ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.К. Барышева, Ю.И. Галанов,

Е.Т. Ивлев, Е.Г. Пахомова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство ТПУ

Томск 2009

УДК 519.21(0.75,8)
ББК 22 171 Я73
Б24

Барышева В.К., Галанов Ю.И., Ивлев Е.Т., Пахомова Е.Г.
Б24 Теория вероятностей: Учебное пособие. — Томск: Изд–во ТПУ, 2009. — 131 с.

Пособие содержит решение типовых задач по основным разделам теории вероятностей, предусмотренных программой подготовки специалистов. Каждый раздел содержит краткое теоретическое введение, решение типовых задач, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самопроверки. Пособие предназначена для студентов второго курса, изучающих теорию вероятностей и для преподавателей, ведущих практические занятия по данному курсу. Электронная версия пособия может быть использована в системе дистанционного обучения.

УДК 519.21(0.75,8)
ББК 22 171 Я73

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук, доцент СГТИ
И.Л. Фаустова

Кандидат технических наук, доцент ТГУ
И.Г. Устинова

Введение

Теория вероятностей — раздел математики, в котором изучаются общие закономерности случайных явлений массового характера, обладающих статистической устойчивостью частот, независимо от их конкретной природы. Она разрабатывает методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные явления. Знание этих закономерностей позволяют предвидеть, как эти события будут протекать в реальном опыте.

Исторически первым полем приложения статистических методов анализа явились азартные игры.

Схемы азартных игр явились первыми четкими моделями случайных явлений (начало XVII века: Галилей, Паскаль, Ферма, Гюйгенс, Якова Бернулли).

В связи с серьезными потребностями естествознания (теория ошибок, теория стрельбы, статистика народонаселения) в XVIII веке создавался математический аппарат, развитие которого связано с именами Муавра, Лапласа, Гаусса, Пуассона.

Окончательно теория вероятностей как математическая наука оформилась в 30-х годах XX века, когда А. Н. Колмогоровым было предложено *аксиоматическое определение* вероятности.

Во второй половине XX века характерно проникновение статистических методов во все отрасли человеческих знаний. Это теоретическая физика, кибернетика, теория информации, теория массового обслуживания, теория надежности, математическая теория игр, теория операций и др.

Теория вероятностей, как прикладная наука, стала одним из надежных, точных и эффективных способов познания реальной действительности.

Структура пособия следующая. В начале каждого параграфа дается сжатое теоретическое введение, содержащее основные определения, формулировки главных теорем и необходимые формулы.

Затем приводится полное решение нескольких характерных задач и задачи для самостоятельного решения; большинство из них снабжены ответами.

Цель данного пособия:

- Дать студентам некоторые методические рекомендации, разъясняющие подход к решению задач.
- Активизировать самостоятельную работу студентов, предложив им контрольные вопросы и домашние задания.

Настоящие пособие рекомендуются в помощь студентам второго курса при изучении дисциплины «Теория вероятностей», а также преподавателям – при подготовке к практическим занятиям. Электронная версия пособия может быть использована в системе дистанционного обучения.

Глава 1.

Случайные события и их вероятности

1.1. Алгебра событий

1.1.1. Классификация событий

Под опытом (*экспериментом*, *испытанием*) будем понимать воспроизведение некоторого конкретного комплекса условий. Всякое испытание заканчивается одним и только одним из множества возможных исходов. Всякий исход опыта будем называть *событием*. Каждому исходу ставится в соответствие одно или несколько событий.

Опыт называется *случайным*, если его результат точно нельзя предсказать. Исходы случайного эксперимента — *случайные события*.

События будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C, D, ... Некоторые специальные события обозначают греческими буквами.

Различают *элементарные* и *составные* события. *Элементарное* в условиях данного опыта событие является результатом одного и только одного исхода. Все остальные события называются *составными*.

Примеры событий:

- Появление герба при бросании монетки.
- Попадание в цель при выстреле.
- Обнаружение объекта при одном цикле обзора радиолокационной станции.

- Обрыв нити в течение часа работы ткацкого станка.

Рассмотрим сначала два специальных события: *достоверное* и *невозможное*.

Событие называется *достоверным*, если оно происходит при любом исходе данного опыта, и обозначается Ω. Достоверное событие вызывается любым исходом данного опыта.

Событие называется *невозможным*, если оно не происходит ни при каком исходе данного опыта, и обозначается $\varnothing$.

Каждому событию A поставим в соответствие *противоположное* (дополнительное) событие, обозначается $\overline{A}$. По определению, событие $\overline{A}$ реализуется тогда и только тогда, когда событие A не происходит.

Возьмём, например, опыт: подбрасывание двух монет. Рассмотрим события: A — выпадение двух решек, B — выпадение двух или менее решек, C — выпадение трех решек, D —выпадение менее двух решек. Здесь A — случайное событие, B — достоверное событие, C — невозможное событие, A и D — противоположные события.

Два события называются *несовместными*, если их совместное осуществление — событие невозможное ни при каком исходе в данном опыте. Если события не являются несовместными, то они *совместны*.

Множество всех взаимоисключающих (*элементарных*) в условиях данного опыта событий $(\omega_1,\ \omega_2,\ldots,\omega_n)$ составляют *пространство элементарных событий*, которое обозначается символом Ω, а сами эти события называются точками этого пространства. Это множество составляет, в то же время, достоверное событие.

Говорят, что несколько событий в условиях данного опыта образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно произойдет одно и только одно из них.

1.1.2. Алгебра событий

Алгебра[1] событий строится по аналогии с алгеброй в теории множеств. Будем изображать пространство элементарных событий Ω в виде прямоугольника, а любое событие — в виде произвольной геометрической фигуры (схема Эйлера – Венна, см. рис. 1.1).

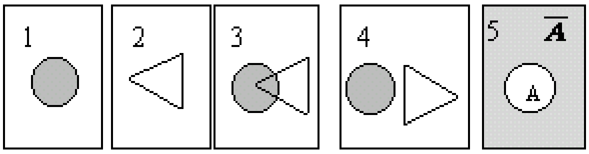


Рис. 1.1. Отношения между событиями A — 1 и B — 2: A и B совместны — 3; A и B несовместны — 4; событие A и ему противоположное — 5.

Случайное событие — это некоторая выделенная подгруппа элементарных событий, рассматриваемая как одно целое. Следовательно, случайное событие, в рамках данного случайного опыта, может иметь различные формы реализации[2]. В математической модели случайное событие A — это подмножество множества Ω: $A \subset \Omega$.

Для того чтобы математически выражать отношения между элементарными и составными (простыми или сложными) событиями достаточно ввести две основные операции: взятие противоположного события и одну из двух операций — сложение или умножение событий. Все другие операции выражаются через основные.

Событие C называется суммой событий A и B, обозначается $C = A + B$, если один и тот же исход испытания приводит к наступлению хотя бы одного из этих событий, то есть, событие C наступает, если в результате испытания наступает **или** одно событие A, **или** одно событие B, **или** оба события вместе.

Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, $C = A \cap B$), состоящее из всех элементарных событий,

[1] Алгебра — это множество элементов с операциями, установленными на данном множестве.
[2] Т.е. одно и то же событие может вызываться различными исходами данного опыта.

принадлежащих одновременно и событию A и событию B, т.е. когда в результате отдельного испытания происходят вместе и событие A, и событие B.

Введенные операции удобно изобразить на схеме Эйлера — Венна (1.2, 1.3), где результаты операций изображены в виде заштрихованных областей.

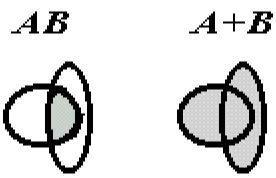


Рис. 1.2. Произведение и сумма совместных событий

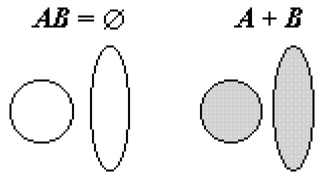


Рис. 1.3. Произведение и сумма несовместных событий

События называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементарных событий (эквивалентные, или равносильные события). Введенные операции над событиями обладают следующими свойствами:

$$\begin{array}{ll}
A + A = A & A \cdot A = A \\
A + B = B + A & (A + B) + C = A + (B + C) \\
A + \Omega = \Omega & A \cdot \Omega = A \\
AB = BA & A \cdot \varnothing = \varnothing \\
A(B + C) = AB + AC & (A + B)(A + C) = A + (BC) \\
A + \overline{A} = \Omega & A + \varnothing = A \\
\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} & \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}
\end{array}$$

Разностью событий A и B называется событие $C = A - B$ или ($C = A \backslash B = A \cdot \overline{B}$), состоящее из элементарных событий, которые принадлежат A, но не принадлежат B, т.е. событие A происходит без события B.

Говорят, что событие A *влечет* событие B ($A \subset B$), если при совершении события A событие B обязательно произойдет (событие A содержится в B). (Рис. 1.4)

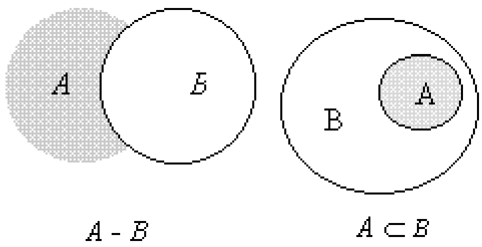


Рис. 1.4. Схема Эйлера–Венна для *разности* и *включения*

1.1.3. Решение задач

Задача 1. По каналу связи последовательно передано три знака. Описать пространство элементарных событий и события:

1. Принят только первый знак;
2. Принят, по крайней мере, один знак;
3. Принят два и только два знака;
4. Принят меньше двух знаков;
5. Принят один знак.

▼ **Решение.** Используем цифры 0, 1 для обозначения событий: 0 — знак искажен, 1 — знак принят. Тогда пространство элементарных событий запишется в виде

- Ω ={000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111} и имеет размерность восемь.
- Событие A_1 — принят только первый знак: $A_1 = \{100\}$;
- Событие A_2 — принят по крайней мере один знак:
- $A_2 = \{100 + 010 + 001 + 110 + 101 + 011 + 111\} = \Omega \backslash \{000\}$;
- Событие A_3 — приняты два и только два знака: $A_3 = \{110 + 011 + 101\}$;
- Событие A_4 — принято меньше двух знаков: $A_4 = \{000 + 100 + 010 + 001\}$;
- Событие A_5 — принят один знак: $A_5 = \{100 + 010 + 001\}$.

Из полученных результатов следует, что

1. События A_1 и A_3 — несовместные;
2. События A_4, A_3 — несовместные;
3. События A_3, A_5 — несовместные;
4. A_5 влечет A_4 ($A_5 \subset A_4$)
5. События A_1 и A_2 — совместны,
6. A_2 и A_3, A_1 и A_4, A_1 и A_5, A_2 и A_4 — совместные;
7. $A_1 \subset A_5 \subset A_4$; $A_3 \subset A_2$; $A_1 = A_5 + A_2$.

Изобразим эти события на схеме Эйлера–Венна (рис. 1.5).

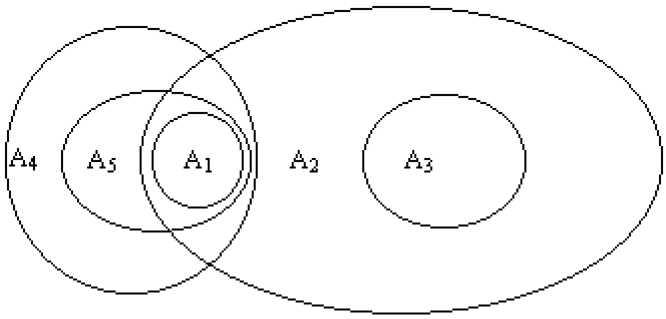


Рис. 1.5. К решению задачи 1

▲

Задача 2. Игральная кость брошена дважды.

1. Описать пространство элементарных событий Ω.
2. Описать пространство элементарных событий, если его элементами служат суммы выпавших очков.
3. Назвать элементы Ω, составляющие события:
   - A — сумма очков равна 7;
   - B — хотя бы на одной кости выпала 1;
   - C — сумма очков делится на 3.
4. Описать словами события:

- $D = \{(11), (12), (21)\}$;
- $E = \{(46), (55), (64)\}$.

5. Изобразить события A, B, C, D, E на диаграмме Эйлера–Венна.

▼ **Решение.**

1. $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, ..., 66\}$,
2. $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
3.
   - $A = \{16, 61, 34, 43, 25, 52\}$;
   - $B = \{11, 12, 21, 13, 31, 14, 41, 15, 51, 16, 61\}$
   - $C = \{12, 21, 36, 63, 45, 54, 33, 15, 51, 24, 42, 66\}$.
   - $D = \{$сумма очков равна 2 или 3 $\}$;
   - $E = \{$сумма очков равна 10$\}$.

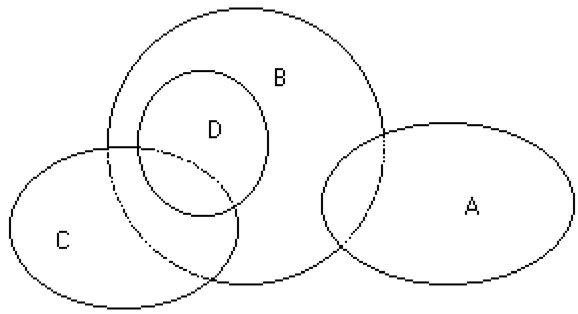


Рис. 1.6. Схема Эйлера — Венна к решению задачи 2

▲

Задача 3. Даны две электрические схемы:

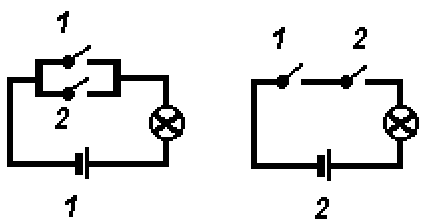


Рис. 1.7. К решению задачи 3

Описать событие: $C = \{$ЦЕПЬ ЗАМКНУТА$\}$ для каждого случая.

▼ **Решение.** Введем обозначения: событие A — контакт 1 замкнут; событие B — контакт 2 замкнут; событие C — цепь замкнута, лампочка горит.

1. Для параллельного соединения цепь замкнута, когда хотя бы один из контактов замкнут, поэтому $C = A + B$;

2. Для последовательного соединения цепь замкнута, когда замкнуты оба контакта, поэтому $C = A \cdot B$.

▲

Задача 4. Составлены две электрические схемы:

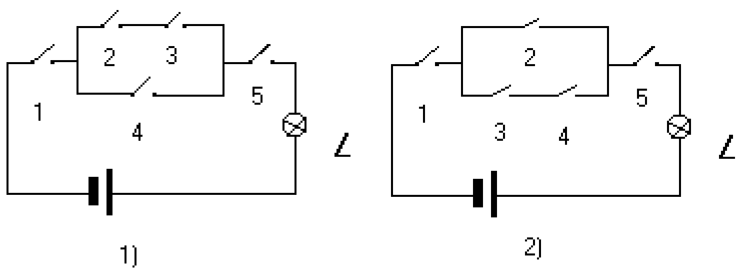


Рис. 1.8. К решению задачи 4

Событие A — цепь замкнута, событие А $_i$ — i–й контакт замкнут. Для какой из них справедливо соотношение

$$A_1 \cdot (A_2 + A_3 \cdot A_4) \cdot A_5 = A?$$

▼ **Решение.** Для первой схемы $A = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3 + A_4 \cdot A_5)$, так как параллельному соединению соответствует сумма событий, а последовательному соединению — произведение событий. Для второй схемы $A = A_1 \cdot (A_2 + A_3 \cdot A_4 \cdot A_5)$. Следовательно, данное соотношение справедливо для второй схемы. ▲

Задача 5. Упростить выражение $(A + B)(B + C)(C + A)$.

▼ **Решение.** Воспользуемся свойствами операций сложения и умножения событий.

$$\begin{aligned}(A+B)(B+C)(A+C) &= \\ (AB+AC+BB+BC)(A+C) &= \\ = (AB+AC+B+BC)(A+C) &= \\ (AB+AC+B)(A+C) = (B+AC)(A+C) &= \\ = BA+BC+ACA+ACC = BA+BC+AC&.\end{aligned}$$

▲

Задача 6. Доказать, что события $A, \overline{A}B$ и $\overline{A+B}$ образуют полную группу.

▼ **Решение.** При решении задачи воспользуемся свойствами операций над событиями. Вначале покажем, что эти события попарно несовместны.

$$A\cdot\left(\bar{A}B\right)=\left(A\bar{A}\right)B=\varnothing\cdot B=\varnothing$$

$$A\left(\overline{A+B}\right)=A\left(\bar{A}\cdot\bar{B}\right)=\left(A\bar{A}\right)B=\varnothing B=\varnothing$$

$$\bar{A}B\cdot\left(\overline{A+B}\right)=\bar{A}B\cdot\left(\bar{A}\bar{B}\right)=\bar{A}\bar{A}\left(B\bar{B}\right)=\bar{A}\varnothing=\varnothing$$

А теперь покажем, что сумма этих событий дает пространство элементарных событий.

$$A+\overline{A}B+\overline{A+B}=A+\overline{A}B+\overline{A}\cdot\overline{B}=$$
$$=A+\overline{A}(B+\overline{B})=A+\overline{A}\Omega=A+\overline{A}=\Omega$$

▲

Задача 7. С помощью схемы Эйлера–Венна проверить правило де-Моргана:

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}.$$

▼ **Решение.**

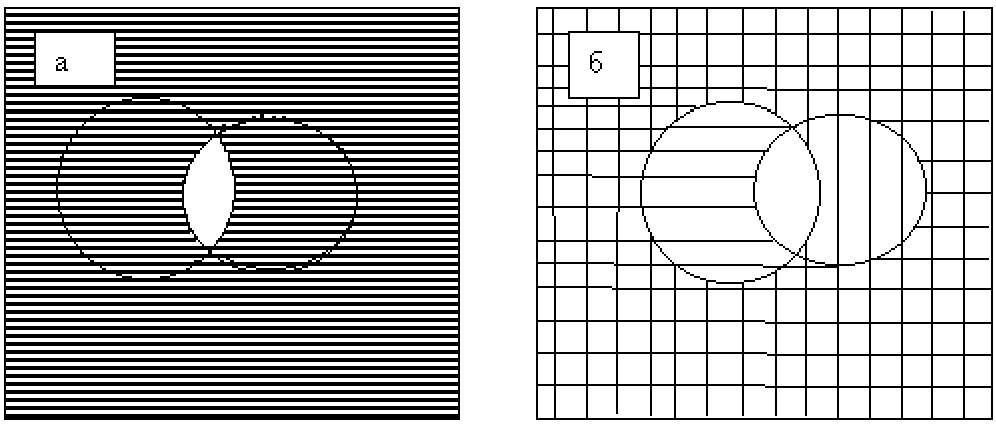


Рис. 1.9. К решению задачи 7

а) Заштриховано событие $\overline{AB}$.

б) Событие $\overline{A}$ — вертикальная штриховка; событие $\overline{B}$ — горизонтальная штриховка. Событие $\{\overline{A}+\overline{B}\}$ — область, имеющая хотя бы один вид штриховки.

Из сопоставления рисунков а) и в) следует:

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$$

▲

1.1.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. По радиоканалу передано 3 сообщения. События A_i — i-е сообщение искажено помехами. Описать события:

- E_1 — искажено только одно сообщение;
- E_2 — искажено хотя бы одно сообщение;
- E_3 — ни одно сообщение не искажено;
- E_4 — второе сообщение искажено;
- E_5 — первое и второе сообщения искажены.

Ответ:

- $E_1 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;
- $E_2 = \Omega \backslash \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;
- $E_3 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;
- $E_4 = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;
- $E_5 = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3}$.

Задача 2. При наличии трех патронов производится стрельба по цели до первого попадания. Описать пространство элементарных событий и события:

- E_1 — попадание при первых двух выстрелах;
- E_2 — произведено не более двух выстрелов;
- E_3 — израсходованы все патроны.

Ответ: $\Omega = \{$П, НП, ННП, ННН$\}; E_1 =$ НП$; E_2 =$ П+НП$; E_3 =$ ННН+ННП.

Задача 3. Среди студентов, собравшихся на лекцию, выбирают наудачу одного. Событие А — выбран юноша, В — он не курит, С — он живет в общежитии.

1. Описать событие $AB\overline{C}$;

2. При каком условии имеет место тождество $ABC = A$?

3. Когда справедливо соотношение $\overline{C} \subset B$?

Ответ:

1. Любой выбранный юноша не курит и не живет в общежитии;

2. Все юноши живут в общежитии и не курят;

3. Не живущие в общежитии юноши не курят.

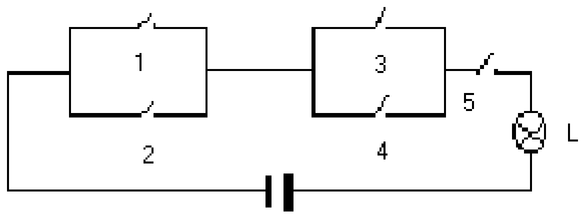
Задача 4. Упростить выражение $(\overline{A}+BC)(\overline{B}+AC)(\overline{C}+AB)$.

Ответ: $A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$.

Задача 5. Доказать, что $A + B = AB + A\overline{B} + B\overline{A}$. **Задача 6.** Изобразить на схеме Эйлера–Венна событие:

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}.$$

Задача 7. Составлена электрическая схема, где события A_i — i–й контакт замкнут.



Записать событие
$C =\{$ ЦЕПЬ ЗАМКНУТА — ЛАМПОЧКА ГОРИТ$\}$.

Ответ: $C = (A_1 + A_2)(A_3 + A_4) \cdot A_5$.

1.2. Вероятность события

Чтобы сравнивать события по степени возможности их наступления, вводится количественная характеристика, называемая вероятностью события.

Понятие вероятности события является в теории вероятностей первичным, не сводимым к другим понятиям. Имеется несколько подходов, поясняющих понятие вероятности.

1.2.1. Статистический подход к понятию вероятности

Пусть при проведении серии из n испытаний событие A наступило m раз $(m \leqslant n)$. Число $\dfrac{m}{n} = P^*(A)$ называется относительной частотой появления события A в данной серии испытаний. Если провести другую серию из n_1 опытов, то получим другое число $P^*_{n1}(A) = \dfrac{m_1}{n_1}$.

Если в различных сериях испытаний относительные частоты наступления события A незначительно отличаются друг от друга, то говорят, что частота обладает свойством устойчивости.

В качестве вероятности события A принимают число $P_A = P(A)$, к которому стремится определенным образом частота события при неограниченном увеличении числа испытания в серии.

Более строго это свойство описывается следующим образом:

$$\lim_{n_k \to \infty} P\left\{ \mid P^*_{n_k} - P(A) \mid < \varepsilon \right\} = 1, \ \forall \varepsilon > 0. \tag{1.1.}$$

Говорят, что частота события **сходится по вероятности к вероятности события**. Это свойство частоты мы докажем в разделе «Предельные теоремы теории вероятностей».

Замечание. Практическая польза от знания вероятности появления события состоит в следующем: зная вероятность p некоторого события, мы можем предсказать, что после проведении N испытаний в неизменных условиях ожидаемое число появлений регистрируемого события будет приблизительно равно $N \cdot p$.

1.2.2. Классическое определение вероятности

Классическими называют опыты (испытания), обладающие двумя существенными признаками:

1. число исходов данного опыта конечно;

2. все исходы равновозможны.

Об опыте, исходы которого образуют полную группу попарно несовместных, равновозможных событий, говорят, что он укладывается в классическую схему.

Равновозможные события, составляющие полную группу, называют случаями.

По отношению к каждому событию случаи делятся на благоприятные, при которых происходит событие, и неблагоприятные, при которых событие не происходит.

Вероятностью появления некоторого события A называется отношение числа случаев, благоприятствующих появлению этого события, к общему числу равновозможных в данном опыте случаев и обозначается

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.2.}$$

где

m — число исходов, благоприятствующих событию A,

n — общее число исходов опыта.

Это определение вероятности называется классическим. Достоинство определения – вероятность события можно определить до опыта. Недостаток – вероятность можно определить только для равновозможных исходов опыта.

1.2.3. Геометрическая вероятность

Классическое определение вероятности непосредственно применимо лишь к опытам, которые имеют конечное число равновозможных исходов.

Однако его можно распространить и на некоторые опыты, которые имеют бесконечное множество равновозможных исходов.

Это можно применять в задачах, сводящихся к случайному бросанию точки на конечный участок прямой, плоскости, трех- или многомерного пространства.

Если возможность появления точки внутри некоторой области в пространстве определяется не положением этой области и ее границами, а только ее мерой (мера обозначается как mes), т.е. длиной, площадью, объемом, то вероятность появления случайной точки внутри некоторой области находится как отношение меры этой области к мере всей области, в которой может появиться данная точка:

$$P\left(A\right)=\frac{mes\left(A\right)}{mes\left(\Omega\right)} \tag{1.3.}$$

или

$$P(A)=\frac{l_1}{l};\quad P(A)=\frac{S_1}{S};\quad P(A)=\frac{V_1}{V}, \tag{1.4.}$$

соответственно, для отрезка l прямой, области S на плоскости, области V трехмерного пространства. Это определение вероятности называется *геометрическим.* [3]

1.2.4. Аксиомы вероятности

В математической модели случайного эксперимента вероятность вводится как числовая функция, заданная на множестве событий, связанных с данным экспериментом. При этом вероятность события обладает всеми свойствами относительной частоты появления события. Эти свойства считаются аксиомами.

Аксиома 1.1. (Аксиома неотрицательности)

$$0\leqslant P(A)$$

для всех событий, определенных на Ω.

Аксиома 1.2. (Аксиома нормировки)

$$P(\Omega)=1$$

[3] Определение вероятности (1.3.) подходит и для классического случая, если за меру события принять число содержащихся в нем элементарных событий.

