при $a<0$; ось Oz, если $a=0$. **4)** Параболоид гиперболический.
5) Цилиндр параболический с образующей, параллельной оси Ox.
6) Параболоид круглый (круговой) с вершиной в точке $(0;0;5)$ направленной «вниз». **7)** Конус эллиптический с осью Ox. **8)** Цилиндр параболический с образующей, параллельной оси Oz. **9)** Однополостный гиперболоид.
10) Конус с осью Oy. **11)** Параболоид эллиптический
$x+\frac{29}{4}=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+3(z+1)^2$, направленный в положительном направлении оси Ox. **12)** Конус. *Указание.* Поворот плоскости Oyz на 45° формулами $y=y_1-z_1$, $z=y_1+z_1$ приводит к уравнению $x^2-y_1^2+z_1^2=0$.

5.5.16. 1) Эллипс. **2)** Парабола. **3)** Гипербола.
5.5.18. $(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 81$.
5.5.19. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 49$. *Указание.* Центр искомой сферы можно определить как точку пересечения трех плоскостей, одна из которых задана, а две другие проходят соответственно через середины отрезков AB и BC перпендикулярно этим отрезкам. **5.5.20.** $(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 81$.
5.5.21. 1) Вне сферы. **2)** На сфере. **3)** Внутри сферы. **5.5.22.** $M_0(-1,2,3)$, $R=8$. **5.5.23.** $5x-8y+5z-7=0$. **5.5.24.** $x^2+y^2+z^2-10x+15y-25z=0$.
5.5.26. 1) пересекает, **2)** вне сферы, **3)** касается. **5.5.27. 1)** 5, **2)** 7.
5.5.28. $6x-3y-2z-49=0$. **5.5.29.** $(2;-6;3)$. **5.5.30.** $x+2y-2z\pm 9=0$.
5.5.31. 1) $(9;5;-2)$, **2)** $(3;0;-10)$, **3)** $(-2;2;6)$. **5.5.32.** $\begin{cases} y+2z=0, \\ x-5=0; \end{cases}$
$\begin{cases} 2x-5z=0, \\ y+4=0. \end{cases}$ **5.5.33.** $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x-2y+4=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x+2y-8=0. \end{cases}$

Глава 6. Функции и пределы

§ 1. Функции и их графики

6.1.3. $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. **6.1.4.** $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup[2;+\infty)$. **6.1.5.** $(-\infty;0)$.
6.1.6. $(-\infty;2]\cup[5;+\infty)$. **6.1.7.** $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **6.1.8.** $[7;10]$.
6.1.9. $(0;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$. **6.1.10.** $[-2;1)$. **6.1.11.** $\left[0;\frac{2}{3}\right)$. **6.1.12.** $(2;3]$.
6.1.14. $[4;+\infty)$. **6.1.15.** $(0;1]$. **6.1.16.** $[-9;-5]$. **6.1.17.** $(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$.
6.1.18. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **6.1.19.** $[2;+\infty)$. **6.1.21. 1)** 2; **2)** $-\frac{27}{8}$; **3)** $-\frac{5}{2\sqrt[3]{5}}$; **4)** $-\frac{x^3}{2^x}$;
5) $27\cdot 8^x$; **6)** $\frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^3}$; **7)** $\frac{1}{x^3\cdot 2^x}$; **8)** $(b-2)^3\cdot 2^{b-2}$. **6.1.22. 1)** 2; **2)** 0; **3)** 1,6;
4) $\frac{\sqrt{z+8}}{(z+3)^3}$; **5)** $\frac{\sqrt{2t-4}}{(2t-1)^2}$. **6.1.24. 1)** четная; **2)** нечетная; **3)** общего вида;
4) нечетная; **5)** общего вида; **6)** четная; **7)** четная; **8)** общего вида.
6.1.26. 1) периодическая, $T=8\pi$; **2)** непериодическая; **3)** периодическая, $T=\frac{\pi}{2}$; **4)** периодическая, $T=4\pi$; **5)** периодическая, $T=\frac{\pi}{3}$.
6.1.38. 1) $f\circ g(x)=x$, $x>0$; $g\circ f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$; **2)** $f\circ g(x)=6x-14$, $g\circ f(x)=6x-3$; **3)** $f\circ g(x)=|\cos x|$, $g\circ f(x)=\cos x$. **6.1.41.** Обратная функция $y=\frac{x-5}{3}$. **6.1.42.** Обратная функция $y=\sqrt[3]{x+2}$. **6.1.43.** У этой функции нет обратной. **6.1.44.** Обратная функция $y=\frac{2}{1-x}$.
6.1.45. Функция монотонная и ограниченная. **6.1.46.** Ограниченная функция.
6.1.47. Строго монотонная и ограниченная функция. **6.1.48.** Функция не является ни монотонной, ни строго монотонной, ни ограниченной.
6.1.49. Строго монотонная функция. **6.1.50.** Монотонная функция. **6.1.51.** 0;

1; 0; $\frac{e^2-1}{2e}$; $\frac{5}{4}$. **6.1.54.** **1)** $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$; **2)** $y = \pm(1-x)$, $x \leqslant 1$.

6.1.55. Точки A, C, D. **6.1.56.** **1)** $(-1;1)$, $(0;2)$, $(-\sqrt{2}-1;3)$; **2)** Точки A и B.

6.1.57. $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **6.1.58.** $(-\infty;2) \cup (-2;5) \cup (5;+\infty)$. **6.1.59.** $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$.

6.1.60. $(0;1) \cup (1;+\infty)$. **6.1.61.** $\varnothing$. **6.1.62.** $(0;3) \cup (3;+\infty)$. **6.1.63.** $(0;+\infty)$.

6.1.64. $\left[\frac{1}{3};3\right]$. **6.1.65.** $[-1;0) \cup (0;1]$. **6.1.66.** $(-\infty;-5) \cup \left(-5;-\frac{1}{2}\right) \cup [0;+\infty)$.

6.1.67. $(-1;0) \cup (0;\pi)$. **6.1.68.** $(-\infty;4]$. **6.1.69.** $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

6.1.70. $(0;1) \cup (1;+\infty)$. **6.1.71.** $(0;+\infty)$. **6.1.72.** $[e^{-4};+\infty)$. **6.1.73.** $\{-1;1\}$.

6.1.74. $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. *Указание.* $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. **6.1.75.** $[2;+\infty)$.

6.1.76. $[-1;8]$. **6.1.77.** $y(0) = \sqrt{7}$; $y(2) = \sqrt{11}$; $y\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{x+7}$;

$y(t^2) = \sqrt{2t^2+7}$; $3y(5x) = 3\sqrt{10x+7}$. **6.1.78.** $y(0) = -1$; $y(2) = 0$;

$y\left(\frac{x}{2}\right)=\begin{cases}-1, & \text{при } x<4,\\ 0, & \text{при } x=4,\\ 1, & \text{при } x>4;\end{cases}$ $y(t^2)=\begin{cases}-1, & \text{при } |t|\leqslant\sqrt{2},\\ 0, & \text{при } |t|=\sqrt{2},\\ 1, & \text{при } |t|\geqslant\sqrt{2};\end{cases}$

$3y(5x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}, & \text{при } x<\frac{2}{5},\\ 0, & \text{при } x=\frac{2}{5},\\ \frac{3}{2}, & \text{при } x>\frac{2}{5}.\end{cases}$ **6.1.79.** $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$. **6.1.80.** **1)** нечетная;

2) нечетная; **3)** общего вида; **4)** общего вида; **5)** общего вида; **6)** нечетная; **7)** общего вида; **8)** четная, если $c \neq 0$; четная и нечетная, если $c = 0$.

6.1.81. **1)** $g(x) = |x|$; **2)** $g(x) = x$; **3)** например, $g(x) = \begin{cases}x, & \text{при } x \geqslant 0,\\ 0, & \text{при } x < 0.\end{cases}$

6.1.82. **1)** непериодическая; **2)** периодическая, $T = \pi$; **3)** периодическая, наименьшего положительного периода нет; **4)** периодическая, $T = 2\pi$.

6.1.96. **1)** x^4, $(x+2)^2$ и x^2+2; **2)** $\operatorname{sign} x$, -1 и -2; **3)** $\frac{x-3}{10-3x}$, $-\frac{x}{2x+1}$ и $4-x$;

4) $f \circ f(x) = [x]$, $f \circ g(x) = \begin{cases}0, & \text{при } x \neq 0,\\ 1, & \text{при } x = 0,\end{cases}$ $g \circ f(x) = \frac{1}{[x]^2+1}$.

6.1.97. Обратная функция $y = \frac{x}{x+1}$. **6.1.98.** Обратная функция

$y = 3 + \log_2 x$. **6.1.99.** Обратная функция $y = \begin{cases}\frac{x}{2}, & \text{при } x \geqslant 0,\\ -\sqrt{-x}, & \text{при } x < 0.\end{cases}$

6.1.100. Функция не имеет обратной. **6.1.101.** Ограниченная функция. **6.1.102.** Строго монотонная функция. **6.1.103.** Ограниченная функция. **6.1.104.** Функция не является ни монотонной, ни строго монотонной, ни ограниченной. **6.1.105.** Строго монотонная функция. **6.1.106.** Монотонная функция. **6.1.113.** Например: **1)** $y = \arcsin(x^2+1)$; **2)** $y = \arccos(2-x^2)$; **3)** $y = \sqrt{-|\sin \pi x|}$. **6.1.114.** **1)** $y = x$; **2)** $y = e^x$; **3)** $y = \ln x$.

6.1.115. **1)** $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$. *Указание.* Учесть, что $\left|\frac{x^2+1}{x}\right| = \left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$,

$x \in \mathbb{R}$; **2)** $\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$; **3)** $[0; 1)$. *Указание.* $\dfrac{|x|}{|x|+1} = 1 - \dfrac{1}{|x|+1}$, где $|x| + 1 \geqslant 1$ для всех x. **6.1.116. 1)** $y = C$; **2)** $y = \frac{x}{|x|}$; **3)** $y = x + \sqrt{-|\sin \pi x|}$.

Указание. См. задачу 6.1.113, п. 3). **6.1.117. 1)** нет; **2)** нет. **6.1.118. 1)** Да. Например, если $f_2(x) = -f_1(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$; **2)** Да. Например, $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$. **6.1.120.** В обоих случаях ответ отрицательный. Например, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1$. **6.1.121.** $y = 0$. **6.1.125. 1)** *Указание.* Учесть, что сумма двух рациональных чисел (соответственно, рационального и иррационального) — снова рациональное (соответственно, иррациональное) число; **2)** см. указание к п. 1). **6.1.126.** *Указание.* Предположим противное — у данной функции есть период T. Тогда для любого x имеем $\cos(x+T)^2 = \cos x^2$, откуда $(x+T)^2 = \pm x^2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. $x^2 + 2Tx + T^2 \mp x^2 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При $x = 0$ получим $T^2 = 2\pi k$ при некотором целом k. Далее показать, что равенство $x^2 + 2Tx + T^2 \mp x^2 = 2\pi(n-k)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$ не может быть тождеством. **6.1.127. 1)** π; **2)** $\frac{\pi}{2}$; **3)** π.

6.1.129. *Указание.* Воспользоваться тождеством $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

6.1.130. *Указание.* Воспользоваться тождеством $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

6.1.131. *Указание.* Учесть, что функция имеет период $T = 2\pi$ и
$$\arcsin x = \begin{cases} x, & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$
6.1.132. *Указание.* Предварительно построить в одной системе координат графики функций $y = x$ и $y = \sin x$, а затем «сложить» их. **6.1.139. 1)** $f(x) = \dfrac{3}{x-7}$. *Решение.* Обозначим $t = x + 2$, тогда $f(t) = \dfrac{3}{(t-2)-5} = \dfrac{3}{t-7}$, т. е. $f(x) = \dfrac{3}{x-7}$; **2)** $f(x) = x^{2/3} + 4$;

3) $f(x) = \dfrac{4x-3}{x-1}$. *Указание.* Обозначив $t = \dfrac{x-2}{x-3}$, найти x. **6.1.140.** $f(x) = x$.

Указание. Пусть $g(x) = c$. Тогда $f \circ g(x) = f(c) = g \circ f(x) = c$ для всех x, т. е. $f(c) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Отсюда $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. **6.1.141.** Да, например, функции x, $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x+1}{x-1}, \ldots$ **6.1.142.** Он симметричен относительно прямой $y = x$.

6.1.145. 1) Например, если $f_1 = \dfrac{1}{x^2+1}$, $f_2 = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$, то $f_1(x) : f_2(x) = x^2 + 1$. **2)** Например, если $f_1(x) = f_2(x) = x$.

6.1.146. 1) *Указание.* Учесть, что $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$. **2)** *Указание.* Доказать, что $\dfrac{\sin x}{\sqrt{2} - \cos x} \leqslant 1$. **6.1.148. 1)** $y = x^2 + 1$; **2)** $y = -\dfrac{2x}{3} + 3$.

Указание. Воспользоваться тождеством $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

§ 2. Последовательности и их свойства

6.2.2. $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 16$, $x_4 = 32$. **6.2.3.** $x_1 = 6$, $x_2 = 11$, $x_3 = 18$, $x_4 = 27$. **6.2.4.** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$. **6.2.5.** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{4}{9}$, $x_4 = \frac{5}{16}$. **6.2.6.** $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$. **6.2.7.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -6$, $x_4 = 24$. **6.2.8.** $x_n = \frac{1}{2n-1}$. **6.2.9.** $x_n = \frac{1}{n^2}$. **6.2.10.** $x_n = \frac{n+1}{n}$. **6.2.11.** $x_n = (-1)^n \cdot n$. **6.2.13.** Ограниченная последовательность. **6.2.14.** Ограниченная снизу последовательность. **6.2.15.** Ограниченная сверху последовательность. **6.2.16.** Ограниченная последовательность. **6.2.17.** Неограниченная последовательность. **6.2.18.** Ограниченная снизу последовательность. **6.2.20.** Строго возрастающая, неограниченная последовательность. **6.2.21.** Немонотонная, ограниченная последовательность. **6.2.22.** Строго возрастающая, ограниченная последовательность. **6.2.23.** Строго убывающая, ограниченная сверху последовательность. **6.2.24.** Монотонная, ограниченная последовательность. **6.2.26.** $\{x_n + y_n\} = \{(-1)^n + (-2)^n\} = \{-3, 5, -9, \ldots\}$, $\{x_n - y_n\} = \{1, -3, 7, \ldots\}$, $\{x_n \cdot y_n\} = \{2^n\} = \{2, 4, 8, \ldots\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$. **6.2.27.** $\{x_n + y_n\} = \{n^2 + n + 1\} = \{3, 7, 13, \ldots\}$, $\{x_n - y_n\} = \{n^2 - n + 1\} = \{1, 3, 7, \ldots\}$, $\{x_n \cdot y_n\} = \{n^3 + n\} = \{2, 10, 30, \ldots\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{n + \frac{1}{n}\right\} = \left\{2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, \ldots\right\}$. **6.2.28.** $\{\alpha x_n + \beta y_n\} = \{2x_n - y_n\} = \{-n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$. **6.2.29.** $\{\alpha x_n + \beta y_n\} = \{\sqrt{2}x_n - 5y_n\} = \{(\sqrt{2})^{n+1} - 5\} = \{-3, 3\sqrt{2} - 5, -1, \ldots\}$. **6.2.30.** $x_1 = 5$, $x_2 = 6\frac{1}{4}$, $x_3 = 13\frac{8}{9}$, $x_4 = 39\frac{1}{16}$. **6.2.31.** $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$. **6.2.32.** $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. **6.2.33.** $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$. **6.2.34.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, $x_4 = 24$. **6.2.35.** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 8$, $x_4 = 5$. **6.2.36.** $x_n = n^2 + 1$. **6.2.37.** $x_n = \cos \pi n$. **6.2.38.** $x_n = \frac{1}{3n-1}$. **6.2.39.** $x_n = \frac{1}{n!}$. **6.2.40.** Ограниченная последовательность. **6.2.41.** Ограниченная сверху последовательность. **6.2.42.** Ограниченная снизу последовательность. **6.2.43.** Неограниченная последовательность. **6.2.44.** Немонотонная, ограниченная последовательность. **6.2.45.** Строго убывающая, ограниченная последовательность. *Указание.* Учесть, что $\frac{n}{3n-2} = \frac{1}{3 - \frac{2}{n}}$, а последовательность $3 - \frac{2}{n}$ строго возрастает. **6.2.46.** Строго возрастающая, ограниченная сверху последовательность. **6.2.47.** Постоянная и, следовательно, ограниченная и монотонная последовательность. **6.2.48.** $\{x_n^2\} = \{n^2\}$, $\left\{\frac{2x_n - 1}{3y_n + 2}\right\} = \left\{\frac{2n-1}{5}\right\}$. **6.2.49.** $\{x_n^2\} = \{n^4\}$, $\left\{\frac{2x_n - 1}{3y_n + 2}\right\} = \left\{\frac{2n^2 - 1}{3n + 2}\right\}$. **6.2.50.** $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$, $x_6 = 8$, $x_7 = 13$. **6.2.51.** $P_3 = 3\sqrt{3}$, $P_4 = 4\sqrt{2}$, $P_5 = 10 \sin 36°$, $P_6 = 6$. **6.2.52.** $x_n = (\sqrt{3})^n$. **6.2.53.** **1)** x_n — n-й знак десятичной записи числа

π; **2)** $x_n = 5 + 2^n$. **6.2.54.** $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. **6.2.56.** Например, $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.
6.2.57. *Указание.* Воспользоваться цепочкой равенств

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

6.2.58. *Указание.* Учесть, что $\ln(n+1) - \ln n = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln\Bigl(1+\dfrac{1}{n}\Bigr) < \ln 2$.

6.2.59. *Указание.* Учесть, что $\dfrac{3n^2-1}{n^2+1} = 3 - \dfrac{4}{n^2+1}$, а $\dfrac{4}{n^2+1} < 1$ при $n \geqslant 2$.

6.2.60. *Указание.* Среднее арифметическое двух чисел x_{n-2} и x_{n-1} изображается серединой отрезка $[x_{n-2}; x_{n-1}]$, поэтому все точки x_3, x_4, $x_5, \ldots$ принадлежат отрезку $[x_1; x_2] = [2; 5]$. **6.2.61.** Монотонно возрастающая, ограниченная снизу последовательность. **6.2.62.** Строго убывающая, ограниченная сверху последовательность. *Указание.* Доказать, что $x_n > x_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, т. е. $\ln n - n > \ln(n+1) - (n+1)$. **6.2.63.** Немонотонная, ограниченная последовательность. *Указание.* Выписать первые три члена последовательности. **6.2.64.** Немонотонная, ограниченная последовательность. **6.2.65. 1)** Да, например, если $x_n = y_n = (-1)^n$; **2)** Да, если, например, $x_n = y_n = (-2)^n$. **6.2.66.** Например, если $\{x_n\} = \{y_n\} = \{n-2\} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$.

§ 3. Предел последовательности

6.3.4. 1) 2; **2)** 6; **3)** 34. **6.3.9. 1)** 17; **2)** 101; **3)** 205. **6.3.11.** 2. **6.3.12.** 1. **6.3.13.** ∞. **6.3.14.** 0. **6.3.15.** $\frac{4}{21}$. **6.3.16.** 6. **6.3.17.** 1. **6.3.18.** ∞. **6.3.19.** $\frac{1}{2}$.

6.3.20. 2. **6.3.24. 1)** 3; **2)** 5; **3)** 10. **6.3.28.** $a = 1$; **1)** 2; **2)** 11; **3)** 168. **6.3.29.** $\frac{1}{5}$.

