МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

§ Погрешности результата численного решения задач

Этапы численного решения задач	Исследование объекта, математическая модель, алгоритм, программирование, проведение расчётов, анализ результата.

Неустранимые погрешности решения	• *Несоответствие математической модели изучаемому реальному явлению.* • *Погрешность исходных данных.*

Устранимые погрешности	• *Погрешность метода решения.* • *Погрешности округлений в арифметических и других действиях над числами.*

Определение абсолютной погрешности	Абсолютной погрешностью приближенного числа x называется абсолютная величина разности между этим числом и его точным значением a: $\|x-a\|$.

Определение предельной абсолютной погрешности	Предельная абсолютная погрешность $\Delta(x)$ приближённого числа x не меньше его абсолютной погрешности: $\|x-a\| \le \Delta(x)$

Определение относительной погрешности	Относительной погрешностью приближенного числа x называется отношение абсолютной погрешности к модулю этого числа: $\frac{\|x-a\|}{\|x\|}$. Любое число $\delta(x)$, удовлетворяющее неравенству $\frac{\|x-a\|}{\|x\|} \le \delta(x)$, называется предельной относительной погрешностью приближённого числа x.

Связь предельных погрешностей	Предельные абсолютная $\Delta(x)$ и относительная $\delta(x)$ погрешности связаны формулой: $\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{\|x\|}$.

Правила записи приближённых чисел	Точное значение числа a представляют его приближённым значением x и погрешностями так: $a = x \pm \Delta(x)$; $a = x(1 \pm \delta(x))$.

Определение значащих цифр числа	Значащими цифрами числа называют цифры в его записи, отсчитываемые с первой ненулевой слева.

Пример. Приближенное число 0,<u>38</u> имеет 2 значащих цифры, 0,<u>308</u> — три, 0,<u>3080</u> — четыре, 0,00<u>308</u> — три. Значащими цифрами являются подчёркнутые цифры.

Теорема о представлении положительного числа	Всякое положительное число x может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби следующим образом: $x = \alpha_1 10^n + \alpha_2 10^{n-1} + \alpha_3 10^{n-2} + \ldots + \alpha_k 10^{n-k+1} + \ldots,$ где цифры $\alpha_i = 0, 1, 2, \ldots, 9; \quad \alpha_1 \neq 0;$ $n, n-1, \ldots, n-k+1, \ldots$ – целые числа, называемые **разрядами** соответствующих цифр.

Определение ВЕРНЫХ значащих цифр числа	Значащая цифра α_k называется **верной в широком смысле,** если предельная абсолютная погрешность числа не превосходит ***одной единицы*** разряда, соответствующего этой цифре: $\Delta(x) \le 10^{n-k+1}$. В этом случае $\delta(x) \le \dfrac{1}{\alpha_1 10^{k-1}}$. Значащая цифра α_k называется **верной в узком смысле,** если предельная абсолютная погрешность числа не превосходит ***половины единицы*** разряда, соответствующего этой цифре: $\Delta(x) \le 0.5 \cdot 10^{n-k+1}$. В этом случае $\delta(x) \le \dfrac{1}{2(\alpha_1 + 1)10^{k-1}}$. В противном случае цифра считается **сомнительной**.

Правила округления (по дополнению)	**1.** Если первая отбрасываемая цифра больше 5, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу. Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последнюю оставляемую цифру не изменяют. **2.** Если первая отбрасываемая цифра 5 и среди остальных отбрасываемых цифр имеются ненулевые, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу. **3.** Если первая отбрасываемая цифра 5 и остальные отброшенные – нули, то последнюю оставляемую цифру сохраняют, если она чётная и увеличивают на единицу нечётную цифру.

Пример. Число $x = 413287{,}51$ имеет относительную погрешность $\delta(x) = 0.01$. Определить число верных значащих цифр k.