Аксиома 1.3. **(Аксиома сложения.)** *Если* $AB = \varnothing$, *то*

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Аксиома сложения распространяется на любое конечное семейство попарно непересекающихся событий:

Аксиома 1.4. **(Расширенная аксиома сложения)** .
Если события $A_1, \dots, A_n$ *попарно несовместны, то*

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Следующие свойства вероятности выводятся как следствия из данных аксиом:

1. $P(\varnothing) = 0$;
2. $P(A) \leqslant P(B)$ если $A \subseteq B$;
3. Если $\overline{A}$ — событие, противоположное событию A, то
$$P\left(\bar{A}\right) = 1 - P\left(A\right).$$

1.2.5. Элементы комбинаторики

При решении задач на классическую вероятность приходится подсчитывать число способов (*комбинаций*), с помощью которых может осуществиться некоторое событие (действие). Задачи такого рода называют *комбинаторными*. При подсчете числа комбинаций руководствуются принципами сложения и произведения комбинаций.

Принцип сложения комбинаций состоит в том, что если некоторое действие может осуществиться параллельно несколькими независимыми способами, то общее число способов осуществления этого действия равно числу таких способов.

Принцип произведения комбинаций заключается в следующем. Если какое-либо действие осуществляется за k последовательных шагов, при этом первый шаг может быть реализован n_1

числом способов, второй шаг n_2 числом способов, k-й шаг — n_k способами, то общее число способов реализации действия равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пусть мы имеем конечное множество элементов. Тогда из элементов данного множества можно составить различные соединения (комбинации, подмножества), отличающиеся либо своим составом, либо порядком взаимного расположения.

Перестановками из n элементов называют всевозможные упорядоченные соединения из данных элементов. Число таких перестановок P_n подсчитывается с помощью принципа произведения комбинаций: первый элемент в перестановке можно выбрать n числом способов, второй — $(n-1)$ числом, третий — $(n-2)$ числом и т.д.

Общее число комбинаций равно:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n! \qquad (1.5.)$$

Размещениями из n элементов по m называются всевозможные упорядоченные соединения (комбинации, подмножества) m элементов из n данных элементов. Число размещений A_n^m (от французского *arrangement* — размещение) подсчитывается по тому же принципу, что и число перестановок:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.6.)$$

Сочетанием из n элементов по m называется любое неупорядоченное подмножество m элементов из n. Число сочетаний C_n^m (от латинского *combinare* — соединить) подсчитывается следующим образом. Если во всех сочетаниях произвести всевозможные перестановки, то мы получим всевозможные размещения. Следовательно, имеет место формула

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!}. \qquad (1.7.)$$

Основное свойство сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \qquad (1.8.)$$

1.2.6. «Урновые» схемы случайных экспериментов

1.2.7. Решение задач

Задача 1. Сколькими способами можно рассадить 8 человек:

1. В один ряд?
2. За круглым столом?

▼ **Решение.**

1. Искомое число способов равно числу перестановок из 8, т.е.

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320.$$

2. Так как за круглым столом выбор первого человека не влияет на чередование элементов, то первым можно взять любого, а оставшихся упорядочим относительно выбранного. Это действие можно осуществить $\frac{8!}{8} = 5040$ способами.

▲

Задача 2. На курсе изучается 5 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на субботу, если в этот день должны быть две различные пары?

▼ **Решение.** Искомое число способов есть число размещений из 5 по 2, так как нужно учесть порядок пар: $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$. ▲

Задача 3. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 человек, можно составить из 15 преподавателей?

▼ **Решение.** Искомое число комиссий (без учета порядка) — это число сочетаний из 15 по 7:

$$C_{15}^7 = \frac{15!}{7! \cdot 8!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 6435.$$

▲

Задача 4. Из корзины, содержащей двадцать пронумерованных шаров выбирают наудачу 5 шаров. Определить число элементов пространства элементарных событий этого опыта, если:

1. Шары выбираются последовательно один за другим с возвращением после каждого извлечения;
2. Шары выбирают один за другим, не возвращая;
3. Выбирают сразу 5 шаров.

▼ **Решение.**

1. Число способов извлечь первый шар из корзины равно 20. Так как извлеченный шар вернулся в корзину, то число способов извлечь второй шар также равно 20 и т.д. Тогда число способов извлечь 5 шаров в этом случае равно $20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 3200000$.
2. Число способов извлечь первый шар из корзины равно 20. Так как извлеченный шар после извлечения не вернулся в корзину, то число способов извлечь второй шар стало равно 19 и т.д. Тогда число способов извлечь 5 шаров без возвращения равно $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = A_{20}^5$
3. Число способов извлечь из корзины 5 шаров сразу равно числу сочетаний из 20 по 5:
$$C_{20}^5 = \frac{A_{20}^5}{5!} = 15504.$$

▲

Задача 5. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна единица.

▼ **Решение.** На каждой кости может выпасть любое число очков от 1 до 6. Поэтому пространство элементарных событий содержит 36 равновозможных исходов. Событию A благоприятствуют 11 исходов: (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (1,5), (5,1), (1,6), (6,1), поэтому

$$P(A) = \frac{11}{36} \approx 0,3055.$$

▲

Задача 6. На красных карточках написаны буквы у, и, я, к, ц, ф, н, на синих — буквы а, а, о, т, т, с, ч. После тщательного перемешивания, что вероятнее: с первого раза из букв на красных карточках составить слово «функция» или из букв на синих карточках слово «частота»?

▼ **Решение.** Пусть событие A — наудачу составленное из 7 букв слово «функция», событие B — наудачу составленное из 7 букв слово «частота». Так как упорядочиваются два множества из 7 букв, то число всех исходов для событий A и B равно $n = 7!$. Событию A благоприятствует один исход $m = 1$, так как все буквы на красных карточках различны. Событию B благоприятствуют $m = 2! \cdot 2!$ исходов, так как буквы «а» и «т» встречаются дважды. Тогда $P(A) = \frac{1}{7!}$, $P(B) = \frac{2!2!}{7!}$, $P(B) > P(A)$. ▲

Задача 7. На экзамене студенту предлагается 30 билетов; в каждом билете два вопроса. Из 60 вопросов, вошедших в билеты, студент знает только 40. Найти вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять:

1. Из известных ему вопросов;

2. Из неизвестных ему вопросов;

3. Из одного известного и одного неизвестного вопроса.

▼ **Решение.** Пусть A — событие, состоящее в том, что на оба вопроса студент знает ответ; B — не знает ответа на оба вопроса; C — на один вопрос знает ответ, на другой — не знает. Выбор двух вопросов из 60 можно осуществить $n = C_{60}^2 = \frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$ способами.

1. Имеется $m = C_{40}^2 = \dfrac{40 \cdot 39}{2} = 780$ возможностей выбора известных студенту вопросов. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \dfrac{780}{1770} \cong 0.44$.
2. Выбор двух неизвестных вопросов из 20 можно осуществить $m = C_{20}^2 = \dfrac{20 \cdot 19}{2} = 190$ способами. В таком случае $P(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{190}{1770} \cong 0.11$.
3. Существует $m = C_{40}^1 \cdot C_{20}^1 = 40 \cdot 20 = 800$ способов выбрать билет с одним известным и одним неизвестным вопросом. Тогда $P(C) = \frac{800}{1770} \cong 0,45$.

▲

Задача 8. По трем идентичным каналам послана некоторая информация. Каналы работают независимо друг от друга. Найти вероятность того, что информация достигнет цели, если вероятности достижения и недостижения одинаковы:

1. Только по одному каналу;

2. Хотя бы по одному каналу.

▼ **Решение.** Пусть A — событие, состоящее в том, что информация достигает цели только по одному каналу; B — хотя бы по одному каналу. Опыт —

передача информации по трем каналам. Исход опыта — информация достигла цели.

Обозначим A_i — информация достигает цели по i-му каналу. Пространство элементарных событий имеет вид:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} A_1A_2A_3; \overline{A}_1A_2A_3; A_1\overline{A}_2A_3; A_1A_2\overline{A}_3; \\ \overline{A}_1\overline{A}_2A_3; \overline{A}_1A_2\overline{A}_3; A_1\overline{A}_2\overline{A}_3; \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 \end{array} \right\}.$$

Событию A благоприятствуют 3 исхода:

$$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3; \overline{A}_1A_2\overline{A}_3; A_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

Событию B благоприятствуют 7 исходов: все исходы, кроме $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Тогда $n = 8$; $m_A = 3$; $m_B = 7$; $P(A) = \frac{3}{8}$; $P(B) = \frac{7}{8}$. ▲

Задача 9. На отрезке единичной длины случайным образом появляется точка. Найти вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка больше 1/8.

▼ **Решение.** По условию задачи искомому событию удовлетворяют все точки, появляющиеся на интервале $(a; b)$.

Так как его длина $s = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$, а длина всего отрезка $S = 1$, то искомая вероятность равна

$$P = s/S = \frac{3/4}{1} = 0.75.$$

▲

Задача 10. В партии из n изделий k изделий являются бракованными. Для контроля выбирается m изделий. Найти вероятность того, что из m изделий l окажутся бракованными (событие А).

▼ **Решение.** Выбор m изделий из n можно осуществить C_n^m способами, а выбор l бракованных из k бракованных — C_k^l способами. После выбора l бракованных изделий останется $(m - l\ )$ годных, находящихся среди $(n - k)$ изделий. Тогда число исходов, благоприятствующих событию A, равно $C_k^l \cdot C_{n-k}^{m-l}$ и искомая вероятность $P(A) = \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$. ▲

1.2.8. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Решить уравнение: $A_{x+2}^2 = 42$.

Ответ: $x = 5$.

Задача 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 12, y = 5.$

Задача 3. На девяти карточках написаны буквы а, а, а, м, м, д, г, р, и. После тщательного перемешивания буквы разложены в ряд. Какова вероятность получения слова «диаграмма».

Ответ: $P = 0,00003.$

Задача 4. В марте 10 солнечных дней. Найти вероятность того, что

1. Первые два дня солнечные;

2. Первые два дня — разная погода.

Ответ: $P_1 = \frac{3}{31}$; $P_2 = \frac{14}{31}$.

Задача 5. 25 экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил только 45 вопросов. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет состоит из:

- подготовленных им вопросов;

- неподготовленных вопросов.

Ответ: $P_1 = 0,808 P_2 = 0,008.$

Задача 6. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Ответ: $P = \frac{1}{720}$.

Задача 7. Телефонная линия, соединяющая два узла связи A и B, отстоящих друг от друга на расстоянии 3 км, оборвалась в неизвестном месте. Найти вероятность того, что обрыв произошел не далее, чем в 500 метрах от пункта A.

Ответ: $P = 1/6$.

Задача 8. Интервал движения трамвая по заданному маршруту 10 мин. Описать пространство элементарных событий и случайное событие A — пассажир ждет трамвай не менее 2 и не более 5 минут. Найти $P(A)$.

Ответ: $\Omega = [0, 10], P(A) = 0,3$.

1.3. Сложение и умножение вероятностей

С вероятностной точки зрения, вероятность события дает полную исчерпывающую характеристику этого события. Если даны два случайных события A и B, то возникает вопрос их взаимосвязи. Если, например, событие B уже наступило, то в некоторых случаях это может дать дополнительную информацию о событии A, а поэтому изменить его вероятность, а в других случаях эта информация не оказывает никакого влияния на вероятность события A. События A и B называются зависимыми, если вероятность появления одного из них зависит от того, произошло другое или нет. В противном случае события называются независимыми. Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью* события A и обозначается $P(A \mid B)$.

1.3.1. Условная вероятность

Если в ходе испытания становится известно, что произошло событие B, то эта дополнительная информация приводит к изменению пространства элементарных событий так, что именно событие B теперь играет роль достоверного события. При этом условии вероятность события A будет определяться вероятностной мерой пересечения A и B.

$$P(A|B) = \frac{mes(AB)}{mes(B)} = \frac{mes(AB)/mes\,(\Omega)}{mes\,(B)\,/mes\,(\Omega)} = \frac{P\,(AB)}{P\,(B)}. \qquad (1.9.)$$

Уравнение (1.9.) удобно переписать в форме так, чтобы выразить вероятность произведения двух зависимых событий:

$$P\,(AB) = P\,(A)\,P\,(B|A) = P\,(B)\,P\,(A|B)\,. \tag{1.10.}$$

Теорема 1.3.1. Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое произошло.

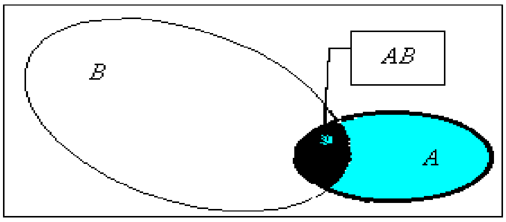


Рис. 1.10. К понятию условной вероятности

Следствие: все события на пространстве элементарных событий Ω для единичного эксперимента являются зависимыми.

Произведение большого числа событий удобно представить в виде упорядоченной последовательности событий $A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots,\ A_n$. Тогда можно рассматривать условные вероятности типа

$$P(A_n \mid A_1),\ \ P(A_n \mid A_1A_2), P(A_n \mid A_1A_2A_3), \ldots,$$
$$\ldots, P(A_n \mid A_1A_2 \cdots A_{n-1}),$$

и т. д., смысл которых ясен из определения условной вероятности. Например, для трех событий получим:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)$$

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)P(A_4 \mid A_1A_2A_3)$$

и т. д.

Теорема 1.3.2. (Произведения вероятностей). Если события A и B независимы, то

$$P(A \mid B) = P(A);\; P(B \mid A) = P(B) \text{ и } P(AB) = P(A)P(B).$$

Обобщение на случай n независимых событий $A_1,\ A_2,\ A_3,\ ...,\ A_n$:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

1.3.2. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Теорема 1.3.3. (Сложения вероятностей). Пусть A и B — совместные события. Тогда вероятность появления ***хотя бы одного из этих событий*** (т.е. вероятность суммы событий A и B) равна сумме вероятностей этих событий без вероятности произведения этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1.11.)$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий

$$\begin{gathered}P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \\ = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - P(A_1A_2) - \\ \cdots - P(A_1A_3) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) - P(A_1A_2A_3) - \\ - P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \cdots - P(A_1A_2 \cdots A_n). \qquad (1.12.)\end{gathered}$$

При вычислении вероятности суммы большого числа событий $A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$ часто бывает проще перейти к вычислению вероятности противоположного события. Для *независимых* событий получим формулу:

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n}) = \\ &= 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) = \qquad (1.13.) \\ &= 1 - P\left(\overline{A}_1\right) \cdot P\left(\overline{A}_2\right) \cdot P\left(\overline{A}_3\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\overline{A}_n\right).\end{aligned}$$

Или

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \cdots q_n, \qquad (1.14.)$$

где $q_i = 1 - P_i$.

Частный случай: если $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = P,\ 1 - P = q$, то

$$P(A) = 1 - q^n.$$

1.3.3. Решение задач

Задача 1. В урне 30 шаров: 15 красных, 10 синих и 5 белых. Найти вероятность того, что наугад вынутый шар — цветной.

▼ **Решение.** Пусть событие A — вынут красный шар, событие B — вынут синий шар. Тогда события $(A+B)$ — вынут цветной шар. Имеем $P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Так как события A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A)+P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \cong 0.83$. ▲

Задача 2. Вероятность того, что будет снег (событие A), равна 0.6, а того, что будет дождь (событие B), равна 0.45. Найти вероятность плохой погоды, если вероятность дождя со снегом (событие AB) равна 0.25.

▼ **Решение.** События A и B совместны, поэтому $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6 + 0.45 - 0.25 = 0.8$ ▲

Задача 3. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров, во втором — 3 белых и 9 черных шаров, в третьем — 6 белых и 6 черных шаров. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые.

▼ **Решение.** Событие A — вынут белый шар из первого ящика, B — из второго ящика, C – из третьего. Тогда $P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; $P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Событие ABC — все вынутые шары — белые. События A, B, C — независимые, поэтому $P(ABC) = P(A){\cdot}P(B){\cdot}P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48} \cong 0.02$. ▲

Задача 4. В электрическую цепь последовательно включены 5 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказов первого, второго, третьего, четвертого, пятого элементов соответственно равны 0.1; 0.2; 0.3; 0.2; 0.1. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет (событие A).

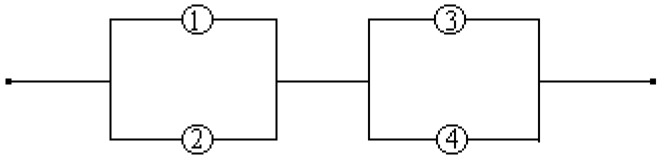
▼ **Решение.** Так как элементы включены последовательно, то тока в цепи не будет, если откажет хотя бы один элемент. Событие $A_i (i = 1\ldots5)$ — откажет i -й элемент. События A_i — независимые. Имеем $P(A_1) = 0.1; P(A_2) = 0.2;\ P(A_3) = 0.3; P(A_4) = 0.2;\ P(A_5) = 0.1.\ P(\overline{A}_1) = 0.9;\ P(\overline{A}_2) = 0.8;\ P(\overline{A}_3) = 0.7;\ P(\overline{A}_4) = 0.8;\ P(\overline{A}_5) = 0.9$.

Тогда

$$\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5) = \\
&= 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)\cdot P(\overline{A}_4)\cdot P(\overline{A}_5) = \\
&= 1 - 0.9\cdot 0.8\cdot 0.7\cdot 0.8\cdot 0.9 = \\
&= 1 - 0.9^2\cdot 0.8^2\cdot 0.7 = 1 - 0.36288 = 0.63712.
\end{aligned}$$

▲

Задача 5. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом.



Выход из строя за время T различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности: $P_1 = 0.1$; $P_2 = 0.2$; $P_3 = 0.3$; $P_4 = 0.4$. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Найти надежность системы.

▼ **Решение.** Если событие A — {система надежна}, A_i — {i- й блок работает безотказно}, то $A = (A_1 + A_2)(A_3 + A_4)$. События $A_1 + A_2,\ A_3 + A_4$ — независимые, события A_1 и $A_2,\ A_3$ и A_4 — совместные. По формулам умножения и сложения вероятностей

$$P(A) = P(A_1 + A_2)(A_3 + A_4) = P(A_1 + A_2)P(A_3 + A_4) =$$
$$= [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)\cdot[P(A_3) + P(A_4) - P(A_3A_4)].$$

Имеем $P(A_i) = 1 - P(\overline{A}_i) = 1 - P_i$, т.е. $P(A_1) = 0.9$; $P(A_2) = 0.8$; $P(A_3) = 0.7$; $P(A_4) = 0.6$; Тогда $P(A) = [0.9 + 0.8 - 0.9\cdot 0.8]\,[0.7 + 0.6 - 0.7\cdot 0.8] = 0.8624$ или $P(A) = (1 - P_1P_2)(1 - P_3P_4) = (1 - 0.1\cdot 0.9)(1 - 0.3\cdot 0.4) = 0.8624$. ▲

Задача 6. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0.9, для второго станка — 0.8, для третьего станка — 0.7.

Найти вероятность того, что в течение некоторого часа:

1. Потребует внимания второй станок;

2. Потребует внимания два станка;

3. Потребует внимания не менее двух станков.

▼ **Решение.** Пусть A_i — i-й станок потребует внимания рабочего, $\overline{A}_i$ — i-й станок не потребует внимания рабочего.

Тогда

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.9; \quad P(A_2) = 0.8; \quad P(A_3) = 0.7; \\ P(\overline{A}_1) &= 0.1; \quad P(\overline{A}_2) = 0.2; \quad P(\overline{A}_3) = 0.3. \end{aligned}$$

Пространство элементарных событий:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} A_1A_2A_3; \overline{A}_1A_2A_3; A_1\overline{A}_2A_3; A_1A_2\overline{A}_3; \\ \overline{A}_1\overline{A}_2A_3; \overline{A}_1A_2\overline{A}_3; A_1\overline{A}_2\overline{A}_3; \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \end{array} \right\}.$$

1. Событие A — потребует внимания второй станок: $A = A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3$.

   Тогда

$$\begin{aligned} P(A) = P(A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A2A3 + A1A2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3) = \\ = P(A_1A_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) + P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) = \\ = P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) + \\ + P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3). \end{aligned}$$

   Так как события несовместные и независимые. $P(A) = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = 0.8$.

2. Событие B — потребуют внимания два станка:

$$\begin{aligned} B &= \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3. \\ P(B) &= P(\overline{A}_1A_2A_3 \ + \ A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3) = \\ &= P(\overline{A}_1A_2A_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(A_1A_2\overline{A}_3) = \\ &= 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = \\ &= 0.398. \end{aligned}$$

3. Событие C — потребуют внимания не менее двух станков:

$$\begin{aligned} C &= \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1A_2A_3. \\ P(C) &= P(\overline{A}_1A_2A_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(A_1A_2\overline{A}_3) + \\ &+ P(A_1A_2A_3) = 0.398 + 0.504 = 0.902. \end{aligned}$$

▲

Задача 7. В машину «Экзаменатор» введено 50 вопросов. Студенту предлагается 5 вопросов и ставится оценка «отлично», если на все вопросы получен верный ответ. Найти вероятность получить «отлично», если студент подготовил только 40 вопросов.

▼ **Решение.** A — {получена оценка «отлично»}, A_i — {ответил на i- й вопрос}. Тогда $A = A_1A_2A_3A_4A_5$, имеем:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1A_2)\cdot P(A_4 \mid A_1A_2A_3)\cdot \\ &\cdot\ P(A_5 \mid A_1A_2A_3A_4) = \frac{40}{50}\cdot\frac{39}{49}\frac{38}{47}\frac{37}{46}\frac{36}{46} \cong 0.31. \end{aligned}$$

Или, другим способом — с помощью формулы классической вероятности (1.2.): $n = C_{50}^5, \quad m = C_{40}^5$ и

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{40}^5}{C_{50}^5} = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46} \cong 0.31.$$

▲

Задача 8. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в I, II, III, IV ящике, соответственно равны 0.6; 0.7; 0.8; 0.9. Найти вероятность того, что сборщику придется проверить все 4 ящика (событие A).

▼ **Решение.** Пусть A_i — {Нужная сборщику деталь находится в i-м ящике.}
Тогда

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.6;\ P(\overline{A}_1) = 0.4; \\ P(A_2) &= 0.7;\ P(\overline{A}_2) = 0.3; \\ P(A_3) &= 0.8;\ P(\overline{A}_3) = 0.2; \\ P(A_4) &= 0.1;\ P(\overline{A}_4) = 0.9. \end{aligned}$$

Имеем :

$$A = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4.$$

Так как события несовместны и независимы, то

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = \\ &= P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = \\ &= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4) + \\ &+ P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4) = \\ &= 0.40.30.2(0.9+0.1) = 0.024. \end{aligned}$$

▲

1.3.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Оператор обслуживает три прибора, работающих независимо друг от друга. Известны вероятности того, что в течение часа приборы потребуют внимания оператора: первый — 0.1; второй — 0.25; третий — 0.3. Найти вероятность того, что в течение часа не более одного прибора потребуют внимания оператора.

Ответ: $P = 0.885$.

Задача 2. Известно, что в апреле бывает в среднем 16 солнечных дней. Найти вероятность того, что первого и второго апреля будет различная погода.

Ответ: $P = 0.515$.

Задача 3. Радист вызывает корреспондента. Вероятность того, что вызов будет принят, равна 0.6. Найти вероятность того, что корреспондент ответит лишь на четвертый вызов.

Ответ: $P = 0.0384$.

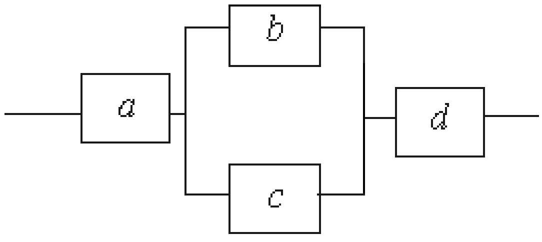
Задача 4. При каждом включении стартера двигатель начинает работать с вероятностью 0.8. Найти вероятность того, что для запуска двигателя нужно не более двух включений.

Ответ: $P = 0.96$.

Задача 5. В НИИ работают 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60 — немецкий, 50 — знают оба языка. Найти вероятность того, что наудачу выбранный сотрудник не знает ни одного иностранного языка.

Ответ: $P = 1/3$.

Задача 6. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему



Зная, что надежность блоков соответственно равна 0.6 для а, 0.7 — для b, 0.8 – для c, 0.9 — для d, найти надежность системы.

Ответ: 0.5076.

1.4. Формулы полной вероятности и Байеса

Пусть событие A может произойти совместно с одним из событий H_1, H_2, $\ldots$, H_n, которые попарно несовместны и образуют полную группу событий, т.е.

$\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, а $H_i \cap H_i = \varnothing$, $i \neq j$ и $P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$.

События H_i называются гипотезами. Тогда любое событие можно представить в виде суммы непересекающихся составляющих: $A = \sum A \cdot H_i$. См. рисунок.

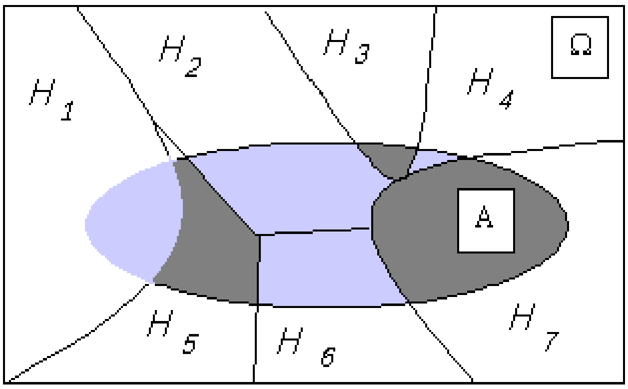


Рис. 1.11. Разложение события на составляющие

Пусть известны вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ и условные вероятности $P(A \mid H_1)$, $P(A \mid H_2)$, $\ldots$, $P(A \mid H_n)$. Тогда вероятность события A равна сумме вероятностей составляющих его частей:

$$P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A \cdot H_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) \cdot P\left(A|H_i\right). \qquad (1.15.)$$

Формула (1.15.) называется формулой *полной вероятности.* Вероятности $P(H_i)$ называются доопытными (априорными) вероятностями гипотез.