6.3.30. 0. **6.3.31.** $\frac{5}{8}$. *Указание.* Привести дроби к общему знаменателю.

6.3.32. $-\frac{4}{3}$. *Указание.* Дополнить выражение под знаком предела до разности кубов. **6.3.33.** 1. **6.3.34.** 1. *Указание.* Воспользоваться формулой суммы арифметической прогрессии. **6.3.35.** $\dfrac{1}{1-q}$, если $|q| < 1$; ∞, если $|q| > 1$.

6.3.36. $\frac{9}{8}$. *Указание.* Учесть, что в числителе и знаменателе дроби находятся суммы геометрических прогрессий. **6.3.37.** 0,2. **6.3.38.** 1.
6.3.39. *Указание.* Доказательство методом от противного удобно провести, используя геометрическое определение предела. **6.3.40.** Например, если $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $\beta_n = \dfrac{1}{n^2}$. **6.3.43.** Например, $x_n = (-1)^n$. **6.3.44. 2)** Например, последовательность $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots\}$. **6.3.45. 1)** 1. *Указание.* Учесть, что $x_n^2 - 3x_n + 2 = (x_n - 2)(x_n - 1)$. **2)** 3. *Указание.* Сначала методом математической индукции доказать, что $x_n < 3$ (учесть, что если $0 < a < 3$, то $\sqrt{6+a} < \sqrt{6+3} = 3$). Далее, учитывая, что $0 < x_n < 3$, $\forall n$, показать, что

$x_n < x_{n+1}$, $\forall n$. Таким образом, последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, а следовательно, сходится. Теперь предположив, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, взять предел от обеих частей равенства $x_n = \sqrt{6 + x_n}$. **3)** 9.

6.3.46. 1) 1. *Указание.* Воспользоваться равенством $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. **2)** $\frac{1}{4}$. *Указание.* Учесть, что $\frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right)$. **6.3.47. 1)** Нет, например, $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$. **2)** Нет, например, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$. **3)** Нет, например, $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = n$. **4)** Да. **5)** Нет, например, $y_n = n$, $z_n = 3 - n$. **6.3.48. 1)** Например, $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $y_n = 1$. **2)** Например, $x_n = \frac{100}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$. **6.3.49. 1)** e. *Указание.* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$. **2)** $\frac{1}{e}$. *Указание.* $\left(\frac{n}{1+n}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

§ 4. Предел функции

6.4.2. -1. **6.4.3.** 4. **6.4.4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.4.5.** 4. **6.4.8.** *Указание.* Поскольку $|f(x) - A| = |x - 3| \cdot |x + 3|$ и можно считать, что $|x + 3| < 4 + 3 = 7$ для значений x, близких к 3, то при $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ (где ε — произвольное положительное число) имеем $|x - x_0| = |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{7} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. **6.4.13. 1)** $\delta = \frac{1}{4}$ $\Big($вообще подходит любое положительное число, меньшее или равное $\frac{1}{4}\Big)$; **2)** $\delta = 0{,}005$. **6.4.15.** 15. **6.4.16.** 3. **6.4.17.** -1. **6.4.18.** 0. **6.4.19.** 0,4. **6.4.20.** 0,5. **6.4.21.** $\frac{4}{3}$. **6.4.22.** $-\frac{3}{11}$. **6.4.23.** $\frac{4}{3}$. **6.4.24.** $-\frac{5}{39}$. **6.4.25.** 0,05. **6.4.26.** 1,6. **6.4.27.** $\frac{2}{3}$. **6.4.28.** 2. **6.4.29.** $-\frac{1}{12}$. *Указание.* Домножить числитель и знаменатель дроби на выражение, дополняющее ($\sqrt[3]{8 - x} - 2$) до разности кубов. **6.4.30.** -12. **6.4.31.** $-\frac{1}{2}$. **6.4.32.** -3. **6.4.33.** 0. **6.4.34.** ∞. **6.4.35.** 0. **6.4.36.** 0. **6.4.38.** 2,25. **6.4.39.** 0,4. *Указание.* Учесть, что $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ и $\lim\limits_{x\to 0} \cos 2x = 1$. **6.4.40.** 0,5. *Указание.* Воспользоваться тождеством $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ или домножить числитель и знаменатель дроби на $1 + \cos x$. **6.4.41.** 1. **6.4.42.** 2. **6.4.43.** -8. *Указание.* Использовать тождество $\cos 5x - \cos 3x = -2\sin 4x \sin x$. **6.4.44.** -6. **6.4.45.** $-0{,}5$. **6.4.48.** $e^{1,5}$. **6.4.49.** e^{-9}. **6.4.50.** e. **6.4.51.** e^2. **6.4.52.** e. *Указание.* Представить исходный предел в виде произведения пределов $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x-6}\right)^x \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x-6}\right)^2$. **6.4.53.** e^{-1}. **6.4.54.** e^{-1}. *Указание.* Сделать замену $y = \sin x$. **6.4.55.** 3. *Указание.* Воспользоваться формулой для разности логарифмов, после чего сделать замену $y = \frac{1}{x}$. **6.4.57.** $f(2-0) = 1$, $f(2+0) = 2$. **6.4.58. а)** $f(1-0) = -2$, $f(1+0) = \frac{1}{3}$

б) $f(11-0) = f(11+0) = \frac{11}{3}$. **6.4.60.** $\frac{5}{2}$. **6.4.61.** $\frac{2}{3}$. **6.4.62.** $-\frac{1}{3}$. **6.4.63.** $\log_3 7$. **6.4.64.** 3,5. **6.4.65.** 0,5. *Указание.* Представить данный предел в виде произведения $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x-2}$. **6.4.66.** 6. **6.4.67.** $-\frac{5}{2}$. **6.4.68.** 3. **6.4.69.** $243a^5$. **6.4.70.** *Указание.* Воспользоваться неравенством $|\sin x| < |x|$. **6.4.74.** *Указание.* Рассмотреть последовательности $\{x_n'\} = \left\{\frac{1}{\pi n}\right\}$ и $\{x_n''\} = \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right\}$. **6.4.75.** *Указание.* Рассмотреть две последовательности, сходящиеся к $\frac{1}{2}$: $\{x_n'\} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{n}\right\}$. **6.4.76.** $\frac{5}{9}$. **6.4.77.** 3. **6.4.78.** 1. **6.4.79.** $-0{,}75$. **6.4.80.** $2\frac{1}{3}$. **6.4.81.** 0. **6.4.82.** 0,25. *Указание.* Привести дроби к общему знаменателю. **6.4.83.** 0,5. **6.4.84.** $\frac{7}{6}$. **6.4.85.** $3x^2$. **6.4.86.** 48. **6.4.87.** 1,5. **6.4.88.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **6.4.89.** 1,5. **6.4.90.** $\frac{1}{3}$. **6.4.91.** 4. *Указание.* Сделать замену $x = \sqrt[4]{y}$, т. е. $y = x^4$, после чего исходный предел примет вид $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$. **6.4.92.** $-\frac{5}{3}$. **6.4.93.** ∞. **6.4.94.** 0. *Указание.* Поделить каждый из множителей в числителе и знаменателе на x^2. **6.4.95.** $+\infty$. **6.4.96.** 0. **6.4.97.** $-\frac{3}{25}$. **6.4.98.** 3. **6.4.99.** $-1{,}5$. **6.4.100.** 0,5. **6.4.101.** 0. *Указание.* Поделить числитель и знаменатель дроби на h и воспользоваться первым замечательным пределом. **6.4.102.** $\frac{1}{\pi}$. **6.4.103.** 2. *Указание.* Учесть, что $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x$, $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$. **6.4.104.** 1,75. *Указание.* Поделить числитель и знаменатель дроби на x. **6.4.105.** 2. *Указание.* Сделать замену $y = \frac{2}{x}$. **6.4.106.** $\log_4 7$. *Указание.* Поделить числитель и знаменатель дроби на x, затем воспользоваться результатом задачи 6.4.46. **6.4.107.** e. **6.4.108.** e^4. **6.4.109.** 3. *Указание.* Поделить числитель и знаменатель дроби на x. **6.4.110.** e^{-4}. **6.4.111.** 0,5. **6.4.112.** 1. **6.4.113.** e^{-2}. *Указание.* Учесть, что $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. **6.4.114.** 2. **6.4.115.** $f(0-0) = 0$, $f(0+0) = +\infty$. **6.4.116.** $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = +\infty$. **6.4.117. 4)** *Решение.* Так как $2\ln\cos x = \ln\cos^2 x = \ln(1-\sin^2 x)$, а $\ln(1+x) \sim x$, $\sin x \sim x$, $x \to 0$, то $\ln\cos x = \frac{1}{2}\ln(1-\sin^2 x) \sim -\frac{1}{2}\sin^2 x \sim -\frac{1}{2}x^2$. **6.4.118.** $\frac{1}{64}$. **6.4.119.** $\ln 2$. **6.4.120.** $2^{-1{,}5}$. **6.4.121.** 2. **6.4.122.** $\frac{2}{3}$. **6.4.123.** 0,5. **6.4.124. 1)** Нет, так как в противном случае функция $g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$ также имела бы предел в точке x_0, как разность двух имеющих предел в этой точке. **2)** Нет, например, если $f(x) = \operatorname{sign} x$, $g(x) = -\operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$. **6.4.125.** Предположить противное. Далее учесть, что $\forall M > 0$ можно найти такие точки x_1 и x_2, что

$x_1 > M$ и $x_2 > M$, и $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$. **6.4.126.** Например, функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$. **6.4.127. 1)** *Решение.* Пусть $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две данные бесконечно малые при $x \to x_0$ функции. Тогда для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \beta(x_n) = 0$. Но отсюда получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} [\alpha(x_n) + \beta(x_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \beta(x_n) = 0$. По первому определению предела функции это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} \gamma(x) = 0$, т. е. $\gamma(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$. **6.4.128. 1)** Например, частное бесконечно малых при $x \to 0$ функций x и x^2 является бесконечно большой функцией. **2)** Например, если $\alpha(x) = x$, а $\beta(x) = 1 - x$, то $\alpha(x) + \beta(x) = 1$. **3)** Например, если $f(x) = \frac{1}{x}$, а $g(x) = -\frac{1}{x}$ (бесконечно большие при $x \to 0$ функции), то $f(x) + g(x) = 0$. **6.4.129.** Например, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. **6.4.130.** 0. *Указание.* Воспользоваться результатом задачи 6.4.127 2). **6.4.131.** $\frac{5}{4}$. *Указание.* Применить формулу $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$. **6.4.132.** e. *Указание.* Поскольку $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, то

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{4\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left[\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2 \frac{x}{2}}}\right]^{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}.$$

6.4.133. 3. *Указание.* Использовать цепочку равенств $\frac{e^{x^2} - \cos 2x}{x^2} = \frac{\left(e^{x^2} - 1\right) + (1 - \cos 2x)}{x^2} = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{2\sin^2 x}{x^2}$. **6.4.134.** 0,6. *Указание.* Сделать замену $x = t^{15}$. Далее см. указание к задаче 6.4.130. **6.4.135.** 0,2. *Указание.* Сделать замену $y = \sqrt[5]{1+x}$. **6.4.136.** $-\frac{1}{6}$. *Решение.* Представив числитель дроби следующим образом: $\sqrt[6]{(1+x)^2} - \sqrt[6]{(1+x)^3}$, домножим числитель и знаменатель на выражение $\left(\sqrt[6]{(1+x)^{10}} + \sqrt[6]{(1+x)^{11}} + \sqrt[6]{(1+x)^{12}} + \sqrt[6]{(1+x)^{13}} + \sqrt[6]{(1+x)^{14}} + \sqrt[6]{(1+x)^{15}}\right)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[6]{(1+x)^2} - \sqrt[6]{(1+x)^3}}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2 - (1+x)^3}{x \cdot \sum\limits_{i=10}^{15} \sqrt[6]{(1+x)^i}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3 - 2x^2 - x}{x \cdot 6} = -\frac{1}{6} \lim_{x\to 0} (x^2 + 2x + 1) = -\frac{1}{6}.$$

§ 5. Непрерывность функции

6.5.2. а)

Δx	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$0{,}5$	$0{,}1$	$0{,}01$
Δy	$-3{,}5$	$-2{,}1$	$-2{,}01$	$-1{,}5$	$-1{,}9$	$-1{,}99$

На основании таблицы можно сделать предположение о разрывности функции $f(x)$ в точке $x_0 = -1$.

б)

Δx	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$0{,}5$	$0{,}1$	$0{,}01$
Δy	1,25	0,21	0,0201	1,25	0,21	0,0201

На основании этой таблицы можно сделать предположение о непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0 = -1$.

6.5.3. а)

Δx	$-0{,}6$	$-0{,}3$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$0{,}6$	$0{,}3$	$0{,}1$	$0{,}01$
Δy	0,6	0,3	0,1	0,01	0,6	0,3	0,1	0,01

На основании таблицы можно сделать предположение о непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1{,}5$.

б)

Δx	$-0{,}6$	$-0{,}3$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$0{,}6$	$0{,}3$	$0{,}1$	$0{,}01$
Δy	$-1{,}67$	$-3{,}33$	-10	-100	1,2	0,6	0,2	0,02

Исходя из таблицы можно сделать вывод о разрывности данной функции в точке $x_0 = 1{,}5$; при этом функция непрерывна справа в этой точке.

6.5.5. в) Придав аргументу в точке x_0 приращение Δx, получим

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 =$
$= \Delta x\big(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\big)$, откуда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$, т. е. функция $y = x^3$ непрерывна в точке x_0. **6.5.12. а)** Функция терпит разрыв 1-го рода в точке $x = -2$ (скачок функции равен -2) и имеет устранимый разрыв в точке $x = 2$. В остальных точках функция непрерывна. График функции изображен на рисунке 131 а); **б)** Функция имеет устранимый разрыв в точке $x = 1$ и терпит разрыв 1-го рода в точке $x = 2$ (скачок функции равен 4). В остальных точках функция непрерывна. График функции изображен на рисунке 131 б). **6.5.13. а)** $x = -2$ — точка разрыва 2-го рода, $x = 1$ — точка

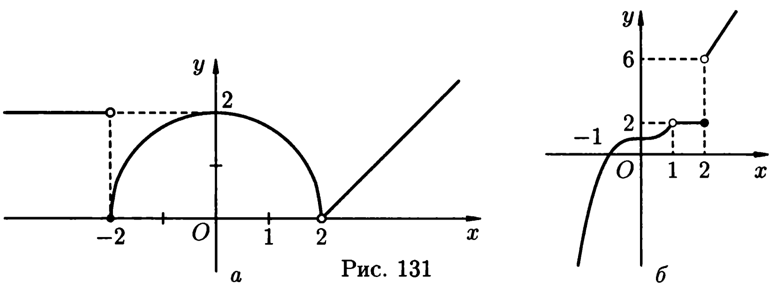


Рис. 131

устранимого разрыва; $x = 4$ — точка разрыва 1-го рода (скачка); в остальных точках функция непрерывна. **б)** $x = 0$ и $x = 3$ — точки разрыва 2-го рода, $x = 5$ — точка разрыва 1-го рода (скачка); в остальных точках функция непрерывна. **6.5.15. а)** $x_0 = -4$ — точка устранимого разрыва; **б)** $x_0 = 0$ — точка устранимого разрыва. **6.5.16. а)** Функция имеет разрыв 1-го рода в точке x_0; **б)** x_0 — точка разрыва 2-го рода. **6.5.20. а)** 1; **б)** $\frac{3}{28}$; **в)** 2; **г)** $\ln 2$.

6.5.22. 1) Функция непрерывна на отрезке $[4; 5]$, имеет одну точку разрыва второго рода $x = 1$ на отрезке $[0; 2]$ и две точки разрыва второго рода $x = \pm 1$ на отрезке $[-3; 1]$; **2)** На отрезке $[4; 5]$ функция непрерывна, на отрезке $[0; 2]$ имеет одну точку разрыва второго рода $x = 1$, а на отрезке $[-3; 1]$ — две точки разрыва второго рода $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. В остальных точках последних

двух отрезков функция непрерывна. **3)** Не определена ни на одном отрезке. **4)** Функция не определена на отрезках $[0; 2]$ и $[-3; 1]$. В случае отрезка $[-4; 5]$ функция определена лишь в его концевой точке $x = 5$ и поэтому не является непрерывной ни в одной его точке. **6.5.24.** Функция непрерывна при всех $x \neq 0$; в точке $x = 0$ функция терпит разрыв 1-го рода.
6.5.25. а) *Указание.* $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$ $= 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$. Далее учесть, что функция $\sin\frac{\Delta x}{2}$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, а функция $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ — ограниченная.
6.5.26. *Указание.* Пусть, например, x_0 — произвольное рациональное число. Тогда последовательность $\{x_n\} = \left\{x_0 + \frac{\sqrt{3}}{n}\right\}$ сходится к точке x_0. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 \neq f(x_0) = 1$, т. е. в точке x_0 не выполнены условия непрерывности. Аналогично рассматривается случай, когда x_0 — иррациональное. **6.5.27. а)** $f(x) = \operatorname{sign} x$, $g(x) = -\operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$; **б)** $f(x) = D(x)$ (функция Дирихле, см. задачу 6.1.125), $g(x) = 1 - D(x)$. Тогда $f(x) \cdot g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **6.5.28. а)** $f(x) = D(x)$ (см. задачу 6.1.125), $g(x) = -D(x)$; **б)** $f(x) = D(x)$, $g(x) = 1 - D(x)$. **6.5.29.** *Указание.* Рассмотреть последовательности $\{x'_n\} = \left\{\frac{1}{\pi n}\right\}$ и $\{x''_n\} = \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right\}$, сходящиеся к точке 0. **6.5.30.** *Указание.* Учесть, что функция x — бесконечно малая в окрестности точки 0, а функция $\sin\frac{1}{x}$ — ограниченная. **6.5.32.** Например, $f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(0; 1)$. **6.5.33.** Например, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{при } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$
6.5.34. Например, функция $f(x)$ определенная на объединении интервалов $(1; 2)$ и $(3; 5)$, причем $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (1; 2), \\ 2, & \text{при } x \in (3; 5). \end{cases}$ **6.5.35.** Например, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 2, & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$ **6.5.36. а)** Например, $f(x) = x$ на интервале $(0; 1)$. **б)** Например, $f(x) = \sin x$ на интервале $(0; 2\pi)$. **в)** Например, $f(x) = \{x\}$ ($\{x\} = 1 - [x]$ — дробная часть числа x) на интервале $(0; 2)$.
6.5.37. Например, на отрезке $[0; 1]$, функция $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0, \\ x, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{при } x = 1. \end{cases}$
6.5.39. *Указание.* Учесть, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (если $a_0 > 0$) или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (если $a_0 < 0$). Поэтому найдется отрезок $[a; b]$, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков. Далее применить теорему Больцано–Коши.
6.5.40. *Указание.* Представить $|f(x)|$ в виде произведения функций $f(x)$ и $\operatorname{sign} f(x)$. **6.5.41.** Например, функция $f(x) = D(x) - \frac{1}{2}$, где $D(x)$ — функция Дирихле (см. задачу 6.1.125).

Глава 7. Производная и ее применение

§ 1. Производная функции

7.1.4. *Указание.* Учесть, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} =$

$= \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x\cdot(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\Delta x\cdot(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\Delta x\cdot(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$.

7.1.7. $3x^2 - 0{,}4x + 2$. **7.1.8.** $2ax + b$. **7.1.9.** $42x^6 + 12x^2 - \frac{1}{8}$. **7.1.10.** $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

7.1.11. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{18}{x^3}$. **7.1.12.** $-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{x^4} + \sqrt{7}$. **7.1.13.** $1{,}25\sqrt[4]{x}$.

