

Функциональные ряды

§ Функциональный ряд, его сумма и область сходимости

Определение функционального ряда	Пусть в области Δ вещественных или комплексных чисел дана последовательность функций $\{f_k(z)\}$, $k = 1, 2, \dots$. Функциональным рядом называется сумма всех членов функциональной последовательности: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$
---	---

Определение области поточечной сходимости функционального ряда	Множество $D \subset \Delta$ всех точек, в которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется областью поточечной сходимости этого ряда.
---	--

Определение суммы функционального ряда	Функция $S(z)$ такая, что для любой точки $z_0 \in D$ число $S(z_0)$ является суммой числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$, называется суммой функционального ряда. То есть $S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$.
---	--

§ Равномерная и поточечная сходимост

Определение равномерной и поточечной сходимости функционального ряда	Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится в области D к функции $S(z)$, и $H \subseteq D$ – некоторое множество. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется равномерно сходящимся на множестве $H \subseteq D$, если $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N(\varepsilon) > 0) \quad (\forall n > N, \forall z \in H \Rightarrow S(z) - S_n(z) < \varepsilon),$ или: $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N(\varepsilon) > 0) \quad (\forall n > N, \forall z \in H \Rightarrow r_n(z) < \varepsilon).$ Если такой номер N зависит не только от $\varepsilon > 0$, но и от $z \in D$, т.е. $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N(\varepsilon, z) > 0) \quad (\forall n > N \Rightarrow r_n(z) < \varepsilon)$, то ряд называется сходящимся поточечно (неравномерно) в D.
---	---

Признак Вейерштрасса (достаточный признак равномерной сходимости)	Если при любом $z \in D$ выполняется неравенство $ f_n(z) \leq c_n$, $n = 1, 2, \dots$, а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится в области D равномерно .
---	---

§ Свойства равномерно сходящихся рядов

Свойство 1 (о непрерывности суммы ряда)	Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ непрерывны в области D , и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в этой области, то его сумма $S(z)$ непрерывна в D .
---	--

Свойство 2 (о почленном интегрировании ряда)	Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ непрерывны на некоторой дуге L , и ряд сходится равномерно на этой дуге к функции $S(z)$, то ряд можно почленно интегрировать вдоль этой дуги, т.е. $\int_L S(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z)dz$
--	---

Свойство 3 (о почленном дифференцировании ряда с вещественными членами)	Пусть дан ряд с вещественными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, члены которого на отрезке $[a, b]$ непрерывны вместе со своими производными. Если на $[a, b]$ данный ряд сходится к функции $S(x)$, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, то функция $S(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и при этом $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.
---	---

§ Степенные ряды

Определение степенного ряда	Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ называется степенным рядом, где a_n – вещественные или комплексные числа, не зависящие от z, называются коэффициентами степенного ряда; z_0 – фиксированное число, называется центром сходимости степенного ряда. Если $z_0 = 0$, то степенной ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
--	---

Теорема Абеля	Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке $z_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом z, удовлетворяющем неравенству: $z < z_1$; при этом он сходится равномерно на любом промежутке $z \leq \rho < z_1$. Если ряд в точке $z_2 \neq 0$ расходится, то он расходится во всех точках z, для которых $z > z_2$
----------------------	--

Теорема (о радиусе сходимости степенного ряда)	Для всякого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ существует неотрицательное число R такое, что при $z < R$ (если $R > 0$) ряд сходится и притом абсолютно, а при $z > R$ (если $R \neq \infty$) ряд расходится. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда, а множество точек z, удовлетворяющих неравенству $z < R$, – его областью (интервалом для ряда с вещественными членами) сходимости.
--	--

Теорема (о свойствах степенного ряда)	Сумма степенного ряда является функцией непрерывной в его области (интервале) сходимости. Степенной ряд можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать любое число раз, при этом радиус сходимости рядов не изменяется.
--	--

§ Ряды Тейлора

Теорема (о достаточных условиях представления функции её рядом Тейлора)	Если функция $f(z)$ имеет на множестве $ z - z_0 < R$ ограниченные в совокупности производные любого порядка, то на этом множестве функция $f(z)$ представима в виде суммы степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$, который называется рядом Тейлора для функции $f(z)$.
---	---

Теорема (единственности ряда Тейлора)	Любой сходящийся на множестве $ z - z_0 < R$ к функции $f(z)$ степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ является рядом Тейлора для своей суммы $f(z)$.
---	--

§ Ряды Тейлора некоторых элементарных функций

Определение ряда Маклорена	Рядом Маклорена называют ряд Тейлора с центром сходимости в точке ноль: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.
-----------------------------------	--

$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z < \infty$	
$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z < \infty$	$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z < \infty$
$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad z < \infty$	$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z < \infty$
$\frac{b}{1 - q(z)} = b \sum_{n=0}^{\infty} (q(z))^n, \quad q(z) < 1$	
$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n z^n}{n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}, \quad z < 1, z \neq -1$	
$(1 + z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} z^n, \quad z < 1$	
$\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}, \quad z < 1.$	

Рекомендации по разложению функции в ряд Тейлора

1. Найти формулу для производной n -го порядка в точке z_0 , записать ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \text{ Найти область сходимости полученного ряда.}$$

2. Воспользоваться известными разложениями функций и тождественными преобразованиями данной функции привести её к известному разложению. Найти область сходимости полученного ряда.
3. Дробные рациональные функции разложить на простые дроби. Простые дроби преобразовать тождественными преобразованиями к сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Найти область сходимости полученного ряда.
4. Воспользоваться почленным дифференцированием или почленным интегрированием, чтобы привести данную функцию к известному разложению. Найти область сходимости полученного ряда.

§ Применение рядов Тейлора

Оценка остатка ряда Тейлора	Остаток $r_n(x)$ ряда Тейлора $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x)$ вещественной функции вещественной переменной $f(x)$ может быть представлен остаточным членом в форме Лагранжа: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ точка } c \text{ расположена между } x \text{ и } x_0;$ Пеано: $r_{n+1}(x) = o((x - x_0)^{n+1});$ Коши: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n}{n!}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$ Для знакопеременующегося ряда $ r_n(x) < \left \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right .$
------------------------------------	---

Ряды Тейлора применяются

для приближённого вычисления значений функций, определённых интегралов,

нахождения первообразных неберущихся интегралов,

значений иррациональных чисел,

интегрирования дифференциальных уравнений,

для вычисления пределов, значений производных функции в точке

и во многих других случаях.