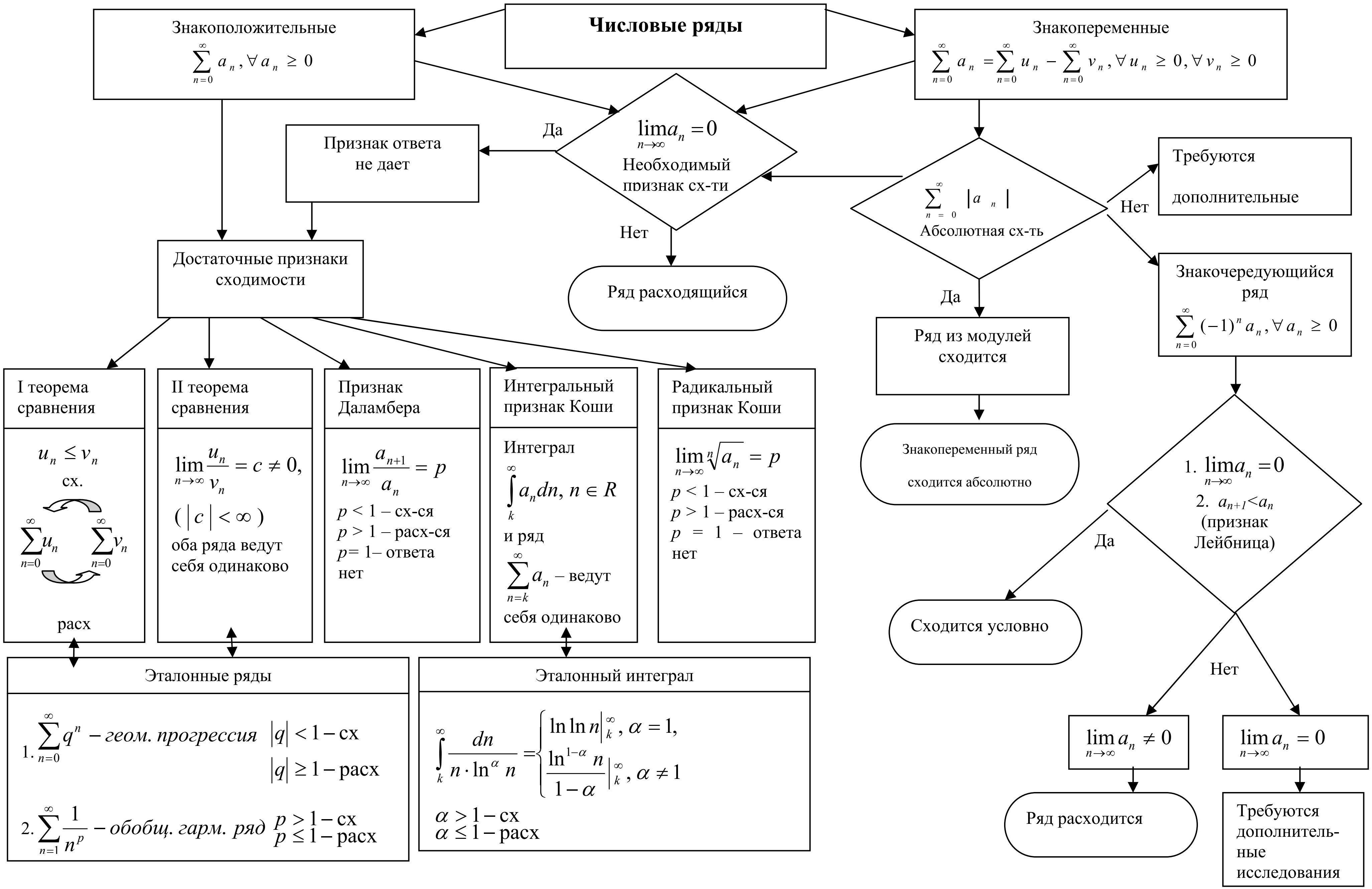
Числовые ряды
Знакоположительные
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \forall a_n \geq 0$
Знакопеременные
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} v_n, \forall u_n \geq 0, \forall v_n \geq 0$
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Необходимый признак сх-ти
Да
Нет
Признак ответа не дает
Ряд расходящийся
$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$
Абсолютная сх-ть
Да
Нет
Требуются дополнительные
Знакочередующийся ряд
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \forall a_n \geq 0$
Ряд из модулей сходится
Знакопеременный ряд сходится абсолютно
Достаточные признаки сходимости
I теорема сравнения
$u_n \leq v_n$
сх.
$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$
$\sum_{n=0}^{\infty} v_n$
расх
II теорема сравнения
$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c \neq 0,$
$(|c| < \infty)$
оба ряда ведут себя одинаково
Признак Даламбера
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$
$p < 1$ – сх-ся
$p > 1$ – расх-ся
$p = 1$ – ответа нет
Интегральный признак Коши
Интеграл
$\int_k^{\infty} a_n dn, n \in R$
и ряд
$\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ – ведут себя одинаково
Радикальный признак Коши
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$
$p < 1$ – сх-ся
$p > 1$ – расх-ся
$p = 1$ – ответа нет
1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $a_{n+1} < a_n$
(признак Лейбница)
Да
Сходится условно
Нет
$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Ряд расходится
Требуются дополнитель-ные исследования
Эталонные ряды
1. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ – геом. прогрессия $|q| < 1$ – сх
$|q| \geq 1$ – расх
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – обобщ. гарм. ряд $p > 1$ – сх
$p \leq 1$ – расх
Эталонный интеграл
$\int_k^{\infty} \frac{dn}{n \cdot \ln^{\alpha} n} = \begin{cases} \ln \ln n \big|_k^{\infty}, \alpha = 1, \\ \frac{\ln^{1-\alpha} n}{1-\alpha} \big|_k^{\infty}, \alpha \neq 1 \end{cases}$
$\alpha > 1$ – сх
$\alpha \leq 1$ – расх

