§ Понятие случайной величины и её закона распределения. Одномерные дискретные случайные величины

Определение случайной величины	**Случайной величиной** (СВ) называется функция $\xi(\omega)$, определённая на пространстве элементарных событий Ω, со значениями в одномерном пространстве R (одномерная СВ) или n-мерном R_n (n-мерная СВ).

Определение дискретной и непрерывной случайной величины	Случайная величина, множество значений которой конечно или счётно, называется **дискретной** случайной величиной. Для **непрерывной** случайной величины множество её значений несчётно.

Определение закона распределения случайной величины	Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями этих значений, называется **законом распределения** случайной величины.

Определение ряда распределения случайной величины	**Рядом распределения** случайной величины называется таблица, в первой строке которой указываются значения случайной величины в порядке их возрастания, во второй строке – вероятности наступления этих значений: ξ: x_1, x_2, x_3, $\dots$, x_n, $\dots$ p: p_1, p_2, p_3, $\dots$, p_n, $\dots$ Для ряда распределения должно выполняться **условие нормировки** $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

§ Функция распределения одномерной случайной величины и её свойства

Определение функции распределения случайной величины	Функция $F(x)$, равная вероятности того, что значения случайной величины ξ меньше аргумента этой функции, называется **функцией распределения** случайной величины ξ, то есть $F(x) = P(\xi < x)$. Функция распределения $F(x)$ равна вероятности попадания значений случайной величины ξ на промежуток $(-\infty, x)$.

Свойство 1 (значения $F(x)$)	Функция распределения $F(x)$ определена на всей числовой прямой, а её значения принадлежат отрезку $[0;1]$: $0 \le F(x) \le 1, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$.

Свойство 2 ($F(\pm\infty)$)	$F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Свойство 3 (монотонности)	Функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \ge F(x_2)$.

Свойство 4 (непрерывность слева)	Функция распределения $F(x)$ **непрерывна слева** в каждой точке x_0: $\exists F(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} F(x), \quad \forall x < x_0$.

Свойство 5 (вероятность попадания в полуинтервал)	Вероятность попадания случайной величины ξ в полуинтервал $[x_1,\, x_2)$ равна разности значений функции распределения $F(x)$ в конечных точках полуинтервала: $P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Свойство 6 (правосторонний предел)	Правосторонний предел функция распределения $F(x)$ в любой точке x_0 равен вероятности попадания случайной величины ξ на полуинтервал $(-\infty,\, x_0]$: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} F(x) = P(\xi \le x_0), \quad \forall x > x_0$.

Связь ряда распределения и функции распределения	Ряд распределения дискретной случайной величины $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline \xi & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \hline p & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ \hline \end{array}$ связывает с функцией распределения $F(x)$ равенство $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \eta(x - x_i)$, где $\eta(x - x_i) = \begin{cases} 0, & x \le x_i, \\ 1, & x > x_i \end{cases}$ – единичная функция Хевисайда.

Графики функции распределения $F(x)$ дискретной и непрерывной случайной величины

Дискретные случайные величины ξ: $\Omega \to R$	**Непрерывные** случайные величины ξ: $\Omega \to R$
Функция распределения *F*(*x*)	**Функция распределения *F*(*x*)**
$F(x) = P(\xi < x)$ 	$F(x) = P(\xi < x)$ 

Свойство 7 (скачки дискретной случайной величины)	Функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины является ступенчатой со скачками в точках x_i разрыва 1-го рода, равными вероятности $p(x_i)$ наступления соответствующего значения x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

§ Плотность распределения одномерной случайной величины и её свойства

Определение непрерывной случайной величины	Случайная величина ξ называется абсолютно **непрерывной** в точке x, если её функция распределения $F(x)$ дифференцируема в этой точке, то есть $\exists F^{/}(x)$.

Определение плотности распределения случайной величины	Плотностью распределения $\rho(x)$ случайной величины ξ называется предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{P(x\le\xi<x+\Delta x)}{\Delta x}$ отношения вероятности попадания случайной величины ξ на полуинтервал $\left[x,\, x+\Delta x\right)$ к приращению Δx, то есть $\rho(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{P(x\le\xi<x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$, если этот предел существует и конечен.

