Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом

Задания типового варианта

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \end{cases}$$

2. Дана система линейных уравнений. Исследуйте данную систему на совместность. Найдите общее решение системы и какое-либо частное ее решение.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 - 6x_2 - 4x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$$

3. Дана система линейных уравнений. Найдите общее решение системы, какое-либо частное решение и любую фундаментальную систему частных решений (ФСЧР):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение заданий типового варианта средствами MathCAD

Пример 1.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 12 \qquad B := \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A) = 3$$

Система имеет единственное решение

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Пример 2.

$$A1 := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & -6 & -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad B1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A1) = 3$$

F - базисный минор.
1-я, 2-я, 3-я неизвестные - базисные,
4-я - свободная.
Переносим свободную неизвестную к свободным членам, получаем матрицу D(c).

$$F := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad |F| = -3$$

$$D(c) := \begin{pmatrix} 1 + 2\cdot c \\ 1 \\ 1 + c \end{pmatrix} \qquad X(c) := F^{-1} \cdot D(c)$$

Общее решение X(c)

$$X(c) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + c \\ \frac{-1}{3} - c \\ \frac{2}{3} + c \end{pmatrix}$$

Проверка

$$c := 0 \qquad X1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A1 \cdot X1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Пример 3.

$$A0 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |F1| = 0$$

F1 не может быть базисным минором. Поищем другой.

$$\mathrm{rank}(A0) = 3$$

$$F0 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |F0| = -2$$

Базисные неизвестные 1-я, 2-я, 4-я; свободные - 3-я, 5-я.

$$D0(u, v) := \begin{pmatrix} -u - 2\cdot v \\ u - v \\ u - 2\cdot v \end{pmatrix} \qquad X0(u, v) := F0^{-1} \cdot D0(u, v) \qquad X0(u, v) \rightarrow \begin{pmatrix} -v \\ u \\ -v \end{pmatrix}$$

Общее решение X0(u,v)

ФСЧР

$$X0(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X0(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$