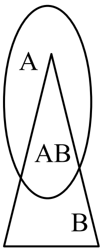
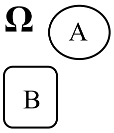
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Соединения, определения вероятности

		Названия, обозначения	Пояснения	Примеры
СОЕДИНЕНИЯ	1	**Перестановки** из ***n*** элементов $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$	Соединения отличаются только порядком элементов.	Число способов поменять местами 10 студентов, стоящих в шеренгу $10! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10 = 3628800$
	2	**Перестановки с повторениями** $p_{с\,повтор} = \dfrac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!}$ $\alpha+\beta+\gamma=n$	Соединения из *n* одинаковых элементов, распределенных по подгруппам из α, β, γ элементов, отличающиеся порядком элементов.	Число способов разбить группу из 12 студентов на подгруппы по 3, 4, 5 человек $P_{с\,повт} = \dfrac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!} = 27720$
	3	**Размещения** из ***n*** элементов по ***m*** ($m \le n$) $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!} =$ $= \underbrace{n\cdot(n-1)\ldots(n-m+1)}_{m\ сомножителей}$	Соединения отличаются хотя бы одним элементом или порядком элементов.	Число способов распределить 3 различных обязанности между 10 студентами (по одной обязанности на одного студента) $A_{10}^3 = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$
	4	**Размещения с повторениями** из ***n*** **видов** элементов по ***m*** ($\forall m$ натуральное) $(A_n^m)_{с\,повт} = n^m$	Соединения содержат любой элемент из *n* сколько угодно раз от 0 до *m*.	Число способов распределить 3 различные обязанности между 10 студентами, если один студент может выполнять любое число из них $(A_{10}^3)_{с\,повт} = 10^3 = 1000$
	5	**Сочетания** из ***n*** элементов по ***m*** ($m \le n$) $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{A_n^m}{m!}$	Соединения отличаются хотя бы одним элементом (порядок элементов не учитывается) $C_n^m = C_n^{n-m};\ C_n^0 = 1;\ C_n^1 = n$	Число способов распределить 3 студентов из 10 на три одинаковые должности $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$
	6	**Сочетания** из ***n*** элементов по ***m*** **с повторениями** (*m* может быть больше, чем *n*) $(C_n^m)_{с\,повт} = C_{n+m-1}^m$	Соединения состоят не только из *m* различных элементов, но и из *m* каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.	Число способов выбрать 6 пирожных в кондитерской, если есть 4 разных сорта пирожных $C_{4+6-1}^6 = \dfrac{9!}{6!\cdot 3!} = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 84$
ВЕРОЯТНОСТЬ	1	**Статистический** подход $P_A = P(A) = \lim\limits_{n_k\to\infty} P_{n_k}^*(A)$	В серии из n_k испытаний событие *A* появилось m_k раз; частота $P_{n_k}^*(A) = \dfrac{m_k}{n_k},\ k = 1,2,\ldots$ обладает свойством устойчивости.	
	2	**Классическое** определение $P(A) = \dfrac{m}{n},\ m \le n$	Пространство элементарных событий *Ω* дискретно и состоит из конечного числа *n* элементарных равновозможных несовместных событий ω_i, называемых случаями. Вероятность $P(A)$ наступления события *A* равна числу случаев *m*, благоприятствующих наступлению события *A*, деленному на число всех возможных исходов *n*.	
	3	**Геометрическое** определение $P(A) = \dfrac{mes\,g}{mes\,G}$	Пространством элементарных событий является некоторая область, мера которой *mes G*, событию *A* соответствует область, мера которой $mes\,g \subseteq mes\,G$.	
	4	**Аксиоматическое** определение $A \in F$ *– поле событий*: 1. $P(A) \ge 0$; 2. $P(\Omega) = 1$; 3. $P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_k),\ \ A_i \cap A_j = 0, i \ne j$	**Свойства операций над событиями** $A + A = A,\ A + B = B + A,\ A + \Omega = \Omega,\ A + 0 = A,\ A + \overline{A} = \Omega$ $AB = BA,\ A\cdot A = A,\ A\cdot\Omega = A,\ A\cdot 0 = 0,\ \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B},\ \overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B},$ $A(B+C) = AB + AC,\ (A+B)(A+C) = A + BC,$ $(A+B)+C = A+(B+C)$	

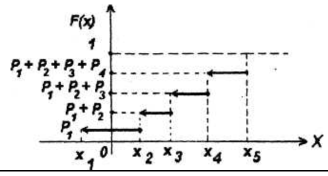
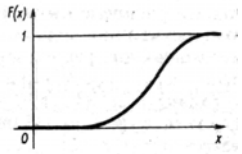
Основные теоремы теории вероятностей

Ω 	**Умножения**	**Зависимые** события – наступление одного из них **изменяет вероятность** наступления другого	$P(A_1A_2A\cdots A_n)=$ $=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})$
			$P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)},\ P(B)\neq 0;\quad P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)},\ P(A)\neq 0$
		Независимые события – наступление одного из них **не изменяет вероятность** наступления любого другого и всех возможных их пересечений	$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_n)$
			$P(A/B)=P(A),\quad P(B/A)=P(B)$
	Сложения	**Совместные** события **содержат общие точки** пространства элементарных событий Ω	$P(A_1+A_2+A_3+...A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)-$ $-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-...-P(A_{n-1}A_n)+P(A_1A_2A_3)+...+(-1)^{n+1}P(A_1A_2A_3\cdots A_n)$
			$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
Ω 		**Несовместные** события **не содержат общих точек** пространства элементарных событий Ω	$P(A_1+A_2+A_3+...A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$
			$P(A+B)=P(A)+P(B)$

Гипотезы H_i образуют полную группу событий: $H_i\cap H_j=0,$ $i\neq j,$ $\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1$	**Формула полной вероятности**	$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(H_j)P(A/H_j)=P(H_1)P(A/H_1)+...+P(H_n)P(A/H_n)$
	Формула Байеса	$P(H_k/A)=\dfrac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)},\quad k=1,2,...,n$

Схема испытаний Бернулли	**Формула Бернулли**	**Формула Пуассона**	
1 – событие A наступило; 0– событие A не наступило; $\{0,0,1,0,...,1\}$ последовательность содержит m единиц и (n-m) нулей. $P(A)=p$, $P(\overline{A})=$ $=1-p=q$	$P_n(m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ Вероятность того, что событие A наступит m раз в серии из n испытаний	$p\to 0,\quad n\to\infty,$ $\lambda t=a=np$ интенсивность потока λ	$P_n(m)=\dfrac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}\approx\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$
	Наивероятнейшее число m_0 наступления события A		
	$np-q<m_0<np+p;\quad m_0=\begin{cases}\text{целая часть числа }[np+p],\text{ если } np+p-\text{дробь},\\ \text{два числа } np+p \text{ и } np-q,\text{ если } np+p-\text{целое}\end{cases}.$		
	Локальная теорема Муавра-Лапласа		
	$P_n(m)\approx\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\quad \text{функция Гаусса } \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\dfrac{x^2}{2})-\text{табулирована},$ $x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}};\varphi(-x)=\varphi(x)-\text{четная.}\qquad P(\left\|\dfrac{m}{n}-p\right\|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$		
	Интегральная теорема Муавра-Лапласа		
	$P(m_1\leq m\leq m_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),\quad \text{функция Лапласа } \Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\exp(-\dfrac{t^2}{2})dt,$ $x_1=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2=\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}};\qquad \Phi(-x)=-\Phi(x)-\text{нечетная},\quad \text{табулирована.}$		

Законы распределения случайных величин ξ(ω) (ω – случайные события)