7.1.14. $5\cdot 2^x\cdot\ln 2 - \frac{3}{4\sin^2 x}$. **7.1.15.** $\frac{4}{\sin^2 2x}$. **7.1.16.** $\frac{-10}{1+x^2} + 7e^x$.

7.1.17. $x^2\left(3\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right)$. **7.1.18.** $4x^3 + 2x$. **7.1.19.** $\frac{2e^t}{(1-e^t)^2}$.

7.1.20. $\frac{\arcsin y}{2\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{1-y^2}}$. **7.1.21.** $\frac{21^v\ln 21}{(21^v+1)^2}$. **7.1.22.** $\frac{\arccos x}{5\sqrt[5]{x^4}} - \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{1-x^2}} +$ $+\frac{2\ln 6\cdot\log_6 x - 1}{x^3\ln 6}$. **7.1.23.** 0. **7.1.24.** 7. **7.1.25.** 0. **7.1.26.** $\frac{1}{96}$. **7.1.28.** $-5\sin 5x$.

7.1.29. $3\ln 7\cdot 7^{3x-1}$. **7.1.30.** $-3\cos^2 x\sin x$. **7.1.31.** $100(x+1)^{99}$.

7.1.32. $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos^2 x}$. **7.1.33.** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **7.1.34.** $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. **7.1.35.** $\operatorname{ctg} x$.

7.1.36. $-\frac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}$. **7.1.37.** $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **7.1.38.** $-\frac{2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$. **7.1.39.** $4{,}5\sin^8\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

7.1.40. $\frac{2}{\sqrt[3]{3x-1}}$. **7.1.41.** $-\frac{1}{\sqrt{2(x-x^2)}(1+x)}$. **7.1.42.** $\sec 2x$.

Указание. Учесть, что $\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+\operatorname{tg} x) - \ln(1-\operatorname{tg} x)\right]$. **7.1.43.** $\frac{e^{-\frac{x}{2}}(12\sin 3x - \cos 3x)}{2\cos^3 3x}$.

7.1.44. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **7.1.45.** $\frac{4}{\cos^6 4x}$. **7.1.46.** $x^2\big(3\sin(\cos x) - x\sin x\cos(\cos x)\big)$.

7.1.47. $\frac{3^{x^2}}{2\sqrt{x^3-5x}}\big(4x^4\ln 3 + x^2(3-20\ln 3) - 5\big)$. **7.1.48.** $\frac{4\operatorname{ctg} 4x}{\ln 6}$.

7.1.49. $\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\cdot\sin\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. **7.1.50.** $\frac{6}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$.

Указание. Воспользоваться формулами для логарифма произведения, частного и степени. **7.1.51.** $\frac{2x-2}{(x^2-4x+5)^2}$. **7.1.52.** $-\frac{1}{2}\sin 2x$.

Указание. Применить тождество $\sin^4\frac{x}{2} + \cos^4\frac{x}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x$.

7.1.53. $5e^{\operatorname{sh}^2 5x}\operatorname{sh} 10x$. *Указание.* Учесть, что $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$.

7.1.54. $\frac{2e^{3x}(3x-1)}{(x-e^{3x})^2}$. **7.1.55.** $-\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. **7.1.56.** $-\frac{1}{x^2+1}$. **7.1.57.** $-\cos 2x$.

7.1.59. $x^x(1+\ln x)$. **7.1.60.** $2x^{\ln x-1}\ln x$. **7.1.61.** $-\frac{4}{5}\sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x+3)}{(x-3)^3}}\times$ $\times\frac{3x^2+5x+3}{(x^2+1)(x^2-9)}$. **7.1.62.** $\frac{(x^3-2)\sqrt[3]{x-1}}{(x+5)^4}\cdot\left(\frac{3x^2}{x^3-2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{4}{x+5}\right)$.

7.1.63. $(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\cdot\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\cdot\ln\operatorname{tg}x\right)$. **7.1.64.** $\frac{(x^2-1)\cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}}\times$ $\times\left(\frac{2x}{1-x^2}+6\operatorname{tg}x+\frac{5}{7x}\right)$. **7.1.66.** $-\frac{2x\sin(x^2+y^2)+ye^{xy}}{2y\sin(x^2+y^2)+xe^{xy}}$. **7.1.67.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

7.1.68. $\frac{(2x^2+1)y}{x(1-2y^2)}$. **7.1.69.** $-\frac{y\cos x+\sin y}{x\cos y+\sin x}$. **7.1.70.** $y'=\frac{x(2x^2-y^2)}{y(2y^2+x^2)}$.

7.1.71. $y'=-\frac{y}{x+e^y}$, $y(0)=-\frac{1}{e}$. **7.1.73.** $\frac{2t+1}{3t^2+1}$. **7.1.74.** $\frac{\sin t}{1-\cos t}$, или $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

7.1.75. $\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$. **7.1.76.** -1. **7.1.77.** $0{,}8\operatorname{cth}t$. **7.1.79.** $y=x+1$ и $y=-x+1$.

7.1.80. $y=\frac{1}{2}x+\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$ и $y=-2x+\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{6}$. **7.1.81.** **а)** $x_0=0{,}5$; **б)** $x_0=1$.

7.1.82. $\operatorname{arctg}3$. **7.1.84.** $\frac{18\sin 3x}{\cos^3 3x}$. **7.1.85.** $2\sin x+x\cos x$. **7.1.86.** $\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$.

7.1.87. $-\frac{1}{x^2}$. **7.1.88.** $32e^{2x}$. **7.1.89.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. **7.1.90.** $-\frac{2}{9t^4}$.

7.1.91. $-\frac{1}{\sin^3 t}$. **7.1.96.** $f'(1)=5$. **7.1.97.** $f'(0)=0$. **7.1.98.** $\frac{5}{2\sqrt{x}}-\frac{52}{x^5}+\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$.

7.1.99. $60x^5+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$. **7.1.100.** $-\frac{2}{\sin^2 x}-3\cos x$. **7.1.101.** $\frac{1}{1+x^2}+7e^x$.

7.1.102. $19^x\cdot\ln 19-\frac{8}{\sqrt{1-x^2}}$. **7.1.103.** $5x^4-1$. **7.1.104.** $\frac{7}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\frac{2}{\sqrt[7]{\alpha^6}}$.

7.1.105. $\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$. **7.1.106.** $-\frac{1}{x\ln 10}$. *Указание.* Воспользоваться тождеством $3\sin^2 x+3\cos^2 x=3$. **7.1.107.** $-\frac{\ln 2}{2^x}+\frac{\ln 3}{3^x}+4^x\cdot\ln 4$. *Указание.* Учесть, что $\left(\frac{1}{3^x}\right)'=\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)'=\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\frac{1}{3}=-\frac{1}{3^x}\cdot\ln 3$. **7.1.108.** $\frac{2e^x(1-x\ln x)}{x(e^x-\ln x)^2}$.

7.1.109. $3x^2+12x+11$. **7.1.110.** $2x(3x^4-18x^2+23)$.

7.1.111. $\frac{-x^4+2x^3-6x^2+8x-4}{(x^3+4)^2}$. **7.1.112.** $-\frac{12x^3}{(x^4+2)^2}$. **7.1.113.** $\frac{11x^5-2}{2\sqrt{x}}+1$.

7.1.114. $\frac{3^{2x}\cdot\ln\frac{3}{2}}{2^{2x-1}}-\frac{\ln x+5}{\sqrt[5]{x^4}}$. *Указание.* Учесть, что $\left(\frac{3^{2x}}{2^{2x}}\right)'=\left(\left(\frac{9}{4}\right)^x\right)'=$ $=\left(\frac{9}{4}\right)^x\cdot\ln\frac{9}{4}=\frac{3^{2x}}{2^{2x}}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3^{2x}\cdot 2\ln\frac{3}{2}}{2^{2x}}$. **7.1.115.** 0,25. **7.1.116.** 4,5.

7.1.117. 0. **7.1.118.** $2e(4\ln 2-1)$. **7.1.119.** $2x\cdot 10^{x^2+1}\cdot\ln 10$. **7.1.120.** $\frac{4}{\cos^2 4x}$.

7.1.121. $2\operatorname{ch}^3\frac{x}{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2}$. **7.1.122.** $\frac{15x^2-1}{5x^3-x}$. **7.1.123.** $-2\sin 2x$.

Указание. Воспользоваться тождеством $\cos^4 - \sin^4 x = \cos 2x$.
7.1.124. $\dfrac{-7x}{\sqrt{4-7x^2}}$. **7.1.125.** $\dfrac{-2}{\sin^2 10x \cdot \sqrt[5]{(1+\operatorname{ctg} 10x)^4}}$. **7.1.126.** $-6\cos 6x$.

Указание. Воспользоваться тождеством $(\sin 3x - \cos 3x)^2 = 1 - \sin 6x$.
7.1.127. $12\ln^3 \sin 3t \cdot \operatorname{ctg} 3t$. **7.1.128.** $\dfrac{1}{2\sqrt{h}(1+h)}$. **7.1.129.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$.

7.1.130. $\dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{(\cos x + \sin x)^2}$. **7.1.131.** $\dfrac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2}$. **7.1.132.** $\dfrac{4\operatorname{ch}(\ln \operatorname{tg} 2x)}{\sin 4x}$.

7.1.133. $\arcsin x$. **7.1.134.** $2\ln 3 \cdot 3^{\sin^3 2x + 4\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot (3\sin^2 2x + 4)$.

7.1.135. 0. *Указание.* Воспользоваться равенством $e^{-\ln\frac{x+2}{x-3}} = \dfrac{x-3}{x+2}$.

7.1.136. $\dfrac{-x}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}$, т. е. $\dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$. **7.1.137.** $2^{\sqrt{x}}\left(1 + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\ln 2\right)$.

7.1.138. $-\dfrac{5^{(1/\log_5 x)}}{x \cdot \log_5^2 x}$. **7.1.139.** $\dfrac{1}{x^2-9}$. **7.1.140.** $\dfrac{2e^x(e^x-1)}{e^{2x}+1}$.

7.1.141. $\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^4)^3}}$. **7.1.142.** $(1 - \operatorname{tg} 3x)^2$. **7.1.143.** $\operatorname{cosec} x$.

7.1.144. $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2$. **7.1.145.** $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{x^2+1}$. **7.1.146.** $\dfrac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

7.1.147. $\dfrac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}$. **7.1.148.** $x^{\operatorname{arctg} x} \cdot \left(\dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)$.

7.1.149. $(x^2+1)^{\sqrt{x}} \cdot \left(\dfrac{\ln(x^2+1)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2x\sqrt{x}}{x^2+1}\right)$.

7.1.150. $\dfrac{e^x(x+4)^4}{\sqrt{5x-1}}\left(1 + \dfrac{4}{x+4} - \dfrac{5}{2(5x-1)}\right)$.

7.1.151. $\dfrac{x^3 \cdot \sqrt{x-10}}{(x^2+4)^3 \cdot \sqrt[7]{x-6}} \cdot \left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2(x-10)} - \dfrac{1}{7(x-6)} - \dfrac{6x}{x^2+4}\right)$.

7.1.152. $3^x \cdot x^5 \cdot \sqrt{x^4+x}\left(\ln 3 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{4x^3+1}{2(x^4+x)}\right)$. **7.1.153.** 0. **7.1.154.** $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

7.1.155. $\dfrac{x-2y}{2x-3y}$. **7.1.156.** $\dfrac{y\left(x - y\sqrt{y^2-x^2}\right)}{x\left(y\ln x \cdot \sqrt{y^2-x^2} + x\right)}$. **7.1.157.** $\dfrac{2xy(1+y^2)}{1-x^2-x^2y^2}$.

7.1.158. $-\dfrac{y(y + x\ln y)}{x(x + y\ln x)}$. *Указание.* Предварительно прологарифмировать обе части равенства. **7.1.159.** $y' = -\dfrac{x}{y}$, $y'(-\sqrt{2}) = 1$. **7.1.160.** $\dfrac{1}{t^2}$. **7.1.161.** $-\operatorname{tg} t$.

7.1.162. -1. **7.1.163.** t^2+1. **7.1.164.** $y = 12x + 16$ и $y = -\dfrac{1}{12}x - 8\dfrac{1}{6}$.

7.1.165. $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ и $y = \sqrt{3}x$. **7.1.166.** $y = 2x$ и $y = -\dfrac{1}{2}x$ в точке $M_1(0;0)$; $y = -2x + 4$ и $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ в точке $M_2(2;0)$. **7.1.167.** $y = 3x - 4$ и $y = -\dfrac{x}{3} + 9\dfrac{1}{3}$. **7.1.168. а)** $x_0 = 2$; **б)** $x_0 = 1{,}5$. **7.1.169.** $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$.

7.1.170. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. **7.1.171.** $-\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **7.1.172.** $2\cos 2x$. **7.1.173.** $5^x \cdot \ln^2 5$.

7.1.174. $\dfrac{32}{(4x-1)^3}$. **7.1.175.** $e^x(x+3)$. **7.1.176.** $\cos\varphi$.

7.1.177. $\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$. **7.1.178.** $\dfrac{1}{3\sin t\cos^4 t}$. **7.1.179.** $\dfrac{10}{9e^t}$.

7.1.182. *Указание.* Показать, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\neq\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $x_0=0$.

7.1.183. Например, $y=|x-1|+|x-2|$ или $y=|x^2-3x+2|$. **7.1.184.** Судя по графику, в точках x_1, $x_2,\ldots$, x_5 функция не имеет производной, хотя и определена. В остальных точках функция имеет производную. Функция непрерывна во всех точках, кроме точек x_4 и x_5. **7.1.188.** Нет; например, если $f(x)=x$, $g(x)=|x|$, $x_0=0$.

§ 2. Дифференциал

7.2.2. $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\cdot dx$. **7.2.3.** $dy=\left[(3x-1)\cdot\operatorname{tg}x+\dfrac{x^3-x}{\cos^2 x}\right]dx$.

7.2.4. $dy=x(2\ln x+1)\,dx$. **7.2.5.** $dy=\dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$.

7.2.7. $\Delta y=(3x^2+2)\Delta x+(3x+\Delta x)(\Delta x)^2$, $\Delta y=0{,}050301$ в точке $x_0=1$ и при $\Delta x=0{,}01$; $dy=(3x^2+2)\,dx$, $dy=0{,}05$ в точке $x_0=1$ и при $\Delta x=0{,}01$.
7.2.8. $\Delta y=(2x+1)\Delta x+(\Delta x)^2$, $\Delta y=0{,}75$ в точке $x_0=0$ и при $\Delta x=0{,}5$; $dy=(2x+1)\,dx$, $dy=0{,}5$ в точке $x_0=0$ и при $\Delta x=0{,}5$. **7.2.10.** 2,96.
7.2.11. 0,965. **7.2.12.** 1,1. **7.2.14.** $dy=6x(x^2+1)^2dx$, $d^2y=6(5x^2+1)(x^2+1)dx^2$. **7.2.15.** $dy=\sin 2x dx$, $d^2y=2\cos 2x dx^2$.
7.2.16. $dy=-2\sin x\cdot\ln 2\cdot 2^{\cos x}dx$. **7.2.17.** $dy=3\ln^2\sin x\cdot\operatorname{ctg}x\,dx$.

7.2.18. $df(x)=\dfrac{5x^4dx}{3\sqrt[3]{(x^5-1)^4}}$. **7.2.19.** $-\dfrac{(t+1)\,dt}{2\sqrt{t}\cdot(t-1)^2}$.

7.2.20. $\Delta y=8x\Delta x+4(\Delta x)^2$, $\Delta y=0{,}1616$ в точке $x_0=1$ и при $\Delta x=0{,}02$; $dy=8x\,dx$, $dy=0{,}16$ в точке $x_0=1$ и при $\Delta x=0{,}02$.

7.2.21. $\Delta y=\begin{cases}\Delta x, & \text{при } x\geqslant 0,\\ -\Delta x, & \text{при } x<0,\end{cases}$ $\Delta y=-0{,}1$ в точке $x_0=10$ и при

$\Delta x=-0{,}1$; $dy=\begin{cases}dx, & \text{при } x>0,\\ -dx, & \text{при } x<0,\end{cases}$ $dy=\Delta y=-0{,}1$ в точке $x_0=10$ и при

$\Delta x=-0{,}1$. **7.2.22.** 0,485. **7.2.23.** 0,811. **7.2.24.** 0,96. **7.2.25.** $dy=\dfrac{2dx}{(x+1)^2}$,

$d^2y=-\dfrac{4dx^2}{(x+1)^3}$. **7.2.26.** $dy=\ln x\,dx$, $d^2y=\dfrac{dx^2}{x}$. **7.2.27.** $dy=nx^{n-1}dx$,

$d^2y=n(n-1)x^{n-2}dx^2$, $d^3y=n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$. **7.2.30. 1)** 1,99.

Указание. Положить $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}04$; **2)** 0,996.

Указание. Положить $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$, $x_0=0$, $\Delta x=0{,}02$.

7.2.31. *Указание.* Показать, что $d^2y=y''_u du^2+y'_u d^2u$.

7.3.2. Теорема Ролля в данном случа неприменима, так как функция недифференцируема в точке $x = 0$, принадлежащей интервалу $(-2; 2)$. **7.3.3.** Теорема в данном случае справедлива, $c = 2$. **7.3.4.** Условия теоремы выполнены, $c = \pi$. **7.3.5.** Условия теоремы не выполнены, так как $f'(x) = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ не определена в точке $x = 0$ интервала $(-1; 1)$.

7.3.6. $c = \ln(e-1)$. **7.3.7.** $c = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **7.3.8.** Теорема Лагранжа здесь не применима, так как у функции $f(x)$ нет производной в точке $x = 1$ из данного отрезка. **7.3.9.** $M(3; -3)$, см. рис. 132. **7.3.10.** $M(e-1; \ln(e-1))$. **7.3.12.** $1\frac{4}{9}$.

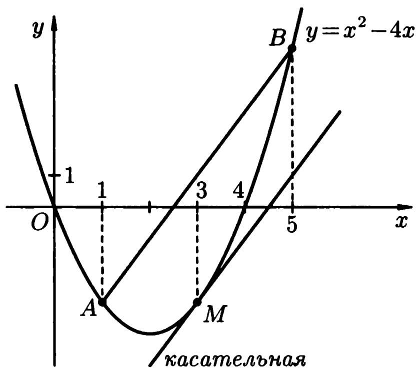


Рис. 132

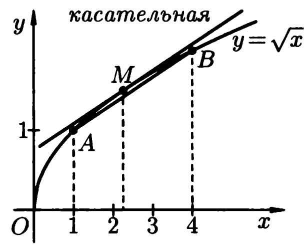


Рис. 133

7.3.13. 1. **7.3.14.** 1. **7.3.15.** 0. **7.3.16.** $+\infty$. **7.3.17.** 0. **7.3.19.** 0. **7.3.20.** 0. **7.3.21.** 1. **7.3.22.** ∞. **7.3.24.** 1. **7.3.25.** e^{-2}. **7.3.26.** 1. **7.3.27.** e.

7.3.29. $(x+1)^3 + (x+1)^2 - 11(x+1) + 1$.

7.3.30. $(x-2)^5 + 7(x-2)^4 + 16(x-2)^3 + 8(x-2)^2 - 9(x-2)$.

7.3.32. $3 + 3\ln 2 \cdot (x - \log_2 3) + \dfrac{3\ln^2 2(x-\log_2 3)^2}{2!} + \ldots$

$\ldots + \dfrac{3\ln^n 2(x-\log_2 3)^n}{n!} + o((x-\log_2 3)^n)$, $x \to x_0$.

