ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ Комбинаторика, правила произведения и суммы

Комбинаторика как наука	Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются **соединения (подмножества** элементов, извлекаемые из **конечных** множеств).

Правило умножения	Если из некоторого конечного множества M первый элемент a можно выбрать n_1 способами, а второй элемент b – n_2 способами, то **оба** элемента a **и** b **в указанном порядке** можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило сложения	Если из некоторого конечного множества M первый элемент a можно выбрать n_1 способами, а второй элемент b – n_2 способами, причём первые и вторые способы не пересекаются, то любой из элементов a **или** b можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

§ Виды соединений

А. Схема выбора без возвращений (без повторений)

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов,
и выбранные элементы не возвращаются в исходное множество.

Перестановки	Любое **упорядоченное** множество, содержащее все свои элементы, называют перестановками. Число перестановок из n элементов обозначается P_n и равно $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Размещения	Размещением из n элементов по m элементов ($n \geq m$) называется любое **упорядоченное** подмножество данного множества, содержащее m элементов. Число размещений из n элементов по m элементов обозначается A_n^m и равно $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \ldots (n-m+1)}_{m\ \text{сомножителей}}$.

Сочетания без повторений	Сочетанием из n элементов по m элементов ($n \geq m$) называется любое **неупорядоченное** подмножество данного множества, содержащее m элементов. Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается C_n^m и равно $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{m!}$.

Свойства сочетаний	$1. C_n^m = C_n^{n-m}$; $2. C_n^0 = 1$; $3. C_n^1 = n$; $4. C_n^m = C_{m-1}^m + C_{m-1}^{m-1}$; $5. \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Б. Схема выбора с повторениями (с возвращением)

Пусть дано множество, состоящее из n элементов,
и выбор осуществляется поэлементно
с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге.

Перестановки с повторениями	Пусть в множестве из n элементов есть m различных типов элементов, причём 1-го типа n_1 элементов, 2-го типа – n_2 элементов, m-го типа – n_m элементов ($n_1 + n_2 + ... + n_m = n$). Перестановки элементов такого множества называются перестановками с повторениями. Число перестановок с повторениями обозначается $P_n(n_1, n_2, ..., n_m)$ и равно $P_n(n_1, n_2, ..., n_m) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_m!}$.

Размещения с повторениями	Размещением из n элементов по m элементов ($\forall m$ натуральное) с повторениями называется любое **упорядоченное** подмножество с возвращением, содержащее любой элемент из n сколько угодно раз от 0 до m. Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов обозначается $\overline{A}_n^m$ и равно $\overline{A}_n^m = n^m$.

Сочетания с повторениями	Сочетанием из n видов элементов по m элементов с повторениями называется любое **неупорядоченное** подмножество с возвращением, содержащее m элементов ($\forall m$ натуральное). Число сочетаний с повторениями из n видов элементов по m элементов обозначается $\overline{C}_n^m$ и равно $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Формулы вычисления числа соединений

Соединения	Перестановки	Размещения	Сочетания
Без повторений	$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \ldots (n-m+1)}_{m \text{ сомножителей}}$	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{A_n^m}{m!}$
С повторениями	$P_n(n_1, n_2, ..., n_m) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_m!}$	$\overline{A}_n^m = n^m$	$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

§ Понятие события. Классификация событий

Термины		
Общематематические	**Теории вероятностей**	**Математической статистики**
Множество	Пространство элементарных событий	Генеральная совокупность
Подмножество	Событие	Выборка
Значение числовой функции	Значение случайной величины	Наблюдение

Определение пространства элементарных событий	Множество $\Omega = \{\omega\}$ всех возможных взаимоисключающих исходов данного опыта (испытания, эксперимента) называется пространством элементарных событий (**ПЭС**), а сами исходы ω – **элементарными событиями** (элементами, точками).

Определение достоверного события	Событие, состоящее из всех точек пространства элементарных событий Ω, называется **достоверным**.

Определение невозможного события	Событие, не содержащее ни одной точки пространства элементарных событий, называется **невозможным**.

Определение случайного события	Событие, не совпадающее со всем пространством элементарных событий и содержащее хотя бы одну точку, называется **случайным**.

Определение несовместных и совместных событий	Два события A и B называются **несовместными**, если они не содержат общих точек, и **совместными**, если у них имеются общие точки.

Определение попарно несовместных событий	События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **попарно несовместными**, если появление одного из них исключает появление каждого из остальных.

Определение полной группы событий	События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют **полную группу событий**, если в результате опыта произойдёт хотя бы одно их них.

Определение противоположного события	Событие $\overline{A}$, состоящее из всех тех точек пространства элементарных событий, которые не входят в A, называется **противоположным** событию A, или его отрицанием.

§ Объединение, пересечение и разность событий

Определение суммы событий	Событие C, наступающее тогда и только тогда, когда наступит хотя бы одно из событий A **или** B, называют суммой (объединением) событий. Пишут $C = A \cup B$, или $C = A + B$.

Определение произведения событий	Событие C, наступающее тогда и только тогда, когда наступают одновременно события A и B, называют произведением (пересечением) событий A **и** B. Пишут $C = A \cap B$, или $C = A \cdot B$.