	Дискретные случайные величины $\xi(\omega)$: $\Omega \to R$	**Непрерывные** случайные величины $\xi(\omega)$: $\Omega \to R$	**Свойства**
1	**Функция распределения *F*(*x*)** $F(x)=P(\xi<x)$ 	**Функция распределения *F*(*x*)** $F(x)=P(\xi<x)$ 	1. $0\le F(x)\le 1$; 2. $F(-\infty)=0, F(\infty)=1$; 3. $x_1<x_2 \Rightarrow F(x_1)\le F(x_2)$; 4. $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} F(x)=F(x_0)$; 5. $P(a\le\xi<b)=F(b)-F(a)$.
2	**Квантиль порядка *p*: η_p** $F(\eta_p-0)\le p, F(\eta_p+0)>p$	**Квантиль порядка *p*: η_p** $F(\eta_p-0)\le p, F(\eta_p+0)>p$	η_p существуют для любых случайных величин, обладают свойством устойчивости, легко могут быть измерены.
3	**Медиана** – квантиль порядка 0.5	**Медиана** – квантиль порядка 0.5	
4	**Ряд распределения** $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline \xi & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \\ \hline \end{array}$ $\sum\limits_{\kappa} p_\kappa = 1, \quad \kappa=1,2,\ldots$	**Плотность распределения $\rho(x)$** $\rho(x)=F^{/}(x)$	1. $\rho(x)\ge 0$; 2. $P(a\le\xi<b)=\int\limits_a^b \rho(x)dx$; 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx=1$; 4. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\rho(x)dx$.
5	**Мода ξ** mod $\xi = x(\max P)$	**Мода ξ** mod $\xi = x(\max \rho(x))$	Унимодальные распределения имеют единственный максимум, полимодальные – два и более.
6	**Начальные моменты порядка *к*** $m_k=\sum\limits_j x_j^k p_j$, $j=1,2,\ldots$	**Начальные моменты порядка *к*** $m_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k\rho(x)dx$	1. $M(C)=C$, $C=const$; 2. $M(C\xi)=CM(\xi)$; 3. $M(\alpha_1\xi+\ldots+\alpha_n\psi)=$ $=\alpha_1 M(\xi)+\ldots+\alpha_n M(\psi)$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n - const$; 4. $M(\xi\cdot\psi)=M(\xi)\cdot M(\psi)$, $\xi,\psi - независимые.$
7	**Математическое ожидание ξ: $M(\xi)$** $M(\xi)=m_1=\sum\limits_j x_j p_j$, $j=1,2,\ldots$ $M(f(\xi))=\sum\limits_j f(x_j)p_j$	**Математическое ожидание ξ: $M(\xi)$** $M(\xi)=m_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\rho(x)dx$, $M(f(\xi))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\rho(x)dx$	
8	**Центральные моменты порядка *к*: $\mu_к$** $\mu_k=\sum\limits_j (x_j-M(\xi))^k p_j, j=1,2,\ldots$	**Центральные моменты порядка *к*: $\mu_к$** $\mu_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^k\rho(x)dx$	$\forall \mu_1=0$, $\mu_2=D(\xi)$; $\mu_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3$; $\mu_4=m_4-4m_1m_3+6m_2m_1^2-3m_1^4$; $D(C)=0$, $C=const$; $D(\alpha_1\xi_1+\ldots+\alpha_n\xi_n)=$ $=\alpha_1^2 D(\xi_1)+\ldots+\alpha_n^2 D(\xi_n)$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n - const$, $\xi_i,\xi_j - незав.\ (i,j=1,2,\ldots n, i\ne j)$ $D(\xi)=M(\xi^2)-(M(\xi))^2$
9	**Дисперсия ξ: $D(\xi)$** $D(\xi)=\mu_2=\sum\limits_j (x_j-M(\xi))^2 p_j$, $j=1,2,\ldots$	**Дисперсия ξ: $D(\xi)$** $D(\xi)=\mu_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^2\rho(x)dx$	
10	**Характеристическая функция $g_x(t)$** $g_x(t)=M(e^{itx_j})=\sum\limits_j e^{itx_j}p_j$, $j=1,2,\ldots;\quad i^2=-1$	**Характеристическая функция $g_x(t)$** $g_x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\rho(x)dx$ $i^2=-1$	$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}g_x(t)dt$; $g(0)=1$; $\|g(t)\|\le 1$; $g_x^{(k)}(0)=i^k M(\xi^k)$; $M(\xi)=-ig_x^{/}(0)=-i\varphi^{/}(0)$; $D(\xi)=-g_x^{//}(0)+(g_x^{/}(0))^2=-\varphi^{//}(0)$; $\psi=a\xi+b$, $(a,b - const,\ y - значения\,\psi)\Rightarrow$ $\Rightarrow g_y(t)=g_x(at)e^{ibt}$, $\varphi_y(t)=ibt+\varphi_x(at)$; $\xi,\psi - незав., \chi=\xi+\psi\Rightarrow$ $\Rightarrow g_z(t)=g_x(t)g_y(t)$, $где\ z - значения\ \chi$.
11	**Кумулянтная функция $\varphi(t)$** $\varphi(t)=\ln g_x(t)$		

<table>
<tr><th colspan="4">Центральная предельная теорема и Закон больших чисел</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Функция распределения $N(a, \sigma^2)$
$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2})dt$</td>
<td colspan="2">$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt$ $\qquad$ $\rho(x) = F'(x)$</td>
<td rowspan="2">Плотность распределения $N(a, \sigma^2)$
$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2})$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt$; $\quad \Phi(-x) = -\Phi(x)$</td>
</tr>
<tr>
<th>Вероятность попадания X в интервал</th>
<th colspan="2">Центральная предельная теорема</th>
<th>Распределение Бернулли, Пуассона</th>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$

$P(\left|X - a\right| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$</td>
<td>Теорема Ляпунова Александра Михайловича (1857-1918).
Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному
(доказана в 1901 г.).</td>
<td>Если $X_1, X_2, ..., X_n -$ независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с конечными математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения случайной величины $Y_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ неограниченно приближается к нормальному.</td>
<td rowspan="2">$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx$
$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp(\frac{(m-np)^2}{2npq}) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}.$

$P(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}).$

$P(m_1 < m < m_2) \approx$
$\approx \Phi(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}).$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">То есть, если $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n;\ A_n = \sum_{k=1}^{n} M[X_k];\ B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D[X_k],$
то $F(x) = \lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{t^2}{2})dt$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Закон больших чисел</th></tr>
<tr>
<td>Неравенство Чебышева Пафнутия Львовича (1821-1894)
$P(\left|X - M[X]\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$, или $P(\left|X - M[X]\right| < \varepsilon) > 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$</td>
<td colspan="2">Сходимость по вероятности Последовательность $\{X_n\}$ сходится по вероятности к числу a, если для любых чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется такое число $N(\varepsilon, \delta)$, зависящее от ε и δ, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $P(\left|X_n - a\right| < \varepsilon) > 1 - \delta$</td>
</tr>
<tr>
<th>Теорема Чебышева П. Л.</th>
<th>Теорема Бернулли</th>
<th>Теорема Пуассона</th>
</tr>
<tr>
<td>Если $X_1, X_2, ... X_n -$ последовательность попарно независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями $M[X_1]$, $M[X_2]$, …, $M[X_n]$ и дисперсиями $D[X_1]$, $D[X_2]$, …, $D[X_n]$, каждая из которых ограничена числом L, то последовательность $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$ сходится по вероятности к среднему арифметическому математических ожиданий $\frac{\sum_{k=1}^{n} M[X_k]}{n}$.</td>
<td>Пусть производится n независимых испытаний по схеме Бернулли, в каждом из которых может появиться с постоянной вероятностью p некоторое событие A. При неограниченном увеличении числа испытаний n относительная частота p^* появления события A сходится по вероятности к p.</td>
<td>Если производится n независимых испытаний, и вероятность появления события A в k – м испытании p_k, то при возрастании n относительная частота p^* появления события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_k.</td>
</tr>
</table>

Некоторые дискретные распределения

($M[X]$ – математическое ожидание, $D[X]$ – дисперсия , $A[X]$ – коэффициент асимметрии, $E[X]$ – эксцесс, или коэффициент островершинности)