Функциональные ряды
ТВТ©ТПУВМ05

$$\sum_n u_n(z)$$

В каждой точке $z \in D$
$$\exists S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_n u_n(z), \qquad |S(z)| < \infty \;\; \forall z \in D$$

да: Ряд $\sum_n u_n(z)$ сходится в D

нет: Ряд $\sum_n u_n(z)$ расходится в D

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| < 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|} < 1$ и другие

признаки сходимости числовых рядов

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| > 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|} > 1$ и другие

признаки сходимости числовых рядов

На границе D соответствующий числовой ряд исследуется отдельно

Ряды степеней $(z - z_0)$
$$\sum c_n (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma\subset D}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$n \geq 0$
Ряд Тейлора

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Сходится внутри круга
$|z-z_0| < R$
абсолютно и равномерно по т.Абеля
$R = |z_1 - z_0|$, z_1 – ближайшая к z_0 изолированная особая точка

n-целое
$n = 0, \pm1, \pm2, ..$

Ряд Лорана

$n = 0, 1, 2, \ldots$ – правильная часть

$n < 0$ – главная часть

Сходится внутри кольца
$r < |z-z_0| < R$

Сходится вне круга

$r < |z-z_0|$

1. $S(x)$ –непрерывна в области сходимости D
2. Ряд можно почленно дифференцировать любое число раз в D
3. Ряд можно почленно интегрировать по любой кривой $L \subset D$ любое число раз.

Ряды Фурье
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin\frac{\pi n x}{\ell}$$
$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx \qquad T = 2\ell$$
$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx$$

$x \in [0, \ell]$

Нечетное продолжение
$\forall a_n = 0$
$b_n =$
$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx$$

Четное продолжение
$\forall b_n = 0$
$a_n =$
$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx$$

Условия Дирихле
1. $f(x)$-периодическая, $T=2\ell$;
2. $f(x)$-кусочно-непрерывная на любом конечном $[x_1, x_2]$ и может иметь разрывы только I рода;
3. $f(x)$-кусочно-монотонная

$$S(x) = \begin{cases} f(x) - \text{в т. непр} - \text{ти} \\ \dfrac{f(x-x_0) + f(x+x_0)}{2} - \end{cases}$$
в x_0 - т.р. I рода

Некоторые разложения в степенные ряды

1	$e^{z}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^{2}}{2!}+\ldots+\frac{z^{n}}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	$e^{z}=e^{(z-z_0)+z_0}=e^{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{n}}{n!},\ \lvert z-z_0\rvert<\infty$
2	$\sin z=z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n}z^{2n+1}}{(2n+1!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \lvert z\rvert<\infty$ $shz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	$\cos z=\cos((z-z_0)+z_0)=\cos(z-z_0)\cos z_0-\sin(z-z_0)\sin z_0=$ $=\cos z_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-z_0)^{2n}}{(2n)!}-\sin z_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-z_0)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \lvert z-z_0\rvert<\infty$
3	$\cos z=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n}z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{2n}}{(2n)!},\ \lvert z\rvert<\infty$ $chz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	$\frac{Mz+N}{z^{2}+bz+c}=\frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}=\frac{A}{(z-z_0)+(z_0-z_1)}+\frac{B}{(z-z_0)+(z_0-z_2)}=$ $=\frac{A}{(z-z_0)(1+\frac{z_0-z_1}{z-z_0})}+\frac{B}{(z_0-z_2)(1+\frac{z-z_0}{z_0-z_2})}=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}A(z_0-z_1)^{n}}{(z-z_0)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}B(z-z_0)^{n}}{(z_0-z_2)^{n+1}},$ $r=\lvert z_0-z_1\rvert<\lvert z-z_0\rvert<\lvert z_0-z_2\rvert=R$
4	$\frac{b}{1-q(z)}=b\sum_{n=0}^{\infty}(q(z))^{n},\quad \lvert q(z)\rvert<1$	
5	$\ln(1+z)=z-\frac{z^{2}}{2}+\frac{z^{3}}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n}z^{n}}{n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{n+1}}{n+1},\quad \lvert z\rvert<1,\ z=1$	$(\ln(1+z))'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}z^{n},\ \lvert z\rvert<1$
6	$(1+z)^{m}=1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^{2}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^{n}+\ldots=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^{n},\ \lvert z\rvert<1$	