Определение разности событий	Событие C, наступающее тогда и только тогда, когда наступает событие A, но не наступает событие B, называют **разностью** событий A и B. Пишут $C = A \setminus B$

Свойства операций над событиями	1) $A + A = A,$ 2) $A + B = B + A,$ 3) $A + \Omega = \Omega,$ 4) $A + 0 = A,$ 5) $A + \overline{A} = \Omega,$ 6) $AB = BA,$ 7) $A \cdot A = A,$ 8) $A \cdot \Omega = A,$ 9) $A \cdot 0 = 0,$ 10) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B},$ 11) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B},$ 12) $A(B + C) = AB + AC,$ 13) $(A + B) + C = A + (B + C)$ 14) $(A + B)(A + C) = A + BC.$

§ Понятие вероятности события

Статистический подход к определению вероятности	В серии из n_k испытаний событие A появилось m_k раз; частота $P^*_{n_k}(A) = \dfrac{m_k}{n_k}$, $k = 1,2,...$ обладает свойством устойчивости. Вероятность $P(A)$ наступления события A равна $P(A) = \lim\limits_{n_k \to \infty} P^*_{n_k}(A)$.

Классическое определение вероятности	Пространство элементарных событий Ω дискретно и состоит из конечного числа n элементарных равновозможных несовместных событий ω_i, называемых случаями. Вероятность $P(A)$ наступления события A равна числу случаев m, благоприятствующих наступлению события A, деленному на число всех возможных исходов n: $P(A) = \dfrac{m}{n},\ m \le n$.

Геометрическое определение вероятности	Пространством элементарных событий является некоторая область, мера которой $mes\,G$. Событию A соответствует область, мера которой $mes\,g \subseteq mes\,G$. $P(A) = \dfrac{mes\,g}{mes\,G}$.

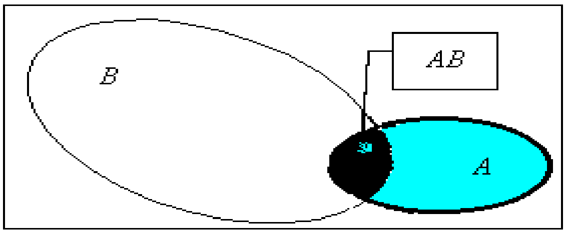
Аксиоматическое определение вероятности	Аксиомы вероятности: $A \in F - \textit{поле событий}$ $(A \in F, \quad B \in F \Rightarrow A + B \in F; \quad A \cdot B \in F; \quad A \setminus B \in F; \quad \overline{A} \in F)$. 1. $P(A) \geq 0$; 2. $P(\Omega) = 1$; 3. $P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_k), \quad A_i \cap A_j = 0, i \neq j$

§ Условные вероятности. Зависимые и независимые события. Формулы умножения вероятностей

Определение условной вероятности	Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется **условной вероятностью** события A относительно события B. Обозначается $P(A/B)$. Аналогично определяется условная вероятность $P(B/A)$.

Определение зависимых и независимых событий	События A и B называют **независимыми**, если наступление одного из них **не влияет на вероятность** наступления другого. События A и B называют **зависимыми**, если наступление одного из них **изменяет вероятность** наступления другого.

Теорема о связи условной и безусловной вероятности	(При аксиоматическом построении теории вероятностей формулы представляют собой определение условных вероятностей) $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0; \quad P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}, P(A) \neq 0$.



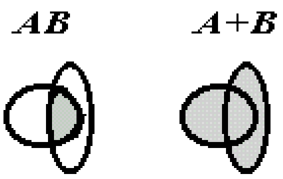
Определение независимых *в совокупности* и зависимых событий	События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если наступление одного из них **не изменяет вероятность** наступления любого другого и всех возможных их пересечений. Если это условие не выполняется, то события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **зависимыми**.

Формулы умножения вероятностей	$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A);\qquad P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B);$ $P(A_1A_2A\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

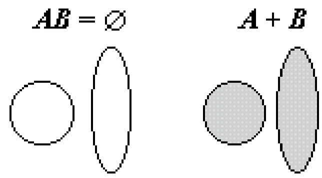
Следствие (формулы для независимых в совокупности событий)	$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B);$ $P(A_1A_2A\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_n)$.

§ Правило сложения вероятностей

Диаграммы Эйлера - Венна



События совместны



События несовместны

Формулы сложения вероятностей	$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$; $P(A_1+A_2+A_3+\ldots A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)-$ $-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-\ldots-P(A_{n-1}A_n)+P(A_1A_2A_3)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2A_3\cdots A_n)$.

Следствие (формулы для несовместных событий)	$P(A+B)=P(A)+P(B)$; $P(A_1+A_2+A_3+\ldots A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

Следствие (формула для независимых событий)	Если $A=A_1+A_2+\ldots+A_n$, то $P(A)$ проще найти, применяя формулу, связывающую вероятности противоположных событий: $P(A)=1-P(\overline{A})$. Для **независимых** событий получим: $P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n})=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$.