№	Распределение		Числовые характеристики			
	Название и пояснения	Вероятность	$M[X]$	$D[X]$	$A[X]$	$E[X]$
1	Биномиальное распределение. $P(A)=p;\ P(\overline{A})=q=1-p$ m – число появлений события A в серии из n испытаний	$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, *где* $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$	np	npq	$\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$	$\frac{1-6pq}{npq}$
2	Распределение Пуассона. $a=np=\lambda t;\ n\ge 10;\ p\le 0{,}1$ λ – интенсивность пуассоновского потока, t – время	$P_n(m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a};\quad P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}$	a	a	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{a}$
3	Геометрическое распределение. Испытания проводятся до первого появления события A	$P_m=q^{m-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	?	?
4	Гипергеометрическое распределение. M элементов множества N обладают некоторым свойством. Нужно отобрать n элементов этого множества, среди которых m элементов обладали бы указанным свойством.	$P_m=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ dhypergeom(m,n,M,N)	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$	?	?
5	Мультимодальное (полимодальное) распределение. X_1 – число проданных единиц товара A, X_2 – число проданных единиц товара B, …, $X_к$ – число проданных единиц товара К. *A*+*B*+…+*K*=*n*	$P(X_1,X_2,...,X_k)=\frac{n!}{X_1!X_2!...X_k!}p_1^{X_1}p_2^{X_2}...p_k^{X_k}$	?	?	?	?

Вспомогательные формулы для подсчета вероятностей в испытаниях по схеме Бернулли

№	Число наступлений события A	Вычисление вероятности
1	Менее m раз	$P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(m-1)$
2	Более m раз	$P_n(m+1)+P_n(m+2)+...+P_n(n)$
3	Не менее m раз	$P_n(m)+P_n(m+1)+...+P_n(n)$
4	Не более m раз	$P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(m)$
5	Между m_1 и m_2 раз	$P_n(m_1)+P_n(m_1+1)+...+P_n(m_2)$

6	Производящая функция.
	$\varphi_n(Z)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_iZ)=\sum_{m=0}^{n}P_n(m)Z^m$
	p_i – вероятность появления события A в i-м опыте.
		Разложение производящей функции $\varphi_n(Z)$ по степеням Z дает в качестве коэффициентов при Z^m вероятности $P_n(m)$.
		Например,
		`ϕ(Z) := (0.1 + 0.9·Z)·(0.3 + 0.7·Z)·(0.4 + 0.6·Z)`
		`(0.1 + 0.9·Z)·(0.3 + 0.7·Z)·(0.4 + 0.6·Z) collect, Z → .378·Z^3 + .456·Z^2 + .154·Z + 1.2·10^-2`

Некоторые непрерывные распределения

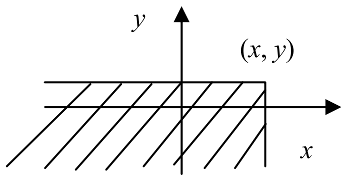
	Название	Плотность распределения	Функция распределения	Матем. ожидание	Дисперсия	Обратная функция для функции распределения	Мода	Медиана
1	Равномерное	$\rho(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b),\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$			$\eta_{0.5}=$ $=\dfrac{a+b}{2}$
2	Распределение Релея	$\rho(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$	$(2-\dfrac{\pi}{2})\sigma^2$	$x=\sigma\sqrt{-2\ln(1-y)}$	mod=σ	$\eta_{0.5}$ – -квантиль порядка $\frac{1}{2}$
3	Гамма-распределение (Г – распределение)	$\rho(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, x\ge 0,\\ 0, \quad x<0\end{cases}$ $\alpha>0, \lambda>0, \Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$	$F(x)=\begin{cases}\int\limits_0^x \rho(x)dx, & x\ge 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\lambda}$	$\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$		$x(\rho_{\max})$	$\eta_{0.5}$ – -квантиль порядка $\frac{1}{2}$
4	Показательное распределение (Г – распределение при $\alpha=1$)	$\rho(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ λ>0,	$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$x=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-y)$	$x(\rho_{\max})$	$\eta_{0.5}$ – -квантиль порядка $\frac{1}{2}$
5	Распределение Коши	$\rho(x)=\dfrac{1}{\pi\cdot b\cdot\left[1+\dfrac{(x-a)^2}{b^2}\right]}$	$F(x)=\dfrac{1}{\pi}arctg\left(\dfrac{x-a}{b}\right)+\dfrac{1}{2}$	–	–	$x=b\cdot tg\left[\pi\cdot\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\right]+a$	mod=a	*Med*=a
6	Закон арксинуса	$\rho(x)=\dfrac{1}{\pi\cdot b\cdot\sqrt{1-\dfrac{(x-a)^2}{b^2}}}$	$F(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\arcsin\left(\dfrac{x-a}{b}\right)+\dfrac{1}{2}$	a	$\dfrac{b^2}{2}$	$x=b\cdot\sin\left[\pi\cdot\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\right]+a$	mod=a	$\eta_{0.5}=a$
7	Нормальное распределение	$\rho(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$	$F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$	a	σ^2		mod=a	$\eta_{0.5}=a$

Система двух случайных величин (СВ)

Функция распределения

Определение функции распределения

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y)$$



Свойства функции распределения

- 1. $0 \le F(x,y) \le 1$. • 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$; $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty,\, y\to-\infty} F(x,y) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty,\, y\to+\infty} F(x,y) = 1$.
- 3. $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = F_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y) = F_2(y)$. • 4. $F(x,y)$ *неубывающая функция по каждому аргументу при фиксированном втором.*
- 5. $P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = F(x_2,y_2) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1)$. • 6. $F(x,y) = F_1(x)\cdot F_2(y) \Leftrightarrow X$ *и* Y *независимые СВ.*
- 7. $F(x,y) = F_1(x)\cdot F(y/x)$; $F(x,y) = F_2(y)\cdot F(x/y)$, *где* $F(x/y)$, $F(y/x)$ *− условные функции распределения.*

Дискретные случайные величины (ДСВ)

Матрица распределения вероятностей системы X, У

Y	X: x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{n2}
…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{nm}

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

***i* – номер столбца,**
***j* – номер строки**

Матрица распределения вероятностей У

Y	y_1	y_2	…	y_m
p_j	p_1	p_2	…	P_m

p_j – сумма вероятностей *j*– й строки матрицы распределения вероятностей системы *X*, *У*

Матрица распределения вероятностей X

X	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

p_i – сумма вероятностей *i* – го столбца матрицы распределения вероятностей системы *X*, *У*.

Условные вероятности

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i},$$

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_j}.$$

Математическое ожидание функции двух случайных аргументов

$$Z = \varphi(X,Y) \Rightarrow M[Z] = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j)\, p_{ij}$$

Непрерывные случайные величины (НСВ)

Плотность распределения вероятностей системы X, У

$$\rho(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Свойства плотности распределения вероятностей системы X, У

- 1. $\rho(x,y) \ge 0$. • 2. *Если* $\rho(x,y)$ *непрерывна, то*
  $P(x \le X < x+\Delta x, y \le Y < y+\Delta y) = \rho(\xi,\eta)\Delta x \Delta y$, *где* $\xi \in \Delta x, \eta \in \Delta y$.
- 3. *Если* $\rho(x,y)$ *непрерывна в* D, *то* $P[(x,y)\in D] = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dxdy$.
- 4. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} \rho(x,y)\,dxdy$. • 5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dxdy = 1$. • 6. $F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dx)dy$;
  $F_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dx)dy$;. • 7. $\rho_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dy$; $\rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dx$.
- 8. X *и* $У$ *независимы* $\Leftrightarrow \rho(x,y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$.
- 9. *Условные плотности распределения* $\rho(x/y) = \dfrac{\rho(x,y)}{\rho_2(y)}$; $\rho(y/x) = \dfrac{\rho(x,y)}{\rho_1(x)_1}$.
  Для зависимых X *и* $У$: $\rho(x,y) = \rho_1(x)\rho(y/x)$; $\rho(x,y) = \rho_2(y)\rho(x/y)$.
- 10. $Z = \varphi(X,Y) \Rightarrow F(z) = P(Z < z) = P(\varphi(x,y) < z) = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dxdy \Leftrightarrow \rho(z) = F'(z)$,
  где $D = \{(x,y) : \varphi(x,y) < z\}$

