

§ Ортогональные системы вещественных функций

Определение ортогональных функций	Две интегрируемые функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются ортогональными на промежутке $[a, b]$, если $\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0$.
Определение ортогональной системы вещественных функций	Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется ортогональной на $[a, b]$, если эти функции попарно ортогональны на $[a, b]$, то есть $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0, \text{ если } i \neq j,$ $\int_a^b \varphi_i^2(x)dx > 0.$

§ Ряд Фурье по ортогональной системе вещественных функций

Определение ряда по ортогональной системе функций	Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – ортогональная система вещественных функций на $[a, b]$. Рядом по ортогональной системе вещественных функций называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, где c_n – вещественные коэффициенты.
Теорема о коэффициентах ряда Фурье	Пусть ряд по ортогональной системе вещественных функций равномерно сходится на $[a, b]$ к функции $f(x)$. Тогда коэффициенты этого ряда c_n имеют вид $c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}$ и называются коэффициентами Фурье.

§ Тригонометрический ряд Фурье

Определение тригонометрического ряда Фурье	Тригонометрическим рядом Фурье называется ряд $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell},$ где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам $a_n = \frac{1}{\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx, \quad (T = 2\ell - \text{период функции } f(x))$ $b_n = \frac{1}{\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx.$
---	---

Теорема Дирихле (достаточные условия представимости функции в виде суммы своего ряда Фурье)	Пусть функция $f(x)$ 1. периодическая, с периодом $T=2\ell$; 2. кусочно-непрерывная на любом конечном промежутке $[x_1, x_2]$ и может иметь разрывы только I рода; 3. кусочно-монотонная. Тогда ряд Фурье, составленный для этой функции, сходится к функции $f(x)$ в каждой точке непрерывности и к среднему арифметическому односторонних пределов в точках разрыва первого рода: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \begin{cases} f(x) - \text{в точках непрерывности,} \\ \frac{f(x-x_0) + f(x+x_0)}{2} \end{cases}$ (x_0 - точки разрыва I-го рода).
---	--

**§ Ряд Фурье для чётной и нечётной функции,
для функций, заданных на интервале $[0, l]$
и непериодических функций**

Лемма 1	Если $f(x)$ – чётная функция на промежутке $[-a, a]$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$
Лемма 2	Если $f(x)$ – нечётная функция на промежутке $[-a, a]$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$

Пример. Разложение функций в ряд Фурье.

$$f(x) := \text{if}(x < 0, -1, 0) + \text{if}(x \geq 0, 1, 0)$$

$$L := \pi$$

$$N := 100$$

$$n := 0..N$$

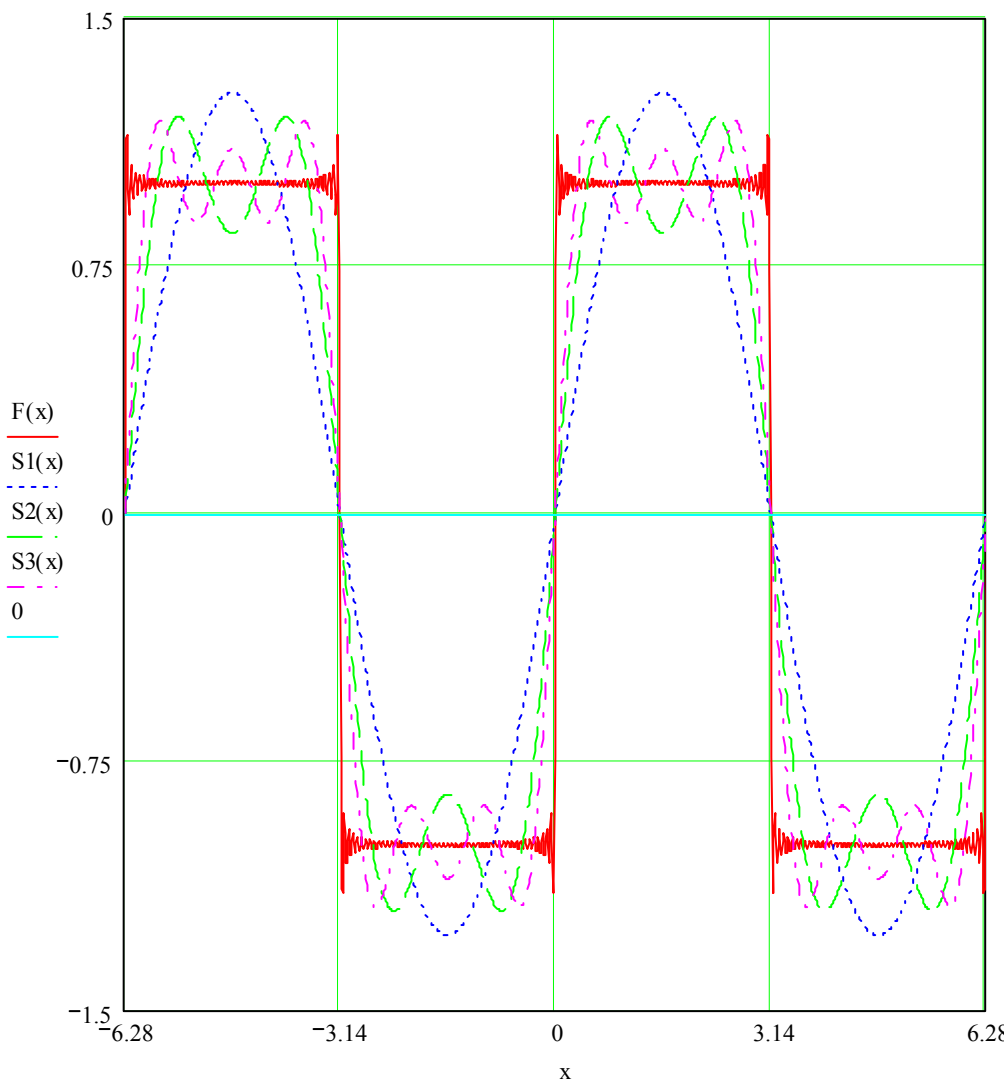
$$a_0 := \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) dx \quad a_n := \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{L}\right) dx \quad b_n := \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{L}\right) dx$$

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{L}\right) + \sum_{n=1}^N b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{L}\right)$$

$$S1(x) := \frac{4 \cdot \sin(x)}{\pi}$$

$$S2(x) := S1(x) + \frac{4 \cdot \sin(3 \cdot x)}{3 \cdot \pi}$$

$$S3(x) := S2(x) + \frac{4 \cdot \sin(5 \cdot x)}{\pi \cdot 5}$$



Разложение функций в ряд Фурье в интервале $[0, l]$	Функцию, заданную на интервале $[0, l]$ доопределяют на интервал $[-l, 0]$ чётным образом, если $f(0) \neq 0$ и нечётным образом, если $f(0) = 0$. Вне интервала $[-l, l]$ продолжают периодическим образом. Проверяют выполнение условий Дирихле для полученной функции, вычисляют коэффициенты Фурье по соответствующим формулам и записывают ряд Фурье.
Разложение функций в ряд Фурье неперiodических функций	Функцию, заданную на интервале $[a, a + 2l]$, вне интервала $[a, a + 2l]$ продолжают периодическим образом. Проверяют выполнение условий Дирихле для полученной функции, вычисляют коэффициенты Фурье по соответствующим формулам и записывают ряд Фурье.