Предположим, что произведен эксперимент, в результате которого наступило событие A . В связи с этим возникает вопрос: какова вероятность того, что данное событие произошло в результате реализации той или иной гипотезы? Эта вероятность рассчитывается как условная вероятность интересующей нас гипотезы при условии, что произошло событие A.

$$P\left(H_i|A\right) = \frac{P\left(H_i \cdot A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(H_i\right) \cdot P\left(A|H_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) \cdot P\left(A|H_i\right)}. \qquad (1.16.)$$

Формула (1.16.) называется *формулой Байеса.* Вероятности $P(H_i \mid A)$ называются послеопытными (апостериорными) вероятностями. Заметим, что знаменатель в формулах (1.16.) совпадает с правой частью формулы (1.15.). Формулы (1.16.) называют также формулами гипотез.

1.4.1. Решение задач

Задача 1. Обследовалась группа из 10000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4000 человек являются постоянно курящими. У 1800 курящих обнаружились серьезные изменения в легких. Среди некурящих изменения в легких имели 1500 человек. Какова вероятность того, что наугад обследованный человек, имеющий изменения в легких, является курящим?

▼ **Решение.** Введем гипотезы: H_1 — обследованный является постоянно курящим, H_2 — является некурящим. Тогда по условию задачи

$$P(H_1) = \frac{4000}{10000} = 0.4, \quad P(H_2) = \frac{6000}{10000} = 0.6.$$

Обозначим через A событие, состоящее в том, что обследованный имеет изменения в легких. Тогда по условию задачи

$$P(A \mid H_1) = \frac{1800}{4000} = \frac{9}{20}, \; P(A \mid H_2) = \frac{1500}{6000} = \frac{5}{20}.$$

По формуле (1.15.) находим

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) =$$
$$= 0,4 \cdot \frac{9}{20} + 0,6 \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{20}(3,6 + 3) = \frac{6,6}{20} = 0.3.$$

Искомая вероятность того, что обследованный человек является курящим, по формуле Байеса равна

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot \frac{9}{20}}{\frac{6.6}{20}} =$$
$$= \frac{0.4 \cdot 9}{6.6} = \frac{3.6}{6.6} = \frac{6}{11} = 0.55.$$

Задача 2. В продажу поступают телевизоры трех заводов: 30% с первого завода, 20% — со второго, 50% — с третьего. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 10%, третьего — 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор?

▼ **Решение.** Рассмотрим события: A — приобретен исправный телевизор; гипотезы H_1, H_2, H_3 — телевизор поступил в продажу соответственно с первого, второго, третьего завода. По условию задачи

$$P(H_1) = \frac{30}{100} = 0.3; \; P(H_2) = \frac{20}{100} = 0.2; \; P(H_3) = \frac{50}{100} = 0.5.$$

$$P(A \mid H_1) = \frac{80}{100} = 0.8; \; P(A \mid H_2) = \frac{90}{100} = 0.9;$$
$$P(A \mid H_3) = \frac{95}{100} = 0.95.$$

По формуле (1.15.) находим

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + \\ &+ P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) = \\ &= 0.3 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.95 = 0.895. \end{aligned}$$

▲

Задача 3. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом 20 белых шаров, во втором — 10 белых и 10 черных шаров, в третьем — 20 черных шаров. Из наугад выбранного ящика вынут белый шар. Найти вероятность того, что этот шар из второго ящика.

▼ **Решение.** Пусть событие A — вынут белый шар, гипотезы H_1, H_2, H_3 — шар вынут соответственно из первого, второго, третьего ящика. Из условия задачи находим

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3};\ P(A \mid H_1) = \frac{20}{20} = 1;$$

$$P(A \mid H_2) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2};\ P(A \mid H_3) = \frac{0}{20} = 0.$$

Тогда по формуле (1.15.) находим

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) = \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot (1 + \tfrac{1}{2} + 0) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

По формуле (1.16.) находим

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

▲

Задача 4. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в соотношении $5:3$.

Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем $2/5$ сообщений «точка» и $1/3$ сообщений «тире» (искажение сигнала приводит к тому, что «точка» принимается как «тире», а «тире» как «точка»).

Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если:

а) принят сигнал «точка»;

б) принят сигнал «тире».

▼ **Решение.** Пусть событие A — принят сигнал «точка», а событие B — принят сигнал «тире».

Можно выдвинуть две гипотезы: H_1 — послан сигнал «точка», H_2 — послан сигнал «тире». По условию $P(H_1) : P(H_2) = 5 : 3$. Кроме того, $P(H_1)+P(H_2) = 1$. Поэтому $P(H_1) = 5/8$, $P(H_2) = 3/8$. Известно, что

$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{3},$$

$$P(B|H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(B|H_2) = \frac{2}{3}.$$

Вероятности событий A и B находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Искомые вероятности будут:

$$\text{а)} \quad P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}}{1/2} = \frac{3}{4};$$

$$\text{б)} \quad P(H_2|B) = \frac{P(H_2)P(B|H_2)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

▲

Задача 5. Из 10 каналов радиосвязи 6 каналов защищены от воздействия помех. Вероятность того, что защищенный канал в течение времени t не выйдет из строя, равна 0.95, для незащищенного канала — 0.8. Найти вероятность того, что случайно выбранные два канала не выйдут из строя в течение времени t, причем оба канала не защищены от воздействия помех.

▼ **Решение.** Пусть событие A — оба канала не выйдут из строя в течение времени t, событие A_1 — выбран защищенный канал, A_2 — выбран незащищенный канал.

Запишем пространство элементарных событий для опыта — {выбрано два канала}:

$$\Omega = \{A_1A_1,\ A_1A_2,\ A_2A_1,\ A_2A_2\}$$

Гипотезы:

H_1 — оба канала защищены от воздействия помех;

H_2 — первый выбранный канал защищен, второй выбранный канал не защищен от воздействия помех;

H_3 — первый выбранный канал не защищен, второй выбранный канал защищен от воздействия помех;

H_4 — оба выбранных канала не защищены от помех.

Тогда

$$P(H_1) = P(A_1A_1) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{30}{90};\ P(A \mid H_1) = 0.95\cdot 0.95 = 0.9025;$$

$$P(H_2) = P(A_1A_2) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{24}{90};\ P\left(A\middle|\, H_2\right) = 0.95\cdot 0.8 = 0.760;$$

$$P(H_3) = P(A_2A_1) = \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{24}{90};\quad P\left(A\middle|\, H_3\right) = 0.8\cdot 0.95 = 0.760;$$

$$P(H_4) = P(A_2A_2) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{12}{90};\quad P\left(A\middle|\, H_4\right) = 0.8\cdot 0.8 = 0.64;$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P\left(A\middle|\, H_1\right) + P(H_2)P\left(A\middle|\, H_2\right) + \\ &+ P(H_3)P\left(A\middle|\, H_3\right) + P(H_4)P\left(A\middle|\, H_4\right) = \\ &= \frac{30}{90}\cdot 0.9025 + 2\cdot\frac{24}{90}\cdot 0.760 + \frac{12}{90}\cdot 0.64 = \\ &= \frac{1}{90}\left(30\cdot 0.9025 + 48\cdot 0.760 + 12\cdot 0.64\right) = 0.7915; \end{aligned}$$

и

$$P\left(H_4\middle|\, A\right) = \frac{P(H_4)\cdot P\left(A\middle|\, H_4\right)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{90}\cdot 12\cdot 0.64}{0.7915} = \frac{\frac{1}{90}\cdot 7.68}{0.7915} = 0.1078.$$

▲

1.4.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В группе из 10 экипажей имеются два отличных, пять хороших и три удовлетворительных. Вероятность выполнения упражнения отличным экипажем 0.9, хорошим — 0.8; удовлетворительным — 0.5. Какова вероятность того, что наудачу выбранный экипаж выполнит упражнение?

Ответ: $P = 0.73$.

Задача 2. Прибор на борту самолета может работать в двух режимах: в условиях нормального полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Нормальный режим осуществляется в 80% всего времени полета, условия перегрузки — в 20%. Вероятность выхода прибора из строя во время полета в нормальном режиме равна 0.1, в условиях перегрузки — 0.4. Какова надежность прибора во время полета?

Ответ: $P = 0.16.$

Задача 3. Известно, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин — дальтоники. Случайно выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что он мужчина? Считать равными количество мужчин и женщин.

Ответ: $P = 0.9524.$

Задача 4. Вероятности того, что во время работы ЭВМ произойдет критический сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности идентифицировать сбои соответственно равны 0.8, 0.9, 0.9. Какова вероятность того, что произошедший сбой был обнаружен в оперативной памяти?

Ответ: $P = 0.2045.$

Задача 5. В партии 120 лампочек, из них 70 изготовлены на первом заводе, 50 — на втором. Продукция первого завода содержит 80% стандартных ламп, второго — 60%. Найти вероятность события $A = \{$НАУДАЧУ ВЗЯТЫЕ ДВЕ ЛАМПОЧКИ ЯВЛЯЮТСЯ СТАНДАРТНЫМИ$\}$. Если событие A произошло, то какова вероятность, что обе лампочки изготовлены на первом заводе.

Ответ: $P = 0.513;\ P = 0.42.$

1.5. Повторные независимые испытания

Пусть производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний. Такие испытания называются независимыми относительно события A. Будем рассматривать независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A одинакова. Очень большое число теоретических и практических задач сводится к схеме последовательных независимых испытаний, даже если они не последовательны во времени.

Рассмотрим опыт, состоящий в проведении серии n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может произойти с одной и той же вероятностью $P(A) = p$ и не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Подсчитаем вероятность $P_n(m)$ события: {Событие A в серии из n испытаний произошло ровно m раз}. Тогда вероятность элементарного события ω_i :

{ событие A произошло ровно m раз и не произошло $n - m$ раз}

будет равна произведению вероятностей соответствующих событий:

$$p \cdot p \cdot \ldots \cdot p \cdot (1-q) \cdot (1-q) \cdot \ldots \cdot (1-q) = p^m \cdot (1-p)^{n-m} = p^m \cdot q^{n-m}.$$

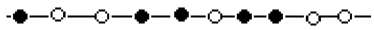


Рис. 1.12. Пример реализации серии независимых испытаний. Светлые точки — событие произошло; темные точки — событие не произошло

Число таких элементарных событий ω_i, составляющих интересующее нас событие, равно числу всевозможных реализаций последовательностей появлений и непоявлений (рис. 1.12) события A, т.е. числу сочетаний из n по m.

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \quad (1.17.)$$

Эта формула называется формулой Бернулли или биномиальной формулой. Правая часть формулы Бернулли представляет собой общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} p^{n-i} q^i. \quad (1.18.)$$

Первый член этой формулы — p^n дает вероятность наступления события A n раз в n опытах; второй член — вероятность наступления события $(n-1)$ раз и ненаступления 1 раз и т.д.; последний член дает вероятность непоявления события A ни в одном испытании, т.е.

$$\begin{array}{rclrcl} P_n(n) & = & p^n, & P_n(n-1) & = & C_n^{n-1}p^{n-1}q^1, \\ P_n(n-2) & = & C_n^{n-2}p^{n-2}q^2, \ \ldots, & P_n(0) & = & q^n. \end{array}$$

Формула Бернулли (1.17.) позволяет определить не только вероятность появления события A ровно m раз при n испытаниях, но и вероятность $P(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что число m появлений события A заключено на некотором отрезке $[m_1,\ m_2]$, $0 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant n$. Искомая вероятность находится как сумма вероятностей несовместных событий:

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \sum_{i=m_1}^{m_2} P_n(i). \tag{1.19.}$$

1.5.1. Наиболее вероятное число появлений события

Формула Бернулли позволяет установить, какое число появлений события A в серии из n испытаний наиболее вероятно.

Число m_0 называется наиболее вероятным, если $P_n(m_0) \geqslant P_n(m)$ при всех m, т.е. при некотором m_0 $P_n(m)$ достигает своего наибольшего значения.

Наиболее вероятное число m_0 определяется из двойного неравенства

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p, \tag{1.20.}$$

устанавливающего для m_0 границы, которые отличаются на единицу.[4]

Если левое граничное значение $np-q$ — дробное, то дробным будет и правое граничное значение. Тогда существует одно число m_0; Если $np-q$ — целое, то $np-q+1$ тоже целое. В этом случае

[4]Действительно, левая граница $np - q = np - (1-p) = np + p - 1$ отличается от правой на единицу.

существует два наиболее вероятнейших числа $m_0 = np - q$ и $m_0 + 1 = np + p$.

1.5.2. Приближение Пуассона

При больших n формула Бернулли приводит к громоздким вычислениям. Сформулируем предельное соотношение.
Теорема 1.5.1. (Теорема Пуассон). Если существует

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} np = \lambda, \tag{1.21.}$$

то справедливо приближение Пуассона:

$$P_n(m) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \tag{1.22.}$$

где $\lambda = np$ называется параметром Пуассона. Практическое использование этой формулы допустимо при $\lambda \leqslant 10$. Формула (1.22.) табулирована. Из-за малости p формулу Пуассона или распределение Пуассона называют также законом редких явлений.

1.5.3. Локальная и интегральная теоремы Муавра—Лапласа

Если условие применимости формулы Пуассона (1.21.) нарушается, рассматриваются случаи, когда $p \neq 0$ и $p \neq 1$. При этом для подсчета $P_n(m)$ пользуются локальной предельной теоремой Муавра—Лапласа.
Теорема 1.5.2. Локальная теорема Муавра—Лапласа. Пусть вероятность события A в n независимых испытаниях равна p (0<p<1). Тогда вероятность того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближенно равна

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x(m)), \tag{1.23.}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$$

Функция $\varphi(x)$ называется функцией Гаусса; она является четной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$; для неё составлены подробные таблицы.

На практике при большом числе испытаний n и не слишком малой вероятности p важно оценить вероятность того, что число появлений события A лежит в некоторых границах. Эту оценку устанавливает

Теорема 1.5.3. Интегральная теорема Муавра—Лапласа. Если вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна, причем 0<р<1, то вероятность того, что событие А появится в испытаниях от m_1 до m_2 раз, приближенно равна

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{1.24.}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$

Функция $\Phi(x)$ называется функцией Лапласа и функцией ошибок; она является нечетной, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; при $x \geqslant 0$ эта функция табулирована. Оценка погрешности при использовании формулы (1.23.) показывает, что эта формула обеспечивает хорошую точность уже при значениях $npq \geqslant 10$.

Таким образом,

$$P_n(m) \xrightarrow{n \to \infty} \begin{cases} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \ n \cdot p = const \\ \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2 \cdot npq}}, n \cdot p \cdot q \to \infty \end{cases}$$

1.5.4. Отклонение частоты появления события от его вероятности

Пусть n — число испытаний, p — вероятность появления события A в каждом испытании, $\frac{m}{n}$ — относительная частота появления события A. Тогда вероятность того, что отклонение частоты появления события при n испытаниях от его вероятности по абсолютной величине не превышает заданного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$P\left(|\frac{m}{n} - p| \leqslant \varepsilon\right) \approx \Phi(0) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) + \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi(0) = \\ = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (1.25.)$$

1.5.5. Решение задач

Задача 1. По каналу связи передается 6 сообщений. Каждое из сообщений может быть искажено помехами с вероятностью 0.2 независимо от других. Найти вероятность того, что:

1. 4 сообщения из 6 не искажены;
2. Не менее 3 из 6 переданы искаженными;
3. Хотя бы одно сообщение из 6 искажено;
4. Не более 2 из 6 не искажены;
5. Все сообщения переданы без искажения.

▼ **Решение.** Так как вероятность искажения 0.2, то вероятность передачи сообщения без помех — 0.8.

1. Используя формулу Бернулли (1.17.), найдем вероятность передачи 4 сообщений из 6 без помех:

$$P_6^4 = C_6^4 \cdot 0.8^4 \cdot 0.2^2 = \frac{768}{3125} = 0.24576$$
$$(n = 6,\ m = 4, p = 0.8\ 1 - p = 0.2).$$

2. Не менее 3 из 6 переданы искаженными:

$$P_6(3 \leqslant m \leqslant 6) = P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = \\ = C_6^3 \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^3 + C_6^4 \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^2 + C_6^5 \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^1 + C_6^6 \cdot 0.2^6 \cdot 0.8^0 = \\ = \frac{1}{5^6}(1280 + 240 + 24 + 1) = \frac{1}{15625} \cdot 1545 = 0.09888.$$

3. Хотя бы одно сообщение из 6 искажено:

$$P_6(1 \leqslant m \leqslant 6) = P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = \\ = 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^6 = \\ = 1 - \frac{4096}{15625} = \frac{11529}{15625} = 0,737856.$$

4. Не более двух из шести искажено:

$$P_6(0 \leqslant m \leqslant 2) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = \\ = C_6^0 \cdot 0.2^6 \cdot 0.8^0 + C_6^1 \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^1 + C_6^2 \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^2 = \\ = \frac{1}{5^6}(1 + 24 + 240) = \frac{256}{15625} = 0.01696.$$

5. Все сообщения переданы без искажения:

$$P_6(6) = C_6^6 \cdot 0.8^6 \cdot 0.2^0 = 1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 = \frac{4096}{15625} = 0.26144.$$

▲

Задача 2. Вероятность того, что летом день будет ясным, равна 0.42; вероятность пасмурного дня равна 0.36 и переменной облачности — 0.22. Сколько дней из 59 можно ожидать ясных и пасмурных?

▼ **Решение.** Из условия задачи видно, что надо искать наиболее вероятное число ясных и пасмурных дней.

Для ясных дней $p = 0.42$, $n = 59$. Составляем неравенства (1.20.):

$$59 \cdot 0.42 + 0.42 - 1 \leq m_0 \leq 59 \cdot 0.42 + 0.42.$$

Отсюда

$$24.2 \leqslant m_o \leqslant 25.2 \Rightarrow m_o = 25.$$

Для пасмурных дней $p = 0.36$, $n = 59$ и

$$0.36 \cdot 59 + 0.36 - 1 \leqslant M_0 \leqslant 0.36 \cdot 59 + 0.36;$$

Следовательно, $20.60 \leqslant M_0 \leqslant 21.60; \quad \Rightarrow M_0 = 21.$

Таким образом, наиболее вероятное число ясных дней m_0 =25, пасмурных дней — $\mathrm{M}_0 = 21$. Тогда летом можно ожидать $m_0 + \mathrm{M}_0$ =46 ясных и пасмурных дней. ▲

Задача 3. На лекции по теории вероятностей присутствует 110 студентов курса. Найти вероятность того, что:

1. k студентов (k = 0,1,2) из присутствующих родились первого сентября;

2. Хотя бы один студент курса родился первого сентября.

▼ **Решение.** Вероятность родиться 1 сентября любому студенту курса $p = \frac{1}{365}$ очень мала, поэтому используем формулу Пуассона (1.22.). Найдем параметр Пуассона. Так как $n = 110$, то $\lambda = np = 110 \cdot \frac{1}{365} = 0.3$.

Тогда по формуле Пуассона $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$:

$$P_{110}(k=0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-0.3} = 0.740818;$$

$$P_{110}(k=1) = \frac{\lambda^1}{1!}e^{-0.3} = 0.3 \cdot e^{-0.3} = 0.222245;$$

$$P_{110}(k=2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-0.3} = \frac{0.3^2 \cdot e^{-0,3}}{2} = 0.033337;$$

$$P_{110}(k \geqslant 1) = 1 - P_{110}(0) = 1 - 0.740818 = 0.259182.$$

▲

Задача 4. Вероятность того, что деталь не стандартная, равна 0.1. Сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью $P = 0.964228$ можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей отклоняется от постоянной вероятности $p = 0.1$ по абсолютной величине не более, чем на 0.01?

▼ **Решение.**

Требуемое число n найдем по формуле (1.25.). Имеем: $p = 1.1;\ q = 0.9;\ P = 0.96428$. Подставим данные в формулу:

$$2\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{0.1 \cdot 0.9}}\right) = 0.96428.$$

Откуда находим

$$\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{0.09}}\right) = 0.48214.$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим, что $0.48214 = \Phi(2.1)$ или $0.01\sqrt{\frac{n}{0.09}} = 2.1 \Rightarrow n = 210^2 \cdot 0.09 = 3969.$ ▲

Задача 5. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0.2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя:

1. Ровно 10 конденсаторов;

2. Не менее 20 конденсаторов;

3. Менее 28 конденсаторов;

4. От 14 до 26 конденсаторов.

▼ **Решение.** Имеем $n = 100$, $p = 0.2$, $q = 1 - p = 0.8$.

1. Ровно 10 конденсаторов.

   Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра — Лапласа: $P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   Вычислим $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{10-100\cdot0,2}{\sqrt{100\cdot0,8\cdot0,2}} = \frac{10-20}{4} = -2,5$, $\sqrt{npq} = 4$. Так как функция $\varphi(x)$ — четная, то $\varphi(-2,5) = \varphi(2,50) = 0,0175$ (находим по таблице значений функции $\varphi(x)$). Искомая вероятность

$$P_{100}(10) = \frac{1}{4} \cdot 0,0175 = 0,004375.$$

2. Не менее 20 конденсаторов.

   Требование, чтобы из 100 конденсаторов из строя вышли не менее 20, означает, что из строя выйдут либо 20, либо 21, ..., либо 100. Таким образом, $m_1 = 20$, $m_2 =100$. Тогда

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0.2}{4} = 0,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 20}{4} = 20.$$

   По таблице значений функции $\Phi(x)$ найдем $\Phi(x_1) = \Phi(0) = 0$, $\Phi(x_2) = \Phi(20) = 0.5$. Искомая вероятность:

$$P_{100}(20 \leq m \leq 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0.5.$$

3. Менее 28 конденсаторов.

   $0 \leqslant m \leqslant 27$. Тогда $x_1 = \frac{0-20}{4} = -5$, $x_2 = \frac{27-20}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$. $P_{100}(0 \leqslant m \leqslant 27) \approx \Phi(1.75) - \Phi(-5) = \Phi(1.75) + \Phi(5) = 0.45994 + 0.5 = 0.95994$

   (здесь было учтено, что функция Лапласа Φ(x) — нечетная).

4. От 14 до 26 конденсаторов. По условию m_1= 14, m_2 = 26. Вычислим x_1, x_2 :

$$x_1 = \frac{14-20}{4} = -\frac{6}{4} = -1,5; \qquad x_2 = \frac{26-20}{4} = \frac{6}{4} = 1.5.$$

Тогда $P_{100}(14 \leqslant m \leqslant 26) \approx \Phi(1.5) - \Phi(-1,5) = 2\Phi(1.5) = 2 \cdot 0.4319 = 0.86638.$

▲

Задача 6. Вероятность появления некоторого события в одном опыте равна 0.6. Какова вероятность, что это событие появится в большинстве из 60 опытов?

▼ **Решение.** Количество m появлений события в серии испытаний находится в промежутке $[0;\ 60]$. «В большинстве опытов» означает, что $m \in [30,\ 60.]$ По условию n = 60, p = 0.6, q = 0.4, m_1 = 30, m_2 = 60. Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 60 \cdot 0.6}{\sqrt{60 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} = \frac{-6}{\sqrt{14.4}} = -1.581,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 - 60 \cdot 0.6}{\sqrt{14.4}} = 6.324.$$

Тогда

$$P_{60}(30 \leqslant m \leqslant 60) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \\ = \Phi(6.324) - \Phi(-1.581) = \Phi(6.324) + \Phi(1.581) = \\ = 0.5 + 0.44295 = 0.94295.$$

▲

1.5.6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартное, равна 0.9. На проверку взято 5 изделий. Найти вероятность того, что:

1. Ровно два изделия стандартные;

2. Все изделия нестандартные;

3. Не менее двух изделий стандартные.

Ответ: $p_1 = 0.0081$; $p_2 = 0.00001$; $p_3 = 0.99954$.

Задача 2. Станок-автомат штампует детали. Известно, что в среднем на 1000 деталей приходится 4 бракованных. Найти вероятность того,что среди 50 взятых наудачу деталей:

1. 2 бракованных;
2. Нет бракованных деталей.

Ответ: $p_1 = 0.016375$; $p_2 = 0.818731$.

Задача 3. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором привод оказывается включенным в течение 0.8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными:

1. От 70 до 86 станков;
2. Ровно 80 станков.

Ответ: $p_1 = 0.92698$; $p_2 = 0.0997$.

Задача 4. Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее трех раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность появления события A при одном испытании равна 0.3 и произведено:

а) пять независимых испытаний;

б) семь независимых испытаний.

Ответ: а) 0.163; б) 0.353.

Задача 5. Если известно, что на лотерейный билет выпал выигрыш, то вероятности того, что выигрышем будет велосипед или стиральная машина, равны соответственно 0.03 и 0.02. Найти вероятность выигрыша хотя бы одного из этих предметов на 10 выигравших билетов, выбранных из разных серий.

Ответ: $p = 0.4$.

Вопросы для самопроверки

1. Какие события называются случайными? Приведите примеры случайных событий.
2. Какие события образуют полную группу несовместных событий?
3. Приведите примеры полных групп событий.
4. Какое событие называется суммой (объединением) нескольких событий?
5. Какое событие называется произведением (пересечением, совмещением) событий?
6. Что называется частотой события и каковы ее свойства?
7. Сформулируйте классическое определение вероятности события. В каких пределах изменяется вероятность события?
8. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для несовместных событий.
9. Чему равна сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу?
10. Какая вероятность называется условной вероятностью?
11. Какие события называются независимыми?
12. Сформулируйте теорему умножения вероятностей и следствия из нее.
13. Как следует вычислять вероятность появления хотя бы одного из нескольких совместных событий?
14. Докажите формулу полной вероятности.
15. Выведите формулу вероятностей гипотез (Байеса).