7.3.33. $\frac{1}{2}(x-1) + \dfrac{3(x-1)^2}{2\cdot 2!} + \dfrac{(x-1)^3}{3!} - \dfrac{(x-1)^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{(x-1)^5}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$

$\ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot (x-1)^n}{(n-2)(n-1)\cdot n} + o((x-1)^n)$, $x \to 1$.

7.3.34. $e^2 - e^2x + \dfrac{e^2x^2}{2!} - \dfrac{e^2x^3}{3!} + \dfrac{e^2x^4}{4!} + o(x^4)$. **7.3.35.** $x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

7.3.36. Условия теоремы не выполнены, так как $f(1) \neq f(3)$. **7.3.37.** Условия теоремы выполнены, $c = \pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **7.3.38.** Условия теоремы не выполнены.

7.3.39. Условия теоремы не выполнены, так как $f'(x)$ не существует в точке

$x = -2$. **7.3.40.** $c = -\sqrt{3}$. **7.3.41.** Теорема Лагранжа неприменима, поскольку $f'(x)$ не определено в точке $x = 0$, принадлежащей отрезку $[-2; 1]$.
7.3.42. $c = e^2 - e$. **7.3.43.** $M(2{,}25; 1{,}5)$, см. рис. 133. **7.3.44.** $M(1; 0)$.
7.3.45. 0,5. **7.3.46.** 10. **7.3.47.** 1. **7.3.48.** $-\frac{1}{3}$. **7.3.49.** 1. **7.3.50.** ∞. **7.3.51.** 0.
7.3.52. 0,2. **7.3.53.** 1. **7.3.54.** -1. **7.3.55.** 0. **7.3.56.** 1. **7.3.57.** $-\frac{2}{3}$. **7.3.58.** 0.
7.3.59. 1. **7.3.60.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **7.3.61.** 2. **7.3.62.** 1. **7.3.63.** 1. **7.3.64.** 1.
7.3.65. $(x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 21(x+2)^2 - 19(x+2) + 1$.
7.3.66. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{11}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{51}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 6$.
7.3.67. $-\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^2}{2!e} + \frac{2(x+1)^3}{3!e} + \frac{3(x+1)^4}{4!e} + \dots + \frac{(n-1)(x+1)^n}{n!e} + o((x+1)^n)$.
7.3.68. $2(x-1) - \frac{2^2 \cdot (x-1)^2}{2} + \frac{2^3(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-2)^{n+1} \cdot (x-1)^n}{n} + o((x-1)^n)$.
7.3.69. $x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$. **7.3.70.** $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. **7.3.72.** Нет, не следует. *Указание.* Рассмотреть, например, функцию $f(x) = |x^2 - 2x|$ на отрезке $[-1; 3]$. **7.3.73.** *Указание.* Пусть x_1 и x_2, где $x_1 < x_2$ — произвольные точки из отрезка $[a; b]$. Показать, что $f(x_1) < f(x_2)$, применив теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$. **7.3.74.** *Указание.* Обозначим $f(x) = e^x - x - 1$. Тогда $f'(x) = e^x - 1$ и $f(0) = 0$. Поэтому $\forall x > 0$, $f(x) = f(x) - f(0) = f'(c) \cdot x$, (где $0 < c < x$) по теореме Лагранжа, примененной к отрезку $[0; x]$. Так как $f'(c) > 0$ при $c > 0$, то $f(x) = f'(c)x > 0$, т.е. $e^x - x - 1 > 0$ при $x > 0$. Далее рассмотреть случай $x < 0$, используя предыдущую задачу.
7.3.76. *Указание.* Применить теорему Ролля к функции $P(x)$ на отрезке $[x_1; x_2]$. **7.3.77.** *Указание.* Использовать теорему Лагранжа.
7.3.78. Представим $f(x)$ в виде $f(x) = (x+2)(x+1) \cdot x \cdot (x-1)(x-2)$. Отсюда видно, что $f(-2) = f(-1) = f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Применяя теорему Ролля к функции $f(x)$ на отрезке $[-2; -1]$, получим, что $f'(c_1) = 0$ для некоторой точки $c_1 \in (-2; -1)$. Аналогично показывается, что $f'(x)$ имеет корни c_2, c_3 и c_4 соответственно на интервалах $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$. Других корней у $f'(x)$ нет, так как это многочлен четвертой степени. **7.3.79.** Поскольку $(\arcsin x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ для всех $x \in [0; 1]$, то $\arcsin x + \arccos x = c$ в силу задачи 7.3.77. Учитывая, что, например, $\arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, получим: $c = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось. **7.3.82.** 1. *Указание.* Показать, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x - \cos x)'}{(x + \cos x)'}$ не существует. Для вычисления исходного предела поделить числитель и знаменатель дроби на x.
7.3.85. 0,0175. **7.3.86.** 0,262. **7.3.87.** 0,5. *Решение.* Разложим $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ по формулам Маклорена до $o(x^4)$: $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Отсюда $\operatorname{tg} x - \sin x = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = \frac{x^3}{2} + o(x^4)$, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^4)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^3}\right)=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}o(x)=\frac{1}{2}.$$

7.3.88. $\frac{1}{12}$. **7.3.89.** 0,5. **7.3.90.** $\frac{1}{3}$.

§ 4. Исследование функций и построение графиков

7.4.2. Строго возрастает на $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ и на $(2;+\infty)$, строго убывает на $\left(-\frac{2}{3};2\right)$. **7.4.3.** Строго возрастает на $(1;+\infty)$, строго убывает на $(-\infty;1)$.

7.4.5. $f_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}$. **7.4.6.** $f_{\min}=f(-1)=-0{,}5$, $f_{\max}=f(1)=0{,}5$.

7.4.8. Выпукла вверх на $(-2;0)$ и на $(2;+\infty)$, выпукла вниз на $(-\infty;-2)$ и на $(0;2)$; $x=0$ — точка перегиба. **7.4.9.** Выпукла вверх на $(-2;4)$, выпукла вниз на $(-\infty;-2)$ и на $(4;+\infty)$; $x_1=-2$ и $x_2=4$ — точки перегиба.

7.4.11. Прямые $x=-3$ и $x=3$ — вертикальные асимптоты, прямая $y=1$ — горизонтальная асимптота **7.4.12.** Прямая $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$. **7.4.16.** Строго возрастает при $x<0$, строго убывает при $x>0$. **7.4.17.** Строго возрастает на $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$, строго убывает на $\left(0;\frac{1}{e}\right)$.

7.4.18. Строго возрастает на $(0;1)$ и $(1;+\infty)$, строго убывает на $(-\infty;-1)$ и $(-1;0)$. **7.4.19.** Возрастает на $(-\infty;+\infty)$ **7.4.20.** $f_{\max}=f(-1)=3$, $f_{\min}=f(1)=-1$. **7.4.21.** $y_{\min}=y(2)=e$. **7.4.22.** Экстремумов нет.

7.4.23. $r_{\max}=r(2)=3$. **7.4.24.** Выпукла вверх на $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, выпукла вниз на $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и на $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$; $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ — точки перегиба.

7.4.25. Выпукла вверх на $(-\infty;1)$, выпукла вниз на $(1;+\infty)$; $x=1$ — точка перегиба. **7.4.26.** Выпукла вверх на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$, выпукла вниз на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\ldots$ — точки перегиба.

7.4.27. Выпуклость вниз на $(-\infty;+\infty)$; точек перегиба нет. **7.4.28.** $\alpha=12$.

7.4.29. Прямая $x=-2$ — вертикальная асимптота, прямая $y=3$ — горизонтальная асимптота. **7.4.30.** Прямая $x=0$ — вертикальная асимптота, прямая $y=1$ — горизонтальная асимптота. **7.4.31.** Прямые $x=1$ и $x=-6$ — вертикальные асимптоты, прямая $y=0$ — горизонтальная асимптота.

7.4.32. Прямая $y=x-\frac{\pi}{2}$ — наклонная асимптота при $x\to+\infty$, прямая $y=x+\frac{\pi}{2}$ — наклонная асимптота при $x\to-\infty$. **7.4.43.** Например, $f(x)=\cos\pi x$. **7.4.47.** *Указание.* Рассмотреть функцию $y=x^3$ и точку $x_0=0$.

Глава 8. Неопределенный интеграл

§ 1. Важнейшие свойства интегрирования

8.1.2. $\frac{x^{11}}{11}+C$. **8.1.3.** $-\frac{1}{6x^6}+C$. **8.1.4.** $\frac{4}{5}x^{5/4}+C$. **8.1.5.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

8.1.6. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|$. **8.1.7.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C$. **8.1.9.** $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\frac{6}{x}+C$.

8.1.10. $5\ln|x|-40\sqrt[4]{x}-\frac{3\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C$. **8.1.11.** $\frac{2}{7}x^3\cdot\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

8.1.12. $3\arcsin\frac{x}{2}+x+C$. **8.1.13.** $\frac{2}{13}x^6\cdot\sqrt{x}+\frac{8}{7}x^3\cdot\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$.

8.1.14. $-4\cos x+2x^4-11\operatorname{tg}x+C$. **8.1.16.** $\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **8.1.17.** $\frac{(9x+2)^{18}}{162}+C$.

8.1.18. $\frac{1}{8}\ln|8x-1|+C$. **8.1.19.** $-\frac{4^{3-5x}}{5\ln 4}+C$. **8.1.20.** $\frac{2}{9}\sqrt{(3x+4)^3}+C$.

8.1.21. $\frac{\sqrt{3}}{30}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-5}{\sqrt{3}x+5}\right|+C$. **8.1.23.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$. **8.1.24.** $x-5\ln|x+3|+C$.

8.1.25. $x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$. **8.1.26.** $-5\operatorname{ctg}x-\cos x+C$. **8.1.27.** $\sin x-3$.

8.1.28. $\frac{5}{4}-\frac{1}{2x^2}$. **8.1.29.** $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}$. **8.1.30.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **8.1.31.** $-\frac{1}{5^x\ln 5}$.

8.1.32. $\arcsin\frac{x}{2}+C$. **8.1.33.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$. **8.1.34.** $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$.

8.1.35. $\frac{x^3}{3}+4x-\frac{4}{x}+C$. **8.1.36.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+C$.

8.1.37. $\frac{7^x}{\ln 7}-8\ln|x|+4\sin x+C$. **8.1.38.** $\sqrt{3}\operatorname{tg}x-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{2}{3x^3}+C$.

8.1.39. $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-2\frac{14}{23}x\cdot\sqrt[20]{x^3}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. **8.1.40.** $\frac{7}{9}\cdot x^{0,9}-\frac{1}{2^x\cdot 5\ln 2}+C$.

8.1.41. $5\operatorname{ch}x-7\operatorname{sh}x+x+C$. **8.1.42.** $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^3-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4x+C$.

8.1.43. $7\ln\left|x+\sqrt{x^2+\pi}\right|-x+C$. **8.1.44.** $\frac{125}{2x^2}-\frac{50}{x\sqrt{x}}+\frac{15}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+C$.

8.1.45. $-\frac{1}{7}\cos 7x+C$. **8.1.46.** $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(2x-8)^6}+C$. **8.1.47.** $-\frac{(1-4x)^{2002}}{8008}+C$.

8.1.48. $\frac{1}{9}\ln|9x+7|+C$. **8.1.49.** $-\frac{1}{18(6x+1)^3}+C$. **8.1.50.** $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}5x+C$.

8.1.51. $-\frac{1}{11\ln 3}\cdot 3^{2-11x}+C$. **8.1.52.** $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-1}\right|+C$.

8.1.53. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$. **8.1.54.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{32}\sin 16x+C$. **8.1.55.** $\operatorname{tg}x-x+C$.

8.1.56. $4x+21\ln|x-5|+C$. **8.1.57.** $9\operatorname{tg}x-4\operatorname{ctg}x-25x+C$.

8.1.58. $3x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-4\arcsin x+C$. **8.1.59.** $C-\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

8.1.60. $C-2\cos x$. **8.1.61.** Да. **8.1.62.** *Указание.* Показать, что если первообразная $F(x)$ существует, то она должна иметь вид:

$$F(x) = \begin{cases} C_1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x + C_2, & \text{если } x \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда из непрерывности функции $F(x)$ в нуле следует, что $C_1 = C_2$. Далее показать, что функция

$$F(x) = \begin{cases} C, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x + C, & \text{если } x \geqslant 0, \end{cases}$$

не имеет производной в нуле и, значит, не может быть первообразной для функции y. **8.1.63.** Например, функция

$$F(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x^2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Указание. Учесть, что

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Далее показать, что указанная функция $F(x)$ имеет производную в точке $x = 0$. **8.1.64.** $\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$. *Указание.* Представить числитель подынтегральной дроби в виде $x^4 = (x^4 - 1) + 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 1$.
8.1.65. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$. *Указание.* Воспользоваться цепочкой равенств $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$. **8.1.66.** $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$.
Указание. Использовать тождество $\sin 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$.
8.1.67. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$. *Указание.* Учесть, что $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$.
8.1.68. $3x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$. *Указание.* Учесть, что $9 - x = (3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})$.
8.1.69. $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{4}x \cdot \sqrt[3]{x} + x + C$. *Указание.* Учесть, что $1 + x = 1^3 + \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$, далее применить формулу суммы кубов. **8.1.70.** $C - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x$.
Указание. Учесть, что $\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$. **8.1.71.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + C$.
Указание. Воспользоваться равенством $\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}$.
8.1.72. $\operatorname{arctg}(x+2) + C$. *Указание.* Выделить полный квадрат в знаменателе подынтегральной дроби. **8.1.73.** $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.
Указание. Дважды применить формулу понижения степени.
8.1.74. $\sin x - \cos x + C$. *Указание.* Воспользоваться формулой суммы кубов.
8.1.75. Нет. *Указание.* Например, рассмотреть функции $f(x) = g(x) = x$.

8.2.2. $\frac{1}{6}\sqrt{(4x-5)^3}+C$. **8.2.3.** $-\dfrac{1}{9(3x+2)^3}+C$.

8.2.4. $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$. **8.2.5.** $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$. **8.2.6.** $\frac{1}{6}\ln^6 x+C$.

8.2.7. $-\ln|\cos x+1|+C$. **8.2.8.** $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$. **8.2.9.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$.

8.2.11. $4\sqrt{x^2-5}+3\ln|x+\sqrt{x^2-5}|+C$. **8.2.12.** $e^{\sin^2 x}+C$. **8.2.13.** $\dfrac{\sin x-2}{\cos x}+C$.

8.2.14. $\dfrac{\ln|x-2|+5\ln|x+2|}{2}+C$. **8.2.16.** $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C$.

Указание. Сделать замену $x=3\sin t$. Преобразовывая ответ, учесть, что $\sin 2t=\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)=2\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)=2\cdot\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}$. В последнем равенстве использовано тождество $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

8.2.17. $\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$. **8.2.18.** $\frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{(2-x)^3}+C$.

8.2.19. $2\sqrt{x}-8\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{4}+C$. **8.2.21.** $\sin x-x\cdot\cos x+C$. **8.2.22.** $\dfrac{6x-5}{9}\cdot e^{3x}+C$.

8.2.23. $C-\dfrac{1+\ln x}{x}$. **8.2.24.** $\dfrac{2^x(x\ln 2-1)}{\ln^2 2}+C$. **8.2.25.** $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$.

8.2.26. $\dfrac{(x^2+1)\operatorname{arctg}x-x}{2}+C$. **8.2.28.** $\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$.

8.2.29. $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$. **8.2.31.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

8.2.32. $\ln x(\ln\ln x-1)+C$. **8.2.33.** $\frac{1}{6}\sin(6x+1)+C$. **8.2.34.** $-\dfrac{3}{5\sqrt[3]{5x-2}}+C$.

8.2.35. $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C$. **8.2.36.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{e^x}{3}+C$. **8.2.37.** $\frac{1}{3}\sqrt{x^6+7}+C$.

8.2.38. $-\ln\arccos x+C$. **8.2.39.** $-\dfrac{1}{3(x^2+3x-1)^3}+C$. **8.2.40.** $-\dfrac{\cos^{12}2x}{24}+C$.

8.2.41. $\dfrac{2}{\ln 7}\cdot 7^{\sqrt{x}}+C$. **8.2.42.** $-e^{\frac{1}{x}}+C$. **8.2.43.** $\frac{1}{2}\ln^2 5x+C$. **8.2.44.** $\ln|\sin x|+C$.

8.2.45. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+8)^4}+C$. **8.2.46.** $-\dfrac{1}{\sin x}+C$. **8.2.47.** $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$.

8.2.48. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$. **8.2.49.** $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$. **8.2.50.** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-4}\right|+C$.

8.2.51. $-\frac{1}{8}\left(8\cos\frac{x}{3}-5\right)^3+C$. **8.2.52.** $2\sqrt{x^3-x^2+7x-2}+C$.

8.2.53. $\frac{1}{4}\left(\dfrac{(2x+1)^{37}}{37}-\dfrac{(2x+1)^{36}}{36}\right)+C$. **8.2.54.** $\frac{2}{5}\sqrt{(x+4)^5}-4\sqrt{(x+4)^3}+C$.

8.2.55. $\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}+C$. **8.2.56.** $7\sqrt{x^2+10}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2+10}\right|+C$.

8.2.57. $\operatorname{arctg}e^x+C$. **8.2.58.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+\dfrac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+C$. **8.2.59.** $\frac{8}{3}\sqrt{\arcsin^3 x}-$ $-\sqrt{1-x^2}+C$. **8.2.60.** $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-3\ln|x^2-1|+C$. **8.2.61.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+\sin 2x)^4}+C$.

Указание. Воспользоваться тождеством $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

8.2.62. $e^{\operatorname{tg} x} - \frac{7}{\cos x} - 10\ln|\cos x| + C$. **8.2.63.** $\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + 8\arcsin\frac{x}{4} + C$.

8.2.64. $2(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})) + C$. **8.2.65.** $\frac{2}{5}\sqrt{(x+3)^5} - 2\sqrt{(x+3)^3} + C$.

8.2.66. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$. **8.2.67.** $C - \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}$. **8.2.68.** $\frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) +$ $+ C$. **8.2.69.** $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$. **8.2.70.** $(2x+3)\sin x + 2\cos x + C$.

8.2.71. $\frac{1}{5}x\cdot\operatorname{ch}5x - \frac{1}{25}\operatorname{sh}5x + C$. **8.2.72.** $C - \frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$. **8.2.73.** $\frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) +$ $+ C$. **8.2.74.** $e^{-x}(1+2x-x^2) + C$. **8.2.75.** $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$.
8.2.76. $2(\sqrt{1+x}\arccos x - 2\sqrt{1-x}) + C$. **8.2.77.** $2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}) + C$.
8.2.78. $\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}\right) + C$. **8.2.79.** $\frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x) + C$.

8.2.80. $\frac{e^{3x}}{13}(2\sin 2x + 3\cos 2x) + C$. **8.2.81.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$. **8.2.82.** $x\operatorname{tg} x +$ $+\ln|\cos x| + C$. **8.2.83.** $\frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + C$. **8.2.84.** $x\cdot\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C$.