Математическое ожидание функции двух случайных аргументов

$$Z = \varphi(X,Y) \Rightarrow M[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\rho(x,y)\,dxdy.$$

Характеристики связи двух случайных величин (СВ)

Дискретные случайные величины (ДСВ)	Непрерывные случайные величины (НСВ)
Регрессия (условные математические ожидания)	
Функция регрессии *X* на *У*: $M\left[X/Y=y_j\right]=\sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{p_{ij}}{p_j};$ **Функция регрессии *У* на *X*:** $M\left[Y/X=x_i\right]=\sum_{j=1}^{m}y_j\dfrac{p_{ij}}{p_i}$	**Функция регрессии *X* на *У*:** $M\left[X/Y=y\right]=\psi(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\rho(x/y)dx$ **Функция регрессии *У* на *X*:** $M\left[Y/X=x\right]=\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\rho(y/x)dy$
Условные дисперсии (характеризуют степень отклонения экспериментальных точек от кривых регрессии)	
$D\left[X/Y=y_j\right]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M\left[X/Y=y_j\right])^2p_{ij};$ $D\left[Y/X=x_i\right]=\sum_{j=1}^{m}(y_j-M\left[Y/X=x_i\right])^2p_{ij}$	$D\left[X/Y=y\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M\left[X/Y=y\right])^2\rho(x/y)dx;$ $D\left[Y/X=x\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-M\left[Y/X=x\right])^2\rho(y/x)dy$
Ковариация случайных величин *X* и *У*: $\mathrm{cov}(X,Y)=M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right]=M\left[X\cdot Y\right]-m_xm_y$ **Необходимое условие независимости *X* и *У*:** X *и* $У$ *независимы* $\Rightarrow\mathrm{cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow\mathrm{cov}(X,Y)\neq0\Rightarrow X$ *и* $У$ *зависимые СВ*. **Обратное утверждение неверно (за исключением нормального распределения):** $\mathrm{cov}(X,Y)=0\Rightarrow\begin{cases}X\text{ и }Y\text{ могут быть зависимыми СВ},\\X\text{ и }Y\text{ могут быть независимыми СВ}\end{cases}.$	
$\mathrm{cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jp_{ij}-m_xm_y$	$\mathrm{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)\rho(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\rho(x,y)dxdy-m_xm_y$
Коэффициент корреляции (мера линейной зависимости СВ) и прямые среднеквадратической регрессии: $r_{xy}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}.$ $\begin{cases}y-m_y=r_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\text{ прямая регрессии }У\text{ на }X,\\x-m_x=r_{xy}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)\text{ прямая регрессии }X\text{ на }У.\end{cases}$ $(r_{xy}=0\Rightarrow X$ *и* $У$ *называют некоррелированными*$)$ $(r_{xy}\neq0\Rightarrow X$ *и* $У$ *называют коррелированными*$)$	
Свойства математического ожидания	
Теорема 1. Если случайные величины *X* и *У* имеют конечные математические ожидания, то $M\left[\alpha X+\beta Y\right]=\alpha M\left[X\right]+\beta M\left[Y\right]$, *где* α *и* β *константы*. **Теорема 2. Если случайные величины *X* и *У* имеют конечные математические ожидания, то** $M\left[X\cdot Y\right]=M\left[X\right]\cdot M\left[Y\right]+\mathrm{cov}(X,Y)$	
Свойства дисперсии	
Теорема 3. Если случайные величины *X* и *У* имеют конечные дисперсии, то $D\left[\alpha X+\beta Y\right]=\alpha^2D\left[X\right]+\beta^2D\left[Y\right]+2\alpha\beta\,\mathrm{cov}(X,Y)$, *где* α *и* β *константы*.	
Свойства коэффициента корреляции	
Теорема 4. Если случайные величины *X* и *У* имеют конечные дисперсии, то $-1\le r_{xy}\le1$. **Теорема 5. Если случайные величины *X* и *У* связаны линейной зависимостью** $Y=aX+b$, *где* a *и* b *константы, то* $r_{xy}=\begin{cases}1,\text{ если }a>0,\\-1,\text{ если }a<0.\end{cases}$	

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ
Интегрирование и дифференцирование в системе MathCAD
Часть I

Нахождение неопределенных интегралов рассмотрим на примере $\int \frac{6x^2-8}{3x+5}dx$ с помощью следующих операций:

1. Включаем компьютер, находим **MathCAD**.
2. Щелчком левой кнопки мыши выбираем место для интеграла.
3. Из палитры **Calculus** один раз щелкаем левой кнопкой мыши по символу $\int$ неопределенного интеграла. Этот символ появляется на заготовленном месте экрана в виде $\int \bullet\, d\, \bullet$.
4. Заполняем щелчками мыши и клавишами клавиатуры подынтегральное выражение, не забывая ставить знаки умножения и скобки для сумм и разностей; на экране появится $\int \frac{6x^2-8}{3x+5}dx$.
5. Из палитры **Symbolic** выбираем стрелку вправо $\longrightarrow$.
6. Нажатие клавиши **Enter** позволяет получить первообразную функцию для неопределенного интеграла:

$$x^2-\frac{10}{3}x+\frac{26}{9}\ln(9x+15).$$

Для закрепления полученных навыков находим следующие интегралы:
$\int \cos^5 3x dx$; $\int 5x \ln x^3 dx$; $\int \tan^5 x dx.$

Часть II

Вычисление определенных и кратных интегралов рассмотрим на примере вычисления $\int_1^{10} xe^{-2x}dx$ с помощью следующих операций:

1. Выводим на заготовленное место экрана щелчком левой кнопки мыши символ $\int_{\bullet}^{\bullet} \bullet\, d\, \bullet$ с панели **Calculus.**
2. Вводим в пустые маркеры подынтегральное выражение и пределы интегрирования. На экране появится $\int_1^{10} xe^{-2x}dx$.
3. Нажимаем клавишу «равно»: =, и на экране увидим: $\int_1^{10} xe^{-2x}dx = 0.102$.

Замечание. Кратные интегралы получаются аналогичным образом, но нужно нажимать кратно символ $\int_{\bullet}^{\bullet} \bullet\, d\, \bullet$ из палитры **Calculus.**

Для закрепления полученных навыков находим следующие интегралы:

$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x}} =$; $\int_0^5\int_1^2\int_0^{10} \frac{x-1}{x+1}dxdxdx =$; $\int_0^7\int_{-3}^4\int_1^2 (2x-3y+5z)dxdxdx =$;

$\int_0^\infty x^3e^{-5x}dx =$; $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2} =$; $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} =$; $\int \frac{dx}{(x^2+0.1)^2} =$; $\int \frac{dx}{(x+5)^2} =$.