16. При решении каких задач применяется формула полной вероятности?

17. При решении каких задач применяется формула Байеса?

18. При решении каких задач применяется формула Бернулли?

19. Какие изменения надо ввести в формулу Бернулли, если число исходов в испытаниях больше двух?

20. Дайте определение наивероятнейшего числа при повторных испытаниях и приведите правило его вычисления.

21. Сформулируйте условия применимости приближения Пуассона в схеме Бернулли.

22. Когда следует применять локальную и интегральную теоремы Муавра-Лапласа?

Глава 2.

Случайные величины и их распределения

2.1. Случайные величины

На практике, результаты случайного эксперимента чаще всего представляются в числовой форме. С другой стороны, результат случайного эксперимента — «случайное событие». Чтобы связать эти представления вводят новое понятие — «случайная величина». По сути дела — это числовая функция, заданная на множестве элементарных событий $\{\omega_i \in \Omega\}$ с областью значений в $\Re$ или $\Re_n$.

Полагают, что случайная величина в результате испытания принимает то или иное возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных обстоятельств.

С введением понятия «случайная величина» расширяется понятие «случайное событие» — теперь под случайным событием понимается событие, состоящее в том, что случайная величина в результате испытания приняла значение, принадлежащее некоторому конечному или бесконечному числовому множеству.[1]

Обычно рассматривают два вида случайных величин: *дискретные* и *непрерывные*.

Определение 2.1. Случайная величина называется дискретной, если она принимает конечное или счетное множество значений.

Дискретная случайная величина используется при описании измерений, принимающих целочисленные значения: число дефект-

[1] «случайная величина» — понятие более емкое, чем прежнее понятие «случайное событие». Ее введение позволяет обойтись без описания Ω, отвечающего данному эксперименту. Ведь часто пространство элементарных событий описать очень сложно, а перечислить все ω_i не всегда и возможно.

ных изделий, число телефонных вызовов, число неисправностей в приборе и т.д. и может быть записана в виде последовательности x_1, x_2, x_3, ..., x_n.

Для некоторых случайных величин число возможных значений, принимаемых этой величиной, бывает настолько велико, что удобнее представлять их в виде *непрерывных случайных величин*, которые принимают любое значение в некотором интервале, например, продолжительность работы электрической лампы[2], дальность полета снаряда, уровень воды в половодье и т.д. Ниже мы дадим другое, более строгое, определение непрерывной случайной величины.

2.1.1. Закон распределения дискретной случайной величины

Для полного описания дискретной случайной величины необходимо:

- Указать все её возможные значения.
- Задать вероятности, с которыми принимаются эти значения.

Соотношение между возможными значениями дискретных случайных величин и их соответствующими вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.

Удобен табличный способ задания закона распределения: в первой строке таблицы указывают значения случайной величины, во второй строке — вероятности этих значений.

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	P_1	P_2	$\ldots$	P_i	$\ldots$	P_n	$\ldots$

Таблица 2.1. Ряд распределения дискретной случайной величины

[2] Срок службы электрической лампочки — пример смешанной случайной величины: ее значения могут принимать одно дискретное, равное нулю значение, и любые значения из промежутка $(0,\ \infty)$.

Эту таблицу называют рядом распределения дискретной случайной величины. Так как дискретная случайная величина обязательно примет одно из своих значений x_i, то события $\{X = x_i\}$ образуют полную группу событий, поэтому справедливо *условие нормировки*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \tag{2.1.}$$

Полагают, что $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_i < x_{i+1} \cdots$.

2.1.2. Функция распределения случайной величины

Определение 2.2. Функцией распределения, или интегральной функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X примет значения, меньшие заданного значения x, где x — любое действительное число:

$$F\left(x\right) = P\left(X < x\right). \tag{2.2.}$$

Данное определение подходит как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Свойства $F(x)$:

1. Значения $F(x)$ принадлежат отрезку [0, 1], т.е.

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

2. $F(x)$ — неубывающая функция, т.е.

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow F(x_1) \leqslant F(x_2).$$

3. $F(x)$ — непрерывная слева в каждой точке x_0, т.е. существует $F(x_0)$ и существует левосторонний предел:

$$F(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} F(x).$$

4. При любом x_0 существует правосторонний предел, необязательно совпадающий с левосторонним:

$$\lim_{x \to x_0+0} F(x) = P(x \leqslant x_0).$$

Функция $F(x)$ может иметь разрывы только первого рода, причем в силу монотонности $F(x)$ и неравенства $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ таких скачков конечное или счетное множество.

5.
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \Longleftrightarrow \{\text{ Невозможное событие}\},$$
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \Longleftrightarrow \{\text{ Достоверное событие}\} \qquad (2.3.)$$

6. Вероятность того, что случайная величина попадёт на полуинтервал $[a,\ b)$ равна разности значений функции распределения в точках b и a:

$$P(a \leqslant x < b) = F(b) - F(a) \qquad (2.4.)$$

Замечание. Если $F(x)$ непрерывна в точке a и $a = b$, то $P(X \in [a,\ b]) = P(X = a) = F(b) - F(a) = 0$. Следовательно, для непрерывной в точке функции вероятность попадания на отрезок равна вероятности попадания на интервал.

Пусть дана дискретная случайная величина

$$X = \{x_1,\ x_2, \ldots, x_n\}.$$

Используя свойства функции $F(x)$, получаем, что при $x_{i-1} < x \leqslant x_i$

$$F(x) = P_1 + P_2 + \cdots + P_{i-1} = \sum_{i=1}^{i-1} P_i. \qquad (2.5.)$$

В точке x_i $F(x)$ имеет скачок

$$P_i = P(X = x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i).$$

Таким образом, функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-непрерывной, в точках разрыва x_i имеет скачки P_i и непрерывна слева в точках разрыва x_i.

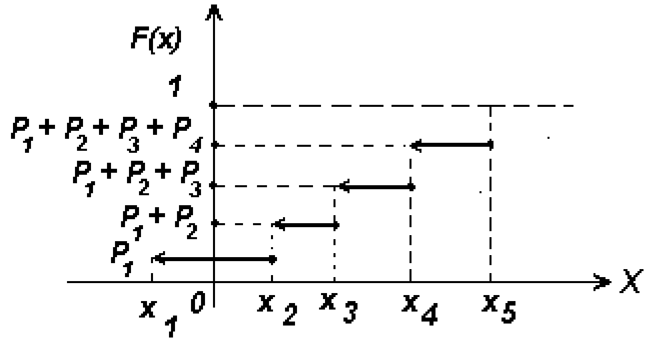


Рис. 2.1. Функция распределения дискретной случайной величины

Определение 2.3. Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна.

2.1.3. Плотность распределения случайной величины

Определение 2.4. Пусть F(x) — дифференцируемая функция. Производная от функции распределения $F(x)$ называется плотностью распределения вероятности или дифференциальной функцией распределения случайной величины

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = F'(x). \quad (2.6.)$$

Укажем вероятностный смысл $dF(x)$:

$$dF\left(x\right) = f(x)dx \approx F\left(x + dx\right) - F\left(x\right) = P\left(x \in \left(x,\ x + dx\right)\right).$$

Таким образом, дифференциал функции распределения есть вероятность попадания случайной величины на бесконечно малый промежуток от x до $x + dx$.

Свойства $f(x)$:

$$f(x) \geqslant 0, \quad \text{т.е. не отрицательная функция}; \qquad (2.7.)$$

$$P(a \leqslant x < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx; \qquad (2.8.)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1; \quad \text{(условие нормировки)}; \qquad (2.9.)$$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (2.10.)$$

2.1.4. Решение задач

Задача 1. Дана таблица, где в верхней строке указаны возможные значения случайной величины X, а в нижней — их вероятности.

X	1	2	3	4	5
P	1/4	1/8	1/4	1/8	1/4

Может ли эта таблица быть рядом распределения X?

▼ **Решение.** Да, так как $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$. ▲

Задача 2. Выпущено 500 лотерейных билетов, причем 40 билетов принесут их владельцам выигрыш по 10000 руб., 20 билетов — по 50000 руб., 10 билетов — по 100000 руб., 5 билетов — по 200000 руб., 1 билет — 500000 руб., остальные — без выигрыша. Найти закон распределения выигрыша для владельца одного билета.

▼ **Решение.**

Возможные значения X: $x_5 = 10000$, $x_4 = 50000$, $x_3 = 100000$, $x_2 = 200000$, $x_1 = 500000$, $x_6 = 0$. Вероятности этих возможных значений:

$$P(x_1 = 500000) = \frac{1}{500} = 0.002; \quad P(x_2 = 200000) = \frac{5}{500} = 0.01$$
$$P(x_3 = 100000) = \frac{10}{500} = 0.02; \quad P(x_4 = 50000) = \frac{20}{500} = 0.04;$$
$$P(x_5 = 10000) = \frac{40}{500} = 0.08; \quad P(x_6 = 0) = \frac{424}{500} = 0.848.$$

Искомый закон распределения:

X	500000	200000	100000	50000	10000	0	$\sum_{i=1}^{6} p_i$
p	0.002	0.01	0.02	0.04	0.08	0.848	1

▲

Задача 3. Стрелок, имея 5 патронов, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.7. Построить закон распределения числа использованных патронов, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти $P(2 < x < 5)$.

▼ **Решение.**

Пространство элементарных событий опыта

$$\Omega = \{1,\ 01,\ 001,\ 0001,\ 00001,\ 00000\},$$

где событие $\{1\}$ — попал в цель, событие $\{0\}$ — не попал в цель. Элементарным исходам соответствуют следующие значения случайной величины числа использованных патронов: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Так как результат каждого следующего выстрела не зависит от предыдущего, то вероятности возможных значений:
$p_1 = P(x_1 = 1) = P(1) = 0.7$; $p_2 = P(x_2 = 2) = P(01) = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$;
$p_3 = P(x_3 = 3) = P(001) = 0.3^2 \cdot 0.7 = 0.063$;
$p_4 = P(x_4 = 4) = P(0001) = 0.3^3 \cdot 0.7 = 0.0189$;
$p_5 = P(x_5 = 5) = P(00001 + 00000) = 0.3^4 \cdot 0.7 + 0.3^5 = 0.0081$.

Искомый закон распределения:

X	1	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^{5} P_i$
P	0.7	0.21	0.063	0.0189	0.0081	1

Найдем функцию распределения $F(x)$, пользуясь формулой (2.5.):

$$\begin{aligned}
x \leqslant 1,\ F(x) &= P(X < x) = 0 \\
1 < x \leqslant 2,\ F(x) &= P(X < x) = P_1(X_1 = 1) = 0.7 \\
2 < x \leqslant 3,\ F(x) &= P_1(X = 1) + P_2(x = 2) = 0.91 \\
3 < x \leqslant 4,\ F(x) &= P_1(x = 1) + P_2(x = 2) + P_3(x = 3) = \\
&= 0.7 + 0.21 + 0.063 = 0.973 \\
4 < x \leqslant 5,\ F(x) &= P_1(x = 1) + P_2(x = 2) + P_3(x = 3) + \\
+P_4(x = 4) &= 0.973 + 0.0189 = 0.9919 \\
x > 5,\ F(x) &= 1
\end{aligned}$$

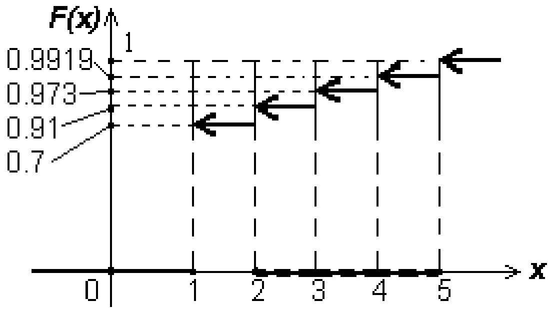


Рис. 2.2. К решению задачи 3

Найдем $P(2 < x < 5)$. Применим формулу (2.4.):

$$P(2 < x < 5) = F(5) - F(2) = 0.9919 - 0.91 = 0.0819.$$

▲

Задача 4. Дана $F(x)$ некоторой случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 11/25, & 0 < x \leqslant 1 \\ 19/25, & 1 < x \leqslant 2 \\ 22/25, & 2 < x \leqslant 3 \\ 24/25, & 3 < x \leqslant 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Записать ряд распределения для X.

▼ **Решение.** Из свойств $F(x)$ следует, что возможные значения случайной величины X — точки разрыва функции $F(x)$, а соответствующие им вероятности — скачки функции $F(x)$. Находим возможные значения случайной величины $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ряд распределения					
X	0	1	2	3	4
P	11/25	8/25	3/25	2/25	1/25

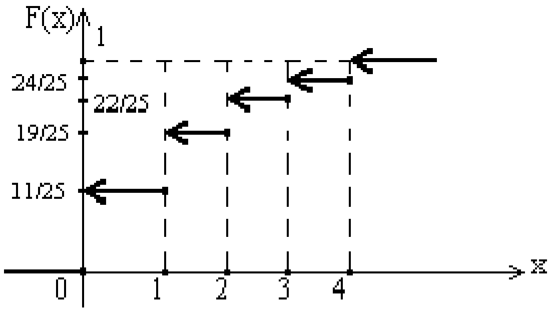


Рис. 2.3. К решению задачи 4

▲

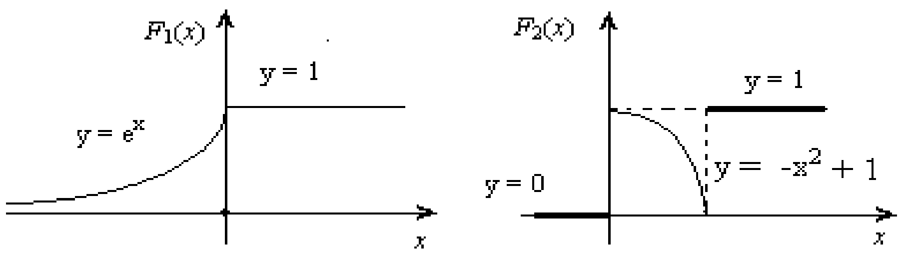
Задача 5. Установить, какая из функций

$$F_1(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ -x^2+1, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

является функцией распределения некоторой случайной величины.

В случае утвердительного ответа, найти вероятность того, что соответствующая случайная величина принимает значения на $[-3, 2]$.

▼ **Решение.** Построим графики функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$:



Функция $F_2(x)$ не является функцией распределения, так как не является неубывающей. Функция $F_1(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины, так как является неубывающей и удовлетворяет условию (2.3.). Найдем вероятность попадания на промежуток:

$$P(-3 \leqslant X \leqslant 2) = F(2) - F(-3) = 1 - e^{-3} = 1 - \frac{1}{e^3} = 0.95021.$$

▲

Задача 6. Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2e^{-x}, & \text{при } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Найти:

1. Коэффициент C;
2. Функцию распределения $F(x)$;
3. Вероятность попадания случайной величины в интервал $(1, 3)$.

▼ **Решение.** Из условия нормировки (2.9.)находим

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \\ &= 0 + C\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx = C\lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a} x^2e^{-x}dx = \\ &= C\lim_{a\to\infty}\left[2 - \frac{a^2+2a+2}{e^a}\right] = 2C \ \Rightarrow C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

По формуле (2.10.) находим:

$$\begin{aligned} x < 0: \ F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0, \text{ так как } f(x) = 0. \\ x \geqslant 0: \ F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(t)dt = \\ &= 0 + \int_{0}^{x} f(t)dt = (1/2)\int_{0}^{x} t^2e^{-t}dt = \\ &= (1/2)\left[-\frac{t^2+2t+2}{e^t}\right]_0^x = \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2+2x+2}{e^x} + 2\right] = 1 - \frac{x^2+2x+2}{2e^x}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2+2x+2}{2e^x}, & \text{при } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

По формуле (2.4.) находим

$$P(1 < x < 3) = F(3) - F(1) = 0.9197 - 0.3983 = 0.5214.$$

▲

Задача 7. Случайное время простоя радиоэлектронной аппаратуры в ряде случаев имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{M}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\lg x - \lg x_0)^2}{2\sigma^2}),$$

где $M = lge = 0.4343\ldots$

Найти функцию распределения $F(x)$.

▼ **Решение.** По формуле (2.10.) находим

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{M}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\lg x - \lg x_0)^2}{2\sigma^2}) dx =$$
$$= \frac{M}{\sigma}\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{(\lg x - \lg x_0)^2}{2\sigma^2}) \frac{dx}{x} =$$
$$= \left| \begin{array}{l} \frac{\lg x - \lg x_0}{\sigma} = t \\ dt = \frac{1}{\sigma}(\lg x)' dx = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{x} \lg e \cdot dx = \frac{M}{\sigma} \cdot \frac{dx}{x}; \\ \frac{dx}{x} = \frac{M}{\sigma} dt = d\left(\frac{\lg x - \lg x_0}{\sigma}\right) \cdot \frac{M}{\sigma} \end{array} \right| =$$
$$= \frac{M \cdot \sigma}{\sigma\sqrt{2\pi} \cdot M} \int\limits_{-\infty}^{t_B} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t_B} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где

$$t_B = \frac{\lg x - \lg x_0}{\sigma}.$$

▲

2.1.5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Урна содержит 10 черных и 15 красных мячей. Наудачу вынимаются два мяча. Составить закон распределения числа извлеченных черных мячей; найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 0.35, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0.85, & 1 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

x	0	1	2
p	0.35	0.5	0.15

Задача 2. Построить график функции $F(x)$ и составить ряд распределения вероятностей дискретной случайной величины.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ 0.2, & -1 < x \leqslant 2 \\ 0.5, & 2 < x \leqslant 3 \\ 0.6, & 3 < x \leqslant 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

Ответ:

x	-1	2	3	4
p	0.2	0.3	0.1	0.4

Задача 3. Установить, какая из функций

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x - \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

или

$$F_2(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0 \\ e^{-x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

является функцией распределения непрерывной случайной величины.

Ответ: первая.

Задача 4. Случайная величина X задана плотностью распределения вида:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{A}{\sqrt{4-x^2}}, & -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}.$$

Найти значение параметра A, функцию распределения $F(x)$; и $P(1 \leqslant x \leqslant 2)$.

Ответ: $A = 1/\pi$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{\pi}\left(\arcsin\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right), & -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$;

$P(1 \leqslant x \leqslant 2) = 1/3$.

Задача 5. Какие из функций

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 4 \\ 0,8x - 3.2, & 4 < x \leqslant 5.25 \\ 1, & x > 5.25 \end{cases}$$

или

$$F_2(x) = \begin{cases} 0. & x \leqslant 0 \\ 0.5x - 1, & 0 < x \leqslant 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

являются функциями распределения некоторой случайной величины X. В случае утвердительного ответа найти функцию плотности вероятности $f(x)$ и вероятность того, что случайная величина X принимает значения на отрезке $[3, 5]$.

$$\text{Ответ: } F_1(x);\ \text{P} = 0.8;\ f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 4 \\ 0.8, & 4 < x \leqslant 5.25 \\ 1, & x > 5.25 \end{cases}.$$

2.2. Числовые характеристики случайных величин

Числовые характеристики в сжатой форме выражают наиболее существенные особенности распределения случайной величины.

Числовые характеристики широко используются в теории вероятностей и ее многочисленных приложениях на практике. С их помощью в значительной степени облегчается решение вероятностных задач. Рассмотрим лишь важнейшие числовые характеристики, которые характеризуют форму распределения и положение случайной величины на числовой прямой.

2.2.1. Математическое ожидание

Пусть дискретная случайная величина задана своим *рядом распределения*:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	$\dots$
p	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n	$\dots$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется число

$$m_X = M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \qquad (2.11.)$$

если числовой ряд сходится абсолютно. Если ряд расходится, то говорят, что дискретная случайная величина X не имеет конечного математического ожидания.

Если число значений случайной величины конечно и равно n, то математическое ожидание равно конечной сумме:

$$m_X = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (2.12.)$$

Выясним вероятностный смысл математического ожидания дискретной случайной величины.

Пусть проведено n опытов, в которых случайная величина X приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, ..., m_k раз значение x_k, причем $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. Тогда среднее арифметическое значение $\overline{x}$ всех значений равно

$$\overline{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n} =$$
$$= x_1 p_1 * + x_2 p_2 * + \ldots + x_k p_k *,$$

где $p_i * = \dfrac{m_i}{n}$ — относительная частота значения x_i.

Если число опытов достаточно велико, то относительная частота приближенно равна вероятности события. Таким образом, математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Выясним механический смысл математического ожидания дискретной случайной величины.

Пусть возможные значения дискретной случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются координатами материальных точек с массами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, расположенных на числовой прямой, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Тогда

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i},$$

т.е. математическое ожидание есть абсцисса центра масс данной системы материальных точек.

Пусть X — непрерывная случайная величина и $f(x)$ — ее дифференциальная функция распределения или плотность вероятности.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число

$$M[X] = m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \tag{2.13.}$$

если этот несобственный интеграл сходится. Если он расходится, то непрерывная случайная величина X математического ожидания не имеет.

Математическое ожидание функции $\varphi(X)$ от случайной величины можно рассчитать без введения её плотности распределения по формуле:

$$M[\varphi(X)] = m_\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx. \tag{2.14.}$$

Свойства математического ожидания:

1. M[C]=C, т.е. математическое ожидание постоянной равно самой постоянной;

2. $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$ для любой случайной величины X и произвольного числа C;

3. $M[X+Y] = M[X] + M[Y]$ для произвольных случайных величин X, Y;

4. $M[X_1 \cdot X_2 \cdots X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdots M[X_n]$ для n независимых случайных величин $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$.

Размерность математического ожидания равна размерности случайной величины X.

2.2.2. Дисперсия

Дисперсией или рассеянием случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от своего математического ожидания:

$$D[x] = M\big[(X - M[X])^2\big]. \tag{2.15.}$$

Если случайная величина X дискретна и задана своим рядом распределения, то

$$D[X] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_X)^2\, p_i. \tag{2.16.}$$

Если случайная величина X непрерывна и задана на $[a, b]$, то

$$D[X] = \int\limits_a^b (x_i - m_X)^2\, f(x) dx, \tag{2.17.}$$

где $f(x)$ — функция плотности вероятности.

Из свойств математического ожидания и определения дисперсии имеем

$$\begin{aligned} D[X] &= M\big[(X - m_X)^2\big] = M\big[X^2 - 2Xm_X + m_X^2\big] = \\ &= M[X^2] - 2m_X M[X] + m_X^2 = M[X^2] - m_X^2. \end{aligned} \tag{2.18.}$$

Итак,

$$D[X] = M[X^2] - m_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - m_X^2, \tag{2.19.}$$

то есть дисперсия случайной величины X равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата математического ожидания.

Формула (2.19.) удобна для практического вычисления дисперсии. Размерность дисперсии равна квадрату размерности величины X. Величина $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$ называется средним квадратичным отклонением случайной величины.

Её размерность совпадает с размерностью величины X.

Вероятностный смысл дисперсии: дисперсия измеряет меру рассеивания значений случайной величины X относительно своего математического ожидания.

Механическим аналогом дисперсии служит момент инерции системы материальных точек, распределенных на прямой, относительно своего центра масс.

Свойства дисперсии:

1. $D[C] = 0$, где $C = const$;
2. $D[X] \geqslant 0$;
3. $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$ для любой случайной величины X и произвольного числа C ;
4. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$ для независимых случайных величин X и Y.

Свойства среднего квадратического отклонения:

1. $\sigma[C] = 0$, где $C = Const$;
2. $\sigma[C \cdot X] = C \cdot \sigma[X]$;
3. $\sigma[X + Y] = \sqrt{\sigma^2[X] + \sigma^2[Y]}$ для независимых случайных величин X и Y.

Дополнение. *Математическое ожидание* и *дисперсия* являются частными случаями более общих понятий *моментов* распределения (по аналогии с моментами распределений материальных точек).

Различают *начальные моменты* $k-$го порядка

$$\alpha_k = M[x^k] \tag{2.20.}$$

и *центральные* моменты $k-$го порядка

$$\mu_k = M[(x - M[x])^k]. \tag{2.21.}$$

Выведем полезное соотношение между центральными и начальными моментами. Положим $(M[x] = m)$. Разложим $(x - m]^k$ по формуле бинома Ньютона:

$$(x - M[x])^k = ((-m) + x)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot C_k^i \cdot m^i \cdot x^{k-i}.$$

Взяв математическое ожидание от левой и правой частей данного выражения, получим:

$$\mu_k = M\left[(x - M[x])^k\right] = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot C_k^i \cdot m^i \cdot \alpha_{k-i} \tag{2.22.}$$

Используя (2.22.), вычислим несколько моментов.

k	μ_k	α_k
0	1	1
1	0	$M[X]$
2	$D[X] = \alpha_2 - \alpha_1^2$	$M[X^2]$
3	$\alpha_3 - 3\alpha_1 \cdot \alpha_3 - 2\alpha_1^2$	$M[X^3]$
4	$\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_4$	$M[X^4]$
$\dots$	$\dots$	$\dots$

Таблица 2.2. Центральные моменты, как функции начальных моментов

Для более «тонкой» характеристики формы распределения вводятся коэффициенты *асимметрии* γ_1 и *эксцесса* γ_2:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{2.23.}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \tag{2.24.}$$

Набор начальных моментов индивидуален для каждого распределения и служит для его идентификации как отпечатки пальцев для идентификации человека.