8.2.85. $\frac{\sin^2 x}{2}\cdot(2\ln\sin x - 1) + C$. **8.2.86.** $\frac{x^3}{3}\cdot\arccos 3x + \frac{1}{243}\sqrt{(1-9x^2)^3} -$ $-\frac{1}{81}\cdot\sqrt{1-9x^2} + C$. **8.2.87.** $2(6-x)\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x} + 6(x-2)\cdot\sin\sqrt{x} + C$.
8.2.88. $x\cdot\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$. *Указание.* Дважды применить правило интегрирования по частям. **8.2.89.** $2\sin\sqrt{x} + C$.
8.2.90. $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$. **8.2.91.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.
Указание. Домножить числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $\sin x$, после чего сделать замену $t = \cos x$. **8.2.92.** $-\frac{2}{5}\sqrt{3 - \ln x}(\ln^2 x + 4\ln x +$ $+ 24) + C$. **8.2.93.** $e^{\operatorname{arctg} x} + 4\ln(1+x^2) + C$. **8.2.94.** $5\cos\left(\frac{1}{e^x}\right) - 3e^{-x}(x+1) + C$.

8.2.95. $\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$ *Решение.* $\int\sqrt{1-x^2}\,dx =$

$$= \int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \int x\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\begin{array}{cc} \Big\downarrow{}' & \Big\downarrow\int \\ 1 & (-\sqrt{1-x^2}) \end{array}$$

$$= \arcsin x - (-x\sqrt{1-x^2} + \int\sqrt{1-x^2}\,dx) = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Отсюда $2\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + C$, т. е.

$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$.

8.2.96. $\frac{1}{2}[x\cdot\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})] + C$.

8.2.97. $\ln|\operatorname{tg} x| + C$. *Указание.* Учесть, что

$$\frac{1}{\sin x\cdot\cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

8.2.98. $\frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) + C$. *Указание.* Проинтегрировать по частям, предварительно преобразив подынтегральное выражение к виду $x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Далее воспользоваться задачей 8.2.95.

8.2.99. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{\sqrt{2}\cdot x} + C$. *Решение.* Так как, $\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$, то, сделав замену $t = x - \frac{1}{x}$ и учитывая, что $dt = d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx$,

получим: $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{\sqrt{2}\cdot x} + C.$

8.2.100. $2\ln(x^2-2x+10) + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + C$. *Указание.* Выделим в числителе производную знаменателя: $(x^2-2x+10)' = 2x-2 \Rightarrow 4x-1 = 2(2x-2)+3$. Отсюда $\int \frac{(4x-1)\,dx}{x^2-2x+10} = \int \frac{2(2x-2)+3}{x^2-2x+10}\,dx =$

$= \int \frac{2(2x-2)\,dx}{x^2-2x+10} + \int \frac{3\,dx}{x^2-2x+10} = 2\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+10} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^2+9}.$

Далее сделать в первом интеграле подстановку $t = x^2-2x+10$, а во втором — $y = x-1$. **8.2.101.** $\frac{1}{3}\left[x^3 \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \ln|x^2-1| - x^2\right] + C$.

Указание. Применив интегрирование по частям, получить интеграл $\int \frac{x^3\,dx}{x^2-1}$, то есть $\int \frac{x^2\cdot x\,dx}{x^2-1}$. Далее сделать подстановку $t = x^2-1$. Тогда

$\int \frac{x^2\cdot x\,dx}{x^2-1} = \int \frac{[(x^2-1)+1]\cdot\frac{1}{2}d(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{t}\,dt.$

8.2.102. $C - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. *Указание.* Воспользуемся методом стрелок:

$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3}\,dx =$

$$\begin{tikzcd} \frac{1}{\sin x} \arrow[d, "\prime"'] \arrow[dr, dashed] & \frac{dx}{\sin^2 x} \arrow[d, "\int"] \\ -\frac{\cos x}{\sin^2 x} & (-\operatorname{ctg} x) \end{tikzcd}$$

$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int\left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x}\right)dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \int \frac{dx}{\sin x}$. Отсюда

$2\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x}$. Далее воспользоваться указанием к задаче 8.2.91.

§ 3. Интегрирование рациональных дробей

8.3.2. $4\ln|x-3| + C$.**8.3.3.** $-\frac{1}{(x-4)^4} + C$. **8.3.4.** $-\frac{11}{2(x+2)^2} + C$.

8.3.5. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{2} + C$. **8.3.6.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+17) + \frac{7}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{4} + C$.

8.3.7. $2\ln(x^2+x+1) - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

8.3.9. $\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x\right) + C$. **8.3.10.** $\frac{1}{250}\left[\frac{5(x-2)}{x^2-4x+29} + \operatorname{arctg}\frac{x-2}{5}\right] + C$.
8.3.11. $C - \frac{11x+36}{2(x^2+6x+10)} - \frac{11}{2}\operatorname{arctg}(x+3)$. **8.3.13.** $\ln|(x-5)(x+2)| + C$.
8.3.14. $\dfrac{7}{4}\ln|x-5| - \dfrac{3}{4}\ln|x-1| + C$. **8.3.15.** $C - \dfrac{1}{x} - \operatorname{arctg} x$.

8.3.16. $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C$.

8.3.17. $\dfrac{1}{12}\ln|x-2| - \dfrac{1}{24}\ln(x^2+2x+4) - \dfrac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{3}} + C$.

8.3.18. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+9) - \ln|x-1| + 7\ln|x+2| - \dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3} + C$.

8.3.19. $5\ln|x+\sqrt{2}| + C$. **8.3.20.** $-\dfrac{2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + C$.

8.3.21. $-\dfrac{7}{5(x+3)^5} + C$. **8.3.22.** $-\dfrac{1}{9(3x+2)^3} + C$. **8.3.23.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{2} + C$.
8.3.24. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$. **8.3.25.** $3\ln(x^2-8x+25) + \dfrac{25}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{3} + C$.
8.3.26. $\dfrac{5}{2}\ln(x^2+2x+10) - \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{3} + C$. **8.3.27.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3x+5) +$
$+ \dfrac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+3}{\sqrt{11}} + C$. **8.3.28.** $\dfrac{1}{5}\ln(5x^2+2x+1) - \dfrac{7}{10}\operatorname{arctg}\dfrac{5x+1}{2} + C$.
8.3.29. $C - \dfrac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$. **8.3.30.** $C - \dfrac{x+9}{8(x^2+2x+5)} -$
$- \dfrac{1}{16}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2} + C$. **8.3.31.** $\dfrac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3} + \dfrac{5}{16}\operatorname{arctg} x + C$.
8.3.32. $\dfrac{13x-24}{3(x^2-3x+3)} + \dfrac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-3}{\sqrt{3}} + C$. **8.3.33.** $\dfrac{7}{3}\ln|x+2| - \dfrac{1}{3}\ln|x-1| + C$.
8.3.34. $2\ln|x-2| - \ln|x-3| + C$. **8.3.35.** $\dfrac{5}{6}\ln|x-5| + \dfrac{1}{6}\ln|x+1| + C$.
8.3.36. $2x - \dfrac{3}{5}\ln|x-2| - \dfrac{7}{5}\ln|x+3| + C$. **8.3.37.** $\ln|x+1| - \dfrac{5}{2}\ln|x-4| -$
$- \dfrac{3}{2}\ln|x-2| + C$. **8.3.38.** $\dfrac{2}{3}\ln|x+1| - \dfrac{3}{4}\ln|x+2| + \dfrac{1}{12}\ln|x-2| + C$.
8.3.39. $\dfrac{2}{3(x+1)} + \dfrac{1}{4}\ln|x+1| + \dfrac{3}{4}\ln|x-1| + C$. **8.3.40.** $C - \dfrac{7}{2(x-2)^2} - \dfrac{2}{x-2}$.
8.3.41. $\dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{6}\ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln|x+1| + \dfrac{16}{3}\ln|x+2| + C$. **8.3.42.** $\dfrac{1}{3}\ln|x-1| -$
$- \dfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$. **8.3.43.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C$.
8.3.44. $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + C$. **8.3.45.** $\dfrac{3}{2}\ln(x^2-2x+5) -$
$- \ln|x-1| + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2} + C$. **8.3.46.** $\dfrac{1}{2(x^2+1)} + \operatorname{arctg} x + \ln|x| + C$.
8.3.47. $\dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{4}{3}\ln|x+1| - \dfrac{2}{3}\ln(x^2-x+1) + \dfrac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.
8.3.48. $5\ln|x| - \dfrac{5}{2}\ln(x^2+1) + \dfrac{3}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{3x+5}{2(x^2+1)} + C$.

8.3.49. $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$. **8.3.50.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C$.

8.3.51. $\frac{3}{2}\ln(e^x+2)+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3e^x+2)-\frac{3}{2}\ln(e^x+1)+C=\ln\frac{(e^x+2)^2}{e^x+1}+C$.

8.3.52. $\ln\left|\frac{e^x}{1-e^x}\right|-e^{-x}+C$. **8.3.53.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+2}\right|+C$. **8.3.54.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|-$ $-\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$. **8.3.55.** $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C$.
Указание. Разложить знаменатель подынтегральной дроби на множители: $x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$.
8.3.56. $-\frac{3}{199(x+2)^{199}}+\frac{2}{99(x+2)^{198}}-\frac{1}{197(x+2)^{197}}+C$. *Указание.* Сделать замену $t=x+2$. **8.3.57.** $-\frac{1}{x^5+x}+C$. *Решение.* Сделаем замену $t=x^5+x$. Тогда $dt=(5x^4+1)\,dx$ и $x^2\cdot(x^8+2x^4+1)=x^{10}+2x^6+x^2=(x^5+x)^2=t^2$, откуда $\int\frac{(5x^4+1)\,dx}{x^2(x^8+2x^4+1)}=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{x^5+x}+C$.

8.3.58. $\frac{1}{100}\ln|x^{200}-1|-\ln|x|+C$. *Указание.* Поделив числитель и знаменатель подынтегральной дроби на x^{101}, сделать замену $t=x^{100}-\frac{1}{x^{100}}$.

§ 4. Интегрирование иррациональных функций

8.4.2. $6\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+\ln|\sqrt[6]{x}-1|\right)+C$.

8.4.3. $4\left[\frac{1}{2}\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+\ln(\sqrt[4]{x}+1)\right]+C$.

8.4.5. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1|+C$.

8.4.6. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln|\sqrt[3]{x+1}+1|+C$. **8.4.8.** $2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+C$.

8.4.10. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\cdot\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\cdot\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\cdot\sqrt[6]{x^5}+C$.

8.4.11. $\frac{\sqrt{x^2+1}(2x^2-1)}{3x^3}+C$. **8.4.12.** $3\ln|\sqrt[3]{x}+1|+C$.

8.4.13. $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)\right]+C$.

8.4.14. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-9\ln|\sqrt[6]{x}-1|-3\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$.

8.4.15. $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$. **8.4.16.** $x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})+C$.

8.4.17. $C-6\sqrt[6]{x}-2\sqrt{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|$.

8.4.18. $2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C$.

8.4.19. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C$.

8.4.20. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$. **8.4.21.** $x+4\sqrt{1+x}+4\ln(\sqrt{1+x}-1)+C$.
8.4.22. $\frac{x-2}{3}\cdot\sqrt{2x-1}+C$. **8.4.23.** $C-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln|\sqrt[4]{1-2x}-1|$.

8.4.24. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}+C$. **8.4.25.** $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$. *Указание.* Учесть, что

$$\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\cdot\frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

8.4.26. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}\right|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, где $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

8.4.27. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$. *Указание.* Учесть, что $\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}=$
$=\frac{1}{(1-x)(x+1)\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. **8.4.28.** $\ln|x|-3\left[\ln|1+\sqrt[3]{x}|-\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C$.

8.4.29. $\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}\cdot(3x^2-2)}{15}+C$.

8.4.30. $C-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}$. **8.4.31.** $\frac{2}{1-\sqrt{x}}+C$.

8.4.32. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$. **8.4.33.** $-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+C$.

8.4.34. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}x^2+\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^3+C$. *Указание.* Раскрыть скобки.

8.4.35. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3-4)^4}+C$. **8.4.36.** $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

8.4.37. $\sqrt{x^2-10+29}+3\ln|x-5+\sqrt{x^2-10x+29}|+C$. *Указание.* Вычислив в числителе производную подкоренного выражения, представить данный интеграл в виде суммы двух интегралов (как при интегрировании простейших рациональных дробей третьего типа).
8.4.38. $3\sqrt{x^2-4x+5}+\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}|+C$.

8.4.39. $2\arcsin(x-1)-\sqrt{2x-x^2}+C$. **8.4.40.** $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+\sqrt{1-x^2}+C$.

Указание. Сделать подстановку $x=\sin t$. **8.4.41.** $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$.

8.4.42. $\frac{5}{11}\sqrt[5]{(x-2)^{11}}+\frac{5}{3}\sqrt[5]{(x-2)^6}+C$. **8.4.43.** $C-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Указание. Сделать подстановку. В ответе учесть, что $\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

8.4.44. $\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{(x-2)^3}\right]+C$. *Указание.* Избавится от иррациональности в знаменателе подынтегральной дроби.
8.4.45. $C-\arcsin\frac{1}{x}$. *Указание.* Сделать подстановку $x=\frac{1}{t}$.

8.4.46. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C$. *Указание.* Сделать подстановку $t=x+\frac{1}{x}$.

8.4.47. $\frac{2}{3}[\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x^3}]-\frac{2}{5}[\sqrt{(x+1)^5}+\sqrt{x^5}]+C$. *Указание.* Избавимся от иррациональности в знаменателе подынтегральной дроби:

$$\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}\,dx =$$

$= \int \frac{x\sqrt{x+1}-\sqrt{x}(x+1)}{x-(x+1)}\,dx = \int x\sqrt{x+1}\,dx - \int \sqrt{x}(x+1)\,dx$. Полученные интегралы вычисляются без труда.

§ 5. Интегрирование тригонометрических функций

8.5.2. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$. **8.5.3.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right| + C$. **8.5.5.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}x\right) + C$.

8.5.6. $C - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x - \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg}x|$. **8.5.8.** $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$.

8.5.9. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$. **8.5.11.** $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

8.5.12. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$. **8.5.14.** $C - \frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x$.

8.5.15. $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$. **8.5.17.** $C - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x|$. **8.5.18.** $\operatorname{tg}x - x + C$.

8.5.19. $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + C$. **8.5.20.** $\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$. **8.5.21.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3} + C$.

8.5.22. $\ln(2+\cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C$. **8.5.23.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C$.

8.5.24. $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$. **8.5.25.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x) + C$.

8.5.26. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\operatorname{tg}x\right) + C$. **8.5.27.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right) + C$.

8.5.28. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg}x + C$. *Указание.* Сделать подстановку $t = \operatorname{ctg}x$.

8.5.29. $C - \frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x$. **8.5.30.** $\frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

8.5.31. $\frac{2}{5\cos^5 x} + C$. **8.5.32.** $C - \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$.

8.5.33. $\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$.

8.5.34. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$. **8.5.35.** $\frac{1}{128}(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x) + C$.

8.5.36. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$. **8.5.37.** $2\cos\frac{x}{4} - \frac{6}{5}\cos\frac{5x}{12} + C$.

8.5.38. $\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

8.5.39. $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{7}\sin 7x + \sin x + \frac{1}{9}\sin 9x\right) + C$.

8.5.40. $C - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg}x - x$. **8.5.41.** $\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + x + C$.

8.5.42. $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$.

Глава 9. Определенный интеграл

§ 1. Приемы вычисления

9.1.3. π^2. **9.1.4.** $\frac{1}{\ln 10}$. **9.1.5.** $\frac{1}{2}\ln 7$. **9.1.6.** $5\ln 2-1$. **9.1.7.** $2\sqrt{e}-1$. **9.1.8.** $\frac{8}{3}$.

9.1.9. $\frac{1}{2}\ln 13$. **9.1.10.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **9.1.11.** 4. **9.1.13.** 0. **9.1.14.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

9.1.15. $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$. **9.1.16.** $-\frac{17}{120}$. **9.1.17.** $\frac{1}{6}$. **9.1.18.** 1. **9.1.19.** $\frac{2}{3}$.

9.1.21. $\ln\frac{3}{2}$. **9.1.22.** $\ln\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **9.1.23.** $12+9\ln 3$. **9.1.24.** $\operatorname{arctg} 0{,}08$. **9.1.25.** $\ln\frac{16}{9}$.

9.1.27. $\frac{4}{3}$. **9.1.28.** $\ln 2$. **9.1.29.** $\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\ln 2$. **9.1.30.** $1-\cos 1$.

9.1.31. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 3}$. **9.1.32.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$. **9.1.33.** $\frac{1-\ln 2}{2}$. **9.1.34.** $-\frac{\ln^2 2}{2}$.

9.1.35. $\frac{20\sqrt{2}-24}{9}$. **9.1.36.** 2. **9.1.37.** $\sqrt{3}-1+\ln\frac{\sqrt{6}}{2}$. **9.1.38.** $\frac{8+\pi}{12}$. **9.1.39.** 1.

9.1.40. $\frac{\pi-2}{8}+\ln\sqrt{2}$. **9.1.41.** Ответ не верен, т. к. противоречит свойству 7.

9.1.42. 0. **9.1.43.** **а)** второй; **б)** первый; **в)** второй; **г)** первый. **9.1.44.** **а)** <0; **б)** >0. **9.1.45.** Нет. **9.1.47.** $\ln\frac{4}{3}$. **9.1.48.** $\frac{1}{6}$. **9.1.49.** $\frac{4}{3}\ln\frac{9}{2}$. **9.1.50.** $3\ln 3$.

9.1.53. $\frac{14}{45}$. **9.1.54.** $\frac{28}{3}$. **9.1.55.** $\frac{32}{25}$. **9.1.56.** $\frac{4+2\sqrt{2}}{5}$. **9.1.57.** $\ln 2-\frac{5}{8}$.

9.1.58. $\frac{81}{16}\pi$. **9.1.60.** $2\ln(3\sqrt{2}-3)$. **9.1.62.** $\frac{\pi}{8}+\frac{7\sqrt{3}}{64}$. **9.1.63.** $\frac{\pi-2}{2}$.

9.1.64. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **9.1.65.** $\frac{1-\ln 2}{2}$. **9.1.66.** 5. **9.1.67.** $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$. **9.1.68.** $\ln 2$.

9.1.69. $\ln\frac{4}{3}$. **9.1.70.** $-\frac{37}{114}$. **9.1.71.** $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$. *Указание.* $x=4\sin^2 t$. **9.1.72.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

9.1.73. 3. **9.1.74.** $\frac{\sqrt{7}\pi}{4}-\operatorname{arctg}\sqrt{7}$. **9.1.75.** $\frac{\sqrt{3}}{72}$. **9.1.76.** $\frac{128}{315}$. **9.1.77.** $\frac{\pi}{12}\cdot\sqrt{\frac{6}{7}}$.

9.1.78. $30\ln\frac{3}{2}-6$. **9.1.79.** $2\frac{1}{4}$. **9.1.80.** $x=2$. **9.1.81.** $\frac{\pi^2}{4}$. **9.1.82.** **а)** нет; **б)** нет.

9.1.83. 50. **9.1.84.** Разрыв при $t=0$. **9.1.87.** -1. **9.1.88.** $\pi-4+6\ln 2$.

9.1.89. $\frac{6e-16}{e}$. **9.1.90.** $24\ln 2-16$. **9.1.92.** $\frac{\pi}{2}$. **9.1.93.** $\frac{\pi^2-8}{4}$.

9.1.94. $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\ln(1+\sqrt{2})$. **9.1.96.** $\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$. **9.1.97.** $\frac{3\pi^2}{4}-6$.

9.1.98. $\frac{3}{\ln 3}-\frac{6}{\ln^2 3}+\frac{4}{\ln^3 3}$. **9.1.99.** $2\pi-4$. **9.1.100.** $\ln 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$. **9.1.101.** $\frac{1}{25}$.

9.1.102. $-\frac{7\pi^2}{72}+\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}-\pi-2\ln 2$. **9.1.103.** $2e^2-2$.

