Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона

Задача интерполяции заключается в следующем. На отрезке [a, b] заданы упорядоченные n+1 точки и значения функции в этих точках, т. е. задана таблица значений функции $y = f(x)$:

$a = x_0$	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	$x_n = b$
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Требуется найти значения этой функции для промежуточных значений аргумента, не совпадающих с приведенными в таблице. Получить аналитическое выражение функции по таблице ее значений в большинстве случаев невозможно. Поэтому вместо нее строят другую функцию $F(x)$, которая легко вычисляется и имеет ту же таблицу значений, что и $f(x)$, т. е. $F(x_i) = f(x_i) = y_i$; $i = 0,1,...,n$ Исходная функция называется интерполируемой функцией, а функция $F(x)$ – интерполяционной. Значения аргумента в таблице называются узлами интерполяции.

В общем случае полином степени n, принимающий при $x = x_i$ заданные значения y_i (i= 0, 1,…,n), можно представить **интерполяционной формулой Лагранжа**

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}y_k + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

Пусть разности табличных значений аргумента $h = \Delta x_i \ (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i;\ i = 0,1,...,n-1)$ – постоянные (шаг таблицы). Тогда значение функции y для промежуточных значений x приближенно можно найти при помощи **интерполяционной формулы Ньютона**

$$y = y_0 + q\cdot\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_{0,}$$

где $q = \dfrac{x-x_0}{h}$, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, ...$ – последовательные конечные разности функции y.

Для удобства пользования формулой Ньютона рекомендуется предварительно составить таблицу конечных разностей.

При $x = x_i$ полином Ньютона принимает соответственно табличные значения y_i.

Погрешность интерполяционной формулы Ньютона приближенно можно оценить по формуле

$$R_n(x) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!}q(q-1)\cdots(q-n).$$

Если число n можно взять любым, то его следует выбирать так, чтобы разность $\Delta^{n+1} y_0 = 0$ в пределах данной точности; иными словами, разности $\Delta^n y_0$ должны быть постоянными в заданных десятичных разрядах.

Пример. Найти $\sin 25^0 15^/$, пользуясь табличными данными $\sin 26^0 = 0{,}43837, \sin 27^0 = 0{,}45399, \sin 28^0 = 0{,}46947$.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	26^0	0,43837	1562	-14
1	27^0	0,45399	1548	
2	28^0	0,46947		

Здесь $h = 60^/$, $q = \dfrac{26^0 15^/ - 26^0}{60^/} = 0{,}25$. Применяя формулу Ньютона, используя первую горизонтальную строку таблицы, имеем $\sin 26^0 15^/ = 0{,}43837 + \dfrac{1}{4}0{,}01562 + \dfrac{0{,}25(0{,}25-1)}{2!}(-0{,}00014) = 0{,}44229$. Причем погрешность $|R_2| < \dfrac{0{,}25(0{,}25-1)(0{,}25-2)}{3!}(\dfrac{\pi}{180})^3 = 0{,}25\cdot 10^{-6}$. Таким образом, все полученные знаки $\sin 26^0 15^/$ – верные.