Теоретическое обоснование методов хорд и касательных решения трансцендентных уравнений $f(x)=0$.

Найдем координаты точки пересечения хорды, соединяющей концы дуги *AB* кривой $y=f(x)$, с осью абсцисс *OX* ($A=f(a),\ B=f(b),\ f(a)\cdot f(b)<0$).

Угловой коэффициент хорды *AB* равен $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, поэтому уравнение хорды можно записать так: $y-f(a)=k(x-a)$.

В точке (x, y) пересечения хорды с осью *OX* ордината равна нулю, следовательно, $x=a-\dfrac{f(a)}{k}=a-\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a)$ (☺).

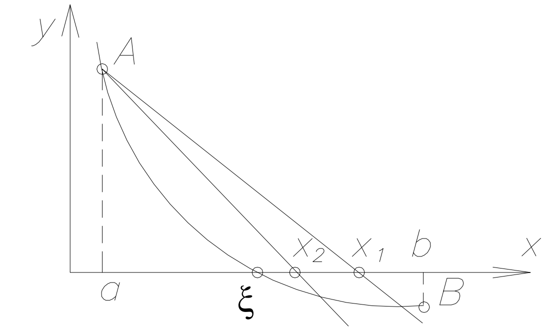
Аналогичным образом из уравнения $y-f(b)=k(x-b)$ можно получить формулу $x=b-\dfrac{f(b)}{k}=b-\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}f(b)$ (☺☺).

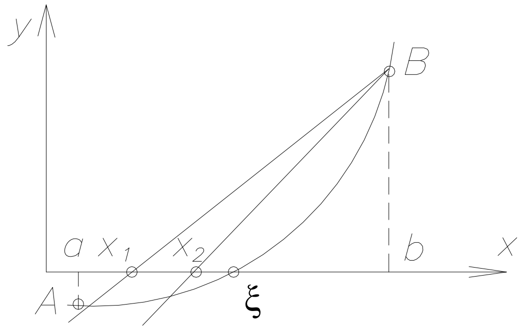
Искомый корень уравнения должен находиться на отрезке, ординаты концов которого имеют разные знаки: $f(a)\cdot f(x)<0$ *или* $f(b)\cdot f(x)<0$.

Для доказательства сходимости процесса итерации предположим, что корень отделен, и вторая производная сохраняет постоянный знак на отрезке $[a,b]$.

Пусть для определенности $f^{//}(x)>0$ при $a\le x\le b$. Тогда кривая вогнута и, следовательно, расположена ниже своей хорды *AB*. Возможны два случая:

1) $f(a)>0$ и 2) $f(a)<0$.





Заметим, что 1) неподвижен тот конец, для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной; 2) одна последовательность приближений монотонно убывает и ограничено снизу числом *a*, а другая – монотонно возрастает и ограничена сверху числом *b*, поэтому обе последовательности имеют предел, равный искомому корню ξ уравнения $f(x)=0$.

Для организации итерационного процесса решения уравнений **методом хорд** нужно выяснить, какой конец промежутка отделения корня неподвижен, и применить соответствующую формулу (☺) или (☺☺).

Найдя какое-нибудь приближение корня $x_n=\xi$,, положим $\xi=x_n+h_n$ и по формуле Тейлора получим $0=f(x_n+h_n)\approx f(x_n)+h_n f^{/}(x_n)$. Откуда $h_n=-\dfrac{f(x)}{f^{/}(x)}$. Таким образом,

$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f^{/}(x_n)}$ – итерационная формула решения уравнений **методом касательных**.

Можно показать, что погрешность вычислений ω оценивается так: $\left|x_{n+1}-x_n\right|\le\omega$.