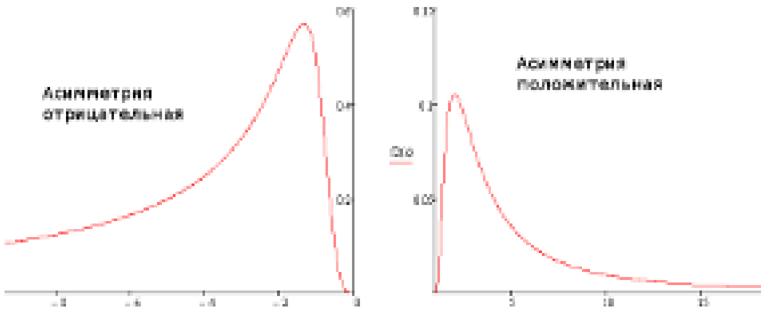


Рис. 2.4. Примеры несимметричных распределений

2.2.3. Решение задач

Задача 1. Дан ряд распределения дискретной случайной величины X:

x	10	20	30	40
p	0.2	0.15	0.25	0.4

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, $M[2X+3]$, $D[-3X+2]$.

▼ **Решение.**

По формуле (2.12.) находим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 &= \\ = 10 \cdot 0.2 + 20 \cdot 0.15 + 30 \cdot 0.25 + 40 \cdot 0.4 &= 28.5. \end{aligned}$$

$$M[2X+5] = 2M[X] + M[5] = 2M[X] + 5 = 2 \cdot 28.5 + 5 = 62.$$

По формуле (2.19.) найдем дисперсию:

$$\begin{aligned} D[X] &= M[X^2] - m_X^2 = \\ &= (10^2 \cdot 0.2 + 20^2 \cdot 0.15 + 30^2 \cdot 0.25 + 40^2 \cdot 0.4) - (28.5)^2 = \\ &= 945 - 812.25 = 132.75. \end{aligned}$$

$$D[-3X+2] = 9D[X] + D[2] = 9D[X] = 9 \cdot 132.75 = 1194.75$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{132.75} = 11.52.$$

▲

Задача 2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины X, функция распределения которой

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}.$$

▼ **Решение.** Найдем плотность вероятности:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}.$$

Математическое ожидание найдем по формуле (2.13.):

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{0}(x\cdot 0)dx+\int_{0}^{2} x\cdot(\frac{3x}{2}-\frac{3x^2}{4})dx+\int_{2}^{\infty}(x\cdot 0)dx=$$
$$=(x^3/2-3x^4/16)\mid_0^2=1.$$

Дисперсию найдем по формуле (2.19.):

Найдем сначала математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M[X^2]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int\limits_{0}^{2} x^2\left(\tfrac{3}{2}x-\tfrac{3}{4}x^2\right)dx=$$
$$=\int\limits_{0}^{2}\left(\tfrac{3}{2}x^3-\tfrac{3}{4}x^4\right)dx=\tfrac{3}{8}x^4-\tfrac{3}{20}x^5\Big|_0^2=\tfrac{6}{5}.$$

Тогда $D[X]=\frac{6}{5}-1=\frac{1}{5}=0.2$.

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{\frac{1}{5}}=0.4472.$$

▲

Задача 3. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения:

x	-1	0	1	2
p	0.2	0.3	0.4	0.1

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^X$.

▼ **Решение.** $M[Y] = M[e^X] = e^-1 \cdot 0.2 + e^0 \cdot 0.3 + e^1 \cdot 0.4 + e^2 \cdot 0.1 =$

$= 0.2 \cdot 0.3679 + 1 \cdot 0.3 + 2.71828 \cdot 0.4 + 7.389 \cdot 0.1 = 2.2.$

$$D[Y] = D[e^x] = M\big[(e^X)^2\big] - M^2[e^X] =$$
$$= \big[(e^{-1})^2 \cdot 0.2 + (e^0)^2 \cdot 0.3 + (e^1)^2 \cdot 0.4 + (e^2)^2 \cdot 0.1\big] - (2.2)^2 =$$
$$= \big(e^{-2} \cdot 0.2 + 0.3 + e^2 \cdot 0.4 + e^4 \cdot 0.1\big) - 4.84$$
$$= 8.741 - 4.84 = 3.9.$$

▲

Задача 4. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0.2$ возможного значения x_1, математическое ожидание $M[X] = 3.8$ и дисперсия $D[X] = 0.16$. Найти закон распределения случайной величины.

▼ **Решение.** Так как случайная величина X принимает только два значения x_1 и x_2, то вероятность $p_2 = P(X = x_2) = 1 - p_1 = 1 - 0.2 = 0.8$.

По условию задачи имеем:

$M[X] = x_1p_1 + x_2p_2 = 0.2x_1 + 0.8x_2 = 3.8;$

$D[X] = (x_1^2p_1 + x_2^2p_2) - M^2[X] = (0.2x_1^2 + 0.8x_2^2) - (0.38)^2 = 0.16.$

Таким образом получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 8x_2 & = & 38 \\ 2x_1^2 & + & 8x_2^2 & = & 146 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & + & 4x_2 & = & 19 \\ x_1^2 & + & 4x_2^2 & = & 73 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 19 - 4x_2 \\ (19 - 4x_2)^2 + 4x_2^2 = 73 \end{cases} \Rightarrow$$

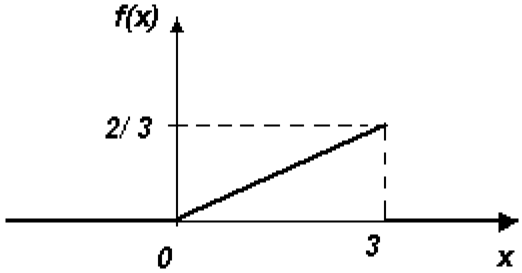
$$\Rightarrow \quad 5x_2^2 - 38x_2 + 72 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_2' = 4 & x_2'' = 3.6 \\ x_1' = 3 & x_1'' = 4.6 \end{matrix}.$$

Условию $x_1 < x_2$ удовлетворяет решение $x_1 = 3$. $x_2 = 4$. Поэтому искомый закон распределения имеет вид:

x	3	4
p	0.2	0.8

▲

Задача 5. Случайная величина X подчинена закону распределения, график плотности которого имеет вид:



Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

▼ **Решение.** Найдем дифференциальную функцию распределения $f(x)$. Вне интервала $(0,\ 3)$ $f(x) = 0$. На интервале $(0,\ 3)$ график плотности есть прямая с угловым коэффициентом $k = 2/9$, проходящая через начало координат. Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{2}{9}x, & 0 < x < 3 \\ 0, & x \geqslant 3 \end{cases}.$$

Математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M[X] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int\limits_{0}^{3} x \cdot \tfrac{2}{9}xdx + \int\limits_{3}^{\infty} x \cdot 0dx = \\ &= \tfrac{2}{9}\int\limits_{0}^{3} x^2dx = \tfrac{2}{9 \cdot 3}\Big|_0^3 = 2. \end{aligned}$$

Найдем дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

$$\begin{aligned} D[X] &= M[X^2] - m_X^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2^2 = \\ &= \tfrac{2}{9}\int\limits_{0}^{3} x^3dx - 4 = \tfrac{2}{9 \cdot 4}x^4\Big|_0^2 - 4 = \tfrac{9}{2} - 4 = 0.5. \\ \sigma[X] &= \sqrt{D[X]} = \sqrt{0.5} == 0.707. \end{aligned}$$

▲

Задача 6. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы очков, выпадающих на четырех игральных кубиках при одном бросании.

▼ **Решение.** Обозначим A — число очков на одном кубике при одном бросании, B – число очков на втором кубике, C — на третьем кубике, D — на четвертом кубике.

Для случайных величин A, B, C, D закон распределения один.

$A,\ldots,D$	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Тогда $M[A] = M[B] = M[C] = M[D] = \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = 3.5$
и

$$\begin{aligned}
&M[A+B+C+D] = M[A] + M[B] + M[C] + M[D] = 14 \\
&M[A^2] = M[B^2] = M[C^2] = M[D^2] = \\
&= 1/6 \cdot (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \tfrac{91}{6} \\
&D[A] = D[B] = D[C] = D[D] = \tfrac{91}{6} - (3.5)^2 = \tfrac{91}{6} - \tfrac{49}{4} = \tfrac{35}{12} \\
&D[A+B+C+D] = D[A] + D[B] + D[C] + D[D] = \\
&= 4 \cdot \tfrac{35}{12} = \tfrac{35}{3} = 11.7 \\
&\sigma[A+B+C+D] = \sqrt{11.7} = 3.415.
\end{aligned}$$

▲

2.2.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Прибор состоит из четырех независимо работающих элементов.
Число работающих элементов — случайная величина, распределенная по закону:

x	0	1	2	3	4
p	0.02	0.15	0.35	0.36	A

Найти: A, математическое ожидание $M[X]$, $M[2X+4]$, дисперсию $D[X]$, $D[5X-6]$, среднее квадратичное отклонение $\sigma[X]$.

Ответ: $A = 0.12$; $M[X] = 2.41$; $M[2X+4] = 8.82$; D[X] = 0.9; $D[5X-6] = 22.5$; $\sigma[X] = 0.95$.

Задача 2. Дискретная случайная величина имеет ряд распределения

x	-1	0	1	2
p	0.3	0.1	0.5	0.1

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y= X^3.

Ответ: $M[Y] = 1$, $D[Y] = 6.2$.

Задача 3. Пусть случайные величины имеют плотности распределения:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ (x/18), & 0 < x \leqslant 6 \\ 0, & x > 6 \end{cases}, \quad f_2(x) = (1/2)\exp\{-|x|\}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $M[X_1] = 4,\ D[X_1] = 2,\ \ M[X_2] = 0,\ D[X_2] = 2.$

Задача 4. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения.

$$f(x) = \begin{cases} (1/2) \cdot \cos(x), & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = sin(2x)$.

Ответ: $M[Y] = 0,\ D[Y] = 16/15.$

Задача 5. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, которая имеет два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны математическое ожидание $M[X] = 3.5$; дисперсия $D[X] = 0.25$; вероятность значения $x_1:\ p_1 = 0.5$.

Ответ:

x	3	4
p	0.5	0.5

2.3. Законы распределения случайных величин

2.3.1. Биномиальное распределение

Пусть производятся испытания по схеме Бернулли:

1. Опыты независимы, т.е. результат каждого опыта не оказывает влияния на другие;

2. Вероятность $P(A) = p$ наступления события A в каждом опыте одна и та же.

Через X обозначим число наступлений события A в серии из n опытов.

Определение 2.5. Дискретная случайная величина X называется распределенной по биномиальному закону, если свои возможные значения она принимает с вероятностями

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ (k = 0, 1, 2, \dots, n). \qquad (2.25.)$$

Случайная величина X имеет ряд распределения

x	0	1	2	3	...	n
p	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2(1-p)^{n-2}$	$C_n^3 p^3(1-p)^{n-3}$	...	p^n

Числовые характеристики для биномиального распределения:

Математическое ожидание

$$M[X] = n \cdot p. \tag{2.26.}$$

Дисперсия

(2.27.)

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma[X] = \sqrt{np(1-p)}. \tag{2.28.}$$

Функция распределения $F(x)$ имеет вид ступенчатой функции с разрывами в точках $x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, причем величина скачка в точке $x = m$ равна вероятности $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$.

2.3.2. Распределение Пуассона

Определение 2.6. Случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона, если свои возможные значения $x_k,\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n, \ldots$ она принимает с вероятностями

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{2.29.}$$

где λ — параметр распределения (однопараметрическое распределение).

Замечания. Пуассоновское распределение является распределением дискретной случайной величины. Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона, если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала и $\lambda = n \cdot p$ — среднее число появлений события в n испытаниях. Случайная величина X имеет ряд распределения:

x	0	1	2	3	...	m	...
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	...

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$M[x] = \lambda;\ D[x] = \lambda;\ \sigma[X] = \sqrt{\lambda}. \tag{2.30.}$$

Отсюда следует смысл параметра λ.

2.3.3. Равномерное распределение

Определение 2.7. Непрерывная случайная величина X называется равномерно распределенной на $[a,\ b]$, если ее дифференциальная функция распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & x < a,\ x > b. \end{cases} \tag{2.31.}$$

Интегральная функция распределения равномерно распределенной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leqslant b \\ 1, & x > b \end{cases}. \tag{2.32.}$$

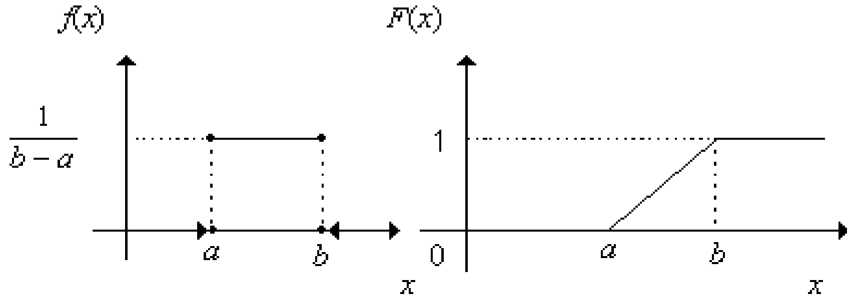


Рис. 2.5. Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ равномерного распределения

Вероятность того, что случайная величина, равномерно распределенная в интервале (α, β), принадлежащем [a, b], выражается формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a}. \qquad (2.33.)$$

Для равномерного распределения случайной величины X :

$$M[x] = \frac{a + b}{2}, \qquad (2.34.)$$

т.е. математическое ожидание является серединой промежутка $[a, b]$;

$$D[x] = \frac{(b - a)^2}{12}, \ \sigma[X] = \frac{b - a}{2\sqrt{3}}. \qquad (2.35.)$$

Пример. Ошибка отсчета показаний стрелочного прибора распределена равномерно на отрезке, равном цене деления.

2.3.4. Экспоненциальное распределение

Определение 2.8. Непрерывная случайная величина X называется распределенной по экспоненциальному (показательному) закону, если дифференциальная функция распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases}, \qquad (2.36.)$$

где λ — параметр распределения. Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases}. \qquad (2.37.)$$

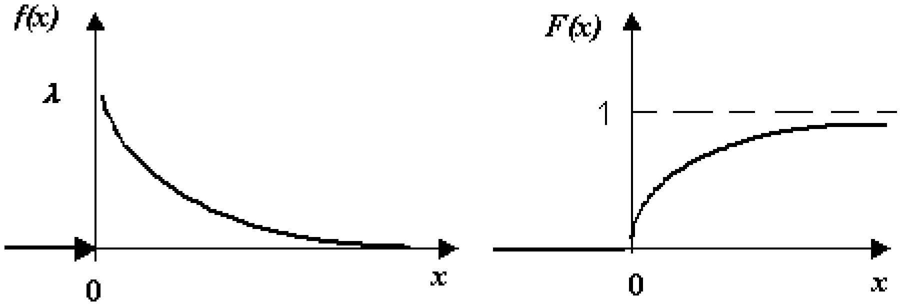


Рис. 2.6. Графики функций $f(x)$ и $F(x)$:

Числовые характеристики распределения:

$$M[x] = \frac{1}{\lambda}, \quad D[x] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma[x] = \frac{1}{\lambda}. \qquad (2.38.)$$

Эти формулы устанавливают вероятностный смысл параметра λ.

Вероятность попадания в интервал $(\alpha,\ \beta)$ дается выражением:

$$P(\alpha \leqslant x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}. \qquad (2.39.)$$

Примеры непрерывных случайных величин, распределенных по показательному закону:

- продолжительность телефонного разговора;
- срок службы радиоэлектронной аппаратуры;
- время ожидания при техническом обслуживании;

- длина пути молекулы между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами;
- время обнаружения цели локатором.

2.3.5. Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Определение 2.9. Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону или имеет гауссовское распределение, если дифференциальная функция распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2.40.)$$

где a, σ — параметры распределения.

График функции $f(x)$ называется нормальной кривой. Функция $f(x)$ имеет единственную точку экстремума $x = a$, в которой функция принимает наибольшее значение $f(A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. В точках $x = a \pm \sigma$ кривая имеет перегиб и $f(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, то ось Ox — горизонтальная асимптота для нормальной кривой. Изменение параметра σ ведет к изменению формы кривой: чем меньше σ, тем кривая круче; при увеличении σ она становится более пологой.

Нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a$.

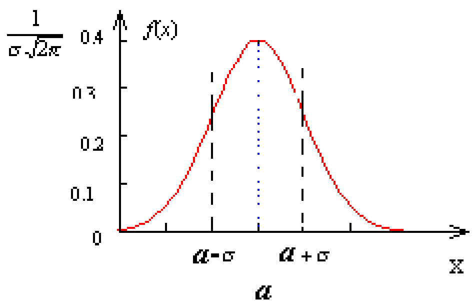


Рис. 2.7. Нормальная кривая

Вероятностный смысл параметров нормального распределения:

$$M[X] = a, \quad D[X] = \sigma^2, \quad \sigma[X] = \sigma, \qquad (2.41.)$$

Функция нормального распределения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}} d\xi. \quad (2.42.)$$

Этот «неберущийся» интеграл удобно выразить через табулированную функцию Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi. \quad (2.43.)$$

Именно

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \quad (2.44.)$$

Функция $\Phi(x)$ — нечетная.

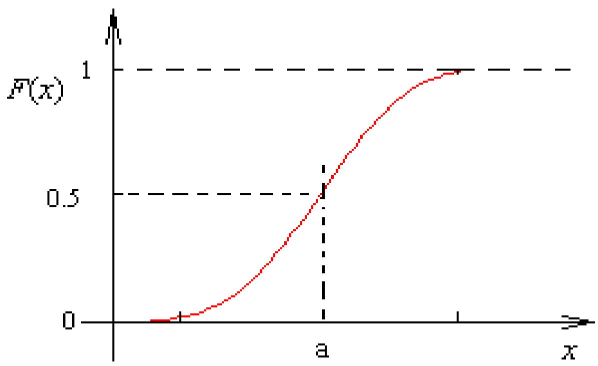


Рис. 2.8. График функции $F(x)$ нормального распределения

При $a = 0$, $\sigma = 1$ получаем стандартное (нормированное) нормальное распределение. Для него

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x). \quad (2.45.)$$

Функция $\varphi(x)$ — четная. Для нее составлены подробные таблицы.

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (2.46.)$$

Функция $F_0(x)$ — табулирована.

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[\alpha, \beta)$:

$$P(\alpha \leqslant x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \quad (2.47.)$$

Если $\alpha = a - \delta$, $\beta = a + \delta$, где δ — произвольное число, то

$$P(a - \delta \leqslant x < a + \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

При $\delta = 3\sigma$

$$P(a - 3\sigma \leqslant x < a + 3\sigma) = 2\Phi\left(3\right) = 2 \cdot 0.49865 = 0.9973.$$

Правило трех сигм. *Если случайная величина подчинена нормальному закону, то вероятность ее отклонения от математического ожидания больше трех средних квадратичных ошибок, близка к нулю* $(p = 0.0027)$. *Или практически достоверно, что нормальная случайная величина принимает значения в* $[a - 3\sigma,\ a + 3\sigma]$, *так как* $p = 0.9973$.

На практике многие случайные величины распределены нормально или почти нормально. Например: ошибки прямых измерений; ошибки стрельбы, наведения; отклонение напряжения в сети от номинала; суммарная выплата страхового общества за большой период; дальность полета снаряда; частота события при большом числе опытов; масса вылавливаемой рыбы одного вида; рост мужчин (женщин) одного возраста и национальности.

2.3.6. Решение задач

Задача 1. Вероятность того, что частица, вылетевшая из радиоактивного источника, будет зарегистрирована счетчиком, равна 0.0001. За время наблюдения из источника вылетело 30000 частиц. Найти вероятность того, что счетчик зарегистрировал:

1. Ровно 3 частицы;

2. Ни одной частицы;

3. Не менее 10 частиц.

▼ **Решение.** По условию $n = 30000$, $p = 0.0001$. События, состоящие в том, что частицы, вылетевшие из радиоактивного источника, зарегистрированы, независимы; число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона: $P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Найдем $\lambda :\ \lambda = np = 30000 \cdot 0.0001 = 3 = M[X]$. Искомые вероятности:

1. $P_{30000}(3) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = 0.224042,\ k = 3.$

2. $P_{30000}(0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = 0.049787,\ k = 0.$

3. $P_{30000}(x \geqslant 10) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{9} \frac{3^k e^{-3}}{k!} =$

$$= 1 - \left[\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 e^{-3}}{3!} + \right.$$
$$\left. + \frac{3^4 e^{-3}}{4!} + \frac{3^5 e^{-3}}{5!} + \frac{3^6 e^{-3}}{6!} + \frac{3^7 e^{-3}}{7!} + \frac{3^8 e^{-3}}{8!} + \frac{3^9 e^{-3}}{9!}\right] =$$
$$= 1 - (0.049787 + 0.149361 + 0.224042 +$$
$$+ 0.224042 + 0.168031 + 0.100819 + 0.050409 + 0.021604 +$$
$$+ 0.008102 + 0.002701) = 1 - 0.998898 = 0.001102.$$

▲

Задача 2. В партии 5% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 5 деталей. Написать закон распределения дискретной случайной величины X — числа нестандартных деталей среди пяти отобранных; найти математическое ожидание и дисперсию.

▼ **Решение.** Дискретная случайная величина X — число нестандартных деталей — имеет биномиальное распределение и может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$. Вероятность нестандартной детали в партии $p = 5/100 = 0.05$. Найдем вероятности этих возможных значений:

$x_1 = 0$	$P_5(0)$	$=$	$C_5^0 \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^5 = 0.7737809$
$x_2 = 1$	$P_5(1)$	$=$	$C_5^1 \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^4 = 0.2036267$
$x_3 = 2$	$P_5(2)$	$=$	$C_5^2 \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^3 = 0.02143433$
$x_4 = 3$	$P_5(3)$	$=$	$C_5^3 \cdot 0.05^3 \cdot 0.95^2 = 0.0011281$
$x_5 = 4$	$P_5(4)$	$=$	$C_5^4 \cdot 0.05^4 \cdot 0.95^1 = 0.0000297$
$x_6 = 5$	$P_5(5)$	$=$	$C_5^5 \cdot 0.05^5 \cdot 0.95^0 = 0.0000003$

Напишем искомый закон распределения:

x	0	1	2	3	4	5
p	0.773780	0.203626	0.021434	0.001128	0.000029	0.0000003

Найдем числовые характеристики:

$$M\,[X] = \sum_{i=0}^{5} x_i p_i = 0 \cdot 0.7737809 + 1 \cdot 0.2036267 + 2 \cdot 0.0214343 +$$
$$+ 3 \cdot 0.0011281 + 4 \cdot 0.0000297 + 5 \cdot 0.0000003 = 0.2499999 \approx 0.250$$

или

$$M[X] = n \cdot p = 5 \cdot 0.05 = 0.25.$$
$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = 0^2 \cdot 0.7737809 + 1^2 \cdot 0.2036267 +$$
$$+ 2^2 \cdot 0.0214343 + 3^2 \cdot 0.0011281 + 4^2 \cdot 0.0000297 + 5^2 \cdot 0.0000003 -$$
$$- 0.0625 = 0.2999995 - 0.0625 = 0.2374995 \approx 0.2375$$

или

$$D[X] = n \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 0.2375.$$

▲

Задача 3. Время обнаружения цели радиолокатором распределено по показательному закону

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geqslant 0 \end{cases},$$

где $\frac{1}{\lambda} = 10$ с — среднее время обнаружения цели. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 5 до 15 с после начала поиска.

▼ **Решение.** Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(5,\ 15)$ найдем по формуле (2.8.):

$$P(5 < x < 15) = \int_5^{15} f(t)dt =$$
$$= F(15) - F(5) = \left[1 - e^{-15\lambda}\right] - \left[1 - e^{-5\lambda}\right] = e^{-5\lambda} - e^{-15\lambda}.$$

При $\lambda = \frac{1}{10} = 0.1$ получаем

$$P(5 \leq x < 15) = e^{-0.5} - e^{-1.5} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \frac{1}{e}\right) =$$
$$= 0.6065(1 - 0.3679) = 0.6065 \cdot 0.6321 = 0.3834.$$

▲

Задача 4. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону с параметрами $a = 0$, $\sigma = 20$ мм. Записать дифференциальную функцию распределения $f(x)$ и найти вероятность того, что при измерении допущена ошибка в интервале от 5 до 10 мм.

▼ **Решение.** Подставим значения параметров a и σ в дифференциальную функцию распределения (2.40.):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{20\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\cdot(20)^2}} = \frac{1}{20\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{800^2}}.$$

По формуле (2.47.) найдем вероятность попадания случайной величины X в интервале $[0,\ 5)$:

$$P(5 \leqslant x < 10) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{10-0}{20}\right) - \Phi\left(\frac{5-0}{20}\right)$$
$$= \Phi(0.5) - \Phi(0.25) = 0.19146 - 0.09871 = 0.9275.$$

Здесь значения функции Лапласа взяты по таблице. ▲

Задача 5. Цена деления шкалы амперметра равна 0.1 ампера. Показания амперметра округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0.03 ампера. Найти математическое ожидание, дисперсию ошибки округления отсчета и функцию $F(x)$.

▼ **Решение.** Ошибку округления отсчета можно считать распределенной равномерно на $[0;\ 0.1]$, т.е. $a = 0$, $b = 0.1$. Тогда дифференциальная функция распределения $f(x)$ будет иметь вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{0.1-0} = 10, & 0 \leqslant x \leqslant 0.1 \\ 0, & x > 0.1 \end{cases}.$$

Найдем

$$M[X] = \tfrac{a+b}{2} = \tfrac{0+0.1}{2} = \tfrac{0.1}{2} = 0.05.$$
$$D[X] = \tfrac{(b-a)^2}{12} = \tfrac{(0.1-0)^2}{12} = \tfrac{0.01}{12} = 0.0008$$
$$P(0.03 < x < 0.07) = \tfrac{\beta-\alpha}{b-a} = \tfrac{0.07-0.03}{0.1-0} = \tfrac{0.04}{0.1} = 0.004.$$

▲

2.3.7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. По данным ОТК на сотню металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Записать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X числа брусков с зазубринами среди случайно взятых 4 брусков. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Ответ: $M[X] = 1,2;\ D[X] = 0.84;\ \sigma[X] = 0.916$

x	0	1	2	3	4
p	0.2401	0.4116	0.2646	0.0756	0.0081

Задача 2. Магазин получил 5000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется поврежденной, равна 0.0001. Найти вероятность того, что магазин получит поврежденных бутылок:

1. Ровно 3;
2. Менее трех;
3. Хотя бы одну.