Часть III

Точно так же можно находить производные любого порядка, пользуясь соответствующими кнопками палитры **Calculus.**

Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1, y\to -1} \dfrac{tg(x+y)e^{x-y}}{x^2-y^2}$. На палитре Calculus два раза щёлкаем кнопку оператора вычисления предела, заполняем метки. На палитре Symbolic щёлкаем стрелку вправо, затем нажимаем клавишу Enter.

$$\lim_{x\to 1}\ \lim_{y\to -1} \frac{(\tan(x+y)\cdot\exp(x-y))}{x^2-y^2} \to \frac{1}{2}\cdot\exp(2)$$

2. Доказать, что $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, если $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$. Сначала задаём функцию двух переменных $z(x,y)$ оператором присваивания из палитры Calculator и меню функций $f(x)$ в верхней строчке панели инструментов. Записываем проверяемое выражение. На палитре Symbolic щёлкаем стрелку вправо, затем нажимаем клавишу Enter.

$$z(x,y) := \operatorname{acsc}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{x\cdot\frac{d}{dx}z(x,y)}{y} + \frac{d}{dy}z(x,y) \to 0$$

3. Дана функция $z=\cos\dfrac{xy}{t}$, где $x=\ln t$, $y=\dfrac{1}{t}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$. Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t=1$.

$$z(t) := \cos\left(\ln(t)\cdot\frac{\frac{1}{t}}{t}\right) \qquad \frac{d}{dt}z(t) \to -\sin\left(\frac{\ln(t)}{t^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{t^3}-2\cdot\frac{\ln(t)}{t^3}\right)$$

$$t := 1$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = 3.67\times 10^{-15} \qquad Z(X,Y,T) := \cos\left(X\cdot\frac{Y}{T}\right) \qquad \frac{d}{dT}Z(X,Y,T) \to \sin\left(X\cdot\frac{Y}{T}\right)\cdot X\cdot\frac{Y}{T^2}$$

4. Дана дифференцируемая функция $z=arctg(x+y)$, где $x=\sin uv$, $y=\cos(u-v)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

$$w(u,v) := \operatorname{atan}(\sin(u\cdot v)+\cos(u-v))$$

$$\frac{d}{du}w(u,v) \to \frac{\cos(u\cdot v)\cdot v+\sin(-u+v)}{1+(\sin(u\cdot v)+\cos(-u+v))^2} \qquad \frac{d}{dv}w(u,v) \to \frac{\cos(u\cdot v)\cdot u-\sin(-u+v)}{1+(\sin(u\cdot v)+\cos(-u+v))^2}$$

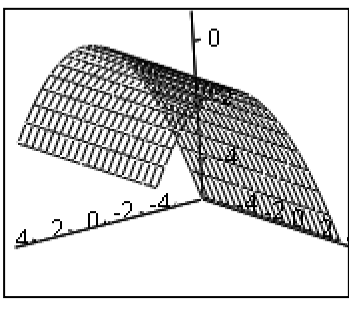
Íàéäèòå $\dfrac{d}{du}\dfrac{d}{dv}w(u,v)$ è $\dfrac{d^2}{du^2}w(u,v)$

5. Вычислить приближённо $\sqrt{5e^{0,02}+2,03^2}$

$$\sqrt{5\cdot\exp(0.02)+(2.03)^2} = 3.036759243$$

$$y(x,z) := \frac{\left(4+2\cdot x-x^2\right)}{6}$$

6. Построить поверхность $x^2-2x+6y=4$. Задаём функцию двух переменных, на палитре Graph щёлкаем 5-ю кнопку и заполняем метку именем функции.

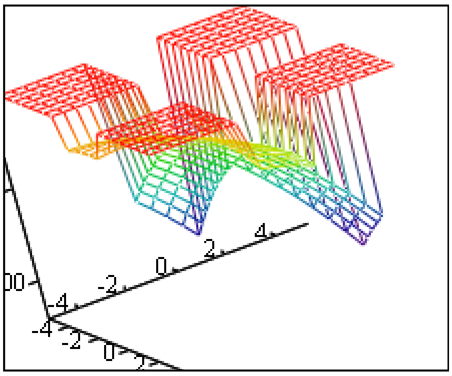


y

Поставьте курсор на график, повертите поверхность, удерживая левую кнопку мыши.
Покрутите колёсико мыши.

6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=-x^2+xy-y^2-9y+6x-35$ в области D $|x|\le 1, |y|\le 1$.

$z(s,h) := -s^2 + s \cdot h - h^2 - 9 \cdot h + 6 \cdot s - 35$ $\qquad$ $Z(s,h) := \mathrm{if}(-1 \le s \le 1 \vee -1 \le h \le 1, z(s,h), 0)$

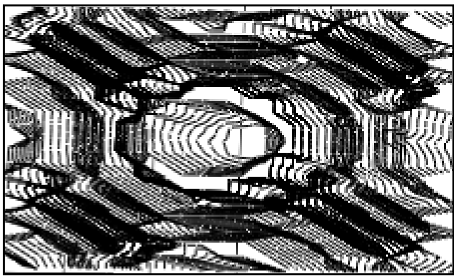


Левой кнопкой мыши щёлкните 2 раза в поле графика. В открывшемся окне выберите Appearance, активируйте Colomap. Красный цвет характеризует максимум по оси Z, а фиолетовый - минимум.

Z

7. Найти линии уровня функции $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.

$$P(m,n) := \mathrm{if}\left[\left(\cos\left(m^2 + n^2\right) \ge 0\right), \sqrt{\cos\left(m^2 + n^2\right)}, 0\right]$$

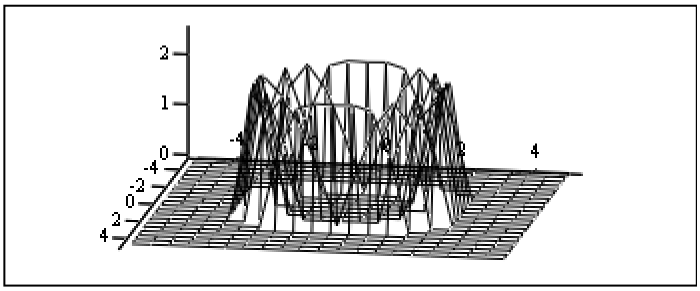


Левой кнопкой мыши щёлкните 2 раза в поле графика. В открывшемся окне выберите Appearance, активируйте Contour Lines.

P

8. Найти и построить область определения функции $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(9 - x^2 - y^2)}$.

$$S(p,q) := \mathrm{if}\left[\left(p^2 + q^2 - 4\right) \cdot \left(9 - p^2 - q^2\right) \ge 0, \sqrt{\left(p^2 + q^2 - 4\right) \cdot \left(9 - p^2 - q^2\right)}, 0\right]$$



S

9. Дана функция $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$:

Найти производную по направлению вектора $\bar{a} = i - j + 5k$ в точке. $M(1, -1, 2)$.

Используем палитру Matrix

$u(x,y,z) := \ln\left(x^2 + y^2\right) + x \cdot y \cdot z$ $\qquad$ $x := 1$ $\quad$ $y := -1$ $\quad$ $z := 2$

$a := \frac{d}{dx} u(x,y,z)$ $\qquad$ $b := \frac{d}{dy} u(x,y,z)$ $\qquad$ $c := \frac{d}{dz} u(x,y,z)$ $\qquad$ $gradu := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\qquad$ $gradu = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $l := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$l0 := \frac{1}{|l|}$ $\qquad$ $gradu \cdot l0 = -1.347$

Методы простой итерации и Зейделя решения систем линейных уравнений

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений, записанная в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 +,,,+ a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Допустим, что определитель основной матрицы этой системы не равен нулю, тогда система имеет единственное решение. Для нахождения этого решения можно использовать итерационные методы, в которых решение системы получается как предел последовательности приближений, вычисленных некоторым единообразным процессом.

Для получения итерационных формул **метода простой итерации** выразим из первого уравнения системы x_1, из второго – x_2, из последнего – x_n. Тогда систему можно записать в матричном виде $X = AX + \beta$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\dfrac{a_{n1}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & -\dfrac{a_{n2}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \ldots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

, и итерационный процесс организовать по формуле $X^{(k+1)} = AX^{(k)} + \beta$.

При таком построении последовательности приближений нужно выяснить условия, при которых последовательность имеет предел. Эти условия дает следующая теорема.

Для того, чтобы процесс итераций сходился к решению системы при любом начальном векторе $X^{(0)}$, достаточно, чтобы какая-нибудь норма матрицы *A* была меньше единицы $\|A\| < 1$.

Введение нормы дает легко проверяемые условия сходимости метода: $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ или $|a_{jj}| > \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (в суммах $i \neq j$).

