Решение примеров образца контрольной работы по теме „Ряды“.

(1) $\frac{5n+3}{(n+3)(n+1)n}=\frac{A}{n+3}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n}$; $5n+3=A(n+1)n+B(n+3)n+C(n+3)(n+1)$; $n=-3;\ -12=6A;\ A=-2;\ n=-1;\ -2=-2B;\ B=1;$ $n=0;\ 3=3C;\ C=1$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\Big[\left(1+\frac12-\frac24\right)+\left(\frac12+\frac13-\frac25\right)+\left(\frac13+\frac14-\frac26\right)+\left(\frac14+\frac15-\frac27\right)+$$
$$+\left(\frac15+\frac16-\frac28\right)+\left(\frac16+\frac17-\frac29\right)+\left(\frac17+\frac18-\frac2{10}\right)+\dots+\left(\frac1n+\frac1{n+1}-\frac2{n+3}\right)\Big]=1+\frac12+\frac12+\frac13+\frac13=\frac83.$$

(2) Абсолютная сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln3n}$; $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\ln3x}=\ln|\ln3x|\Big|_1^{\infty}=\infty$ - расх.

Усл. сх-сть. а) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln3n}=0$; б) $\frac{1}{n\ln3n}>\frac{1}{(n+1)\ln(3n+3)}$ ⇒ сх-ся условно.

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{4^n(n^2+1)}{(x^2-6x+12)^n}\right|}=\frac{4}{|x^2-6x+12|}<1$ сх-ся абсолютно.

$x^2-6x+12>4;\ x^2-6x+8>0;\ x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=4;2;\ x\in(-\infty,2)\cup(4,\infty)$

$x^2-6x+12<-4;\ x^2-6x+16<0;\ D<0;\ \varnothing$

$x=2;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n^2+1)}{(4-12+12)^n};\ \lim_{n\to\infty}(n^2+1)=\infty$. Необходимый признак сходимости не выполняется ⇒ ряд расх-ся.

$x=4;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n^2+1)}{(16-24+12)^n}$; Ответ: $(-\infty,2)\cup(4,\infty)$ - область сх-сти.

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}2n(2n+1)x^{2n+2}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}2n(2n+1)x^{2n-1}=x^3S_1=S.$

$\int_0^x S_1dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n(2n+1)x^{2n}}{2n}=S_2$; $\int_0^x S_2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n+1}}{2n+1}=x+x^3+x^5+\dots=\frac{x}{1-x^2};\ |x|<1$

$S_2=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$; $S_1=\left(\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$; $S=x^3S_1=\frac{2x^4(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$, $|x|<1$

$S\left(\frac12\right)=\frac{\frac18\left(3+\frac14\right)}{\left(\frac34\right)^3}=\frac{52}{54}.$

(5) $y=2e^{\operatorname{arctg}z}=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}z+\frac{y''(0)}{2!}z^2+\frac{y'''(0)}{3!}z^3+\dots=$

$y(0)=2e^0=2;\ y'(0)=2e^{\operatorname{arctg}z}\frac{1}{1+z^2}\Big|_{z=0}=2;\ y''(0)=2\frac{e^{\operatorname{arctg}z}\frac{1+z^2}{1+z^2}-2ze^{\operatorname{arctg}z}}{(1+z^2)^2}\Big|_{z=0}=2;$

$=2+2z+\frac{2z^2}{2!}+\dots$

(6) Найдём коэфф-т C_4 при x^4 в разложении ф-ции в ряд Маклорена:

$\frac{27^3x}{\sqrt[3]{27+x}}=27^3x\left[(27+x)^{-\frac13}\right]=27^3x\left[27^{-\frac13}\left(1+\frac{x}{27}\right)^{-\frac13}\right]=\frac{27^3x}{3}\left(1+\frac{x}{27}\right)^{-\frac13}=$

$=\frac{27^3}{3}x\left(1-\frac13\frac{x}{27}+\frac{(-\frac13)(-\frac43)}{2!}\left(\frac{x}{27}\right)^3+\frac{(-\frac13)(-\frac43)(-\frac73)}{3!}\left(\frac{x}{27}\right)^3+\dots\right]\Rightarrow C_4=\frac{27^3}{3}\cdot\frac{(-\frac13)(-\frac43)\cdot(-\frac73)}{3!\,27^3}$;

Поскольку $C_4=\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$, то $f^{(4)}(0)=-\frac{27^3\cdot4\cdot7\cdot4!}{3!\,3\cdot27^3\cdot3^3}=-\frac{112}{81}\approx-1,3827$

(7) $\int_0^1\frac{1-\cos x^2}{x}dx=\int_0^1\frac{1-(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\dots)}{x}dx=\left(\frac{x^4}{2!\,4}-\frac{x^8}{4!\,8}+\frac{x^{12}}{6!\,12}-\dots\right)\Big|_0^1=$

$=\frac18-\frac1{192}+\frac{1}{8640}$ остаток $<0,001$ $\approx\frac18-\frac1{192}\approx0,1197\approx0,120$