Ответ: $P(x < 3) = 0.985612; P(k > 0) = 0.393469; P(k = 3) = 0.012636.$

Задача 3. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[3;\ 5]$. Найти дифференциальную и интегральную функцию распределения, построить их графики, найти математическое ожидание, дисперсию и $P(2 < x < 4)$.

Ответ: $M[X] = 4;\ D[X] = 1/3;\ P(2 < x < 4) = 1/2.$

Задача 4. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0.4x}, & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$ и вероятность того, что случайная величина X в результате испытания попадает в интервал $(5, 10)$.

Ответ: $P = 0.11698$.

Задача 5. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $M[X] = A$ и дисперсией $D[X] = \sigma^2$. Найти вероятность того, что случайная величина X отклоняется от своего математического ожидания не больше, чем на $k(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ средних квадратичных отклонений.

Ответ: $P_1 = 0.68278; P_2 = 0.9545; P_3 = 0.99730; P_4 = 0.999994$.

Вопросы для самопроверки

1. Какая величина называется случайной величиной?
2. Дайте определение дискретной и непрерывной случайных величин. Приведите примеры дискретной и непрерывной случайных величин.
3. Что называется законом распределения случайной величины?
4. Что называется рядом распределения дискретной случайной величины?
5. Дайте определение функции распределения вероятности. перечислите и докажите свойства функции распределения.
6. Как найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
7. В чем различаются графики функции распределения дискретной и непрерывной случайных величин?
8. Дайте определение плотности распределения вероятностей. Перечислите и докажите ее свойства. Пригодно ли понятие плотности распределения вероятностей для дискретных случайных величин?
9. Как определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал с помощью плотности распределения?

10. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?

11. Что называется математическим ожиданием непрерывной случайной величины?

12. Какова механическая интерпретация математического ожидания?

13. Что называется модой случайной величины? Что называется медианой случайной величины?

14. Дайте определение дисперсии случайной величины. Перечислите ее свойства.

15. Что называется средним квадратичным отклонением случайной величины?

16. Что называется начальным моментом $k-$го порядка случайной величины?

17. Что называется центральным моментом $k-$го порядка случайной величины?

18. Какое распределение случайной величины называется биномиальным? Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей биномиальное распределение?

19. Какое распределение случайной величины называется распределением Пуассона? Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей распределением Пуассона?

20. Какое распределение случайной величины называется равномерным?

21. Какое распределение случайной величины называется показательным распределением?

22. Какое распределение случайной величины называется нормальным распределением?

23. Как называется график плотности нормального распределения и каковы его свойства?

24. Что называется функцией Лапласа и каковы ее свойства?

25. В чем заключается сущность закона больших чисел?

26. Как записывается неравенство Чебышева?

27. Какое практическое и теоретическое значение имеет неравенство Чебышева?

28. Сформулируйте и докажите теорему Чебышева.

29. Какое практическое значение имеет теорема Чебышева?

30. Объясните, пользуясь теоремой Бернулли, свойство устойчивости относительных частот появления события в серии испытаний.

31. В чем заключается сущность центральной предельной теоремы?

32. Приведите примеры задач, в которых применяется теорема Муавра-Лапласа?

Глава 3.
Многомерные случайные величины

На пространстве Ω элементарных событий каждому элементарному событию ω_i поставим в соответствие n случайных величин:

по закону φ_1 одномерную случайную величину X_1;

по закону φ_2 одномерную случайную величину X_2;

... ...

по закону φ_n одномерную случайную величину X_n.

В этом случае говорят, что, на Ω определена система случайных величин $(X_1,\ X_2,\ \ldots X_n)$. В дальнейшем будем использовать сокращенное обозначение для термина *«случайная величина»* – СВ.

Примеры:

1. Пусть пространство элементарных событий – множество студентов данной группы, участвующих в социологическом опросе. Введем случайные величины: X_1- рост человека, X_2- его масса. Тогда $X = (X_1,\ X_2)$ – двумерная случайная величина.

2. Пусть $X_1,\ \ X_2, X_3$ – координаты центра тяжести в некоторой декартовой системе координат. Тогда случайное положение центра тяжести ракеты в пространстве – трёхмерная СВ $X = (X_1,\ X_2,\ X_3)$.

Для простоты рассмотрим двухмерный случай $(X,\ Y)$. Возможные значения двухмерной СВ $(X,\ Y)$ есть пары чисел $(x,\ y)$.

Геометрически двумерную СВ можно трактовать как случайную точку $M\,(X,\ Y)$ на плоскости xOy. Если составляющие СВ X и Y – дискретные (непрерывные) СВ, то и двумерная случайная величина называется дискретной (непрерывной).

3.1. Законы распределения двухмерной случайной величины

3.1.1. Матрица распределения двумерной дискретной случайной величины

Пусть $X\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$ и $Y\left(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m\right)$ — одномерные дискретные случайные величины. Тогда система $(X,\ Y)$ принимает значение $\left(x_i,\ y_j\right)$ $\quad (i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$.

Обозначим $p_{ij}=P\left(X=x_i,\ Y=y_j\right)$ вероятность того, что СВ X принимает значение x_i, а СВ Y – значение y_j. Из чисел p_{ij} можно составить таблицу размера $m\times n$. Эта таблица называется законом распределения двумерной СВ или матрицей распределения системы $(X,\ Y)$.

Y	X			
	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	p_{m1}	p_{m2}	$\ldots$	p_{mn}

Таблица 3.1. Ряд распределения системы из двух дискретных случайных величин

Так как события $\left(X=x_i,\ Y=y_j\right)$ образуют полную группу, то $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}p_{ji}=1$.

Зная матрицу распределения системы $(X,\ Y)$, можно найти *частные* законы распределения СВ X и Y, входящих в систему.

Так, СВ X принимает значение x_i в комбинациях

$$\left(x_i,y_1\right),\left(x_i,y_2\right),\ \left(x_i,\ y_3\right),\ \ldots,\ \left(x_i,\ y_m\right)$$

с вероятностями $p_{1i},\ p_{2i},\ p_{3i},\ \ldots,\ p_{mi}$.

Событие $A=\left(X=x_i\right)$ (i – фиксировано) представлено в виде группы m несовместных событий.

$$A = (X = x_i) = (X = x_i,\ Y = y_1) \cup (X = x_i,\ Y = y_2) \cup \ldots$$
$$\ldots \cup (X = x_i,\ Y = y_m) \quad (3.1.)$$

Следовательно, по теореме сложения вероятностей несовместных событий, имеем

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i,\ Y = y_j) = \sum_{j=1}^{m} p_{ji} = p_{1i} + p_{2i} + \ldots + p_{mi}$$

(i– фиксировано).

Аналогично находится закон распределения СВ Y. В результате мы получаем следующие ряды распределения:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_x	$\sum_{j=1}^{m} p_{j1}$	$\sum_{j=1}^{m} p_{j2}$	$\ldots$	$\sum_{j=1}^{m} p_{jm}$

Таблица 3.2. Ряд распределения СВ X

Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
p_y	$\sum_{i=1}^{n} p_{1i}$	$\sum_{i=1}^{n} p_{2i}$	$\ldots$	$\sum_{i=1}^{n} p_{mi}$

Таблица 3.3. Ряд распределения СВ Y

3.1.2. Функции от дискретных случайных величин

Пусть X – дискретная СВ с законом распределения

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

Рассмотрим СВ $Y = \varphi(X)$, где φ – заданная функция. Если СВ X принимает значения $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, то СВ $Y = \varphi(X)$ принимает значения $\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\ \ldots,\ \varphi(x_n)$ с вероятностями $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_n$. Если значения $\varphi(x_i)$ различны, то закон распределения СВ $Y = \varphi(X)$ имеет вид

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\ldots$	$\varphi(x_n)$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Таблица 3.4.

Если $\varphi(X_i) = \varphi(X_j)$, $(i \neq j)$, то в силу несовместности событий $(X = x_i)$ и $(X = x_j)$ получаем $(X = x_j) \cup (X = x_i) = (Y = \varphi(x_i))$.

По теории сложения вероятностей несовместных событий при $i \neq j$

$$P(Y = \varphi(x_i)) = P(X = x_i) + P(X = x_j) = P_i + P_j$$

Пусть X и Y – дискретные независимые СВ с законами распределения

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_x	p_1	p_2	$\dots$	p_m

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_m
p_y	p_1	p_2	$\dots$	p_m

Найдём закон распределения СВ $Z = X + Y$. Для этого надо найти все возможные значения Z и их вероятности. Возможные значения Z есть суммы каждого возможного значения X со всеми возможными значениями Y: $z_{ij} = x_i \cdot y_j$.

Найдём вероятности этих возможных значений.

Каждое событие $\{Z = z_{ij}\}$ есть произведение двух событий: $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$, вероятности которых равны p_i и p_j соответственно. Так как $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ – независимые, то вероятности их совместного наступления по теории умножения равны $p_i \cdot p_j$.

Если значения $Z_{ij} = x_i + y_j$ различные, то закон распределения СВ Z имеет вид

$$P(Z_{ij}) = p_i \cdot p_j \tag{3.2.}$$

Если среди значений Z_{ij} есть одинаковые, то их вероятности надо сложить.

Чтобы составить закон распределения СВ $Z = XY$, надо найти все возможные значения Z и их вероятности. Возможные значения Z есть произведения каждого возможного значения X со всеми возможными значениями Y: $Z_{ij} = x_i + y_j$. Вероятности этих значений равны произведению вероятностей $p_i \cdot p_j$. Если значения

Z_{ij} различные, то закон распределения Z имеет вид такой же как и для суммы (3.2.).

$$P(Z_{ij}) = p_i \cdot p_j$$

Если среди значений Z_{ij} есть одинаковые, то нужно сложить их вероятности.

3.1.3. Функция распределения двумерной случайной величины

Пусть $(X,\ Y)$ – двумерная СВ.

Введем вероятность совместного появления двух событий $(X < x)$ и $(Y < y)$

$$P\left(X < x,\ Y < y\right) \forall x,\ y \in R$$

Функция

$$F\left(x,\ y\right) = P\left(X < x,\ Y < y\right) \forall x,\ y \in R \qquad (3.3.)$$

называется функцией распределения двумерной СВ $(X,\ Y)$.

Геометрически $F\left(x,\ y\right)$ задаёт вероятность попадания случайной точки $(X,\ Y)$ в бесконечный прямой угол с вершиной в точке $(x,\ y)$

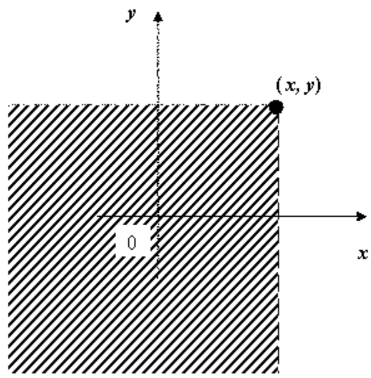


Рис. 3.1. Геометрическая интерпретация функции распределения системы двух СВ

Функция распределения $F\left(x,\ y\right)$ обладает следующими свойствами:

1. $0 \leqslant F(x,\ y) \leqslant 1, \quad \forall x, y \in R$;
2. $F(x,\ y)$ - неубывающая функция по каждому аргументу:
   если $x_2 > x_1$, y фиксировано, то $F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y)$,
   если $y_2 > y_1$, x – фиксировано, то $F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1)$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$,
4. $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$,
5. $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0$
6. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$,

Первые три предела соответствуют вероятностям невозможных событий а четвёртый – достоверного события.

Частные функции распределения для СВ X и Y $F_1(x)$ и $F_2(y)$ получим с помощью следующих преобразований:

$$F_1(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y); \quad F_2(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) \tag{3.4.}$$

Из определения функции распределения следует, что

$$\begin{aligned} P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant Y \leqslant y_2) = \\ = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] = \\ = [F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)] - [F(x_1, y_2) + F(x_2, y_1)] \end{aligned} \tag{3.5.}$$

3.1.4. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины

Пусть функция распределения $F(x,\ y)$ системы $(X,\ Y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x,\ F'_y,\ F''_{xy}$.

Функция

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \leqslant X \leqslant x+\Delta x,\ y \leqslant Y \leqslant y+\Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \quad (3.6.)$$

называется плотностью распределения вероятностей системы $(X,\ Y)$.

Свойства плотности вероятностей $f(x,y)$ системы $(X,\ Y)$.

Неотрицательность.

$$f(x,y) \geqslant 0,\ \forall x,\ y \leqslant R; \quad (3.7.)$$

Вероятность попадания в область. Если $f(x,y)$ непрерывна в произвольной замкнутой области D на плоскости, то

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)\,dxdy. \quad (3.8.)$$

Связь с функцией распределения.

$$F(x,\ y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\ dxdy; \quad (3.9.)$$

Условие нормировки.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1; \quad (3.10.)$$

Частные функции распределения.

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \right] dx \quad (3.11.)$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right] dy; \quad (3.12.)$$

Частные плотности распределения.

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx. \qquad (3.13.)$$

3.1.5. Зависимые и независимые случайные величины. Условные законы распределения

Определение 3.1. Две случайные величины являются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина. В противном случае случайные величины считаются зависимыми.
Определение 3.2. Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина, входящая в систему, приняла определенное значение, называется условным законом распределения.

Система дискретных случайных величин

Событие $A = (X = x_i,\ Y = y_j)$ является произведением двух событий $B = (X = x_i)$ и $C = (Y = y_j)$. Если события B и C независимы, то и СВ X и Y, входящие в систему, называются независимыми. В противном случае они зависимы.

Тогда

$$P(A) = P(BC) = \\ = \begin{cases} P(B)\cdot P(C) & B \text{ и } C \text{ независмы} \\ P(B)\cdot P(C\,|B) = P(C)\cdot P(B\,|C) & B \text{ и } C \text{ зависимы} \end{cases} \qquad (3.14.)$$

Условные вероятности

$$P(Y = y_j|\ X = x_i) = \frac{P(X = x_i,\ Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i} \qquad (3.15.)$$

$$P\left(X=x_i \middle| \, Y=y_j\right)=\frac{P\left(X=x_i,\ Y=y_j\right)}{P\left(Y=y_j\right)}=\frac{p_{ij}}{p_j} \qquad (3.16.)$$

и есть условные законы распределения двух дискретных случайных величин, входящих в систему.

Если случайные величины независимы, то из условия независимости (3.14.) следует, что $p_{ij}=p_j\cdot p_i$ и условные распределения совпадают с безусловными:

$$\begin{aligned} P(y \mid X=x_i) &= \frac{p_{ji}}{p_i}=\frac{p_j\cdot p_i}{p_i}=p_j \\ P(x \mid Y=y_j) &= \frac{p_{ji}}{p_j}=\frac{p_j\cdot p_i}{p_j}=p_i \end{aligned} \qquad (3.17.)$$

Условные функции распределения дискретных СВ вводятся аналогично:

$$\begin{aligned} F(y \mid X=x_i) &= P(Y<y \mid X=x_i)=\frac{P(Y<y,X=x_i)}{P(X=x_i)} \\ F(x \mid Y=y_j) &= P(X<x \mid Y=y_j)=\frac{P(X<x,Y=y_j)}{P(Y=y_j)} \end{aligned} \qquad (3.18.)$$

Непрерывные СВ

Для непрерывной случайной величины вероятность того, что случайная величина примет какое-либо наперед заданное значение равна нулю:

$$P(X=\overset{*}{x})=F(\overset{*}{x})-F(\overset{*}{x})=0,$$

поэтому определение условной функции распределения вида (3.18.) невозможно.

Условную функцию распределения мы получим совершив предельный переход в выражении

$$\frac{P(Y<y,x\leqslant X\leqslant X+\vartriangle x)}{P(x\leqslant X<x+\vartriangle x)}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $\triangle\ x$ и заменим вероятности попадания в область соответствующими приращениями функций распределения, а затем перейдем к пределу при стремлении $\triangle\ x$ к нулю.

$$F(y \mid x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\dfrac{F(x+\triangle\ x, y) - F(x, y)}{\triangle\ x}}{\dfrac{F_1(x+\triangle\ x) - F_1(x)}{\triangle\ x}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{f_1(x)} = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{f(x, t)}{f_1(x)}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{y} f(t \mid x)\, dt \qquad (3.19.)$$

Мы ввели плотность распределения СВ X $f_1(x)$ под знак интеграла, поскольку она от y не зависит.

Аналогично найдем условную функцию распределения для СВ X.

$$F(x \mid y) = \frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}{f_2(y)} = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f(t, y)}{f_2(y)}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t \mid y)\, dt \qquad (3.20.)$$

Введем плотности условных распределений

$$f(x \mid y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$
$$f(y \mid x) = \frac{\partial}{\partial y} F(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \qquad (3.21.)$$

Теорема 3.1.1. Для независимости СВ X и Y необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$F\left(x, y\right) = F_1\left(x\right) \cdot F_2\left(y\right) \qquad (3.22.)$$

или (для непрерывных случайных величин)

$$f\left(x, y\right) = f_1\left(x\right) \cdot f_2\left(y\right). \qquad (3.23.)$$

3.1.6. Решение задач.

Задача 3.1.6.1. Дискретная двумерная величина $(X,\ Y)$ задана матрицей распределения.

Y	X		
	1	2	3
-1	$17a$	$13a$	$25a$
1	$10a$	$30a$	$5a$

- Найти: константу a;
- ряды распределения X и Y;
- ряд распределения X, если известно, что Y приняла значение 1;
- ряд распределения Y, если известно, что X приняла значение 2;
- математическое ожидание $M[X]$ и $M[Y]$;
- $M[X|Y=1]$,
- $M[Y|X=2]$.

▼ **Решение.** Имеем СВ $X=(1,\ 2,\ 3)$ и СВ $Y=(-1,\ 1)$. Так как события $(X=x_i,\ Y=y_j)$ образует полную группу, то $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}=1$.
Тогда $a\,(17+13+25+10+30+5)=1$ и $a=\frac{1}{100}=0,01$.
Матрица распределения принимает вид:

Y	X		
	1	2	3
-1	0.17	0.13	0.25
1	0.10	0.30	0.05

Суммируя по столбцам и строкам в таблице, получаем ряды распределения X и Y:

X	1	2	3
P_x	$0,27$	$0,49$	$0,30$

Y	-1	1
P_y	$0,55$	$0,45$

Контроль:
$$0,27+0,43+0,30=1, 0,55+0,45=1.$$

Так как, например $P\left(X=3,\ Y=-1\right)=0,05\neq 0,30\cdot 0,55$, то СВ X и Y зависимы. Находим ряд распределения X при $Y=1:$

$$P\left(X|Y=1\right)=\frac{P\left(X=x_i,\ Y=1\right)}{P\left(Y=1\right)}\Rightarrow P\left(X=1|Y=1\right)=$$
$$=\frac{P\left(X=1,\ Y=1\right)}{P\left(Y=1\right)}=\frac{0,10}{0,45}=\frac{2}{9}$$

$$P\left(X=2|Y=1\right)=\frac{P\left(X=2,\ Y=1\right)}{P\left(Y=1\right)}=\frac{0,30}{0,45}=\frac{6}{9}$$

$$P\left(X=3|Y=1\right)=\frac{P\left(X=3,\ Y=1\right)}{P\left(Y=1\right)}=\frac{0,05}{0,45}=\frac{1}{9}$$

Аналогично найдём:

$$P\left(Y=-1|X=2\right)=\frac{P\left(Y=-1,\ X=2\right)}{P\left(X=2\right)}=\frac{0,13}{0,43}=\frac{13}{43},$$

$$P\left(Y=1|X=2\right)=\frac{P\left(Y=1,\ X=2\right)}{P\left(X=2\right)}=\frac{0,30}{0,43}=\frac{30}{43}.$$

Следовательно, искомые ряды распределений:

$\{X\,\|Y=1\}$	1	2	3
P	$2/9$	$6/9$	$1/9$

$\{Y\|\,X=2\}$	-1	1
P	$19/43$	$30/43$

Контроль:
$$\frac{2}{9}+\frac{6}{9}+\frac{1}{9}=1;\ \frac{13}{43}+\frac{30}{43}=1.$$

Используя ряды распределений X и Y, найдём математические ожидания:

$$m_x=M[x]=1\cdot 0,27+2\cdot 0,43+3\cdot 0,30=2,03$$
$$m_y=M[y]=-1\cdot 0,55+1\cdot 0,45=-0,1.$$

Используя ряды распределений X при Y=1 и Y при X=2, найдём условные математические ожидания:

$$M[X|Y=1]=1\cdot\frac{2}{9}+6\cdot\frac{2}{9}+3\cdot\frac{1}{9}=\frac{17}{9},$$

$$M[Y|X=2]=-1\cdot\frac{13}{43}+1\cdot\frac{30}{43}=\frac{17}{43}.$$

▲

Задача 3.1.6.2. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной цели. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8; для второго - 0,9. Написать матрицу распределения системы $(X,\ Y)$, где X — число попаданий в мишень первым стрелком при трёх выстрелах, Y— число попаданий в мишень вторым стрелком при двух выстрелах.

▼ **Решение.** С.В. X принимает значения (0, 1. 2, 3), а С.В. Y=(0, 1, 2). Найдём ряды распределений С.В. X и Y, используя формулу Бернулли

$$\begin{array}{llll}
P_3(0)=C_3^0\cdot 0,8^0\cdot 0,2^3 & =0,008 & P_2(0) & =C_2^0\cdot 0,9^0\cdot 0,1^2=0,01\\
P_3(1)=C_3^1\cdot 0,8^1\cdot 0,2^2 & =0,096 & P_2(1) & =C_2^1\cdot 0,9^1\cdot 0,1^1=0,18\\
P_3(2)=C_3^2\cdot 0,8^2\cdot 0,2^1 & =0,384 & P_2(2) & =C_2^2\cdot 0,9^2\cdot 0,1^0=0,81\\
P_3(3)=C_3^3\cdot 0,8^3\cdot 0,2^0 & =0,512 & &
\end{array}$$

X	0	1	2	3
P	$0,008$	$0,096$	$0,384$	$0,512$

Y	0	1	2
P	$0,01$	$0,18$	$0,81$

Так как событие $A(X=n)$ $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ и $B(Y=m)$ $m=0,\ 1,\ 2$ независимы, то $P(X=n,\ Y=m)=P(X=n)\cdot P(Y=m)$.

Составим таблицу:

Y	X			
	0	1	2	3
0	$0,00008$	$0,00096$	$0,00384$	$0,00512$
1	$0,00144$	$0,01728$	$0,06912$	$0,09216$
2	$0,00648$	$0,07776$	$0,31104$	$0,41472$

которая является искомой матрицей распределения системы $(X,\ Y)$. ▲

Задача 3.1.6.3. Независимые С.В. X и Y заданы законами распределения

X	-1	0	1
P	$0,2$	$0,5$	$0,3$

Y	0	1	2	3
P	$0,1$	$0,2$	$0,4$	$0,3$

1. Составить закон распределения для произведения, суммы и функции от СВ:
   - $U=X\cdot Y$;

- $V = X + Y$;
- $W = 2X + 3Y$

2. Найти:

- $M[U], \quad D[U], \quad \sigma[U]$;
- $M[V], \quad D[V], \quad \sigma[V]$;
- $M[W], \quad D[W], \quad \sigma[W]$.

▼ **Решение.** 1. Перемножим все возможные значения С В X и Y и их вероятности. Объединим одинаковые значения С.В., складывая при этом их вероятности, и запишем в порядке возрастания.

$U = X \cdot Y$	-3	-2	-1	0	1	2	3
P_u	$0,06$	$0,08$	$0,04$	$0,55$	$0,06$	$0,12$	$0,09$

Контроль:

$$0,06 + 0,08 + 0,04 + 0,55 + 0,06 + 0,12 + 0,09 = 1.$$

Это и есть искомый закон распределения С.В. $U = X \cdot Y$.

Отсюда находим:

$$M[U] = -3 \cdot 0,06 - 2 \cdot 0,08 - 1 \cdot 0,04 + 0 \cdot 0,55 + 1 \cdot 0,06 + 2 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,09 = 0,19$$

$$M\left[U^2\right] = 9 \cdot 0,06 + 4 \cdot 0,08 + 1 \cdot 0,04 + 0 \cdot 0,55 + 1 \cdot 0,06 + 4 \cdot 0,12 + 9 \cdot 0,09 = 2,25$$

$$D[U] = M\left[U^2\right] - M^2[U] = 2,25 - (0,19)^2 = 2,2139$$

$$\sigma[U] = \sqrt{D[U]} = 1,4879$$

2. Сложим все возможные значения С.В. X и Y и перемножим их вероятности. Объединим одинаковые значения С.В. X, складывая при этом их вероятности

V	-1	0	1	2	3	4
P_x	$0,02$	$0,09$	$0,21$	$0,32$	$0,27$	$0,09$

Контроль:

$$0,02 + 0,09 + 0,21 + 0,32 + 0,27 + 0,9 = 1$$

Это и есть искомый закон распределения С.В. $V = X \cdot Y$

Отсюда находим

$$M[V] = -1 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,09 + 1 \cdot 0,21 + 2 \cdot 0,32 + 3 \cdot 0,27 + 4 \cdot 0,09 = 2$$

$$M\left[V^2\right] = 1 \cdot 0,02 + 1 \cdot 0,21 + 4 \cdot 0,32 + 9 \cdot 0,27 + 16 \cdot 0,09 = 5,38$$

$$D[V] = M\left[V^2\right] - M^2[V] = 1,38$$

$$\sigma[V] = 1,1747$$

$W_1 = 2X$	-2	0	2
P	0.2	0.5	0.3

$W_2 = 3Y$	0	3	6	9
P	0.1	0.2	0.4	0.3

3. Запишем законы распределения С.В. $W_1 = 2X$ и С.В. $W_2 = 3Y$. Сложим все возможные значения С.В. W_1 и W_2, перемножая их соответствующие вероятности. Получим закон распределения С.В. $W = 2X + 3Y$.

