

§ Центральная предельная теорема. Закон больших чисел

Теорема Ляпунова Александра Михайловича (1857-1918).	Если случайная величина ξ представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то ξ имеет распределение, близкое к нормальному (доказана в 1901 г.).
--	--

Центральная предельная теорема	Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с конечными математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 , то при неограниченном увеличении n закон распределения случайной величины $Y_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ неограниченно приближается к нормальному закону $N(a, \sigma^2)$.
---	---

Неравенство Чебышева Пафнутия Львовича (1821-1894)	Пусть дана случайная величина ξ с конечным математическим ожиданием $M[\xi]$ и конечной дисперсией $D[\xi]$. Тогда для любого положительного ε ($\forall \varepsilon > 0$) справедливо неравенство $P(\xi - M[\xi] \geq \varepsilon) \leq \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2}$, или $P(\xi - M[\xi] < \varepsilon) > 1 - \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2}$
---	--

Понятие сходимости по вероятности	Последовательность $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к неслучайному числу a , если для любых чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется такое число $N(\varepsilon, \delta)$, зависящее от ε и δ , что для всех $n > N$ выполняется неравенство $P(\xi_n - a < \varepsilon) > 1 - \delta$. То есть $\{\xi_n\} \xrightarrow{\text{по вер-сти}} a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0) \exists N(\varepsilon, \delta):$ $\forall n > N(\varepsilon, \delta) \Rightarrow P(\xi_n - a < \varepsilon) > 1 - \delta.$
--	--

Теорема Чебышева П. Л.	Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – последовательность попарно независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями $M[\xi_1], M[\xi_2], \dots, M[\xi_m]$ и дисперсиями $D[\xi_1], D[\xi_2], \dots, D[\xi_m]$, каждая из которых ограничена одним числом L, то последовательность $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n}$ сходится по вероятности к среднему арифметическому математических ожиданий $\frac{\sum_{k=1}^n M[\xi_k]}{n} = M[\xi]$. То есть $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \xrightarrow{\text{по вер-сти}} M[\xi] = \frac{\sum_{k=1}^n M[\xi_k]}{n} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0) \exists N(\varepsilon, \delta):$ $\forall n > N(\varepsilon, \delta) \Rightarrow P(Y_n - M[\xi] < \varepsilon) > 1 - \delta.$
---	--

Следствие 1	Пусть дана последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, распределённых по одному закону, имеющему конечное математическое ожидание $M[\xi]$ и конечную дисперсию $D[\xi]$. Тогда среднее арифметическое этих величин $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n}$ сходится по вероятности к $M[\xi]$. То есть $Y_n \xrightarrow{\text{по вер-сти}} M[\xi] \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0) \exists N(\varepsilon, \delta):$ $\forall n > N(\varepsilon, \delta) \Rightarrow P(Y_n - M[\xi] < \varepsilon) > 1 - \delta.$
---------------------------	--

Следствие 2 (теорема Бернулли)	Пусть производится n независимых испытаний по схеме Бернулли, в каждом из которых может появиться с постоянной вероятностью p некоторое событие A. При неограниченном увеличении числа испытаний n относительная частота $p^* = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \quad (\xi_k - \text{число наступлений события } A \text{ в } k\text{-м опыте})$ сходится по вероятности к p. То есть $p^* \xrightarrow{\text{по вер-сти}} p \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0) \exists N(\varepsilon, \delta):$ $\forall n > N(\varepsilon, \delta) \Rightarrow P(p^* - p < \varepsilon) > 1 - \delta.$
---	--

**Следствие 3
(теорема Пуассона)**

Если производится n независимых испытаний, и вероятность появления события A в k -м испытании p_k , то при возрастании n относительная

частота $p^* = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n}$ (ξ_k - число наступлений события A в k -м опыте)

появления события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_k :

$$p^* = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \xrightarrow{\text{по вер-сти}} \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{n} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0) \exists N(\varepsilon, \delta):$$

$$\forall n > N(\varepsilon, \delta) \Rightarrow P\left(p^* - \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{n} < \varepsilon\right) > 1 - \delta.$$