9.1.104. $\left(\frac{\ln 3-\pi}{2}+\frac{2\sqrt{3}\cdot\pi}{9}\right)$. **9.1.105.** $\frac{2\sqrt{5}+2}{3}$. **9.1.106.** $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **9.1.107.** 2.

36 – 2361

9.1.108. $4e^3+2$. **9.1.109.** $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$. **9.1.110.** $\frac{a^2(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))}{2}$.

9.1.111. $\frac{e^3}{5}+1$. **9.1.112.** $\pi\sqrt{2}-4$. **9.1.113.** 0. **9.1.115.** 0.

§ 2. Несобственные интегралы

9.2.2. $\frac{1}{4}$. **9.2.3.** $\frac{1}{2}$. **9.2.4.** Расходится. **9.2.5.** Расходится. **9.2.7.** Расходится.

9.2.9. $\ln 2$. **9.2.11.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$. **9.2.13.** Расходится. **9.2.14.** $\ln(2+\sqrt{5})$. **9.2.15.** $\frac{\pi}{2}$.

9.2.16. Расходится. **9.2.17.** -1. **9.2.18.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **9.2.19.** 4. **9.2.20.** Сходится.

9.2.21. Расходится. **9.2.22.** Сходится. **9.2.23.** Сходится. **9.2.24.** Расходится.
9.2.25. Сходится. **9.2.26.** Расходится. **9.2.27.** Расходится. **9.2.28.** Сходится.
9.2.29. Сходится. **9.2.30.** Сходится. **9.2.31.** Сходится. **9.2.32.** Расходится.
9.2.33. Сходится. **9.2.34.** $\frac{1}{4}$. **9.2.35.** $\frac{1}{2}$. **9.2.36.** $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{24}$. **9.2.37.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$.

9.2.38. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{подстановка } t=x-\frac{1}{x}\right)$. **9.2.39.** 0. **9.2.41.** *Указание.* Сравнить e^{-x^2} и e^{-2x+1}. **9.2.42.** Сходится $\left(\frac{1}{x}=t\right)$. **9.2.43.** Сходится.

Указание. Сравнить $f=e^{-x^2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}$ с $\varphi(x)=e^{-x^2}$. **9.2.44.** Расходится ($\ln x=t$). **9.2.45.** Нет никаких значений α. **9.2.48.** Расходится. **9.2.49.** $-\frac{1}{4}$.

9.2.50. Расходится. **9.2.52.** $2\sqrt{2}$. **9.2.53.** Расходится. **9.2.54.** 6. **9.2.56.** $\frac{16}{3}$.

9.2.57. Сходится. **9.2.59.** π. **9.2.60.** Сходится. **9.2.61.** Расходится.
9.2.62. Расходится. **9.2.63.** Расходится. **9.2.64.** Расходится. **9.2.65.** $-\frac{1}{2}\ln 2e$.

9.2.66. Расходится. **9.2.67.** $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{7}$. **9.2.68.** 2π. **9.2.69.** Расходится.

9.2.70. Сходится. **9.2.71.** Расходится. **9.2.72.** Расходится.
9.2.73. Расходится. **9.2.74.** Сходится. **9.2.75.** Сходится. **9.2.76.** Сходится.
9.2.77. $\frac{1}{1-\alpha}$ при $\alpha<1$; расходится при $\alpha\geqslant 1$. **9.2.78.** Расходится.

9.2.79. Расходится. **9.2.80.** $J_n=(-1)^n\cdot n!$ **9.2.81.** $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. **9.2.82.** Сходится.

9.2.84. Сходится при $\alpha<1$; расходится при $\alpha\geqslant 1$.

§ 3. Приложения определенного интеграла

9.3.2. $\frac{81}{2}$. **9.3.3.** $\pi-1$. **9.3.4.** $1-\frac{\pi}{4}$. **9.3.6.** $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$. **9.3.7.** 1. **9.3.8.** $\frac{16}{3}$.

9.3.9. 36. **9.3.10.** $\frac{7}{6}$. **9.3.11.** 8. **9.3.12.** $\frac{9}{2}$. **9.3.14.** $2-\frac{\pi}{2}$. **9.3.15.** $\frac{195}{8}-24\ln\frac{3}{2}$.

9.3.16. $\frac{128}{5}$. **9.3.17.** $\frac{4}{5}$. **9.3.19.** 6π. **9.3.20.** πab. **9.3.21.** $\frac{72\sqrt{3}}{5}$. **9.3.22.** 8π.

9.3.23. $\frac{3\pi}{8}$. **9.3.24.** $\frac{4}{3}\pi+\frac{7\sqrt{3}}{4}$. **9.3.27.** $6{,}25\pi$. **9.3.28.** $\frac{3}{4}\pi$. **9.3.29.** $\frac{27\pi}{2}$.

9.3.30. 2. **9.3.31.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **9.3.32.** $6\pi a^2$. **9.3.33.** $\frac{9}{2}\pi$. **9.3.34.** $\frac{7}{3}$. **9.3.35.** $\frac{1}{4}$.

9.3.36. $4+\pi^2$. **9.3.37.** $\frac{4}{3}(6+\pi-3\sqrt{3})$. **9.3.38.** $\frac{343}{3}$. **9.3.39.** $3\pi a^2$.

9.3.40. $4\pi-3\sqrt{3}$. **9.3.41.** $\frac{2}{3}\pi$. **9.3.42.** $\frac{49}{4}\pi$. **9.3.43.** $\frac{\pi}{3}$. **9.3.44.** $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$.

9.3.45. a^2. **9.3.46.** 1. **9.3.47.** $4\ln 2-1$. **9.3.48.** $\frac{8}{3}$. **9.3.49.** $\frac{128}{3}$. **9.3.50.** π.

9.3.51. $2\pi-\frac{4}{3}$. **9.3.52.** $\frac{a^2(e^2-1)}{2e}$. **9.3.53.** $1-\frac{\pi}{4}$. **9.3.54.** $13\arcsin\frac{5}{13}-12\ln\frac{3}{2}$.

9.3.55. $\frac{3}{2}$. **9.3.56.** $\frac{8}{15}$. **9.3.57.** $\frac{4}{3}$. **9.3.58.** $18\arcsin\frac{1}{3}-4\ln(1+\sqrt{2})$.

9.3.59. $\sqrt{2}-1$. **9.3.60.** 3. **9.3.61.** $\frac{24\sqrt{3}}{5}$. **9.3.62.** $8(\pi+4)$. **9.3.63.** $4\pi-6\sqrt{3}$.

9.3.64. π. **9.3.65.** $\frac{7a^2}{4\pi}$. **9.3.66.** $\frac{5}{32}\pi$. **9.3.67.** $16\left(\frac{7\pi}{12}-\sqrt{3}\right)$. **9.3.68.** $\frac{\pi a^2}{2}$.

9.3.69. $\frac{\pi}{24}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.3.70.** $\frac{14}{3}$. **9.3.71.** $\frac{3}{2}a^2$. **9.3.72.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\pi$. **9.3.73.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

9.3.74. π. **9.3.75.** $\frac{8}{3}ab$. **9.3.76.** $\frac{\pi ab}{4}$. **9.3.77.** $\frac{11}{8}\pi a^2$. **9.3.78.** $\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}$.

9.3.79. **а)** $\frac{\pi}{4}$; **б)** 0; **в)** 10. **9.3.80.** $\frac{243}{16}$. **9.3.81.** $a=\sqrt{2}$. **9.3.83.** $A=-3$; B — любое число; $C=1$; (∞). **9.3.84.** Равны. **9.3.86.** $\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}\ln(\sqrt{5}-2)$.

9.3.87. $\frac{(13\sqrt{13}-8)4}{9}$. **9.3.88.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$. **9.3.89.** $\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$. **9.3.90.** $\frac{14}{3}$.

9.3.91. $\frac{a}{2}(e-e^{-1})$. **9.3.93.** $8(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$. **9.3.94.** $\frac{1}{4}(6\sqrt{37}-\ln(\sqrt{37}-6))$.

9.3.95. $\frac{134}{27}$. **9.3.96.** 8. **9.3.97.** $2\pi a$. **9.3.98.** $12\sqrt{3}$. **9.3.99.** $\frac{3}{2}$.

9.3.100. $\sqrt{2}(e-1)$. **9.3.102.** $\sqrt{2}\pi$. **9.3.103.** 28. **9.3.104.** $\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$.

9.3.105. $5\left(\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right)$. **9.3.106.** $12(2-\sqrt{2})$.

9.3.107. $2(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$. **9.3.108.** $\frac{13}{3}$. **9.3.109.** $\frac{\pi^2}{32}$. **9.3.110.** $8\sqrt{2}-1$. **9.3.111.** $\frac{1}{2}\ln 3$.

9.3.112. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right)$. **9.3.113.** $\ln 7-\frac{3}{4}$. **9.3.114.** $2\sqrt{3}+\ln(\sqrt{3}+2)$.

9.3.115. $\frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)$. **9.3.116.** $4\sqrt{3}$. **9.3.117.** 10π. **9.3.118.** 12. **9.3.119.** 16.

9.3.120. 12. **9.3.121.** $4\sqrt{2}$. **9.3.122.** $26\,\mathrm{sh}\,\frac{5\pi}{24}$. **9.3.123.** $\frac{\pi}{6}$.

9.3.124. $\frac{3}{2}\left(\frac{15}{16}+\ln 2\right)$. **9.3.125.** $2\sqrt{2}$. **9.3.126.** $2\sqrt{3}$. **9.3.127.** $2\pi-2\,\mathrm{arctg}\,2$.

9.3.128. $4\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}+\frac{16}{27}\left(\frac{11\sqrt{22}}{4}-1\right)$. **9.3.129.** $\frac{3}{2}$. **9.3.130.** $\frac{\pi}{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)$.

9.3.131. $\frac{\pi^3}{81}$. **9.3.132.** $M\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$. **9.3.133.** $2e^{\frac{\pi}{4}}-2$. **9.3.134.** $\ln\frac{\pi}{2}$.

9.3.135. $\frac{1}{4}\left(5+\frac{5\sqrt{3}}{6}\ln(2+\sqrt{3})\right)$. **9.3.136.** $\frac{3\pi a}{2}$.

9.3.137. $2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **9.3.138.** $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

9.3.139. 16. **9.3.140.** $\frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}$. **9.3.144.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **9.3.145.** $\frac{1}{3}\pi R^2 H$. **9.3.146.** 8.

9.3.147. 8. **9.3.148.** 8π. **9.3.149.** $\frac{16}{3}\pi$. **9.3.150.** 54π. **9.3.151.** 24π.

9.3.152. $24\sqrt{3}\pi$. **9.3.153.** $\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$. **9.3.154.** $\frac{8\sqrt{6}}{3}\pi$. **9.3.155.** 24π.

9.3.156. $\frac{8\pi}{3}$. **9.3.157.** $\frac{400}{3}$. **9.3.158.** $\frac{40}{3}\pi$. **9.3.159.** 135. **9.3.160.** $\frac{81\pi}{2}$.

9.3.161. 27π. **9.3.162.** $\frac{96\sqrt{6}}{5}$. **9.3.163.** $\frac{423\pi}{24}$. **9.3.164.** 50. **9.3.170.** $\frac{768}{7}\pi$.

9.3.171. $\frac{\pi^2+2\pi}{2}$. **9.3.172.** $\frac{16}{35}\pi$. **9.3.173.** $\frac{16384}{15}\pi$. **9.3.174.** $4\pi^2$.

9.3.175. $\pi(3\pi+4)$. **9.3.176.** 4π. **9.3.177.** $\frac{9}{5}\pi$. **9.3.178.** $\frac{8}{3}\pi a^2 b$. **9.3.179.** $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

9.3.180. $\pi\left(\ln 4-\frac{3}{4}\right)$. **9.3.181.** $2\pi^2$. **9.3.182.** 48π. **9.3.183.** 18π. **9.3.184.** 48π.

9.3.185. $\frac{\pi}{15}$. **9.3.186.** $\frac{32}{105}\pi$. **9.3.187.** $\pi a^3\left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2}+1\right)$. **9.3.188.** $\frac{32}{5}\pi$.

9.3.189. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. **9.3.190.** $\frac{272}{15}\pi$. **9.3.191.** $\frac{8}{3}\pi$. **9.3.192.** $\frac{64}{3}\pi R^3$.

9.3.193. $\frac{4}{3}\pi a^3$. **9.3.194.** $\frac{\pi^2}{2}$. **9.3.195.** $\frac{4}{7}\pi$. **9.3.196.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **9.3.197.** $\frac{64}{3}\pi$.

9.3.198. 216π. **9.3.199.** $\frac{8}{3}R^3$. **9.3.200.** 8. **9.3.201.** $\frac{16}{3}\pi$. **9.3.202.** 8π.

9.3.203. $\frac{128}{3}\pi$. **9.3.204.** $\frac{8}{5}\pi$. **9.3.205.** $4\pi^2$. **9.3.206.** $\pi\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}-2\right)$. **9.3.207.** π.

9.3.208. $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$. **9.3.209.** $\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32}$. **9.3.210.** π^2. **9.3.211.** $\frac{4}{21}\pi$.

9.3.212. π. **9.3.213.** $\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)\to\pi$. **9.3.214.** $\frac{32}{3}\pi$. **9.3.215.** Да.

9.3.220. $\frac{64}{3}\pi a^2$. **9.3.221.** $16\pi^2 a^2$. **9.3.222.** $\frac{52}{3}\pi$. **9.3.223.** $2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

9.3.224. $2\pi b\left(b+\frac{a^2}{c}\arcsin\frac{c}{a}\right)$. **9.3.225.** $2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2c}\ln\left|\frac{a+c}{a-c}\right|\right)$. **9.3.226.** $16\pi^2$.

9.3.227. 4π. **9.3.228.** $\frac{2}{9}\pi(2\sqrt{2}-1)$. **9.3.229.** $\pi R\sqrt{R^2+H^2}$.

9.3.230. $\pi(e-e^{-1}+2)$. **9.3.231.** $\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{10}-\frac{1}{3}\ln(\sqrt{10}-3)\right)$. **9.3.232.** $\frac{12}{5}\pi a^2$.

9.3.233. $\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. **9.3.234.** $\frac{\pi}{32}(2e^4-5e^2-1)$. **9.3.235.** $\frac{128}{5}\pi R^2$.

9.3.236. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi}-2)$. **9.3.237.** $\frac{133}{5}\pi$. **9.3.238.** $\frac{\pi}{480}(97\sqrt{33^5}-97-80\sqrt{33^3})$.

9.3.239. 640π. **9.3.240.** $8\pi(2-\sqrt{2})$. **9.3.241.** $\frac{8}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$. **9.3.242.** $8\pi^2$.

9.3.243. $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}\right)$. **9.3.244.** $\pi\sqrt{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$. **9.3.245.** 3π.

9.3.246. $\frac{32}{5}\pi$. **9.3.247.** $\frac{8}{3}\pi(3\pi-4)$. **9.3.248.** $\frac{96}{5}\pi$. **9.3.250.** 10 м; 1 м/с.

9.3.251. 37,5 м. **9.3.254.** $\frac{1}{12}g\gamma\pi R^2H^2$. **9.3.255.** 10 см. **9.3.256.** $60g \approx 588$ Дж.

9.3.259. $\frac{1}{12}g\gamma D^3$. **9.3.260.** $\frac{1}{18}g\gamma ab^2$. **9.3.261.** **а)** ≈ 1226 Н; **б)** ≈ 613 Н.

9.3.265. $\left(\frac{-2R}{\pi}; \frac{-2R}{\pi}\right)$. **9.3.266.** $\frac{2\pi^2R^4}{m}$. **9.3.267.** $\left(-\frac{2}{5}; 0\right)$. **9.3.268.** $v_0t - \frac{gt^2}{2}$; $\frac{v_0}{2g}$. **9.3.269.** 400 м. **9.3.270.** $\frac{1}{2}g\gamma\pi R^2H^2$ Дж. **9.3.271.** $\frac{2}{3}g\gamma HR^3$.

9.3.272. $1083{,}3\frac{1}{3}$ кН. **9.3.273.** $\frac{1}{6}\gamma gah^2$. **9.3.274.** $36\pi g\gamma \approx 9{,}2\cdot 10^5$ Н.

9.3.275. $S_x = S_y = \frac{12}{5}\gamma$; $M_x = M_y = 3\gamma$. **9.3.276.** πR^3. **9.3.277.** $\left(\frac{2}{3}R, \frac{2}{3}R\right)$.

9.3.278. $\left(\frac{1}{2R}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}, 0\right)$. **9.3.279.** $m = \frac{3}{5}a^2$; $S_x = \frac{9\pi a^2}{256}$; $S_y = \frac{3a^2}{8}$. **9.3.280.** 8π.

9.3.281. $x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$; $\frac{2v_0}{\pi}$. **9.3.282.** 11 м.; 8 м/с; 0 м. **9.3.283.** 5 сек.; 75 м.

9.3.284. $\frac{1}{60}\omega^2\gamma dha^3$. **9.3.285.** $\frac{1}{2}\gamma^2c^2ab = 6{,}28\cdot 10^6$ Дж. **9.3.286.** $\frac{4}{15}\pi\gamma R^5\omega^2$.

9.3.287. $\frac{1}{3}\pi R^2H^2\left(\gamma_1 - \frac{3}{4}\gamma_2\right) \approx 8519\pi$ Дж. **9.3.288.** ≈ 54 мин.

Глава 10. Комплексные числа

§ 1. Комплексные числа, основные понятия. Геометрическое изображение комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел

10.1.2. **а)** 5; π; **б)** 2,3; $\frac{\pi}{2}$; **в)** $\sqrt{2}$; $-\frac{3\pi}{4}$; **г)** $\sqrt{10}$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **10.1.4.** **а)** $-1 + i\sqrt{3}$; **б)** $-\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$. **10.1.5.** **а)** 5; -5; $5\sqrt{2}$; $-\frac{\pi}{4}$; **б)** 2; 0; 2; 0.

10.1.6. **а)** $2\sqrt{5}(\cos(\operatorname{arctg}2) + i\sin(\operatorname{arctg}2))$; **б)** $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$; **в)** $2001(\cos 0 + i\sin 0)$; **г)** $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. **10.1.7.** **а)** $12e^{\frac{\pi}{2}i}$; **б)** $(\sqrt{3}-1)e^{i\pi}$; **в)** $5e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\pi\right)}$; **г)** $e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$. **10.1.11.** **а)** $\pi + 2\pi k$; **б)** $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

10.1.12. **а)** $-\frac{\pi}{6}$ или $-\frac{5}{6}\pi$; **б)** $\frac{5}{6}\pi$. **10.1.13.** **а)** $5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ и -5; **б)** $2(\cos(-150^\circ) + i\sin(-150^\circ))$ и $-\sqrt{3} - i$.

10.1.14. **а)** $5\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right) = 5e^{-i\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}$; **б)** $3(\cos(-10^\circ) + i\sin(-10^\circ)) = 3e^{-i\frac{\pi}{18}}$; **в)** $\frac{1}{\cos 1}(\cos 1 + i\sin 1) = \frac{1}{\cos 1}e^i$.

10.1.15. **а)** $2\cos 11^\circ(\cos 11^\circ + i\sin 11^\circ)$; **б)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$; **в)** $-\frac{1}{\cos\alpha}(\cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha))$; **г)** $5\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$. **10.1.16.** 2 и 1.

10.1.17. **а)** $x = 4$; $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; **б)** $x = 4$; $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **10.1.21.** $r_1 = r_2$; $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$.