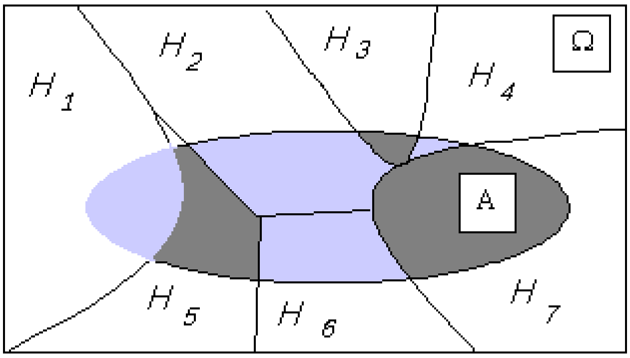
Запомним:

<u>С</u>умма – учитываем **<u>С</u>овместность.**

Прои<u>З</u>ведение – учитываем **<u>З</u>ависимость.**

§ Формула полной вероятности и формула Байеса

Теорема (формула полной вероятности)	Пусть событие A может произойти с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу несовместных событий, называемых гипотезами. Тогда справедлива формула полной вероятности: $$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A/H_j) = P(H_1)P(A/H_1) + ... + P(H_n)P(A/H_n).$$ Вероятности $P(H_i), \quad (i = 1,2,...n)$ называют априорными вероятностями гипотез.



Теорема (формула Байеса)	Пусть выполняются условия теоремы о полной вероятности $P(A)$ наступления события A. Тогда апостериорная вероятность $P(H_k / A)$ k-й гипотезы при условии, что событие A произошло, равна $$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}, \quad k = 1,2,...,n.$$

§ Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли.

Условия испытаний по схеме Бернулли	1) опыты независимы, т.е. результат каждого опыта не оказывает влияния на другие опыты; 2) вероятность $P(A) = p$ наступления события A в каждом опыте одна и та же.

Теорема (формула Бернулли, или биномиального распределения)	Вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли событие A наступит ровно m раз, равна $$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}$$, где $q = 1 - p$.

§ Наиболее вероятное число появления события в испытаниях по схеме Бернулли. Приближение Пуассона

Наиболее вероятное число появления события в испытаниях по схеме Бернулли	Число m_0 называют наиболее вероятным числом наступления события A в испытаниях по схеме Бернулли, если $P_n(m_0) \ge P_n(m), \quad \forall m$. Можно показать, что $np - q < m_0 < np + p$; $m_0 = \begin{cases} \text{целая часть числа } [np + p], \text{ если } np + p - \text{дробь}, \\ \text{два числа } np + p \text{ и } np - q, \text{ если } np + p - \text{целое} \end{cases}.$

Теорема Пуассона	Если существует $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} np = a$, то справедливо приближение Пуассона $P_n(m) = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} C_n^m p^m q^{n-m} = \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$.

Определение потока событий	Последовательность событий, наступающих в случайные, заранее неизвестные моменты времени, называют потоком событий.

Определение пуассоновского потока	Поток называется простейшим, или пуассоновским, если он обладает следующими тремя свойствами. 1. Свойство **стационарности**: вероятность $P_t(m)$ появления m событий на любых непересекающихся промежутках времени t зависит только от величин m и t, но не зависит от начала отсчёта времени. 2. Свойство **отсутствия последействия** или независимости событий: вероятность $P_t(m)$ не зависит от того, появлялись или нет события в предшествующие промежутки времени. 3. Свойство **ординарности**: вероятность $P_{\Delta t}(1)$ появления события один раз в интервале времени $t, t + \Delta t)$ есть бесконечно малая первого порядка малости относительно Δt; вероятность $P_{\Delta t}(m > 1)$ есть бесконечно малая порядка выше первого относительно Δt.

Формула Пуассона	Пусть в течение времени t действует простейший поток. Вероятность $P_t(m)$ того, что за промежуток времени t событие A наступит m раз, вычисляется по формуле $P_t(m) = \dfrac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$. Величину λ называют интенсивностью потока. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} np = a = \lambda t$.

§ Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Теорема (локальная Муавра-Лапласа)	Вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых опытах событие A наступит m раз, если в каждом из опытов вероятность появления события A постоянна и равна $p \quad (0 < p < 1)$, приближённо выражается формулой: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x^2}{2})$ – функция Гаусса, $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Теорема (интегральная Муавра-Лапласа)	Вероятность $P(m_1 \le m \le m_2)$ того, что в n независимых опытах событие A наступит не менее m_1 раз и не более m_2, если в каждом из опытов вероятность появления события A постоянна и равна $p \quad (0 < p < 1)$, приближённо выражается формулой: $P(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$ – функция Лапласа, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}; \qquad \Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Теорема (отклонение частоты появления события от его вероятности)	Вероятность $P(\left\|\frac{m}{n} - p\right\| < \varepsilon)$ того, что модуль отклонения частоты $\frac{m}{n}$ появления события A от его вероятности $P(A) = p$ не превышает заданного числа ε при n испытаниях, приближённо равна $P(\left\|\frac{m}{n} - p\right\| < \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$, или удовлетворяет неравенству $P(\left\|\frac{m}{n} - p\right\| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$.