

## Определённый интеграл

I. Вычислить определённый интеграл:

1.  $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx$

3.  $\int_{1/2}^1 \sqrt{4x - 2} dx$

2.  $\int_0^1 x e^x dx$

4.  $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 + x}$

1.  $\int_1^5 \frac{x dx}{x^2 + 1}$

3.  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

2.  $\int_1^e \frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$

4.  $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$

II. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1.  $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$

2.  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} y = 4, (y \geq 4), 0 < x < 8\pi$

3.  $\rho = 4 \sin \varphi, \rho = 2 (\rho \geq 2)$

III. Вычислить длину дуги кривой:

1.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$

2.  $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$

3.  $\rho = 2e^{2\varphi/3}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

IV. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$$z = x^2 + 4y^2, z = 2$$

V. Вычислить объём тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной указанными линиями, вокруг оси  $Ox$ :

$$y = -x^2 + 5x - 6, y = 0$$

VI. Вычислить несобственные интегралы:

1.  $\int_0^{\infty} \frac{\arcsin x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

2.  $\int_{-1}^1 \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx$

## Числовые ряды.

### Вариант 1.

1. Написать общий член ряда

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{17} + \dots$$

2. Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ .

3. Проверить выполнение необходимого признака сходимости:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ;   б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ ;   в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5+1}$ .

### Вариант 2.

1. Написать общий член ряда

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{24} - \dots$$

2. Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$ .

3. Проверить выполнение необходимого признака сходимости:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n-1}$ ;   б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$ ;   в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n+4}}$ .

### Вариант 3.

Исследовать на сходимость ряды:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 \sin \frac{1}{(n+1)^2}$ ;   в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{3n+1}\right)^n$ ;  
б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ ;   г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ .

### Вариант 4.

Исследовать на сходимость ряды:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}$ ;   в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$ ;  
б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ ;   г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n(3n-1)}$ .

## Степенные ряды

### Вариант 1.

1. Разложить по степеням  $(x - x_0)$  и указать интервал сходимости ряда

а)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2}, x_0 = -1;$

б)  $f(x) = x \ln(2+x), x_0 = 0.$

2. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать поведение ряда на границах интервала:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{5^{n+1}};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$

3. Вычислить интеграл с заданной степенью точности:  $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}, \varepsilon = 0,001.$

### Вариант 2.

1. Разложить по степеням  $(x - x_0)$  и указать интервал сходимости ряда

а)  $f(x) = e^{\frac{x}{2}}, x_0 = 2;$

б)  $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6), x_0 = 2.$

2. Найти интервал сходимости ряда. Исследовать поведение ряда на границах интервала:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n 2^n};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{2^n}.$

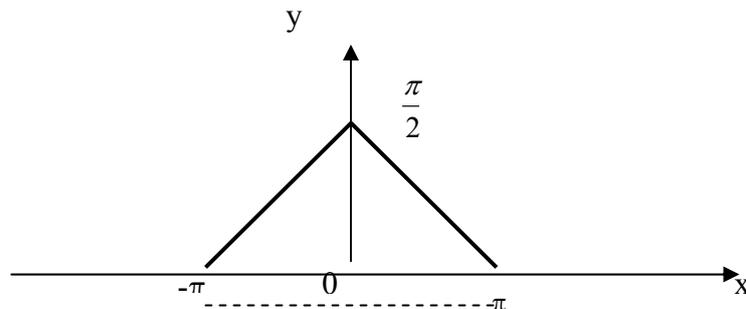
3. Вычислить интеграл с заданной степенью точности:  $\int_0^{0,3} \frac{\arctg x}{x} dx,$   
 $\varepsilon = 0,001.$

## Ряды Фурье

### Вариант 1.

1. Функцию  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$  разложить в ряд Фурье по косинусам.

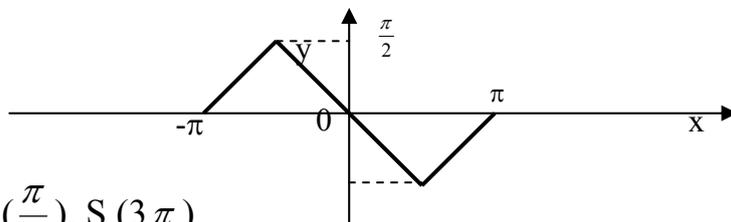
2. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически на  $(-\pi, \pi)$



и найти  $S(\frac{\pi}{2}), S(2\pi).$

### Вариант 2.

1. Функцию  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2, \\ \pi, & 2 < x < 3 \end{cases}$  разложить в ряд Фурье по косинусам.
2. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически на  $(-\pi, \pi)$



и найти  $S\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $S(3\pi)$ .

### РЯДЫ

#### Вариант 1.

1. Найти радиус и интервал сходимости ряда. Исследовать поведение на границах интервала.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n (x+1)^n}{\sqrt{n}}.$$

2. Найти первых пять членов разложения функции  $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$  в ряд Маклорена. Указать интервал сходимости.

3. Функцию  $f(x) = \sin 3x$  разложить в ряд Тейлора по степеням  $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

Указать интервал сходимости.

4. Разложить в ряд Фурье четную функцию с периодом  $T=8$ , заданную на  $(0,4)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 3, \\ 0, & 3 < x < 4. \end{cases}$$

#### Вариант 2.

1. Найти радиус и интервал сходимости ряда. Исследовать поведение на границах интервала.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{3^n} (x+1)^n}{2n-1}$$

2. Найти первых пять членов разложения функции  $f(x) = \ln(3+2x)$  в ряд Маклорена. Указать интервал сходимости.

3. Функцию  $f(x) = x^2 e^{-x}$  разложить в ряд Тейлора по степеням  $(x+2)$ .

Указать интервал сходимости.

4. Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x(x-\pi)$  на интервале  $(-\pi, \pi)$ .