§ 2. Действия над комплексными числами

10.2.3. **а)** $-1+5i$; **б)** $\frac{1}{10}-\frac{13}{10}i$. **10.2.4.** **а)** $-\frac{7}{5}+\frac{3}{10}i$; **б)** 0. **10.2.5.** **а)** 32; **б)** $32i$. **10.2.6.** **а)** $\frac{1-i}{4}$; **б)** $4-4i$. **10.2.9.** -1. **10.2.10.** 1. **10.2.12.** **а)** $x=1$; $y=2$; **б)** $\varnothing$. **10.2.13.** **а)** $x=\frac{3}{2}$; $y=\frac{3}{2}$; **б)** $x=2+i$; $y=2-i$. **10.2.14.** $-2-2i$. **10.2.15.** $512(1-i\sqrt{3})$. **10.2.16.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$. **10.2.17.** -1; $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.2.19.** Окружность $(x+1)^2+y^2=4$. **10.2.20.** Полуплоскость $y\geqslant\frac{3}{2}$. **10.2.21.** **а)** 25; 0; **б)** $\frac{6}{5}$; $\frac{8}{5}$. **10.2.22.** **а)** $z_1=0$; $z_2=-1$; $z_{3,4}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; **б)** $z=\sqrt{2}+4i$. **10.2.23.** **а)** $-32-32\sqrt{3}i$; **б)** -1. **10.2.25.** **а)** $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; $z_2=i$; $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; **б)** $2\cdot e^{\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k\right)i}$, $k=0,1,2,3$; **в)** $2\cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)i}$, $k=0,1,2,3$; **г)** $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi+8\pi k}{20}+i\sin\frac{\pi+8\pi k}{20}\right)$, $k=0,1,2,3,4$. **10.2.26.** **а)** $\sqrt{65}$; **б)** $2\sqrt{10}$. **10.2.27.** $z_1=0$; $z_2=1$; $z_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **10.2.28.** **а)** $2\pm 2i$; **б)** $\frac{1\pm\sqrt{23}i}{6}$. **10.2.29.** **а)** $\frac{i}{2}$; **б)** $4\left(\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{12}\right)\right)$. **10.2.30.** **а)** $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$; **б)** $-12+0i$. **10.2.32.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $-\sqrt{2}i$. **10.2.34.** **а)** $\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$; **б)** $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$. **10.2.35.** **а)** $-2+i$; $-3+i$; **б)** $\pm 2i$; $\pm\sqrt{5}i$. **10.2.36.** $\cos x+i\sin x$. **10.2.38.** $z=\sqrt{3}$. **10.2.39.** $z=-4{,}8+6{,}4i$. **10.2.40.** $2^{16}\cdot\cos^{16}\left(\frac{\pi-2\varphi}{4}\right)(\cos 8\varphi-i\sin 8\varphi)$. **10.2.41.** **а)** 0; аргумент не определен; **б)** 64; $-\frac{4}{15}\pi$; **в)** $\frac{4}{\sin\frac{\pi}{10}}$; $-\frac{2}{5}\pi$. **10.2.42.** $\sin 5\varphi=5\sin\varphi\cos^4\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi$. **10.2.43.** **а)** $\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$; **б)** $\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. **10.2.44.** **а)** $z_{1,2}=\pm i$; $z_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$; **б)** $z_{1,2}=\pm 1$; $z_{3,4}=\pm i$; $z_{5,6}=\pm 2$; $z_{7,8}=\pm 2i$; **в)** $z=\frac{4}{3}-i$. **10.2.45.** $(1;1)$ и $(-1;1)$. **10.2.46.** **а)** Конец радиус-вектора z перенести на вектор $\bar{a}(-3;0)$; **б)** повернуть радиус-вектор точки z на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки; **в)** перенести конец радиуса-вектора точки z на вектор $\bar{a}(2;-1)$. **10.2.48.** При $x=y$ или $x=-y$. **10.2.49.** **а)** Окружность $|z|=1$; **б)** нет таких точек. **10.2.50.** **а)** 1; **б)** 1. **10.2.51.** Да.

Глава 11. Функции нескольких переменных

§ 1. Понятие функции нескольких переменных. График и линии уровня функции двух переменных

11.1.3. $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$, $0 < x < p$, $0 < y < p$, $x + y > p$.
11.1.4. Функция неоднозначная; $V = \frac{1}{6}xy(2R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$, если центр шара расположен внутри пирамиды; $V = \frac{1}{6}xy(2R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$, если центр шара расположен вне пирамиды; $D = \{(x, y) : 0 < x \leqslant 2R,$ $0 < y \leqslant \sqrt{4R^2 - x^2}\}$. **11.1.5.** $V = \frac{\pi}{3}h(l^2 - h^2)$, $0 < h < l$. **11.1.7. а)** $\frac{y^2 - x^2}{2xy}$; **б)** $\frac{x^2 - y^2}{2xy}$; **в)** $\frac{y^2 - x^2}{2xy}$; **г)** $\frac{2xy}{x^2 - y^2}$. **11.1.8. а)** -2. **б)** $\frac{5}{3}$. **в)** $xy + \frac{y}{x}$. **г)** $\frac{x^2 + y^2}{xy}$. **д)** $1 + \frac{x^2}{y^2}$. **е)** $x^2 - y^2 + \frac{x - y}{x + y}$. **11.1.10.** $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.
11.1.11. $f(x; y) = \frac{x^2(1 - y)}{1 + y}$. *Указание.* Обозначив $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$, определим $x = \frac{u}{1 + v}$, $y = \frac{uv}{1 + v}$. Тогда $f(u; v) = \frac{u^2}{(1 + v)^2} + \frac{u^2 v^2}{(1 + v)^2} = \frac{u^2(1 - v)}{(1 + v)}$. Остается заменить u на x и v на y. **11.1.12.** $f(x) = x^2 - x$, а $z = 2y - (x - y)^2$.
11.1.15. Полосы $2\pi n \leqslant x \leqslant (2n + 1)\pi$, $y \geqslant 0$; $(2n + 1)\pi \leqslant x \leqslant (2n + 2)\pi$, $y \leqslant 0$, где n — произвольное целое число. **11.1.16.** Биссектриса II и IV координатных углов, $y = -x$. **11.1.17.** Полоса: $1 \leqslant y \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$.
11.1.18. Часть плоскости первой четверти, расположенная выше параболы $y > \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$. **11.1.19.** Две полуполосы: $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ -2 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x < 2, \\ -2 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$
11.1.22. Часть пространства над эллиптическим параболоидом.
11.1.23. Часть пространства, расположенная над гиперболическим параболоидом. **11.1.24.** I, III, VI, VIII октанты системы координат $Oxyz$, не включая границу. **11.1.25.** Полупространство, ограниченное плоскостью $x + y + z = 1$, и содержащее начало координат. **11.1.27.** Линии уровня — прямые $x + y = c$, а график функции — это плоскость. **11.1.28.** Линии уровня — равносторонние гиперболы $xy = c$, $c > 0$ (они расположены в первой и третьей четверти плоскости). График функции — конус. **11.1.29.** Линии уровня — равносторонние гиперболы. **11.1.30.** Линии уровня — прямые линии, параллельные прямой $x + y + 1 = 0$. **11.1.32.** Плоскости, параллельные плоскости $x + y + z = 0$. **11.1.33.** Концентричесие сферы радиуса $\sqrt{u}$, $u > 0$, с центром в начале координат; начало координат $O(0; 0; 0)$ при $u = 0$. **11.1.34.** Однополостные гиперболоиды с осью Oz, если $u > 0$ или двухполостные гиперболоиды при $u < 0$, если же $u = 0$, то $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ — конус. **11.1.35. а)** $\frac{y^3 + x^3}{y^2 + x^2} - \frac{y + x}{y - x}$; **б)** $\frac{y^3 + x^3}{(y^2 + x^2)xy} - \frac{y + x}{y - x}$;

в) $-\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}+\dfrac{x+y}{y-x}$; г) $\dfrac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)x}-\dfrac{x+y}{x-y}$. **11.1.36.** $\dfrac{R^4}{10-R^2}$ при $R^2\neq 10$.
11.1.37. а) $x^4-2x^2y^2+2y^4$; б) $4x^2y^2$. **11.1.39.** а) $\cos 2x$; б) $\cos(x^2-y^2)$.
11.1.40. Две полуполосы $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\geqslant 1,\ |x|\leqslant 1\}$. **11.1.41.** Кольцо $2^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 3^2$. **11.1.42.** Полузамкнутое кольцо $1<x^2+y^2\leqslant 16$.
11.1.43. Внешность двух окружностей с уравнениями
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ и $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ с исключенной точкой $O(0;0)$. **11.1.44.** Область, заключенная между параболами $y=1-x^2$ и $y=x^2-1$. Формально, $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 : y\geqslant 1-x^2,\ y\geqslant x^2-1\}$.
11.1.45. $D=\left\{(x;y) : \left|\frac{x}{y}\right|\leqslant 1\right\}$ — два вертикальных угла, ограниченных прямыми $y=x$ и $y=-x$ и содержащих ось Oy. **11.1.46.** D — область $\begin{cases}(x+1)^2+y^2\geqslant 1,\\(x-1)^2+y^2>1.\end{cases}$. **11.1.47.** $\cos(x^2+y^2)\geqslant 0\Longrightarrow 0\leqslant x^2+y^2\leqslant\frac{\pi}{2}$, $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\pi k+\frac{\pi}{2}$, $k=1,2,3,\ldots$ (рис. 134). **11.1.48.** Первый

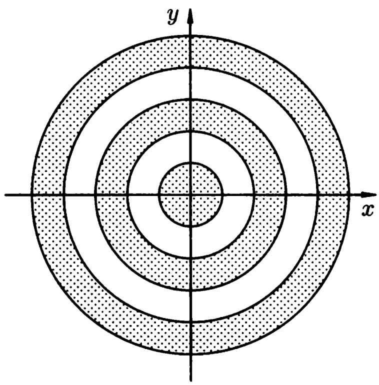


Рис. 134

октант $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. **11.1.49.** Часть пространства между двумя концентрическими сферами радиусов r и R с центрами в начале координат.
11.1.50. $0\leqslant x^2+y^2\leqslant z^2$. **11.1.51.** а) $\dfrac{1}{(x-2)^2+(y+3)^2}$;
б) $\dfrac{1}{(x-2)^2+(y+3)^2}+\dfrac{1}{(x-3)^2+(y+2)^2}$; в) $\dfrac{1}{x^2+y^2-4}$; г) $\dfrac{1}{(x^2-2y)(x+2)}$;
д) $\dfrac{1}{\sin^2\pi x+y^2}$; е) $\dfrac{1}{x^2+\sin^2\pi y}$; ж) $\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$; з) $\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{-y}}$;
и) $\dfrac{\sqrt{-y}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$; к) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(y-3)^2-9}}$; л) $\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{y-x+4}}$;
м) $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{4x-y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{xy-4}}+\dfrac{1}{\sqrt{8-xy}}$. **11.1.52.** а) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$; б) $g(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$; в) $f(x)=\operatorname{tg}x$; г) $f(x)=e^x$.
11.1.54. $z=u^8\ln v$, $-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$. **11.1.55.** $-1\leqslant 3x-2y\leqslant 1$.

§ 2. Предел функции в точке. Непрерывность функции в точке и на множестве

11.2.6. 0. **11.2.7.** Не существует. **11.2.8.** $\frac{e^2}{2}$. **11.2.9.** $-\frac{1}{3}$. **11.2.10.** 0.
11.2.12. 0. **11.2.13.** 0. **11.2.14.** $\ln 2$. **11.2.17.** 0. **11.2.18.** 0. **11.2.19.** 0.
11.2.20. -4. **11.2.22.** Функция непрерывна в данной точке.
11.2.23. Непрерывна. **11.2.24.** Непрерывна. **11.2.26.** $f(1;2) = 0$.
11.2.27. $f(1;1) = 0$. **11.2.28.** $f(0;1) = -12$. **11.2.29.** $f(0;4) = \frac{1}{3}$.
11.2.30. $f(0;0) = 0$. **11.2.34.** $x = 0$, $y = 0$ — точка разрыва. В окрестности этой точки $f(x;y)$ бесконечно малая. **11.2.35.** $M_0(0;0)$ — точка разрыва. В окрестности этой точки $f(x;y)$ бесконечно большая. **11.2.36.** Функция разрывна во всех точках прямой $x - y = 0$. В окрестности каждой точки прямой $f(x;y)$ — положительная бесконечно большая функция.
11.2.37. Функция разрывна в каждой точке параболы $y = x^2$. В окрестности ее точек $f(x;y)$ — бесконечно большая разных знаков с разных сторон параболы. **11.2.38.** -10. **11.2.39.** 0. **11.2.40.** $\frac{1}{2}$. **11.2.41.** e^3. **11.2.42.** 0.
11.2.43. 0. **11.2.44.** $\frac{3}{7}$. **11.2.45.** $-\frac{1}{2}$. **11.2.46.** 1. **11.2.47.** e^2.

§ 3. Частные производные. Полный дифференциал. Линеаризация функций

11.3.2. $\Delta_x z = 0{,}42$, $\Delta_y z = -0{,}2$, $\Delta z = 0{,}178$. **11.3.3.** $\Delta_x z = 0{,}0031$, $\Delta_y z = 0{,}0006$, $\Delta z = 0{,}0063$. **11.3.4.** $\Delta_x z = 0{,}04$, $\Delta_y z = 0{,}04$, $\Delta z = 0$.
11.3.5. 1,31. **11.3.6.** 0,2109. **11.3.7.** 0,33. **11.3.8.** 0,0187. **11.3.11.** $z'_x = 2xe^{x^2+y^2}$, $z'_y = 2ye^{x^2+y^2}$. **11.3.12.** $u'_t = 5t^4\sin^3 z$, $u'_z = 3t^5\sin^2 z\cos z$.
11.3.13. $v'_x = 4x^3\cos^2 y - 15x^4y^4\sin^2 x^5 \cdot \cos x^5$, $v'_y = -x^4\sin 2y - 4y^3\sin^3 x^5$.
11.3.14. $z'_x = 2x\cos 2xy - 2yx^2\sin 2xy - y^2\cos(x+y)$, $z'_y = -2x^3\sin 2xy - 2y\sin(x+y) + y^2\cos(x+y)$.
11.3.15. $u'_x = yx^{y-1} + y^z zx^{z-1} + yz^{xy}\ln z$, $u'_y = x^y\ln x + x^z zy^{z-1} + xz^{xy}\ln z$, $u'_z = (xy)^z\ln(x\cdot y) + xyz^{xy-1}$. *Указание.* Следует заметить, что здесь имеем дело по существу с двумя формулами: для производной степенной и показательной функций. **11.3.19.** 1,08. **11.3.20.** 3,185. **11.3.21.** 0,227. *Указание.* От градусов следует переходить к радианам (числам). Тогда $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = -2° = \frac{-\pi}{90}$, $\Delta y = 1° = \frac{\pi}{180}$. Везде принимать $\pi = 3{,}14$ и производить соответствующие расчеты. **11.3.23.** 0,82. **11.3.24.** 3,037.
11.3.25. $-0{,}03$. **11.3.27.** 108,972. **11.3.28.** 1,054.
11.3.29. $dz = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2dx + 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)dy$.
11.3.30. $dv = \frac{t}{u^2+t^2}du - \frac{u}{u^2+t^2}dt$.
11.3.31. $dz = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dy$.
11.3.32. $dz = \dfrac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}dx - \dfrac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}dy$.

11.3.33. $dz = \frac{\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,du + \frac{v\,dv}{2\sqrt{u^2+v^2+u\sqrt{u^2+v^2}}}$.

11.3.34. $dz = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

11.3.35. $dz = -\frac{xy\sqrt{2}\,dx - x^2\sqrt{2}\,dy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$.

11.3.36. $dz = \left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}\right)dx -$

$-\left(\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}\right)dy$.

11.3.37. $dz = 2\cdot\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}(x\,dx+y\,dy)$.

11.3.38. $du = (3x^2+3y-1)\,dx + (z^2+3x)\,dy + (2yz+1)\,dz$.

11.3.39. $du = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}dx + \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x\,dy - \frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x\,dz$.

11.3.40. $dz = y^z x^{y^z-1}dx + zy^{z-1}x^{y^z}\ln x\,dy + y^z x^{y^z}\ln x\ln y\,dz$. **11.3.41.** $\frac{3}{2}$.

11.3.42. $-\frac{13}{22}$. **11.3.43.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.3.44.** 0,08. **11.3.45.** 0,25e. **11.3.46.** $\approx 7{,}5$.

11.3.47. 2,95. **11.3.48.** 0,345. **11.3.49.** 0,75. **11.3.50.** 257,408.

11.3.51. Уменьшится на $\approx 15{,}7$ см^3. *Указание.* $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $\Delta V \approx dV = \frac{1}{3}\pi(2RH\Delta R + R^2\Delta H) \approx -5\pi$ (см^3). **11.3.52.** Уменьшится на 0,32 см. **11.3.53.** 4370 ± 100 см^3.

§ 4. Дифференцирование сложных и неявных функций. Касательная и нормаль к поверхности

11.4.4. $\frac{dz}{dt} = a(2x+y)\cos t - a(2y+x)\sin t$.

11.4.5. $-\sin\left(2t + \frac{4}{t^2} - \frac{\sqrt{t}}{\ln t}\right)\left(2 - \frac{8}{t^3} - \frac{\ln t - 2}{2\sqrt{t}\ln^2 t}\right)$.

11.4.6. $\frac{dz}{dt} = 2xy^3u + 6x^2y^2ut + x^2y^3\cos t$ или $\frac{dz}{dt} = t^7(8\sin t + t\cos t)$.

11.4.7. $\frac{dz}{dt} = 0$.

11.4.8. $\left(y\,\mathrm{arctg}\,xy + \frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)\cdot 2t + \left(y\,\mathrm{arctg}\,xy + \frac{x^2y}{1+x^2y^2}\right)\cdot 3t^2$.

11.4.9. $2e^{2x-3y}\frac{1}{\cos^2 t} - 3e^{2x-3y}(2t-1)$. **11.4.10.** $yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y\ln x\cos t$.

11.4.14. $dz = 3u^2\left(v^3 + \frac{1}{v^3}\right)du + u^3\left(3v^2 - \frac{3}{v^4}\right)dv$.

11.4.15. $dz = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}vu^{v-1} - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln v\right)du +$

$+\left(\frac{xu^v}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln u - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{u}{v}\right)dv.$

11.4.16. $dz = -\left(ye^v + x\frac{v}{u}\right)\sin xy\,du - (ye^v + x\ln u)\sin xy\,dv.$

11.4.17. $dz = \frac{1}{1+x^2y^2}\left[\left(\frac{yu}{\sqrt{u^2+v^2}}+x\right)du + \left(\frac{yv}{\sqrt{u^2+v^2}}-x\right)dv\right].$

11.4.18. $dz = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\left[\frac{2du}{\sin 2v} + \left(\frac{1}{\cos^2 v} - \frac{1}{\sin^2 v}\right)u\,dv\right].$

11.4.19. $dz = \frac{1}{7(x^2+3y^5)}\left[(2x\cos v + 15y^4\sin v)\,du + (-2xu\sin v + 15y^4u\cos v)\,dv\right].$

11.4.22. $y' = \dfrac{e^{2y} - \frac{y}{x}}{\ln x - 2xe^{2y}}$. **11.4.23.** $y' = \frac{26-18xe^{-y}}{e^y - 9x^2e^{-y}}$. **11.4.24.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

11.4.25. $y' = \frac{y}{x}\cdot\frac{y^2-2x^2\ln y}{x^2-2y^2\ln x}$. **11.4.26.** $y' = -\frac{y}{x}$. **11.4.28.** (t): $11x+2y-24=0$, (n): $2x-11y+7=0$. **11.4.29.** (t): $7x-y-13=0$, (n): $x+7y-9=0$. **11.4.35.** $dz = \frac{yz\,dx + xz\,dy}{z^2-xy}$. **11.4.36.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1}$.