Свойства функции распределения	Если случайная величина ξ абсолютно непрерывна, то плотность распределения $\rho(x)$ существует и при этом 1. $\rho(x)=F^{/}(x)$; 2. $\rho(x)\ge 0$; 3. $P(a\le\xi<b)=\int\limits_a^b\rho(x)dx$; 4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx=1$; 5. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\rho(x)dx.$

§ Математическое ожидание случайной величины и его свойства

Определение математического ожидания ДИСКРЕТНОЙ случайной величины	Пусть дискретная случайная величина задана рядом распределения $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline \xi & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ \hline p & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \\ \hline\end{array}$ Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\cdot p_k$ сходится, то его сумма называется **математическим ожиданием** случайной величины ξ. Математическое ожидание обозначают одним из символов $M\left[\xi\right],\, m_\xi, <\xi>, \overline{\xi}$. То есть $M\left[\xi\right]=m_\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\cdot p_k$. Если число значений случайной величины конечно и равно n, ряд заменяется конечной суммой $M\left[\xi\right]=m_\xi=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\cdot p_k$.

Определение математического ожидания НЕПРЕРЫВНОЙ случайной величины	Если несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\rho(x)dx$ сходится, то он называется **математическим ожиданием** случайной величины ξ. Если несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\rho(x)dx$ расходится, то случайная величина ξ математического ожидания не имеет.

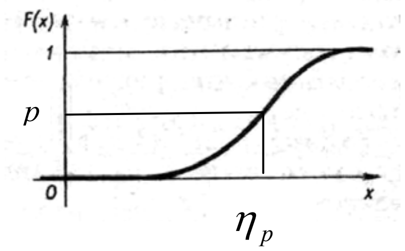
Математическое ожидание функции случайной величины	1. Математическое ожидание $M\left[Y\right]$ функции $Y=\varphi(\xi)$ **дискретной** случайной величины ξ равно $M\left[Y\right]=\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\cdot p_k$. 2. Математическое ожидание $M\left[Y\right]$ функции $Y=\varphi(\xi)$ **непрерывной** случайной величины ξ, заданной на промежутке (a,b) равно $M\left[Y\right]=\int_a^b\varphi(x)\rho(x)dx$.

Свойства математического ожидания	$1.M(C)=C,C=const;\qquad 2.M(C\xi)=CM(\xi);$ $3.M(\alpha_1\xi+...+\alpha_n\psi)=\alpha_1M(\xi)+...+\alpha_nM(\psi),$ $\alpha_1,...,\alpha_n-const;$ $4.M(\xi\cdot\psi)=M(\xi)\cdot M(\psi),\quad \xi,\psi-$ *независимые.*

§ Мода, медиана, квантиль порядка p

Определение моды случайной величины	Модой $\mathrm{mod}\,\xi$ **дискретной** случайной величины ξ называется то её значение, которое достигается с наибольшей вероятностью: $\mathrm{mod}\,\xi=x_{\max P(x_i)}$. Модой $\mathrm{mod}\,\xi$ **непрерывной** случайной величины ξ называется то её значение, при котором плотность распределения имеет максимум: $\mathrm{mod}\,\xi=x_{\max\rho(x)}$.

Определение квантили порядка p и медианы	Квантилью порядка p случайной величины ξ называется точка η_p вещественной оси, в которой функция распределения $F(x)$ переходит от значений, меньших p **,** к значениям, большим p **:** $F(\eta_p-0)\le p,\quad F(\eta_p+0)>p$ **.** Квантиль $\eta_{\frac{1}{2}}$ порядка $\frac{1}{2}$ называется медианой случайной величины.



§ Дисперсия случайной величины

Определение дисперсии случайно величины и среднего квадратичное отклонения	Дисперсией $D_\xi=D\left[\xi\right]$ называется математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от её математического ожидания: $D_\xi=D\left[\xi\right]=M\left[(\xi-m_\xi)^2\right].$ Средним квадратичным отклонением называется число σ, равное квадратному корню из дисперсии: $\sigma=\sqrt{D\left[\xi\right]}$.

Формулы вычисления дисперсии	Для **дискретной** случайной величины с рядом распределения $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \xi & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ \hline p & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \\ \hline \end{array}$ дисперсия вычисляется по формуле: $D_\xi = D[\xi] = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k - m_\xi)^2 p_k$. Для **непрерывной** случайной величины, заданной на промежутке (a, b) плотностью распределения $\rho(x)$, дисперсия равна $D_\xi = D[\xi] = \int\limits_a^b (x - m_\xi)^2 \rho(x) dx$. Если непрерывная случайная величина задана на всей числовой прямой, то её дисперсия вычисляется по формуле: $D_\xi = D[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 \rho(x) dx$.