Если условия сходимости не выполнены, то надо преобразовать систему так, чтобы условия выполнялись. Это можно сделать, используя эквивалентные преобразования системы или преобразования следующего вида. Обозначим $D = C^{-1} - \varepsilon$, где $\varepsilon = \lfloor \varepsilon_{ij} \rfloor$ – матрица с малыми по модулю элементами. Тогда вместо исходной системы будем иметь: $DCX = DB \Leftrightarrow (C^{-1} - \varepsilon)CX = DB \Leftrightarrow X = \varepsilon CX + DB \Leftrightarrow X = CX + \mu$, где $\lambda = \varepsilon C$, $\mu = DB$.

При достаточно малых ε итерационный процесс должен сходиться.

Если заданная точность вычислений по методу простой итерации ω, то вычисления следует проводить до тех пор, пока не выполнится неравенство: $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \omega$.

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации. Идея его заключается в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

$$X = (F + D)X + B \Rightarrow X^{(k+1)} = FX^{(k+1)} + DX^{(k)} + B \Rightarrow X^{(k+1)} = (E - F)^{-1}DX^{(k)} + (E - F)^{-1}B$$

То есть итерационная формула $X^{(k+1)} = D_1X^{(k)} + B_1$, где $D_1 = (E - F)^{-1}D$, $B_1 = (E - F)^{-1}B$.

Решение систем линейных уравнений итерационными методами

Метод простых итераций

$ORIGIN := 1$

$$A := \begin{pmatrix} .23 & -.04 & .21 & -.18 \\ .45 & -.23 & .06 & -.88 \\ .26 & .34 & .11 & .62 \\ .05 & -.25 & .34 & -.12 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1.24 \\ 0 \\ 0 \\ -1.17 \end{pmatrix}$$

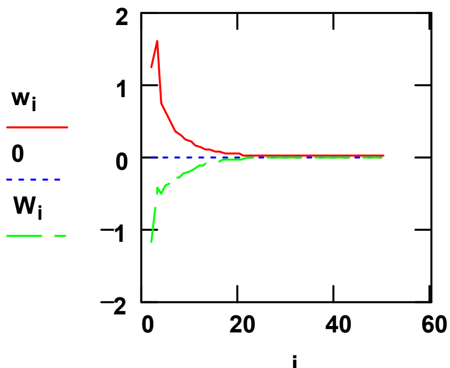
$N := 50$

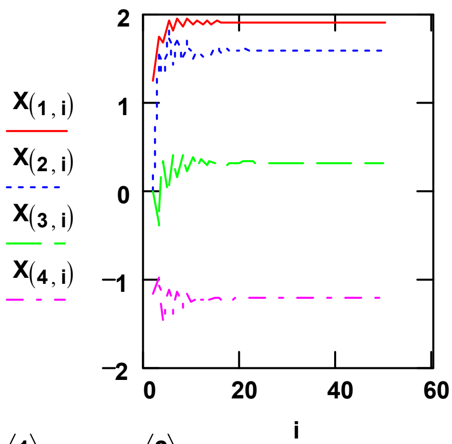
$$i := 2 .. N \qquad X^{\langle 1 \rangle} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X^{\langle 2 \rangle} := B$$

$$X^{\langle i+1 \rangle} := B + A \cdot X^{\langle i \rangle}$$

$$w_i := \max\left(X^{\langle i \rangle} - X^{\langle i-1 \rangle}\right) \qquad W_i := \min\left(X^{\langle i \rangle} - X^{\langle i-1 \rangle}\right) \qquad w_{25} = 0.0116$$

$$w_{50} = 0.00011 \qquad W_{50} = -0.00011$$





Метод Зейделя $Z^{\langle 1 \rangle} := X^{\langle 1 \rangle}$ $\qquad Z^{\langle 2 \rangle} := B$

$$m := 1 .. 4 \qquad n := 1 .. 4 \qquad k := 2 .. N$$

$$F_{(m, n)} := \mathrm{if}\left[m > n, A_{(m, n)}, 0\right] \qquad D_{(m, n)} := \mathrm{if}\left[m \le n, A_{(m, n)}, 0\right]$$

$$E := \mathrm{identity}(4) \qquad G := E - F \qquad D1 := G^{-1} \cdot D \qquad B1 := G^{-1} \cdot B$$

$$Z^{\langle k+1 \rangle} := D1 \cdot Z^{\langle k \rangle} + B1$$

$$Z^{\langle 50 \rangle} = \begin{pmatrix} 1.89756 \\ 1.58148 \\ 0.30928 \\ -1.21905 \end{pmatrix}$$

$$X^{\langle 50 \rangle} = \begin{pmatrix} 1.89754 \\ 1.58143 \\ 0.30932 \\ -1.21909 \end{pmatrix}$$

Задание

1. Посмотрите, какие матрицы E, F и D
2. Постройте график решений, найденных по методу Зейделя
3. Исследуйте, как меняется погрешность в зависимости от номера итерации

4. Сделайте проверку: $(E-A)X = B$, $(E-A)Z = B$?

$(E-A)^{-1}B = X$, $(E-A)^{-1}B = Z$?

5. Найдите номер итерации, с которого обеспечивается заданная точность вычислений

Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона

Задача интерполяции заключается в следующем. На отрезке [a, b] заданы упорядоченные n+1 точки и значения функции в этих точках, т. е. задана таблица значений функции $y = f(x)$:

$a = x_0$	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	$x_n = b$
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Требуется найти значения этой функции для промежуточных значений аргумента, не совпадающих с приведенными в таблице. Получить аналитическое выражение функции по таблице ее значений в большинстве случаев невозможно. Поэтому вместо нее строят другую функцию $F(x)$, которая легко вычисляется и имеет ту же таблицу значений, что и $f(x)$, т. е. $F(x_i) = f(x_i) = y_i$; $i = 0,1,...,n$ Исходная функция называется интерполируемой функцией, а функция $F(x)$ – интерполяционной. Значения аргумента в таблице называются узлами интерполяции.

В общем случае полином степени n, принимающий при $x = x_i$ заданные значения y_i (i= 0, 1,…,n), можно представить **интерполяционной формулой Лагранжа**

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}y_k + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

Пусть разности табличных значений аргумента $h = \Delta x_i \ (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i;\, i = 0,1,...,n-1)$ – постоянные (шаг таблицы). Тогда значение функции y для промежуточных значений x приближенно можно найти при помощи **интерполяционной формулы Ньютона**

$$y = y_0 + q\cdot\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_{0,}$$

где $q = \dfrac{x-x_0}{h}$, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, ... -$ последовательные конечные разности функции y.

Для удобства пользования формулой Ньютона рекомендуется предварительно составить таблицу конечных разностей.

При $x = x_i$ полином Ньютона принимает соответственно табличные значения y_i.

Погрешность интерполяционной формулы Ньютона приближенно можно оценить по формуле

$$R_n(x) = \frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}q(q-1)\cdots(q-n).$$

Если число n можно взять любым, то его следует выбирать так, чтобы разность $\Delta^{n+1}y_0 = 0$ в пределах данной точности; иными словами, разности $\Delta^n y_0$ должны быть постоянными в заданных десятичных разрядах.

Пример. Найти $\sin 25^0 15^/$, пользуясь табличными данными $\sin 26^0 = 0{,}43837, \sin 27^0 = 0{,}45399, \sin 28^0 = 0{,}46947$.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	26^0	0,43837	1562	-14
1	27^0	0,45399	1548	
2	28^0	0,46947		

Здесь $h = 60^/$, $q = \dfrac{26^0 15^/ - 26^0}{60^/} = 0{,}25$. Применяя формулу Ньютона, используя первую горизонтальную строку таблицы, имеем $\sin 26^0 15^/ = 0{,}43837 + \dfrac{1}{4}0{,}01562 + \dfrac{0{,}25(0{,}25-1)}{2!}(-0{,}00014) = 0{,}44229$. Причем погрешность $|R_2| < \dfrac{0{,}25(0{,}25-1)(0{,}25-2)}{3!}(\dfrac{\pi}{180})^3 = 0{,}25\cdot 10^{-6}$. Таким образом, все полученные знаки $\sin 26^0 15^/ -$ верные.

