Глава I. РЯДЫ
Числовые ряды
§ Основные понятия

Определение числового ряда	Пусть дана последовательность вещественных или комплексных чисел. **Числовым рядом** называется сумма всех членов числовой последовательности: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$. Числа $a_1, a_2, ... , a_n, ...$ называют **членами ряда**. Функциональную зависимость члена ряда a_n от его номера n называют **общим членом ряда**: $a_n = f(n)$.

Определение n-й частичной суммы числового ряда и остатка ряда	Сумма n первых членов ряда называется его n**-й частичной суммой** и обозначается $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$. **Остатком ряда** r_n называется разность суммы ряда S и его n –й частичной суммы: $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ...$, т.е. $S = S_n + r_n$.

Определение сходящегося ряда и расходящегося ряда	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, равный S, т.е. если $\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lvert S \rvert < \infty$. Ряд называется **расходящимся,** если $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \text{не существует}, \\ \infty. \end{cases}$

§ Критерий Коши. Необходимый признак сходимости ряда

Критерий Коши	Для того, чтобы числовой ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы любой его отрезок можно было сделать сколь угодно малым по абсолютной величине: $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N = N(\varepsilon)): \forall n > N, \forall p \geq 1 \Rightarrow \lvert a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} \rvert < \varepsilon$.

Необходимый признак сходимости ряда	**Если** ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**, то предел общего члена ряда a_n равен нулю: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; сходится \;\; \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие из необходимого признака сходимости (достаточный признак расходимости)	Если предел общего члена ряда **не равен нулю**, то ряд **расходится**: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; расходится$.

§ Некоторые свойства сходящихся рядов

Свойство 1 (об остатке)	Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой из его остатков, т.е. отбрасывание **конечного** числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Свойство 2 (линейности)	Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к числам S и σ соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n$ также сходится, и его сумма равна $\alpha S + \beta\sigma$ (α и $\beta -$ произвольные константы).

Свойство 3 (коммутативности)	Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и его сумма равна S, то члены этого ряда можно, **не переставляя**, объединять в одно слагаемое произвольным образом, причём сумма полученного ряда также будет равна S.

§ Абсолютная и условная сходимость

Определение абсолютной сходимости	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из модулей членов этого ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$.

Определение условной сходимости	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**, если ряд из модулей членов ряда расходится ($\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ расходится), а исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Теорема об абсолютной сходимости	Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е. из абсолютной сходимости следует сходимость исходного ряда.

Теорема о коммутативности абсолютно сходящегося ряда	Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно ($\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ сходится), и его сумма равна S, то **при любой перестановке** его членов вновь полученный ряд сходится к той же сумме S.

Теорема Римана	Если ряд с вещественными членами сходится условно, то для любого вещественного числа L, конечного или нет, можно так переставить члены этого ряда, чтобы полученный ряд имел сумму, равную L.

§ Критерий абсолютной сходимости рядов

Для рядов с **положительными вещественными членами** понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Критерий абсолютной сходимости рядов	Для того чтобы ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена в совокупности, т.е. $\exists M : \forall n \Rightarrow S_n \le M$.

§ Достаточные признаки абсолютной сходимости рядов

Интегральный признак Коши абсолютной сходимости рядов	Пусть неотрицательная на луче $[k,\infty)$ функция $f(x)$ монотонно убывает при $x\to\infty$, и при целых $n=1,2,...$ имеет место равенство $f(n)=\lvert a_n\rvert$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ сходится (абсолютно), если сходится интеграл $\int\limits_k^{\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ расходится, если расходится $\int\limits_k^{\infty} f(x)dx$.

Первая теорема сравнения рядов с положительными членами	Если для всех $n>n_0\ge 1$ выполняется неравенство $\lvert a_n\rvert\le\lvert b_n\rvert$, то из (абсолютной) сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert b_n\rvert$ следует (абсолютная) сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ следует расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert b_n\rvert$.

Замечание 1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ либо расходится, либо сходится условно. Нужны дополнительные исследования.

Если же ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ содержат лишь **положительные вещественные члены**,

то из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Вторая теорема сравнения рядов с положительными членами	Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lvert a_n\rvert}{\lvert b_n\rvert}=q$. Если $q\in[0,\infty)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert b_n\rvert$ сходится (абсолютно), то сходится (абсолютно) и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$. Если $q>0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert b_n\rvert$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$.

Замечание 2. Если $q=\infty$, то тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lvert b_n\rvert}{\lvert a_n\rvert}=0$, то из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert b_n\rvert$.