Теорема об эквивалентной формуле для дисперсии	Дисперсия случайной величины ξ равна разности математического ожидания квадрата случайной величины $M[\xi^2]$ и квадрата её математического ожидания $(m_\xi)^2$: $D_\xi = D[\xi] = M[\xi^2] - (m_\xi)^2$.

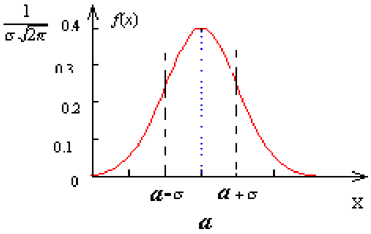
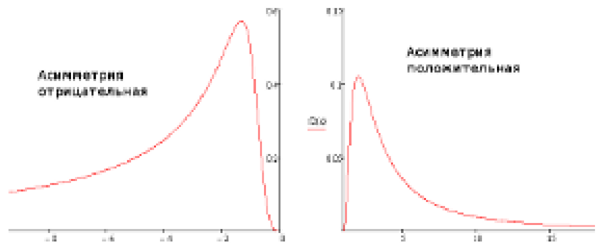
Свойства дисперсии	1. $D(C) = 0,\ C = const$; 2. $D(\alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n) = \alpha_1^2 D(\xi_1) + \ldots + \alpha_n^2 D(\xi_n)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n - const$, $\xi_i, \xi_j - незав. (i, j = 1,2,\ldots n, i \neq j)$

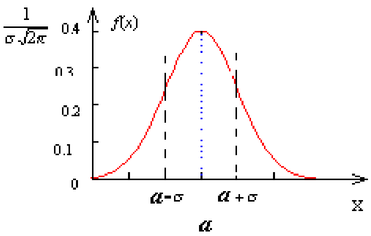
§ Моменты случайной величины

Начальные моменты	Начальным моментом k-го порядка называется число $m_k = M[\xi^k]$. Для дискретной случайной величины $m_k = \sum\limits_j x_j^k p_j$, $j = 1,2,\ldots$; Для непрерывной случайной величины $m_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \rho(x) dx$. $m_1 = M[\xi]$.

Центральные моменты	Центральным моментом k-го порядка называется число $\mu_k = M[(\xi - m_\xi)^k]$. Для дискретной случайной величины $\mu_k = \sum\limits_j (x_j - M(\xi))^k p_j, \quad j = 1,2,\ldots$ Для непрерывной случайной величины $\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^k \rho(x) dx$.

Свойство центральных моментов	Если случайная величина распределена симметрично относительно математического ожидания, то все её центральные моменты нечётного порядка равны нулю.

Определение коэффициента асимметрии (скошенности) **Нормальное распределение:**  	Число $A[\xi]=\dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ называется коэффициентом асимметрии (скошенности). Характеризует степень отклонения распределения от нормального $\rho(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, для которого $A[\xi]=0$.  Если асимметрия **положительна**, то максимальная ордината кривой плотности смещена **влево** на фоне кривой плотности нормального распределения (график асимметричен влево) и смещена тем более, чем больше асимметрия. При **отрицательной** асимметрии кривая плотности смещена **вправо**.

Определение эксцесса (коэффициента островершинности) **Нормальное распределение:**  	Число $E[\xi]=\dfrac{\mu_4}{\sigma^4}-3$ называется эксцессом случайной величины, или коэффициентом островершинности. Характеризует степень отличия распределения от нормального $\rho(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, для которого $E[\xi]=0$. Если $E[\xi]>0$, ордината максимума плотности распределения выше ординаты максимума нормального распределения (график остроконечен), если $E[\xi]<0$, то – ниже (график тупоконечен).

Связь начальных и центральных моментов	$\forall\mu_1=0,\ \mu_2=D(\xi);$ $\mu_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3;$ $\mu_4=m_4-4m_1m_3+6m_2m_1^2-3m_1^4.$

§ Основные дискретные и непрерывные распределения
(см. ОК с. 71, 72)