Методы простой итерации и Зейделя решения систем линейных уравнений

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений, записанная в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 +,,,+ a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Допустим, что определитель основной матрицы этой системы не равен нулю, тогда система имеет единственное решение. Для нахождения этого решения можно использовать итерационные методы, в которых решение системы получается как предел последовательности приближений, вычисленных некоторым единообразным процессом.

Для получения итерационных формул **метода простой итерации** выразим из первого уравнения системы x_1, из второго – x_2, из последнего – x_n. Тогда систему можно записать в матричном виде $X = AX + \beta$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{n1}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & -\frac{a_{n2}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \ldots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

, и итерационный процесс организовать по формуле $X^{(k+1)} = AX^{(k)} + \beta$.

При таком построении последовательности приближений нужно выяснить условия, при которых последовательность имеет предел. Эти условия дает следующая теорема.

Для того, чтобы процесс итераций сходился к решению системы при любом начальном векторе $X^{(0)}$, достаточно, чтобы какая-нибудь норма матрицы *A* была меньше единицы $\|A\| < 1$.

Введение нормы дает легко проверяемые условия сходимости метода: $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ или $|a_{jj}| > \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (в суммах $i \neq j$).

Если условия сходимости не выполнены, то надо преобразовать систему так, чтобы условия выполнялись. Это можно сделать, используя эквивалентные преобразования системы или преобразования следующего вида. Обозначим $D = C^{-1} - \varepsilon$, где $\varepsilon = \lfloor \varepsilon_{ij} \rfloor$ – матрица с малыми по модулю элементами. Тогда вместо исходной системы будем иметь: $DCX = DB \Leftrightarrow (C^{-1} - \varepsilon)CX = DB \Leftrightarrow X = \varepsilon CX + DB \Leftrightarrow X = CX + \mu$, где $\lambda = \varepsilon C$, $\mu = DB$.

При достаточно малых ε итерационный процесс должен сходиться.

Если заданная точность вычислений по методу простой итерации ω, то вычисления следует проводить до тех пор, пока не выполнится неравенство: $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \omega$.

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации. Идея его заключается в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

$$X = (F + D)X + B \Rightarrow X^{(k+1)} = FX^{(k+1)} + DX^{(k)} + B \Rightarrow X^{(k+1)} = (E - F)^{-1} DX^{(k)} + (E - F)^{-1} B$$

То есть итерационная формула $X^{(k+1)} = D_1 X^{(k)} + B_1$, где $D_1 = (E - F)^{-1} D,\ B_1 = (E - F)^{-1} B$.