W	-2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11
P_W	$0,02$	$0,05$	$0,04$	$0,03$	$0,10$	$0,08$	$0,06$	$0,20$	$0,06$	$0,12$	$0,15$	$0,09$

Отсюда находим

$$M[W] = 4 \cdot 0,02 + 1 \cdot 0,04 + 4 \cdot 0,03 + 9 \cdot 0,10 + 16 \cdot 0,08 + 25 \cdot 0,06+ \\ +36 \cdot 0,20 + 49 \cdot 0,06 + +9 \cdot 0,15 + 11 \cdot 0,09 = 5,90$$

или иначе

$$M[2X + 3Y] = 2M[X] + 3M[Y] = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 1,9 = 5,9$$

$$M[W^2] = 4 \cdot 0,02 + 1 \cdot 0,04 + 4 \cdot 0,03 + 9 \cdot 0,10 + 16 \cdot 0,08 + 25 \cdot 0,06+ \\ +36 \cdot 0,20 + 49 \cdot 0,06 + +64 \cdot 0,12 + 81 \cdot 0,15 + 121 \cdot 0,09 = 44,78$$

$$D[W] = M\left[W^2\right] - M^2[W] = 44,78 - (5,9)^2 = 9,97$$

или иначе

$$D[2X + 3Y] = 4D[X] + 9D[Y] = 4 \cdot 0,49 + 9 \cdot 089 = 9,97$$

$$\sigma[W] = \sqrt{D[W]} = 3,1575$$

▲

Задача 3.1.6.4. Дана функция

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0, \\ 1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y}, & \text{если } x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

- Доказать, что $F\left(x,y\right)$– функция распределения двумерной С.В. $\left(X,\ Y\right)$.
- Найти функции распределения С.В. X и Y.
- Выяснить, зависимы ли X и Y?
- Найти вероятность попадания случайной точки $\left(X,\ Y\right)$ в квадрат с вершинами $\left(1,\ 1\right),\ \left(2,\ 1\right),\ \left(2,\ 2\right),\ \left(1,\ 2\right)$.
- Найти функцию плотности распределения системы $\left(X,\ Y\right)$ в точке $A\left(2,\ 1\right)$.

▼ **Решение.** Проверим справедливость свойств функции распределения.

Проверим, что свойство ограниченности: $0 \leqslant F\left(xy\right) \leqslant 1$ справедливо.

Так как $F\left(x,y\right)=0$ при $x<0$ или $y<0$, то

$$\lim_{x\to-\infty} F\left(xy\right)=\lim_{y\to-\infty} F\left(xy\right)=\lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F\left(xy\right)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x,y)=1$$

таким образом, это свойство выполняется.

Покажем. что функция $F\left(x,y\right)$ является неубывающей функцией по каждому аргументу при фиксированном втором.

Находим функции распределения С.В. X и Y:

$$F_1\left(x\right)=\lim_{y\to+\infty} F\left(x,y\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{5^x}-\frac{1}{5^y}+\frac{1}{5^x\cdot 5^y}\right)=1-5^{-x}$$

$$F_2\left(y\right)=\lim_{x\to+\infty} F\left(x,y\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{5^x}-\frac{1}{5^y}+\frac{1}{5^x\cdot 5^y}\right)=1-5^{-y}$$

Таким образом,

$$F_1\left(x\right)=\begin{cases}1-5^{-x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

и

$$F_2\left(y\right)=\begin{cases}1-5^{-y}, & y>0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

– искомые функции распределения С.В. X и Y. Плотности распределения СВ в области определения равны:

$$f_1(x) = 5^{-x}\ln 5 > 0$$
$$f_2(y) = 5^{-y}\ln 5 > 0.$$

Поскольку частные плотности распределения неотрицательны, то функция распределения – неубывающая по каждой из своих переменным в предположении, что другая переменная не изменяется.

Так как

$$F_1(x)\cdot F_2(y) = \left(1-5^{-x}\right)\left(1-5^{-y}\right) = 1-5^{-x}-5^{-y}+5^{-x-y} = F(x,y),$$

то С.В. X и Y независимы.

Так как функция распределения имеет частные производные любого порядка, то мы можем найти плотность совместного распределения $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$:

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y) = \begin{cases} 5^{-x-y}\ln^2 5 & \text{если } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0 \end{cases}$$

Тогда $f(2,1) = 5^{-3}\ln^2 5$.

Для того, чтобы исследуемая функция была законом распределения системы необходимо не только существование плотности (3.6.), но и выполнение условия (3.9.) – представление функции распределения через плотность. Покажем, что это условие выполняется:

$$\int_0^y\int_0^x 5^{-u-v}\ln^2\ dudv = \int_0^y 5^{-v}\ln 5\,dv\cdot\int_0^x 5^{-u}\ln 5\,du$$
$$= (1-5^{-y})(1-5^{-x}) = 1-5^{-x}-5^{-y}+5^{-x-y}$$

Находим далее вероятность попадания в квадрат:

$$P(1\leqslant X\leqslant 2,\ 1\leqslant Y\leqslant 2) = [F(1,1)+F(2,2)]-[F(1,2)-F(2,1)] =$$
$$= \left(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5\cdot 5}\right)+\left(1-\frac{1}{25}-\frac{1}{25}+\frac{1}{625}\right)-$$
$$-\left(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{125}\right)-\left(1-\frac{1}{25}-\frac{1}{5}+\frac{1}{125}\right) = \frac{16}{625}$$

▲

Задача 3.1.6.5. Двумерная С.В. $(X,\ Y)$ задана плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin(x+y), & \text{в квадрате } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{вне квадрата}\end{cases}$$

Найти:

- функцию распределения $F(x,y)$;
- $P\left(X<\dfrac{\pi}{4},\ Y<\pi\right)$;
- плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$;
- условные плотности распределения $f(x|y)$ и $f(y|x)$.

▼ **Решение.** Функция распределения $F(x,y)$ системы $(X,\ Y)$ связана с плотностью распределения $f(x,y)$ соотношением (3.9.)

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y}\frac{1}{2}\sin(x+y)\,dxdy=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}dx\int\limits_{0}^{y}\sin(x+y)\,dy=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}dx\left[-\cos(x+y)\right]\Big|_0^y=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\left[\cos(x+y)-\cos x\right]dx=-\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin x\right]\Big|_0^x=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin x-\sin y\right]=\frac{1}{2}[\sin x+\sin y]-\sin(x+y)$$

Таким образом,искомая функция распределения есть

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[\sin x+\sin y-\sin(x+y)];0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0,\ \text{вне квадрата}\end{cases}.$$

Искомая вероятность $P\left(X<\dfrac{\pi}{4},\ Y<\pi\right)$ равна значению функции распределения $F(x,y)$ в точке $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right)$.

$$P\left(X<\frac{\pi}{4},\ Y<\pi\right)=F\left(\frac{\pi}{4},\ \pi\right)=\int\limits_{0}^{\pi/4}\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin(x+y)\,dxdy=\frac{1}{2}$$

По формулам (3.13.) находим

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(xy)\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dy = -\frac{1}{2}\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \cos x\right] = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$$

$$f_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(xy)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$$

Таким образом,

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin x + \cos x), & \text{если } x \in [0,\ \pi/2] \\ 0, & \text{вне } [0,\ \pi/2] \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin y + \cos y), & \text{если } y \in [0,\ \pi/2] \\ 0, & \text{вне } [0,\ \pi/2] \end{cases}.$$

Так как $f_1(x) \cdot f_2(y) \neq f(xy)$, то С.В. X и Y зависимы. Тогда по формулам (3.21.) находим

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\sin y + \cos y} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2 \\ 0 & \text{вне квадрата} \end{cases}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\sin x + \cos x} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2 \\ 0 & \text{вне квадрата} \end{cases}$$

▲

3.1.7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1.7.1. Дана матрица распределения вероятностей системы $(X,\ Y)$

Y	X		
	1	2	3
0	$0,2$	$0,1$	$0,1$
1	$0,2$	$0,1$	$0,1$
2	$0,1$	$0,1$	0

Найти:

- закон распределений X и Y;
- зависимы ли X и Y;
- $M[x],\ M[y],\ D[x],\ D[y],\ G[x],\ G[y]$;
- условный закон распределения X при условии, что Y принимает наименьшее значение;
- условный закон распределения Y при условии, что X принимает наибольшее значение;
- $P\left(X=3|Y=1\right),\quad P\left(Y=1|X=3\right).$

Ответ: $m_x=0,8;\ m_y=1,7;\ d_x=0,56;\ d_y=0,61$ $g_x=0,75;\ g_y=0,78.$
$P\left(X=3|Y=1\right)=0,25,\quad P\left(Y=1|X=3\right)=0,5$

Задача 3.1.7.2. Даны две системы $(X,\ Y)$ дискретных С.В. матрицей распределения

Y	X		
	2	4	6
1	0, 15	0, 25	0, 20
3	0, 10	0, 12	0, 18

Y	X		
	1	3	5
6	0.12	0.13	0.17
3	0.21	0.19	0.18

В каких случаях величины X и Y зависимы?

Ответ: В обоих.

Задача 3.1.7.3. Дана совместная плотность распределения системы С.В.

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}10e^{-(5x+2y)}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ 0, & x<0 \text{ или } y<0\end{cases}$$

Найти условные плотности вероятностей $f\left(x|y\right)$ и $f\left(y|x\right)$.

Ответ: $f\left(x|y\right)=\begin{cases}5e^{-5x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases};$

$f\left(y|x\right)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$

Задача 3.1.7.4. Задана дифференциальная функция системы С.В. $(X,\ Y)$

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{\left(16+x^2\right)\left(25+y^2\right)}$$

Найти интегральную функцию $F\left(x,y\right)$ системы $(X,\ Y)$

Ответ: $F\left(x,y\right)=\frac{1}{4}\left(arctg\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{5}\left(arctg\frac{y}{5}+\frac{\pi}{2}\right)$

Задача 3.1.7.5. Задана интегральная функция двумерной С.В. $(X,\ Y)$

$$F\left(x,y\right)=\left\{\begin{array}{cc}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & x>0,\ y>0\\ 0, & x<0,\ y<0\end{array}\right. .$$

Найти дифференциальную функцию системы.

Ответ: $f\left(x,\ y\right)=\left\{\begin{array}{cc}8e^{-4x-2y}, & x>0,\ y>0\\ 0, & x<0,\ y<0\end{array}\right. .$

3.2. Числовые характеристики системы двух случайных величин

3.2.1. Математическое ожидание двумерной С.В.

Дискретные случайные величины

Пусть дискретная двумерная величина $(X,\ Y)$ задана матрицей распределения (3.1). Суммируя по столбцам, а затем по строкам элементы матрицы распределения, находим ряды распределений С.В. X и Y (3.2) и (3.3). Тогда математические ожидания С.В. X и Y можно рассчитать следующим образом:

$$M[x]=m_x=\sum_i x_ip_i=\sum_i x_i\sum_j p_{ij}=\sum_i\sum_j x_ip_{ij}.$$

$$M[y]=m_y=\sum_j y_jp_j=\sum_j y_j\sum_i p_{ij}=\sum_j\sum_i y_jp_{ij}.$$

Если $Z = \varphi\left(X\right)$, то

$$M[Z] = \sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ji} \varphi(x_j).$$

Если $Z = \Psi\left(Y\right)$, то

$$M[Z] = \sum_{j=1}^{m} p_j \Psi(y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ji} \Psi\left(y_j\right).$$

Непрерывные случайные величины

Пусть система непрерывных величин (X, Y) распределена в области D плоскости $x0y$ с плотностью распределения $f\left(x,\ y\right)$. Тогда математические ожидания С.В. X и Y будут рассчитываться следующим образом:

$$M[X] = m_x = \iint\limits_{D} x \cdot f\left(x, y\right)\ dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1\left(x\right)\ dx$$

$$M[Y] = m_y = \iint\limits_{D} y \cdot f\left(x, y\right) dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_2\left(y\right) dy.$$

Если $Z = \varphi\left(x\right)$, то

$$M[Z] = m_z = \iint\limits_{D} \varphi\left(x\right) \cdot f\left(x, y\right) dxdy$$

Если $Z = \varphi\left(X,\ Y\right)$, то

$$M[Z] = m_z = \iint\limits_{D} \varphi\left(x, y\right) \cdot f\left(x, y\right) dxdy.$$

3.2.2. Дисперсия двумерной С.В. $(X,\ Y)$.

Пусть С.В. X и Y – дискретные и имеют математические ожидания m_x и m_y.Тогда дисперсии находятся следующим образом:

$$D[X]=d_x=M\left[(X-m_x)^2\right]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2\cdot P_i=M\left[X^2\right]-m_x^2,$$

$$D[Y]=d_y=M\left[(Y-m_y)^2\right]=\sum_{j=1}^{m}(y_j-m_y)^2\cdot P_j=M\left[Y^2\right]-m_y^2.$$

Средние квадратичные отклонения

$$\sigma[X]=\sigma_x=\sqrt{D[X]};\quad \sigma[Y]=\sigma_y=\sqrt{D[Y]}.$$

Для непрерывных С.В. X и Y формулы принимают вид:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2\cdot f_1(x)\,dx;$$

$$D[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-m_y)^2\cdot f_2(y)\,dy;$$

или

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f_1(x)\,dx-m_x^2=M\left[X^2\right]-m_x^2$$

$$D[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f_2(y)\,dy-m_y^2=M\left[Y^2\right]-m_y^2.$$

Иногда удобнее использовать формулы, содержащие дифференциальную функцию системы:

$$M[X]=\iint_D x\cdot f(x,y)\,dx,\quad M[Y]=\iint_D y\cdot f(x,y)\,dy\quad,$$

$$D[X] = \iint\limits_D (x - m_x)^2 \cdot f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_D x^2 \cdot f(x,y)\, dxdy - m_x^2,$$

$$D[Y] = \iint\limits_D (y - m_y)^2 \cdot f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_D y^2 \cdot f(x,y)\, dxdy - m_y^2.$$

Здесь двойные интегралы берутся по области возможных значений системы.

3.2.3. Ковариация и коэффициент корреляции

Ковариацией или корреляционным моментом С.В. X и Y называется величина

$$K_{x,y} = \operatorname{cov}(X,\ Y) = M[(X - m_x) \cdot (Y - m_y)].$$

Для дискретных С.В. X и Y

$$K_{x,y} = \operatorname{cov}(X,\ Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)(y_j - m_y) \cdot P_{ij}$$

или

$$\operatorname{cov}(X,\ Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \cdot P_{ij} - m_x \cdot m_y.$$

Формулы можно объединить в одну

$$\operatorname{cov}(X,\ Y) = M[X \cdot Y] - m_x m_y$$

Безразмерная величина

$$\rho_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{cov\,(X,\ Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

называется *коэффициентом корреляции.*

Если $\rho_{x,y} = 0$, то С.В. X и Yназываются некоррелированными; если $\rho_{x,y} \neq 0$, то X и Y коррелированы.

3.2.4. Свойства числовых характеристик двумерной случайной величины

Свойства математического ожидания

1. $M[C] = C,\ C - const$;

2. Если m_x и m_y– конечны, и $\alpha,\ \beta$ – константы, то
$$M[\alpha X + \beta Y] = \alpha M[X] + \beta M[Y].$$
При $\alpha = \beta = 1 \quad M[X + Y] = M[X] + M[Y]$;

3. Если m_x и m_y– конечны, то
$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y] + cov\,(X,\ Y)\,.$$
Если С.В. X и Y не коррелированы (независимы), то
$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y] \qquad (3.24.)$$
(т.к. $\operatorname{cov}(X,\ Y) = 0$).

Свойства дисперсии

1. $D[C] = 0 \quad C - const$

2. $D[CX] = C^2 D[X]$

3. Если d_x и d_y – конечны, то
$$D[\alpha X + \beta Y] = \alpha^2 d_x + \beta^2 d_y + 2\alpha\beta \operatorname{cov}(X,\ Y)\,.$$
Если С.В. X и Yне коррелированы (т.е. независимы), то $\operatorname{cov}(X,\ Y) =$ 0 и
$$D[\alpha X + \beta Y] = \alpha^2 d_x + \beta^2 d_y.$$
Формулу можно обобщить на любое конечное число слагаемых
$$D\Big[\sum \alpha_i X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 D[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i \alpha_j \operatorname{cov}(X_i,\ Y_j).$$

Для независимых С.В.

$$D\Big[\sum \alpha_i X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 D[X_i].$$

4. Если С.В. X и Yнезависимы и d_x и d_y – конечны, то

$$D[X \cdot Y] = d_x \cdot m_y^2 + d_y \cdot m_x^2 + d_x \cdot d_y.$$

Свойства ковариации

1. Ковариация симметрична относительно своих аргументов: $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$ – это следует из определения.

2. Если С.В. X и Y независимы, то они некоррелированы.

   Действительно, для независимых С.В. X и Y $Y f_1(x) \cdot f_2(y) = f(x, y)$.

   Тогда

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f_1(x) f_2(y)\, dxdy - m_x m_y =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x)\, dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_2(y)\, dy - m_x m_y = m_x m_y - m_x m_y = 0$$

3. Обратное утверждение, в общем случае, не верно, т.е. из равенства нулю ковариации не следует независимость X и Y.

   Только в случае нормального распределения, справедливо также и обратное утверждение.

Свойства коэффициента корреляции:

1. $\rho_{x,x} = 1$

2. $\rho_{x,y} = \rho_{y,x}$

3. Если С.В. X и Yнезависимы, то $\rho_{x,y} = 0$

4. $|\rho_{x,y}| \leqslant 1$

5. $|\rho_{x,y}| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$, где $a,\ b$ – некоторые постоянные, т.е. между С.В. X и Yсуществует линейная функциональная зависимость.

Свойства 1–3 следуют из определений независимости (3.23.) и коэффициента корреляции.

Докажем свойство 4. Рассмотрим подробнее структуру выражения $\rho_{x,y}$:

$$\begin{aligned}\rho_{x,y} = \frac{M\big[(X - m_X)(Y - m_Y)\big]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \\ = M\left[\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right) \cdot \left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right)\right] = \\ = M\big[\widetilde{X} \cdot \widetilde{Y}\big]\end{aligned} \tag{3.25.}$$

Случайные величины $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ получены из исходных с помощью операций *центрирования* и *нормирования*. Центрирование – перенос начала координат в центр распределения $(m_X,\ m_Y)$, а нормирование – изменение масштаба, когда за единицу измерения берется среднее квадратичное отклонение. Такие СВ называют *стандартизированными*. Стандартные случайные величины имеют следующие значения числовых характеристик:

$$\begin{aligned}&m_{\widetilde{X}} = M\big[\frac{X - m_X}{\sigma_X}\big] = \frac{M[X] - m_X}{\sigma_X} = 0; \\ &m_{\widetilde{Y}} = 0\end{aligned} \tag{3.26.}$$

$$\begin{aligned}&D_{\widetilde{X}} = M\big[\widetilde{X}^2\big] = D\big[\frac{X - m_X}{\sigma_X}\big] = \frac{M\big[(X - m_X)^2\big]}{\sigma_X^2} = 1; \\ &D_{\widetilde{Y}} = M\big[\widetilde{Y}^2\big] = 1\end{aligned} \tag{3.27.}$$

Рассмотрим очевидное неравенство:

$$(\widetilde{X} \pm \widetilde{Y})^2 \geqslant 0$$

или, переходя к математическому ожиданию,

$$M\big[(\widetilde{X} \pm \widetilde{Y})^2\big] \geqslant 0 \qquad (3.28.)$$

Раскроем скобки и выделим произведение СВ:

$$M\Big[\frac{\widetilde{X}^2 + \widetilde{Y}^2}{2}\Big] \geqslant \mp M\big[\widetilde{X}\widetilde{Y}\big] \qquad (3.29.)$$

Найдем математическое ожидание от левой и правой частей этого неравенства:

$$\frac{M\big[\widetilde{X}^2\big] + M\big[\widetilde{Y}^2\big]}{2} \geqslant \mp M\big[\widetilde{X} \cdot \widetilde{Y}\big] = \mp\rho_{X,Y} \qquad (3.30.)$$

или, с учетом свойств стандартных величин

$$1 \geqslant \mp\rho_{X,Y} \Longrightarrow 1 \geqslant \mid \rho_{X,Y} \mid,$$

что и требовалось доказать.

Докажем свойство 5.

Пусть между случайными величинами существует функциональная линейная зависимость $Y = aX + b$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
m_Y &= a \cdot m_X + b \\
\sigma_Y^2 &= a^2 \cdot \sigma_X^2, \quad \sigma_Y = \mid a \mid \cdot \sigma_X \\
\operatorname{cov}(X,Y) &= M\big[(X - m_x)(aX + b - am_x - b)\big] = \\
&= M\big[a(X - m_x)^2\big] = a \cdot \sigma_X^2 \\
\rho_{x,y} &= \frac{a \cdot \sigma_X^2}{\mid a \mid \cdot \sigma_X^2} = \frac{a}{\mid a \mid} = \begin{cases} 1, & \text{при } a > 0 \\ -1, & \text{при } a < 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Пусть теперь $\rho_{x,y} = \pm 1$. Строгое равенство соответствует строгому равенству в выражении (3.28.).

$$M\big[(\widetilde{X} \pm \widetilde{Y})^2\big] = 0.$$

Но равенство нулю математического ожидания неотрицательной величины возможно лишь в том случае, если она тождественно равна нулю. Тогда

$$(\widetilde{X} \pm \widetilde{Y})^2 = 0 \Rightarrow (\widetilde{X} \pm \widetilde{Y}) = 0 \Rightarrow \pm\widetilde{X} = \widetilde{Y}. \qquad (3.31.)$$

Отсюда получаем

$$Y = \pm\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot X \mp \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot m_x = a\cdot X + b, \qquad (3.32.)$$

т.е случайные величины связаны функциональной зависимостью.

3.3. Числовые характеристики условных законов распределения

3.3.1. Условные математические ожидания. Линии регрессии

Для дискретной двумерной С.В. $(X,\ Y)$ находим ряд распределения X при $Y = y_j$ – фиксированным, используя формулы (3.15.,3.16.)

$$P\left(X = x_i|Y = y_j\right) = \frac{P\left(X = x_i,\ Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{P_{ij}}{P_j}$$

и ряд распределения Y при $X = x_i$ – фиксированном по формуле

$$P\left(Y = y_j|X = x_i\right) = \frac{P\left(Y = y_j,\ X = x_i\right)}{P\left(X = x_i\right)} = \frac{P_{ji}}{P_i}.$$

Тогда условные математические ожидания находим по формулам:

$$M[X|Y = y_j] = x_1\cdot\frac{P_{1j}}{P_j} + x_2\cdot\frac{P_{2j}}{P_j} + \ldots + x_n\cdot\frac{P_{nj}}{P_j} = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\frac{P_{ij}}{P_j},$$

$$M[Y|X = x_i] = y_1\cdot\frac{P_{1i}}{P_i} + y_2\cdot\frac{P_{2i}}{P_i} + \ldots + y_m\cdot\frac{P_{mj}}{P_j} = \sum_{j=1}^{m} y_j\cdot\frac{P_{ji}}{P_i}.$$

Для непрерывных С.В. X и Y

$$M[X|Y=y]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f\left(x|y\right)dx, \tag{3.33.}$$

$$M[Y|X=x]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f\left(y|x\right)dy \tag{3.34.}$$

Эти условные математические ожидания являются некоторыми функциями $\varphi\left(y\right)$ и $\psi\left(x\right)$ соответственно. Функция $M[X|Y=y]=\varphi\left(y\right)$ называется *функцией регрессии* X на Y.

График функции $x=\varphi\left(y\right)$ называется *кривой регрессии* X *на* Y.

Функция $\psi\left(x\right)=M[Y|X=x]$ называется *функцией регрессии* С.В. Y на С.В. X.

График функции $y=\psi\left(x\right)$ называется *кривой регрессии* Y *на* X.

Если С.В. X и Y независимы, то условные математические ожидания равны безусловным и кривые регрессии являются прямыми, параллельными осям координат.

Зависимости $\psi\left(x\right)$ и $\varphi\left(y\right)$, показывающие, как *среднее значение* одной величины изменяется при изменении другой величины, называются *корреляционными* (*случайными, статистическими, стохастическими*)[1].

В отличии от корреляционных, *функциональные* зависимости предполагают, что не среднее, а *каждое* значение одной величины есть однозначная функция другой величины.

[1]В общем случае, корреляционная зависимость предполагает, что изменение одной случайной величины приводит к изменению закона распределения другой случайной величины.

3.3.2. Условные дисперсии

Условные дисперсии для дискретных С.В. X и Y:

$$D[X|Y=y_j]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M[X|Y=y_j]\right)^2\cdot P\left(x_i|y_j\right);$$
$$D\left[Y|X=x_i\right]=\sum_{j=1}^{m}\left(y_j-M\left[Y\left|X=x_i\right]\right)^2\cdot P\left(y_j\left|x_i\right)\right..$$

Условные дисперсии для непрерывных С.В. X и Y:

$$D[X|Y=y]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M[X|Y=y]\right)^2\cdot f\left(x|y\right)dx, \qquad (3.35.)$$

$$D[Y|X=x]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(y-M[Y|X=x]\right)^2\cdot f\left(y|x\right)dy. \qquad (3.36.)$$

Рассмотрим на примере случайной величины Y очень полезное соотношение, связывающее условную дисперсию $D[Y \mid X=x]$ и функцию регрессии $\psi\left(x\right)$.