Многочлен Лагранжа

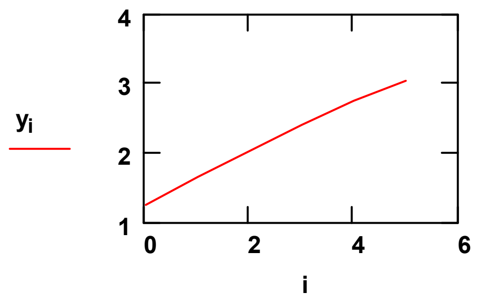
$f(x) := \ln\left(\cos(x) + \exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$f1(x) := \dfrac{-2\cdot\sin(x) + \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{2\cdot\left(\cos(x) + \exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$ –производная $f(x)$.

$n := 5 \qquad a := 3 \qquad b := 6$

$i := 0..\, n \qquad h := \dfrac{b-a}{n} \qquad x_i := a + i\cdot h \qquad y_i := f(x_i)$

$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.6 \\ 4.2 \\ 4.8 \\ 5.4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1.25039 \\ 1.63956 \\ 2.03809 \\ 2.40791 \\ 2.74177 \\ 3.0467 \end{pmatrix}$



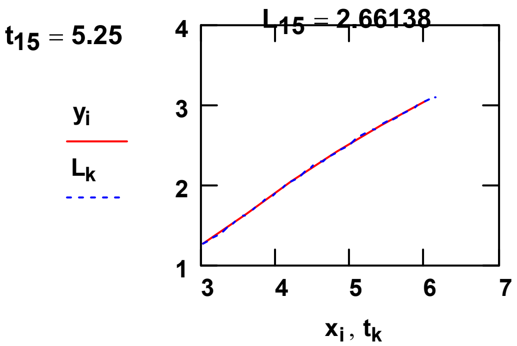
$N := 20 \qquad q := \dfrac{b-a}{N} \qquad k := 0..\, N+1 \qquad t_k := x_0 + k\cdot q \qquad j := 0..\, n$

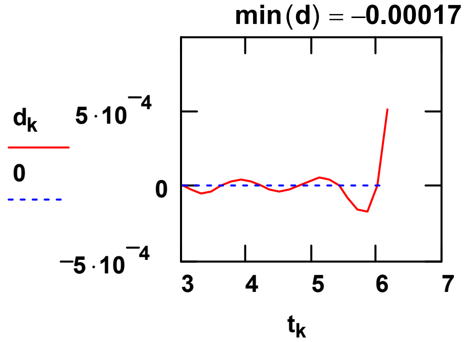
$H_{(i,k)} := \prod_j \text{if}\left(i \ne j, t_k - x_j, 1\right) \qquad F_i := \prod_j \text{if}\left(i \ne j, x_i - x_j, 1\right)$

$L_k := \sum_i y_i\cdot\dfrac{H_{(i,k)}}{F_i}$ –многочлен Лагранжа. $\qquad d_k := f(t_k) - L_k \qquad \max(d) = 0.00052$

$\min(d) = -0.00017$

$t_{15} = 5.25$





$m := 0..\, N-1$

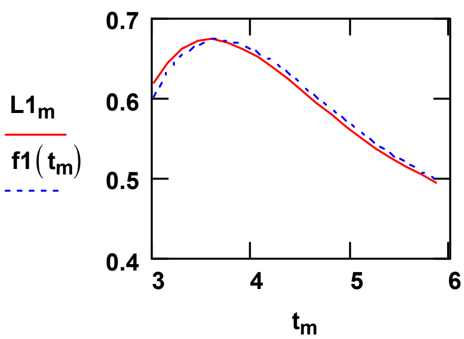
$L1_m := \dfrac{L_{(m+1)} - L_m}{\left[t_{(m+1)} - t_m\right]}$

Численное дифференцирование

$D_m := f1(t_m) - L1_m$

$\max(D) = 0.00795$

$\min(D) = -0.0167$



Теоретическое обоснование методов хорд и касательных решения трансцендентных уравнений $f(x)=0$.

Найдем координаты точки пересечения хорды, соединяющей концы дуги *AB* кривой $y=f(x)$, с осью абсцисс OX ($A=f(a),\ B=f(b),\ f(a)\cdot f(b)<0$).

Угловой коэффициент хорды *AB* равен $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, поэтому уравнение хорды можно записать так: $y-f(a)=k(x-a)$.

В точке (x,y) пересечения хорды с осью *OX* ордината равна нулю, следовательно,
$x=a-\dfrac{f(a)}{k}=a-\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a)$ (☺).

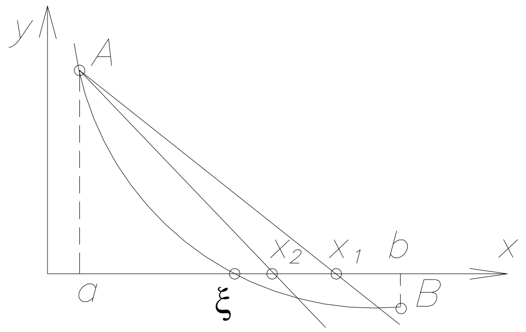
Аналогичным образом из уравнения $y-f(b)=k(x-b)$ можно получить формулу
$x=b-\dfrac{f(b)}{k}=b-\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}f(b)$ (☺ ☺).

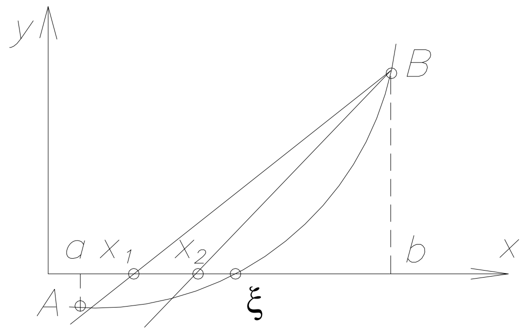
Искомый корень уравнения должен находиться на отрезке, ординаты концов которого имеют разные знаки: $f(a)\cdot f(x)<0$ *или* $f(b)\cdot f(x)<0$.

Для доказательства сходимости процесса итерации предположим, что корень отделен, и вторая производная сохраняет постоянный знак на отрезке $[a,b]$.

Пусть для определенности $f^{//}(x)>0$ при $a\le x\le b$. Тогда кривая вогнута и, следовательно, расположена ниже своей хорды *AB*. Возможны два случая:

1) $f(a)>0$ и 2) $f(a)<0$.





Заметим, что 1) неподвижен тот конец, для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной; 2) одна последовательность приближений монотонно убывает и ограничено снизу числом *a*, а другая – монотонно возрастает и ограничена сверху числом *b*, поэтому обе последовательности имеют предел, равный искомому корню ξ уравнения $f(x)=0$.

Для организации итерационного процесса решения уравнений **методом хорд** нужно выяснить, какой конец промежутка отделения корня неподвижен, и применить соответствующую формулу (☺) или (☺ ☺).

Найдя какое-нибудь приближение корня $x_n=$ ξ,, положим $\xi=x_n+h_n$ и по формуле Тейлора получим $0=f(x_n+h_n)\approx f(x_n)+h_n f^{/}(x_n)$. Откуда $h_n=-\dfrac{f(x)}{f^{/}(x)}$. Таким образом, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f^{/}(x_n)}$ – итерационная формула решения уравнений **методом касательных**.

Можно показать, что погрешность вычислений ω оценивается так: $\left|x_{n+1}-x_n\right|\le$ ω.