Правило записи числа в нормализованном виде	Если у приближённого положительного числа в его целой части значащих цифр больше, чем верных знаков, то используется запись этого числа в нормализованном виде $x = m \cdot 10^n$, при этом число ***m*** $\le$ ***1*** должно содержать только верные цифры. В нормализованной записи число ***m*** — **мантисса**, ***n*** — **порядок числа**.

Пример. Число $x = 413287{,}51$ имеет относительную погрешность $\delta(x) = 0.01$. Записать число в нормализованном виде.

Правила округления при арифметических действиях	**1. Сложение.** При сложении у остальных слагаемых оставляют на один или два десятичных знаков больше, чем у числа с наибольшей предельной абсолютной погрешностью $\Delta(x)$. В ответе оставляют такое же количество десятичных знаков, какое у числа с наибольшей предельной абсолютной погрешностью $\Delta(x)$ (у которого меньше десятичных знаков после запятой). **2. Вычитание.** При вычитании сначала числа одинаково округляют. В ответе оставляют число десятичных знаков того числа, у которого наибольшая предельная абсолютная погрешность $\Delta(x)$. **3. Умножение и деление.** При умножении и делении в ответе оставляют количество значащих цифр числа с наибольшей предельной относительной погрешностью $\delta(x)$ (у которого меньше значащих цифр).

Примеры. 1. Требуется найти сумму приближенных чисел, все знаки которых верны в широком смысле
130.6 + 0.255 +1.15225 + 41.84 +11.8216.
У числа 130.6 величина $\Delta(x)$ наибольшая, так как у него меньше десятичных знаков после запятой. Поэтому в ответе нужно оставить один десятичный знак после запятой. Тогда
$130.6 + 0.255 + 1.15225 + 41.84 + 11.8216 \approx 185.7$.
2. Найдем разность $153.21 - 81.329$.
Для числа 153.21 $\Delta(x)$ – наибольшая. Поэтому в ответе нужно оставить 2 десятичных знака после запятой. Округляя одинаково, получим $153.21 - 81.33 \approx 71.88$.

3. Найдем произведение $35.2 \cdot 1.748$. У числа 35.2 величина $\delta(x)$ больше, так как у него меньше число значащих цифр. Поэтому в ответе нужно оставить 3 значащие цифры. Тогда
$35.2 \cdot 1.748 \approx 61.5$.

Формулы вычисления погрешностей Функции	$u=u(x_1,x_2,...,x_n)\Rightarrow \Delta(u)\approx du=\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|\cdot\Delta(x_i);$ $\delta(u)=\sum_{i=1}^{n}\left\|x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\ln u\right\|\cdot\delta(x_i).$

Формулы вычисления погрешностей в арифметических операциях	**1.** $\Delta(x\pm y)=\Delta(x)+\Delta(y)$. **2.** $\Delta(xy)=\|y\|\Delta(x)+\|x\|\Delta(y)$. **3.** $\Delta(\frac{x}{y})=\frac{\|y\|\Delta(x)+\|x\|\Delta(y)}{\|y\|^2}$. **4.** $\delta(xy)=\delta(x)+\delta(y)$. **5.** $\delta(\frac{x}{y})=\delta(x)+\delta(y)$.

§ Интерполяция функций

<table>
<tr><td>Задача интерполяции</td><td>На отрезке [a, b] заданы упорядоченные n+1 точки и значения функции в этих точках, т. е. задана таблица значений функции $y=f(x)$:
<table>
<tr><td>$a=x_0$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>$\dots$</td><td>$x_n=b$</td></tr>
<tr><td>$f(x_0)$</td><td>$f(x_1)$</td><td>$f(x_2)$</td><td>$f(x_3)$</td><td>$\dots$</td><td>$f(x_n)$</td></tr>
</table>
Требуется найти значения этой функции для промежуточных значений аргумента, не совпадающих с приведенными в таблице.</td></tr>
</table>

Определение интерполяционной и интерполируемой функции	Функция $F(x)$, которая легко вычисляется и имеет ту же таблицу значений, что и $f(x)$, т. е. $F(x_i)=f(x_i)=y_i$; $i=0,1,...,n$, называется интерполяционной. Исходная функция $f(x)$ называется интерполируемой функцией. Значения аргумента в таблице называются узлами интерполяции.