Замечание 3. Если $q\neq 0$ и $q\neq\infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert b_n\rvert$ ведут себя одинаково: или оба сходятся, или оба расходятся.

Для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ требуются дополнительные исследования. Каждый из них, независимо от другого, может либо сходиться условно, либо расходиться.

Если же члены этих рядов вещественны и положительны, то при $q\neq 0$, $q\neq\infty$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ или оба сходятся, или оба расходятся.

Признак Даламбера абсолютной сходимости рядов	Если существует предел отношения модулей последующего члена ряда к предыдущему, т.е.: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}=q$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ сходится (абсолютно) при $q<1$ и расходится при $q>1$. (При $q=1$ никакого вывода о сходимости ряда сделать нельзя, требуются дополнительные исследования).

Радикальный признак Коши абсолютной сходимости рядов	Если существует предел корня n-й из модуля общего члена ряда, т.е.: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = q$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ сходится (абсолютно) при $q<1$ и расходится при $q>1$. (При $q=1$ никакого вывода о сходимости ряда сделать нельзя, требуются дополнительные исследования).

Рекомендации по применению достаточных признаков сходимости рядов.

1. **Признак Даламбера** применяют, если общий член ряда содержит **показательные** функции a^n или **факториалы** $n!$. Если же общий член ряда содержит только степенные функции n^k, где k – любое конечное вещественное число, признак Даламбера, как правило, ответа не даёт.
2. **Интегральный** признак Коши применяют, если легко найти **первообразную** общего члена ряда.
3. **Радикальный** признак Коши применяют, если легко извлекается **корень** n-й степени из общего члена ряда. При этом, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k} = 1$, где k – любое конечное вещественное число.

   Также полезной бывает **формула Стирлинга**:
$$n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n} \text{ при } n\to\infty.$$
4. **Признаки сравнения** применяют, когда легко подобрать для сравнения **эталонные ряды,** используя при этом сравнение бесконечно малых функций.

$\alpha(x)\to 0$ при x $\to a$			
1	$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6	$\log_a(1+\alpha(x))\sim\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
2	$tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6a	$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$
3	$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	7	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$
4	$arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$	7a	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
5	$1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1+\alpha(x))^{\mu}-1\sim\mu\alpha(x)$

Следует иметь в виду, что при вычислении пределов отношений конечного числа б. б. складываемых функций слагаемые более низкого порядка роста можно отбрасывать, а сумму заменять слагаемым **самого высокого порядка роста**.

При $n\to\infty$ **самый высокий** порядок **роста** имеет **показательная** функция $f(n)=a^n$; степенная функция $f(n)=n^k$ имеет порядок роста, более низкий по сравнению с показательной функцией, но более высокий по сравнению с логарифмической; логарифмическая функция $f(n)=\log_a n$ имеет самый низкий порядок роста по сравнению и с показательной функцией, и со степенной. Это обозначают так:
$$\log_a n << n^k << a^n, \quad \text{при } n\to\infty.$$

Очень эффективным при вычислении пределов оказывается применение следующих **правил**:

1. **Предел отношения б. м. ф. (б. б. ф.) не изменится, если заменить эти функции эквивалентными.**
2. **Разность эквивалентных б. м. ф. (б. б. ф.) есть б. м. ф. (б. б. ф.) более высокого порядка малости (роста) по сравнению с уменьшаемой и вычитаемой б. м. ф. (б. б. ф.).**
3. **Сумма конечного числа б. м. (б. б.) слагаемых разного порядка малости (роста) эквивалентна слагаемому самого низкого (высокого) порядка малости (роста).**
4. **Если б. м. ф. $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ при $x \to a$, $A = \text{const} \neq 0$, то $A + \alpha(x) \sim A + \alpha_1(x)$ при $x \to a$.**

§ Признаки Лейбница и Дирихле

Определение знакочередующегося ряда	Ряд с вещественными членами называется **знакочередующимся**, если два любых его соседних члена имеют противоположные знаки: $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$$ ($\forall a_n \in R$, т.е. вещественны и $\forall a_n > 0$).

Признак Лейбница	Если члены знакочередующегося ряда 1) убывают по абсолютной величине, т.е. $a_{n+1} < a_n$ и 2) стремятся к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится, его остаток не превышает первого члена остатка, а по знаку совпадает со знаком первого члена остатка.

Признак Дирихле	Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ ограничена, а числовая последовательность $\{\lvert b_n\rvert\}$ монотонная и бесконечно малая, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n b_n\rvert$ сходится.