Решение трансцендентных и нелинейных уравнений методами хорд и касательных

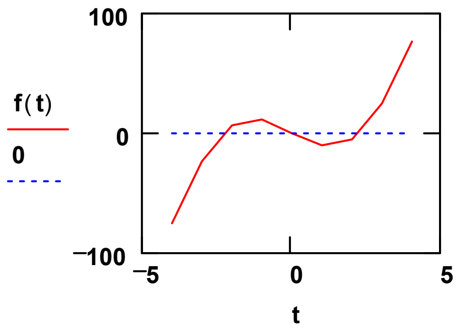
Зададим функцию и найдем от неё две первые производные $f1(x)$ и $f2(x)$.

$f(x) := x^3 - 15\cdot\sin(x)$ $\quad f1(x) := 3\cdot x^2 - 15\cdot\cos(x)$ $\quad f2(x) := 6\cdot x + 15\cdot\sin(x)$

Найдем отрезки изоляции корней, построим таблицу значений функции и её график.

$t := -4, -3 .. 4$

t =	f(t) =
-4	-75.35204
-3	-24.8832
-2	5.63946
-1	11.62206
0	0
1	-11.62206
2	-5.63946
3	24.8832
4	75.35204



Обратим внимание на то, что функция меняет знак на промежутках $(-3,-2),(-1,1),(2,3)$, то есть имеет три корня

Найдем корень на промежутке $(2,3)$

$a := 2$ $\quad b := 3$ $\quad d := f(a)\cdot f2(a)$ $\quad d = -144.59275$

Выберем начальную точку $x_0 := \mathrm{if}(d > 0, a, b)$

Организуем итерационный процесс.

$m := 10$ $\quad i := 0 .. m$ $\quad p(t) := t - f(t)\cdot\dfrac{t-b}{(f(t)-f(b))}$

Метод хорд $\quad l(t) := a - f(a)\cdot\dfrac{t-a}{(f(t)-f(a))}$

$x_{i+1} := \mathrm{if}\left(d > 0, p\left(x_i\right), l\left(x_i\right)\right)$ $\quad h_1 := x_m$ $\quad u := x_0$ $\quad h_0 := \mathrm{root}(f(u), u)$ **системное зн − е**

Метод касательных

$n_0 := x_0$ $\quad n_{i+1} := n_i - \dfrac{f(n_i)}{f1(n_i)}$ $\quad h_2 := n_m$ $\quad h = \begin{pmatrix} 2.26133 \\ 2.26133 \\ 2.26133 \end{pmatrix}$ **−корень**

$s := a - 1, a + .1 .. b + 1$ $\quad k := 0$

$y1(s) := f(x_k) + \dfrac{s - x_k}{(x_{k+1} - x_k)}\cdot\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)$ **хорды**

$N(s) := f(x_k) + f1(x_k)\cdot(s - x_k)$ **касательные**

Задание

Постройте графики функции, хорд и касательных. Постройте таблицы итерационных значений x и n. Оцените погрешность вычислений. Поменяйте значения m, a, b, K. Найдите остальные корни.

Работа с символьными операторами палитры Symbolic

$f(x) := x\cdot\left[5\cdot\left(x^2 + 2\cdot x\right) - 1\right]$

1. Упрощение выражений $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2$ simplify $\rightarrow 1$

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ simplify } \rightarrow \frac{5}{4}\cdot b^4 + \frac{10}{3}\cdot b^3 - \frac{1}{2}\cdot b^2 - \frac{5}{4}\cdot a^4 - \frac{10}{3}\cdot a^3 + \frac{1}{2}\cdot a^2$$

2. Разложение выражений по степеням $f(x)$ expand, $x \rightarrow 5\cdot x^3 + 10\cdot x^2 - x$

$f(x)$ collect, $x \rightarrow 5\cdot x^3 + 10\cdot x^2 - x$

$\left(z^3 - 8\right)\cdot\left(z^2 - 9\right)$ collect, $z \rightarrow z^5 - 9\cdot z^3 - 8\cdot z^2 + 72$

3. Разложение на простые дроби

$$\frac{x^2}{\left(x^2 - 1\right)\cdot\left(x^2 - 4\right)} \text{ convert, parfrac, } x \rightarrow \frac{-1}{6\cdot(x-1)} + \frac{1}{6\cdot(x+1)} + \frac{1}{3\cdot(x-2)} - \frac{1}{3\cdot(x+2)}$$

Можно также записать дробь, пометить переменную, открыть палитру Symbolics, выбрать Variable, затем выбрать Convert to Partial Fraction

4. Преобразования в комплексной форме $i := \sqrt{-1}$ $(2 + 3\cdot i)^2$ complex $\rightarrow -5 + 12\cdot i$

5. Присваивание переменным неопределенного значения, даже если до этого им были присвоены значения, а также задание ограничений на значения или тип переменных

$$\int_0^\infty e^{-a\cdot x}\,dx \text{ assume, } a > 1 \rightarrow \frac{1}{a}$$

6. Разложение в ряд Маклорена и Тейлора

$$e^x \text{ series, } x = 0, 6 \rightarrow 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{24}\cdot x^4 + \frac{1}{120}\cdot x^5$$

$$(\sin(x)) \text{ series, } x = 2, 4 \rightarrow \sin(2) + \cos(2)\cdot(x-2) + \frac{-1}{2}\cdot\sin(2)\cdot(x-2)^2 + \frac{-1}{6}\cdot\cos(2)\cdot(x-2)^3$$

7. Преобразование в формат чисел с плавающей точкой

$y := \pi$

y float, $\pi \rightarrow 3.14159265358979323$

$t := e$

t float, $e \rightarrow 2.71828182845904523$

8. Решение уравнений

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \text{ solve, } x \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2\cdot a}\cdot\left[-b + \left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{1}{2\cdot a}\cdot\left[-b - \left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{bmatrix}$$

$$x^2 - 4\cdot x + 3 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x^2 - 5\cdot x + 6 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x^3 - x \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x^3 - 1 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$x\cdot\left(x^2 - 1\right) \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

9. Вычисление коэффициентов полиномов

$$\left(4\cdot x^3 + 3\cdot x^2\right)\cdot(x+1) \text{ coeffs, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

10. Разложение тригонометрических функций кратных углов

$$(\sin(5\cdot x))\ \text{expand}, x \ \rightarrow 16\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^4 - 12\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^2 + \sin(x)$$

$$(\tan(4\cdot x))\ \text{expand}, x \ \rightarrow \frac{4\cdot\tan(x) - 4\cdot\tan(x)^3}{1 - 6\cdot\tan(x)^2 + \tan(x)^4}$$

11. Использование встроенных функций
(на примере решения системы нелинейных уравнений)

$x := 3.3 \quad y := 1.2$

Given

$\cos(x-1) + y = 0.5 \qquad x - \cos(y) = 3$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 3.3559117 \\ 1.2069068 \end{pmatrix}$$

12. Применение программных блоков из палитры Programming: Add Line и т.д.
(на примере решения той же системы нелинейных уравнений)

$n := 10$

```
x := | a ← 3.3
     | b ← 1.2
     | for  i ∈ 0.. n
     |    | x ← 3 + cos(b)
     |    | y ← 0.5 − cos(x − 1)
     |    | z[i,0] ← x
     |    | z[i,1] ← y
     |    | a ← x
     |    | b ← y
     | z
```

x =

	0	1
0	3.3623578	1.2114514
1	3.3516611	1.2038939
2	3.3587257	1.2088944
3	3.3540536	1.2055913
4	3.3571408	1.2077756
5	3.3550997	1.2063322
6	3.3564486	1.2072865
7	3.3555569	1.2066558
8	3.3561463	1.2070727
9	3.3557567	1.2067972
10	3.3560142	1.2069793

Приближенное решение этой системы уравнений можно также найти графически:

$r(w) := 0.5 - \cos(w-1)$

$t(w) := \text{acos}(w-3)$

$w := 3, 3.1 .. 3.5$

r(w) =

0.916
1.005
1.089
1.166
1.237
1.301

t(w) =

1.571
1.471
1.369
1.266
1.159
1.047