11.4.37. $z'_x = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}$, $z'_y = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$. **11.4.38.** $x+4y+6z=\pm 21$.

11.4.39. $\pm x \pm y \pm z = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **11.4.40.** В точках $(1;1;0)$ и $(1;-1;0)$ касательные плоскости параллельны плоскости Oxz, в точках $(0;0;0)$ и $(2;0;0)$ касательные плоскости параллельны Oyz, а касательных плоскостей, параллельных Oxy, нет. **11.4.42.** $\frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$

11.4.43. $dz = 2(4x^3-8xy^2) + (4y^3-8x^2y)e^{2t}\,dt.$

11.4.44. $dz = \left[\left(y+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{\cos^2 t} + \left(x - \frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{t}\right]dt.$

11.4.45. $dz = \left(\frac{1}{y^2}\frac{2}{1+4t^2} - \frac{2x}{y^3\sqrt{1-t^2}}\right)dt.$

11.4.46. $dz = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\left(2ty5^{t^2}\cdot\ln 2 + \frac{2x}{\sqrt{1-4t^2}}\right)dt.$

11.4.47. $dz = \left[-3\frac{\sin(x+y)+x\cos(x+y)}{t^4} + 2x(t-1)\cos(y+x)\right]dt.$

11.4.48. $dz = \left(-\frac{2x\sin x^2}{y(t+2)} - \frac{\cos x^2}{y^2}\frac{1}{\cos^2 t}\right)dt.$

11.4.49. $dz = \left(-\frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}\sin 2t - 2\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}\cos 2t\right)dt$. **11.4.56.** Да.

11.4.57. Нет. **11.4.58.** Да. **11.4.59.** Нет. **11.4.60.** Нет. $M_0(-1;1)$ не лежит на линии. **11.4.61.** Да. **11.4.62.** $y = \pm\sqrt{3x^2 \pm \sqrt{9x^4 - \operatorname{arctg} 2x}}$.

11.4.63. $y = \sqrt[3]{x + \ln(20x+18x^3+1)}$. **11.4.64.** $y = \pm\sqrt[4]{\operatorname{arctg}(3x^2+17) - x^2}$.

11.4.65. $y = \frac{3+\sqrt{9+16x^4} \pm \sqrt{(3+\sqrt{9+16x^4})^2+16x^4}}{4x^2},$

$y = \dfrac{3-\sqrt{9+16x^4} \pm \sqrt{(3-\sqrt{9+16x^4})^2+16x^4}}{4x^2}$. **11.4.66.** В окрестности $x_0 = 1$ уравнение определяет две однозначные неявные функции, так как при $x_0 = 1$ уравнение допускает два корня $y = 2$ и $y = 0$. Касательная через $(1;0)$: $y = -\frac{10}{3}(x-1)$, через $(1;2)$: $y - 2 = -\frac{10}{13}(x-1)$. В окрестности $y = 2$ уравнение допускает также две однозначные неявные функции, ибо при $y = 2$ уравнение име-

ет два корня $x = 1$ и $x = 20$. **11.4.67.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2u\left(\frac{ux}{v} - \frac{y\ln v}{x^2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2u\left(\frac{\ln v}{x} - \frac{uy}{v}\right)$.

11.4.68. $dz = \left(2xf'_v(u;v) - \frac{2y}{(x+y)^2}f'_u(u;v)\right)dx + \left(\frac{2x}{(x+y)^2}f'_u(u;v) - 3f'_v(u;v)\right)dy$.

11.4.69. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-y^2}f'_u(u;v) + y^2 f'_v(u;v)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\, f'_v(u;v) - \frac{2y}{x^2-y^2}f'_u(u;v)$.

11.4.70. $dz = \left[(2uv - v^2)\sin y - (u^2 - 2uv)y\sin x\right]dx +$
$+\left[(2uv - v^2)x\cos y + (u^2 - 2uv)\cos x\right]dy$.

11.4.71. $dz = \left(5x^4 f'_v(u;v) - yf'_u(u;v)\sin xy\right)dx - \left(x\sin xy f'_u(u;v) + 7f'_v(u;v)\right)dy$.

11.4.72. $dz = \frac{1}{y^2}\left(\cos\frac{x}{y}f'_u(u;v) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}f'_v(u;v)\right)(y\,dx - x\,dy)$.

11.4.73. $dz = \frac{x\,dx}{z} - \frac{y\,dy}{z}$. *Указание.* Из данных условий нужно исключить u и v: $u = \sqrt{x+y}$, $v = \sqrt{x-y}$. Тогда $z = \sqrt{x^2-y^2}$,
$dz = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x\,dx - y\,dy}{z}$. **11.4.74.** $dz = \frac{x\,dx}{a} + \frac{y\,dy}{a}$.
11.4.75. $dz = \sqrt{z}(x\,dx - y\,dy)$. **11.4.76.** $dz = 2(x\,dx + y\,dy)$.
11.4.77. $dz = 2(x\,dx + y\,dy)$.

§ 5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

11.5.7. $-\sin x\sin y\,dx^2 + 2\cos x\cos y\,dx\,dy - \sin x\sin y\,dy^2$. **11.5.8.** $24x + 6y$.
11.5.9. $-\sin(x+y)$. **11.5.10.** $-\frac{4\cos 2(x+y)}{\sin^2 2(x+y)}$. **11.5.11.** 0. **11.5.12.** $\frac{x(x+2y)}{(x+y)^2}$.
11.5.13. $y(2-y^2)\cos xy - xy^2\sin xy$. **11.5.14.** $\sin y\cos(x+\cos y)$.
11.5.15. $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}(dx^2 - dy^2) - 4xy\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$. **11.5.16.** $-\cos(x+y)(dx+dy)^2$.
11.5.17. $dz = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy$, $d^2z = 2y\,dx^2 + 4(x-y)dx\,dy - 2x\,dy^2$.
11.5.18. $dz = \left(y + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(x - \frac{1}{x}\right)dy$, $d^2z = -\frac{2y}{x^3}dx^2 + 2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx\,dy$.
11.5.19. $dz = 6(x^2+y^2)^2(x\,dx + y\,dy)$,
$d^2z = 6(x^2+y^2)[(5x^2+y^2)dx^2 + 4xy\,dx\,dy + (x^2+5y^2)dy^2]$.
11.5.20. $dz = (\sin x)^{\cos y}(\cos y\,\mathrm{ctg} x\,dx - \sin y\ln\sin x\,dy)$,
$d^2z = \cos x(\sin x)^{\cos y}[(\cos y - 1)\,\mathrm{ctg}^2 x - 1]\,dx^2 -$
$-2\sin y\,\mathrm{ctg}\,x(\sin x)^{\cos y}(1 + \cos y\ln\sin x)dx\,dy +$

$+(\sin x)^{\cos y}\ln\sin x\,(\sin y\cdot\ln\sin x-\cos y)dy^2$. **11.5.21.** $dz=dx-3\cos y$, $d^2z=3\sin y\,dy^2$. **11.5.22.** $dz=\dfrac{2x\,dx+dy}{2(x^2+y)}$,

$d^2z=\dfrac{(2y-2x^2)\,dx^2-4x\,dx\,dy-dy^2}{2(x^2+y)^2}$. **11.5.25.** $y'=0$, $y''=y'''=-\frac{2}{3}$.

11.5.26. $d^2z=-\dfrac{6}{25}\,dx^2$. **11.5.27.** $d^2z=-dx^2+2\,dx\,dy$. **11.5.28.** $y'(2)=-2$, $y''(2)=-5$. *Указание.* Из $2x+2yy'+\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=0$ с учетом $x^2+y^2\neq 0$ легко получить $y'=-\dfrac{x}{y}$, или $x+yy'=0$. **11.5.29.** $y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$, $y''=-\dfrac{18}{(x+2y)^3}$, $y'''=-\dfrac{162x}{(x+2y)^5}$. **11.5.30.** $y'=\dfrac{y^2}{x^2}\dfrac{1-\ln x}{1-\ln y}$,

$y''=\dfrac{y^2[y(1-\ln x)^2-2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^2}$.

11.5.32. $y'=-\dfrac{y}{x}$, $y''=\dfrac{2y}{x^2}$. **11.5.33.** $y'=-1$, $y''=0$. **11.5.34.** $y'=-\dfrac{y}{x}$, $y''=\dfrac{2y}{x^2}$. **11.5.37.** $dz=-\dfrac{c^2}{z}\left(\dfrac{x\,dx}{a^2}+\dfrac{y\,dy}{b^2}\right)$,

$d^2z=-\dfrac{c^4}{z^3}\left[\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\dfrac{dx^2}{a^2}+\dfrac{2xy}{a^2b^2}dx\,dy+\left(\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\dfrac{dy^2}{b^2}\right]$.

11.5.38. $dz=-\dfrac{(1-yz)\,dx+(1-xz)\,dy}{1-xy}$,

$d^2z=-2\dfrac{y(1-zy)\,dx^2+[x+y-z(1+xy)]\,dx\,dy+x(1-xz)\,dy^2}{(1-xy)^2}$.

11.5.39. $dz=\dfrac{z(y\,dx+z\,dy)}{y(x+z)}$, $d^2z=-\dfrac{z^2(y\,dx-x\,dy)^2}{y^2(x+z)^3}$.

11.5.40. $dz=dx-\dfrac{(x-z)\,dy}{(x-z)^2+y(y+1)}$, $d^2z=\dfrac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}\,dy^2$.

11.5.41. $ae^y\big(e^y\sin(ax+e^y)-\cos(ax+e^y)\big)$. **11.5.42.** 4. **11.5.43.** 0.

11.5.44. $-6(\cos x+\cos y)$. **11.5.45.** $e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$.

11.5.46. $-\dfrac{6}{r^4}+\dfrac{48(x-u)^2(y-v)^2}{r^8}$, где $r=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$. **11.5.47.** $p!\cdot q!$.

11.5.48. $\dfrac{2(-1)^m(m+n-1)!\cdot(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$.

11.5.49. $e^{x+y}\big[x^2+y^2+2(mx+ny)+m(m-1)+n(n-1)\big]$. **11.5.50.** 0.

11.5.51. $\dfrac{-9!(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}$. **11.5.52.** $2\dfrac{dx^4}{x^3}+\dfrac{dy^4}{y^3}+\dfrac{dz^4}{z^3}$.

11.5.53. $e^{ax+by}(a\,dx+b\,dy)^n$. **11.5.54.** $e^{ax+by+cz}(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^n$.

11.5.56. $\left(\dfrac{y}{x}\right)^x\left[\left(\ln\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^x\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]dx^2+$

$+2\left(\dfrac{y}{x}\right)^{x-1}\left(\ln\dfrac{y}{x}-\dfrac{x-1}{x}\right)dx\,dy+\dfrac{x-1}{x}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{x-2}dy^2$.

11.5.57. $\dfrac{2y\left(2x\sin\frac{2y}{x}-y\cos\frac{2y}{x}\right)dx^2+4x\left(2y\cos\frac{2y}{x}-x\sin\frac{2y}{x}\right)dx\,dy-4x^2\cos\frac{2y}{x}\,dy^2}{x^4\sin^2\frac{2y}{x}}$.

11.5.58. $e^{xy}\left[(1+xy)\,dx^2+2\left(\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y^2}\right)dx\,dy+\left(x^2-\frac{2x}{y}+\frac{2}{y^2}\right)\frac{x}{y}\,dy^2\right]$.

11.5.59. $z'_x=4x^3+9x^2y-8xy^2-5y^3$, $z'_y=3x^3-8x^2y+15xy^2-4y^3$, $z''_{x^2}=12x^2+18xy-8y^2$, $z''_{xy}=9x^2-16xy+15y^2$, $z''_{y^2}=-8x^2+30xy-12y^2$, $z'''_{x^2y}=18x-16y$, $z'''_{xyz}=18x-16y$, $z'''_{xy^2}=-16x+30y$. **11.5.60.** $z''_{x^2}=y^2e^{xy}$, $z''_{xy}=e^{xy}(xy+1)$, $z''_{y^2}=x^2e^{xy}$. **11.5.61.** $(1-x^2y^2z^2)\cos xyz-3xyz\sin xyz$.

11.5.64. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$.

11.5.65. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial z}{\partial u}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial z}{\partial u}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u}$.

11.5.66. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$. **11.5.68.** $\sin(x+2y^3)\,dx^3+12y\sin(x+2y^2)\,dx^2\,dy+$
$+[48y^2\sin(x+2y^2)-12\cos(x+2y^2)]\,dx\,dy^2+$
$+[64y^3\sin(x+2y^2)-48y\cos(x+2y^2)]\,dy^3$.

§ 6. Производная по направлению. Градиент

11.6.5. Линия уровня, проходящая через A, — это окружность $x^2+y^2=2$, $\overrightarrow{\text{grad}}\,z(1;1)=(-2;-2)$. Вектор направлен к центру окружности, т. е. по радиусу. **11.6.6.** Линия уровня — это прямая, проходящая через начало координат $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}c$ $(x\neq 0)$, $\overrightarrow{\text{grad}}\,z=\left(-\frac{y}{x^2+y^2};\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $\overrightarrow{\text{grad}}\,z(1;1)=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{\text{grad}}\,z(1;-1)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **11.6.7.** $\overrightarrow{\text{grad}}\,z(4;2)=(2;4)$.

11.6.8. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **11.6.10.** $\overrightarrow{\text{grad}}\,z=(2;2;2)$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}=2+\sqrt{2}$. **11.6.11.** $\overrightarrow{\text{grad}}\,u=(\pm 4;0;0)$.

§ 7. Экстремум функции двух переменных

11.7.2. $2(x-1)^3+(x-1)^2(y+2)-4(x-1)(y+2)^2$.

11.7.3. $1+(x+1)+2(y+1)+(x+1)^2-3(x+1)(y+1)+2(y+1)^2$. **11.7.5.** 2,86.

11.7.6. 0,503. **11.7.8.** $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ — стационарная точка, удовлетворяющая условию минимума, $f_{\min}(x;y)=f\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right)=\frac{10}{3}$. **11.7.9.** Функция имеет

максимум в точке $M(-5;-1)$, $f_{\max} = f(-5;-1) = 1$. **11.7.11.** $f_{\max}$ — см. задачу 11.7.10; $f_{\min}(x;y) = f\left(\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right) = -3$. **11.7.12.** $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$ — точка минимума; $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ — точка максимума; $f_{\min} = -f_{\max} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

11.7.14. $M_1\left(-\frac{1+\sqrt{6}}{3};\frac{2}{3}\right)$ — точка минимума с $z_{\min} = \frac{4+\sqrt{6}}{6}$, $M_2\left(\frac{\sqrt{6}-1}{3};\frac{2}{3}\right)$ — точка максимума с $z_{\max} = \frac{4-\sqrt{6}}{6}$. **11.7.15.** $(-2;3)$ — точка минимума, $\left(\frac{16}{3};0\right)$ — точка максимума.

11.7.17. $\max\limits_{D} f(x;y) = f(\pm4;0) = 16$, $\min\limits_{D} f(x;y) = f(0;0) = 0$, $f_{\min}(x;y) = f\left(\pm\frac{36}{25};\pm\frac{48}{25}\right) = \frac{144}{25}$. **11.7.18.** $z_{\min} = 5$, $z_{\max} = 12$.

11.7.19. $z_{\min} = -2(\sqrt{2}+1)$, $z_{\max} = 2(\sqrt{2}-1)$. **11.7.21.** $y = 2{,}08x - 0{,}5$.
11.7.22. $y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}$. **11.7.23.** $M_1(1;-4)$ — точка максимума с $f_{\max}(1;-4) = -14$. **11.7.24.** $M(3;6)$ не является точкой экстремума.
11.7.25. $M\left(\frac{94}{23};\frac{109}{23}\right)$ — точка минимума. **11.7.26.** $M_1(1;0)$, $M_2(1;-3)$ — стационарные, не экстремальные. **11.7.27.** $M_1(0;0)$ — не экстремальная. $M_2(6;6)$ — точка минимума. $f_{\min} = f(6;6) = -422$. **11.7.28.** $M_1(1;1)$ — точка минимума, $z_{\min} = -82$; $M_2(-1;-1)$ — точка максимума, $z_{\max} = 82$; $M_3\left(-\frac{3}{\sqrt{14}};-\frac{\sqrt{14}}{3}\right)$ и $M_4\left(\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{\sqrt{14}}{3}\right)$ — не экстремальные.
11.7.29. $z_{\min}(\sqrt{2};-\sqrt{2}) = z_{\min}(-\sqrt{2};\sqrt{2}) = -8$, $M(0;0)$ — требует дополнительного исследования. **11.7.30.** $z_{\max}(6;4) = 6912$.
11.7.31. $z_{\min}(5;6) = -86$. **11.7.32.** $z_{\max} = z(0;-5) = 41$, $z_{\min} = z(-2;-1) = -3$.
11.7.33. $z_{\min}(3;-2) = -11$, $z_{\max}(1;2) = 9$. **11.7.34.** Минимум в точке $(-6;6\sqrt{3})$. **11.7.35.** В точке $(1;-1)$ максимум $z = 6$ или минимум $z = -2$ (уравнение определяет две однозначные функции). **11.7.36.** $z(-1;2) = -2$ или $z(-1;2) = 2$. **11.7.37.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ — точка максимума. **11.7.38.** $(a;a)$ — точка минимума. **11.7.39.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — точки максимума, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — точки минимума.
11.7.40. $z_{\max} = z\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right) = 11$, $z_{\min} = z\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right) = 1$. **11.7.41.** Куб.
11.7.42. $\sqrt[3]{2V} \times \sqrt[3]{2V} \times \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **11.7.43.** Куб. **11.7.44.** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
11.7.45. Размеры параллелепипеда: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$, где a, b, c — соответственные полуоси эллипсоида. **11.7.46.** $f_{\max} = \frac{R^6}{27}$.

❏

По вопросам оптовых закупок обращаться:
тел./факс: (495) 785-15-30, e-mail: trade@airis.ru
Адрес: Москва, пр. Мира, 104

Наш сайт: www.airis.ru

Вы можете приобрести наши книги
с 11^{00} до 17^{30}, кроме субботы, воскресенья,
в киоске по адресу: пр. Мира, д. 106, тел.: (495) 785-15-30

Адрес редакции: 129626, Москва, а/я 66

Издательство «АЙРИС-пресс» приглашает к сотрудничеству
авторов образовательной и развивающей литературы.
По всем вопросам обращаться
по тел.: (495) 785-15-33, e-mail: editor@airis.ru

Учебное издание

Лунгу Константин Никитович
Письменный Дмитрий Трофимович
Федин Сергей Николаевич
Шевченко Юрий Алексеевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
1 курс

Ведущий редактор *В. В. Черноруцкий*
Редакторы *Л. В. Абламская, Д. И. Рачинский*
Оформление *А. М. Драговой*
Иллюстрации *А. Ю. Терская, Е. Г. Иванов*
Технический редактор *С. С. Коломеец*
Верстка *К. Е. Панкратьев*
Корректоры *З. А. Тихонова, Ю. В. Сидорова*

Подписано в печать 28.11.07. Формат 60×90/16. Печать офсетная.
Печ. л. 36. Усл.-печ. л. 36. Тираж 8000 экз. Заказ № 2361.

ООО «Издательство «АЙРИС-пресс»
113184, Москва, ул. Б. Полянка, д. 50, стр. 3.

Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93