Условные дисперсии характеризуют разброс случайной величины относительно соответствующей функции регрессии. Если усреднить $D\left[Y \mid X=x\right]$ по X, то полученная величина является обобщающей мерой разброса С.В. Y относительно линии регрессии.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D\big[Y \mid X=x\big]\cdot f_1(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(y-\psi(x)\big)^2 f(y \mid x)\cdot f_1(x)\,dy\,dx=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(y-\psi(x)\big)^2 f(x,y)\,dy\,dx=D_\psi(Y) \qquad (3.37.)$$

Она является одной из составляющих безусловной дисперсии:

$$D[Y] = \iint\limits_D (y - m_y)^2 \cdot f\,(x, y)\, dxdy =$$
$$= \iint\limits_D [y - \psi(x) + \psi(x) - m_y]^2 \cdot f\,(x, y)\, dxdy =$$
$$= \iint\limits_D [y - \psi(x)]^2 \cdot f\,(x, y)\, dxdy + \iint\limits_D [\psi(x) - m_y]^2 \cdot f\,(x, y)\, dxdy +$$
$$+ 2 \iint\limits_D [y - \psi(x)][\psi(x) - m_y] \cdot f\,(x, y)\, dxdy \qquad (3.38.)$$

Последний интеграл обращается в нуль:

$$\iint\limits_D [y - \psi(x)][\psi(x) - m_y] \cdot f\,(x, y)\, dxdy =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\psi(x) - m_y] \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} [y - \psi(x) f(y \mid x)\, dy] \right\} f_1(x)\, dx =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\psi(x) - m_y] \left\{ \psi(x) - \psi(x) \right\} f_1(x)\, dx = 0 \qquad (3.39.)$$

Поэтому мы получаем:

$$D[Y] = D_\psi(y) + D_{m_y}(\psi) \qquad (3.40.)$$

Первое слагаемое есть дисперсия С.В. относительно линии регрессии (в регрессионном анализе она называется остаточной дисперсией), а второе слагаемое – дисперсия функции регрессии относительно безусловного среднего.

Покажем, что функция регрессии обеспечивает минимум остаточной дисперсии по сравнению с другими пробными функциями, подставляемыми вместо неё в (3.37.).

Возьмем произвольную функцию $g(x)$ и подставим ее вместо функции регрессии в выражение для остаточной дисперсии:

$$\begin{aligned}
D_g(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-g(x))^2 f(x,y)\,dy\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\psi(x)+\psi(x)-g(x))^2 f(x,y)\,dy\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(y-\psi(x))^2+(\psi(x)-g(x))^2\right\} f(x,y)\,dy\,dx + \\
&+ 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(y-\psi(x))(\psi(x)-g(x))\right\} f(x,y)\,dy\,dx = \\
&= D_Y(\psi) + M\left[(\psi(x)-g(x))^2\right] + \\
&+ 2\int_{-\infty}^{\infty}[\psi(x)-g(x)]\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(y-\psi(x))f(y\mid x)\,dy\right\} f_1(x),dx = \\
&= D_\psi(Y) + M\left[(\psi(x)-g(x))^2\right]
\end{aligned} \tag{3.41.}$$

Здесь последний интеграл, как и в (3.39.), обращается в нуль. Отсюда следует, что

$$D_g(Y) \geqslant D_\psi(Y), \tag{3.42.}$$

так как $M\left[(\psi(x)-g(x))^2\right]$ есть величина неотрицательная.

Свойство функции регрессии минимизировать остаточную дисперсию является теоретическим обоснованием метода выбора оптимальных значений параметров кривых, использующихся для аппроксимации регрессионных зависимостей.[2]

[2]Более общий метод нахождения оптимальных аппроксимирующих зависимостей известен как *метод наименьших квадратов*. Предложен и обоснован К.Гауссом и А.Лежандром, строгое математическое обоснование дано А.А. Марковым и А.Н. Колмогоровым

3.3.3. Линейная регрессия и корреляция

На практике особую важность представляют случаи, когда функцию регрессии можно аппроксимировать линейной зависимостью. Рассмотрим для примера случайную величину Y:

$$M[Y|X = x] = \psi(x) = A \cdot x + B \tag{3.43.}$$

Параметры линейной зависимости A, B подбираются так, чтобы остаточная дисперсия $D_Y(A\cdot x+B)$ достигала своего минимума.

Итак, мы будем искать минимум функции

$$D_{A\cdot x+B}(Y) = M\left[(y - A \cdot x - B)^2\right], \tag{3.44.}$$

рассматривая её как функцию параметров A и B.

Как известно из курса дифференциального исчисления, необходимым условием существования экстремума функции двух переменных является равенство нулю частных производных по этим переменным:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial A} M\left[(y - A \cdot x - B)^2\right] &= 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial B} M\left[(y - A \cdot x - B)^2\right] &= 0. \end{cases} \tag{3.45.}$$

Внеся операцию дифференцирования под знак математического ожидания (это эквивалентно дифференцированию по параметру подинтегральной функции), получим:

$$\begin{cases} M\left[(Y - A \cdot X - B) \cdot X\right] &= 0 \\ M\left[(Y - A \cdot X - B)\right] &= 0. \end{cases} \tag{3.46.}$$

Из первого уравнения системы следует:

$$M[X \cdot Y] = A \cdot M[X^2] + B \cdot m_x,$$

а из второго

$$m_y = A \cdot m_x + B. \tag{3.47.}$$

Исключая B, получим:

$$M[X \cdot Y] - m_x \cdot m_y = A \cdot \left(M[X^2] - m_x^2\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A = {} & \frac{M[X \cdot Y] - m_x \cdot m_y}{M[X^2] - m_x^2} = \\ = {} & \frac{\mathrm{cov}\left(X \cdot Y\right)}{{\sigma_x}^2} = \frac{\mathrm{cov}\left(X \cdot Y\right)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \\ = {} & \rho_{x,y} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \end{aligned} \tag{3.48.}$$

$$B = m_y - \rho_{x,y} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot m_x. \tag{3.49.}$$

Обозначив функцию регрессии $\psi(x)$ как y, запишем уравнение линейной регрессии в симметричной форме:

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = \rho_{x,y} \cdot \frac{x - m_x}{\sigma_x} \tag{3.50.}$$

Коэффициент корреляции оценивает тесноту линейной связи между X и Y. Чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к единице, тем связь сильнее, то есть ближе к функциональной; связь слабеет, когда абсолютная величина коэффициента корреляции стремится к нулю. В пределе, когда $\rho_{x,y} = 0$, линия регрессии вырождается в прямую, параллельную оси абсцисс: $y = m_Y$, что характерно для независимых случайных величин.

Найдем выражение для остаточной дисперсии (3.44.). Для этого подставим в него найденные значения параметров линейной регрессии:

$$\begin{aligned} D_\psi(Y) = {} & M\left[\left((y - m_y) - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)\right)^2\right] = \\ = {} & \sigma_y^2 - 2\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,\mathrm{cov}(X, Y) + \left(\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)^2\sigma_x^2 = \\ = {} & \sigma_y^2(1 - \rho^2) \end{aligned} \tag{3.51.}$$

Видно, что в отсутствии корреляции ($\rho = 0$) остаточная дисперсия принимает максимальное значение, равное безусловной дисперсии, а в случае функциональной линейной зависимости ($\rho = 1$) остаточная дисперсия равна нулю.

3.3.4. Решение задач

Задача 3.3.4.1. Дискретная двумерная С.В. (X, Y) задана матрицей распределения.

Y	X		
	-1	0	1
0	1/12	1/2	1/12
2	1/12	1/6	1/12

Найти:

- условные математические ожидания $M[X|Y = 0]$, $M[X|Y = 2]$;
- $\operatorname{cov}(X,\ Y)$
- Коррелированы ли X и Y?
- Зависимы ли X и Y?

▼ **Решение.** 1. Найдём ряды распределения С.В. X и Y:

$$P(X = -1|Y = 0) = \frac{P(X = -1,\ Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/12}{2/3} = \frac{1}{8}$$

X	-1	0	1
P_x	1/6	4/6	1/6

$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0,\ Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1,\ Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/12}{2/3} = \frac{1}{8}$$

Y	0	2
P_y	2/3	1/3

Для $M[X|Y=2]$

$$P\left(X=-1|Y=2\right)=\frac{P\left(X=-1,\ Y=2\right)}{P\left(Y=2\right)}=$$
$$=\frac{1/12}{1/3}=\frac{1}{4}P\left(X=0|Y=2\right)=\frac{P\left(X=0,\ Y=2\right)}{P\left(Y=2\right)}=$$
$$=\frac{1/6}{1/3}=\frac{1}{2}P\left(X=1|Y=2\right)=\frac{P\left(X=1,\ Y=2\right)}{P\left(Y=2\right)}=\frac{1/12}{1/3}=\frac{1}{4}$$

Условный закон распределения X при $Y=0$

X	-1	0	1
$P(X\|Y=0)$	$1/6$	$4/6$	$1/6$

Условный закон распределения X при $Y=2$

X	-1	0	1
$P(X\|Y=2)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Тогда

$$M[X|Y=0]=-1\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{3}{4}+1\cdot\frac{1}{8}=0,$$
$$M[X|Y=2]=-1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}=0.$$

2. Находим:

$$m_x=-1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{4}{6}+1\cdot\frac{1}{6}=0;$$
$$m_y=0\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

3. Проверяем коррелированность

$$\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=M[XY]-m_xm_y=$$
$$=\left(-1\cdot 0\cdot\frac{1}{12}+0\cdot 0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 0\cdot\frac{1}{12}-1\cdot 2\cdot\frac{1}{12}+0\cdot 2\cdot\frac{1}{6}+\right.$$
$$\left.+1\cdot 2\cdot\frac{1}{12}\right)-0\cdot\frac{2}{3}=0,$$

следовательно С.В. X и Y некоррелированы.

4. Проверим условие линейной независимости X и Y.

Например:

$$P\left(X=-1,\ Y=0\right)=\frac{1}{12},$$

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}.$$

Отсюда следует, что

$$P(X=-1,\ Y=0)\neq P(X=-1)\cdot P(Y=0),$$

т.е. X и Y зависимы. ▲

Задача 3.3.4.2. Закон распределения С.В. X и Y имеет вид

Y	X		
	3	10	12
4	$0,17$	$0,13$	$0,25$
5	$0,10$	$0,30$	$0,05$

Найти:

1. $M[X],\ M[Y],\ M[2x+4y],\ M[XY]$;
2. $\operatorname{cov}(X\cdot Y)$; зависимы ли X и Y?
3. $D[X],\ D[Y],\ D[2x+4y]$
4. $r_{x,y}$; коррелированы ли X и Y?

▼ **Решение.** 1. Найдём ряды распределения С.В. X и Y:

X	3	10	13
P_x	$0,27$	$0,43$	$0,30$

Y	4	5
P_x	$0,55$	$0,45$

Тогда $m_x=3\cdot 0,27+10\cdot 0,43+12\cdot 0,30=8,71$, $m_y=4\cdot 0,55+5\cdot 0,45=4,45$. Так как m_x и m_y- конечны, то

$$M[2x+4y]=2\cdot m_x+4\cdot m_y=2\cdot 8,71+4\cdot 4,45=35,22.$$

$$M[XY]=3\cdot 4\cdot 0,17+4\cdot 10\cdot 0,13+4\cdot 12\cdot 0,25+3\cdot 5\cdot 0,10+ \\ +5\cdot 10\cdot 0,30+5\cdot 12\cdot 0,05=38,74$$

2. Находим ковариацию:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M[XY]-m_xm_y=38,74-8,71\cdot 4,45=-0,0195.$$

Проверим условие независимости. Например,

$$P\left(X=3,\ Y=5\right)=0,10, P\left(X=3\right)\cdot P\left(Y=5\right)=-0,27\cdot 0,45=0,1215;$$

так как

$$P\left(X=3,\ Y=5\right)\neq P\left(X=3\right)\cdot P\left(Y=5\right),$$

то С.В. X и Y зависимы.

3. Найдём:

$$M\left[X^2\right]=9\cdot 0,27+100\cdot 0,43+144\cdot 0,30=2,43+43+43,20=88,63,$$
$$M\left[Y^2\right]=16\cdot 0,55+25\cdot 0,45=8,80+11,85=20,25.$$

Тогда:

$$D[X]=M\left[X^2\right]-m_x^2=88,63-(8,71)^2=12,7659,\quad \sigma[X]=3,5729,$$

$$D[Y]=M\left[Y^2\right]-m_y^2=20,25-(4,45)^2=0,2475,\quad \sigma[Y]=0,4975.$$

Так как X и Y зависимы, то

$$D[2x+4y]=2^2\cdot d_x+4^2\cdot d_y+2\cdot 24cov\left(X,Y\right)=$$
$$=4\cdot 12,7659+16\cdot 0,1475-16\cdot 0,0195=51,0636+3,9600-0,3120=54,7116.$$

4. Вычисляем коэффициент корреляции:

$$r_{x,y}=\frac{cov\left(X,Y\right)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{-0,0195}{3,5729\cdot 0,4975}=-0,011.$$

Так как $r_{x,y}\neq 0$, то С.В. X и Y коррелированы. ▲

Задача 3.3.4.3. Дана совместная плотность вероятностей С.В. X и Y :

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}\sin x\sin y & \text{в квадрате } 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi\\ 0 & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

Найти:

1. $m_x,\ m_y$
2. $cov\left(X,Y\right)$; коррелированы ли X и Y?

3. $M[XY]$, $M[2x+3y]$

4. $D[X]$, $D[Y]$, $\sigma[X]$, $\sigma[Y]$

5. $D[2x-3y]$

▼ **Решение.** 1. Находим частные плотности распределений:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\sin y dy=\frac{1}{4}\sin x\cdot(-\cos y)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\sin x,$$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\sin y dy=\frac{1}{4}\sin y\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\sin y$$

и математические ожидания

$$m_x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_1(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} x\cdot\sin x dx=\frac{\pi}{2}$$

$$m_y=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_2(y)\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} y\cdot\sin y dy=\frac{\pi}{2}.$$

2. Так как

$$f_1(x)\cdot f_2(y)=\frac{1}{2}\sin x\cdot\frac{1}{2}\sin y=\frac{1}{4}\sin x\cdot\sin y=f(x,y),$$

то X и Y независимы.

Тогда $cov(X,Y)=0$ и С.В. X и Y некоррелированы.

3. Так как С.В. X и Y независимы, то

$$M[XY]=M[X]\cdot M[Y]=\frac{\pi^2}{4}.$$

и

$$M[2X+3Y]=2m_x+3m_y=5\frac{\pi}{2}.$$

4. Находим

$$M\left[X^2\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f_1(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} x^2\cdot\sin x dx=\frac{\pi^2}{2}-2,$$

$$M\left[Y^2\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot f_2(y)\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} y^2\cdot\sin y dy=\frac{\pi^2}{2}-2.$$

Тогда

$$D[X] = D[y] = M\left[x^2\right] - m_x^2 = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

и

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

5. В силу независимости X и Y

$$D[2x - 3y] = 2^2 dx + 3^2 dy = (4+9) \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) = 13\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right).$$

▲

Задача 3.3.4.4. Система непрерывных С.В. X и Y задана плотностью распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx^2y^2 & \text{в треугольнике } A(0,\ 0),\ B(0,\ 1),\ C(1,\ 1) \\ 0 & \text{вне треугольника} \end{cases}$$

Найти:

1. $f_1(x)\,,\ f_2(y)$; З зависимы ли X и Y?
2. константу C;
3. $F_1(x)\,,\ F_2(y)$;
4. $f\left(X|Y\right),\ f\left(y|x\right)$;
5. $M[X],\ M[Y],\ M[XY]$;
6. $\operatorname{cov}(x,y)$;
7. $D[X],\ D[Y],\ \sigma[X],\ \sigma[Y]$;
8. $r_{x,y}$; коррелированы ли X и Y?
9. Функции регрессии Y на X и X на Y; Построить линии регрессии в ΔABC.

▼ **Решение.** 1. Из условия нормировки имеем

$$C\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_x^1 y^2dy=\frac{C}{3}\int\limits_0^1 x^2(1-x^3)dx=1\Rightarrow C=18$$

2. Находим частные плотности распределения X и Y.

$$f_1\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dy=18x^2\int\limits_x^1 y^2dy=6x^2(1-x^3),\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

$$f_2\left(y\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dx=18y^2\int\limits_0^y x^2dx=6y^5,\quad 0\leqslant y\leqslant 1$$

Так как

$$f_1\left(x\right)\cdot f_2\left(y\right)\neq f\left(x,y\right),$$

то X и Y зависимы.

3.Находим частные функции распределения X и Y.

$$F_1\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_1\left(x\right)\ dx=$$

$$=\int\limits_0^x 6x^2(1-x^3)\ dx=$$

$$=6\int\limits_0^x (x^2-x^5)^0dx=x^3(2-x^3),\ 0\leqslant x\leqslant 1$$

$$F_2\left(y\right)=\int\limits_{-\infty}^{y} f_2\left(y\right)dy=6\int\limits_0^y y^5dy=y^6,\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

4. Вычисляем условные плотности распределения X и Y:

$$f\left(Y|X\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_1\left(x\right)}=\frac{18x^2y^2}{6x^2(1-x^3)}=\begin{cases}\frac{3y^2}{1-x^3}, & \text{если } (X,\ Y) \text{ внутри } \Delta ABC\\ 0, & \text{вне } \Delta ABC\end{cases}$$

$$f(X|Y)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_2\left(y\right)}=\frac{18x^2y^2}{6y^5}=\begin{cases}\frac{3x^2}{y^3}, & \text{если } (X,\ Y)\text{внутри } \Delta ABC\\ 0, & \text{вне } \Delta ABC.\end{cases}$$

5. Вычисляем математические ожидания X и Y

$$M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 6x^2(1-x^3)dx = \frac{9}{14}$$

$$M[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_2(y)\, dy = \int_0^1 y \cdot 6y^5 dy = \frac{6}{7}$$

и

$$M[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x,y)\ dxdy = 18\int_0^1 x^3 dx \int_x^1 y^3 dy =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^1 x^3(1-x^4)dx = \frac{9}{16}.$$

6. Вычисляем ковариацию:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M[XY] - m_x m_y = \frac{9}{16} - \frac{9}{14}\cdot\frac{6}{7} = \frac{9}{784} = 0,01148.$$

7. Найдём математические ожидания квадратов СВ:

$$M\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_1(x)\, dx = 6\int_0^1 x^2 \cdot x^2(1-x^3)dx = \frac{9}{20}$$

$$M\left[Y^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_2(y)\, dy = 6\int_0^1 y^7 dy = \frac{3}{4}$$

Тогда

$$D[X] = M\left[X^2\right] - m_x^2 = \frac{9}{20} - \left(\frac{9}{14}\right)^2 = \frac{9}{245} = 0,0367$$

и

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = 0,1917$$

$$D[Y] = M\left[Y^2\right] - m_y^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{3}{196} = 0,0153$$

и

$$\sigma_y = \sqrt{D[Y]} = 0,1237.$$

8. Находим коэффициент корреляции

$$r_{x,y} = \frac{cov\,(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = 0,48.$$

Так как $r_{x,y} \neq 0$, то С.В. X и Y – коррелированны.

9. Зафиксируем каким-либо образом $Y = y$ в промежутке $[0,\ 1]$. При этом значении y величина Xимеется в $[0,\ Y]$. По формуле (3.33.) находим условные математические ожидания

$$M[X|Y=y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f\,(x|y)\,dx = \int\limits_{0}^{y} x \cdot \frac{3x^2}{y^3} dx = \int\limits_{0}^{y} x^3 dx = \frac{3}{4} y.$$

Зафиксируем каким-либо образом $X = x$ в $[0,\ 1]$. При этом значении x величина Y меняется в $[x,\ 1]$. Тогда

$$M[Y|X=x] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f\,(y|x) = \int\limits_{x}^{1} y \cdot \frac{3y^2}{1-x^3} dy =$$

$$= \frac{3}{1-x^3} \int\limits_{x}^{1} y^3 dy = \frac{3(1-x^4)}{4(1-x^3)}$$

Тогда

$$\varphi\,(y) = \frac{3}{4} y - \text{ функция регрессии } X \text{ на } Y.$$

$$\psi\,(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^3} - \text{ функция регрессии } Y \text{ на } X.$$

▲

3.3.5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.3.5.1. Закон распределения системы СВ имеет вид:

Y	X		
	-1	0	1
-2	$0,15$	$0,35$	$0,05$
3	$0,10$	$0,25$	$0,10$

Найти:

1. Условные математические ожидания $M[y|X=-1]$, $M[y|X=0]$, $M[y|X=1]$
2. ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$
3. установить: коррелированы ли X и Y? Зависимы ли X и Y?
4. $M[2X+4Y]$;
5. $D[X],\ D[Y],\ \sigma[X],\ \sigma[Y], D[2X+4Y]$;
6. $r_{x,y}$.

Ответ: $\operatorname{cov}(X,Y)=0,225$; Зависимы.

Задача 3.3.5.2. Совместная плотность вероятностей СВ X и Y имеет вид:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin(x+y) & \text{в квадрате } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

Найти:$m_x,\ m_y,\ d_x,\ d_y,\ \sigma_x,\ \sigma_y,\ M[XY],\ \operatorname{cov}(x,y),\ r_x, y$.

Ответ: $m_x=m_y=\dfrac{\pi}{4}$, $d_x=d_y=\sigma_x^2=\sigma_y^2=\dfrac{\pi^2+8\pi-32}{16}$, $\operatorname{cov}(x,y)=\dfrac{-\pi^2+8\pi-16}{16}$.

Задача 3.3.5.3. Дано: $D[X+Y]=25$; $D[X]+D[Y]=13$; Найти $\operatorname{cov}(X,Y)$.

Ответ: $\operatorname{cov}(x,y)=6$

Задача 3.3.5.4. Дано: $D[X]=7$, $D[Y]=5$, $\operatorname{cov}(x,y)=3$. Найти: $D[x-2y+3]$.

Ответ: $D[x-2y+3]=15$.

Задача 3.3.5.5. Дана функция

$$f(x,y)=Axy\cdot\exp(-(x^2+y^2)),\ x\ge 0,\ y\ge 0$$

1. При каком значении A функция является плотностью распределения системы (X,Y)?

2. Найти
   - $f_1(x),\ f_2(y)$; выяснить, зависимы ли X и Y?
   - $f(X \mid Y),\ f(Y \mid X)$;
   - $M[X],\ M[Y],\ M[XY],\ M[X-Y]$;
   - $D[X],\ D[Y],\ D[X-Y],\ D[XY],\ \sigma_x,\ \sigma_y$;
   - $\mathrm{cov}(X,Y),\ r_{XY}$; коррелированы ли X и Y?
   - линии регрессии X на Y и Y на X и точку их пересечения.

Ответ: $A = 4$; $f_1(x) = 2xe^{-x^2}$, $f_2(y) = 2ye^{-y^2}$, $m_x = m_y = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $D[X] = D[Y] = 1 - \dfrac{\pi^2}{16}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется системой случайных величие?
2. Как можно трактовать систему случайных величин7
3. Дайте определение функции распределения системы двух случайных величин и укажите ее свойства.
4. Дайте определения плотности распределения вероятностей системы двух случайных величин. Перечислите и докажите ее свойства.
5. Как определить вероятность попадания в данную область?
6. Что называется условным законом распределения?
7. Как выражается плотность распределения каждой из величин, входящих в систему, через плотность распределения системы?
8. какие случайные величины называются зависимыми (независимыми)?

9. Что является необходимым и достаточным условием независимости случайных величин?
10. Что называется корреляционным моментом? коэффициентом корреляции?
11. Чему равен коэффициент корреляции для независимых случайных величин?
12. Какие случайные величины называются некоррелированными?
13. Следует ли из независимости случайных величин их некоррелированность и наоборот?
14. Равносильны ли понятия некоррелированности и независимости для нормально распределенной системы?

Список литературы

1. Бочаров П.П., Печенкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. – М.: Гардарика, 1998. – 328 с.

2. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. – Спб.: Издательство «Лань», 2004. – 256 с.

3. Магазинников Л.И. Курс лекций по теории вероятностей. — Томск: Издательство ТГУ, 1989. — 212 с.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988. — 400 с.

5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1972.

6. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по спецкурсам высшей математики: Типовые расчеты.– М.,1983.

7. Пестова Н.С., Самойлова М.В. Практические занятия по теории вероятностей.– Томск,1975.

8. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. – М.,1994.

9. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1984. — 245 с.

10. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные курсы./ Под редакцией А.В.Ефимова. — М.: Наука, 1984. — 250 с.

11. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. / Под редакцией А.А.Свешникова. — М.: Наука, 1965. — 656 с.

12. Дж.Ламперти. Вероятность.

13. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей.

14. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения// т.1,2.

15. Эмиль Борель. Вероятность и достоверность.

16. Д.Данин. Вероятностный мир.

Содержание

Учебное издание

БАРЫШЕВА Валентина Кирилловна
ГАЛАНОВ Юрий Иванович
ИВЛЕВ Евгений Тихонович
ПАХОМОВА Елена Григорьевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук,
профессор К.П. Арефьев

Редактор Н.Я. Горбунова

Верстка в системе *MikTeX* 2.7
с использованием шрифтов
из пакета LHFONTS 3.5. Ю.И. Галанов

Дизайн обложки И.О. Фамилия

Подписано к печати 00.00.2008. Формат 60x84/8.
Бумага «Снегурочка». Печать XEROX.
Усл.печ.л. 000. Уч.-изд.л. 000. Заказ XXX. Тираж XXX экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета
сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту
ISO 9001:2000

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.