Интерполяционная формула Лагранжа	$L_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1+\cdots$ $\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}y_k+\cdots$ $\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n=\sum_{i=0}^{n}y_i\prod_{j=0}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}.$

Погрешность интерполяционной формулы Лагранжа	Погрешность интерполяционной формулы Лагранжа приближённо можно оценить по формуле $\lvert R_n(x)\rvert \le M_{n+1}(a,\,b)\dfrac{\lvert (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\rvert}{(n+1)!}$, где $M_{n+1}(a,b)=\max\limits_{a\le x\le b}\lvert f^{(n+1)}(x)\rvert$.

Интерполяционная формула Ньютона для левой половины отрезка	$N_l(x)=y_0+q\cdot\Delta y_0+\dfrac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+\dfrac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$, где $q=\dfrac{x-x_0}{h}$, $\Delta y_0=y_1-y_0$, $\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0,\ldots$ – последовательные конечные разности функции y.

Погрешность интерполяционной формулы Ньютона	Погрешность интерполяционной формулы Ньютона приближённо можно оценить по формуле $R_n(x)=\dfrac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}q(q-1)\cdots(q-n)$.

Интерполяционная формула Ньютона для правой половины отрезка	$N_p(x)=y_n+q\cdot\Delta y_{n-1}+\dfrac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\ldots+\dfrac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$, где $q=\dfrac{x-x_n}{h}$, $\Delta y_{n-1}=y_n-y_{n-1}$, $\Delta^2 y_{n-2}=\Delta y_{n-1}-\Delta y_{n-2},\ldots$ – последовательные конечные разности функции y.

§ Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Постановка задачи	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ на отрезке $[a,\,b]$ при заданных начальных условиях $y(x_0)=y_0$.

Метод Эйлера	Для нахождения частного решения уравнения $y'=f(x,y)$ с заданной предельной абсолютной погрешностью Δ отрезок $[a,\,b]$ делят на n равных отрезков точками $x_i=x_0+ih$, где $h=\dfrac{b-a}{n}<\sqrt{\Delta},\ i=0,1,2,\ldots,n,\ x_0=a,\ x_n=b.$ Дифференциальное уравнение представляют в виде $y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,\,y_i)$.

Оценка погрешности метода Эйлера по правилу Рунге	Сравнивая значения искомой функции, полученные с шагом h и $2h$, вычисления заканчивают, если $\dfrac{\left\| y_{2i}^{(h)} - y_i^{(2h)} \right\|}{3} < \Delta.$

Метод Рунге-Кутта	Для нахождения частного решения уравнения $y' = f(x, y)$ с заданной предельной абсолютной погрешностью Δ отрезок $[a, b]$ делят на n равных частичных отрезков точками $x_{i+1} = x_i + h$, где $h = \dfrac{b-a}{n} < \sqrt[4]{\Delta},\quad i = 0,1,2,...,n-1,\quad x_0 = a,\quad x_n = b.$ Дифференциальное уравнение представляют в виде $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, где $\Delta y_i = \dfrac{1}{6}(q_1^{(i)} + 2q_2^{(i)} + 2q_3^{(i)} + q_4^{(i)}),$ $q_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i),\qquad q_2^{(i)} = h \cdot f(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{q_1^{(i)}}{2}),$ $q_3^{(i)} = h \cdot f(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{q_2^{(i)}}{2}),\qquad q_4^{(i)} = h \cdot f(x_{i+1}, y_i + q_3^{(i)}).$

Оценка погрешности метода Рунге-Кутта по правилу Рунге	Сравнивая значения искомой функции, полученные с шагом h и $2h$, вычисления заканчивают, если $\dfrac{\left\| y_{2i}^{(h)} - y_i^{(2h)} \right\|}{15} < \Delta.$