

Глава I. РЯДЫ

Числовые ряды

§ Основные понятия

Определение числового ряда	Пусть дана последовательность вещественных или комплексных чисел. Числовым рядом называется сумма всех членов числовой последовательности: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называют членами ряда. Функциональную зависимость члена ряда a_n от его номера n называют общим членом ряда: $a_n = f(n)$.
Определение n-й частичной суммы числового ряда и остатка ряда	Сумма n первых членов ряда называется его n-й частичной суммой и обозначается $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Остатком ряда r_n называется разность суммы ряда S и его n-й частичной суммы: $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$, т.е. $S = S_n + r_n$.
Определение сходящегося ряда и расходящегося ряда	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, равный S, т.е. если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad S < \infty.$ Ряд называется расходящимся, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \text{не существует,} \\ \infty. \end{cases}$
Теорема о сходимости ряда с комплексными членами	Пусть члены ряда a_n – комплексные числа: $a_n = \alpha_n + \beta_n i$ Для того чтобы ряд с комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходил, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$, составленные из действительной и мнимой частей ряда с комплексными членами.

§ Критерий Коши. Необходимый признак сходимости ряда

Критерий Коши	Для того, чтобы числовой ряд сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы любой его отрезок можно было сделать сколь угодно малым по абсолютной величине: $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N = N(\varepsilon)): \forall n > N, \forall p \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon.$
----------------------	--

Необходимый признак сходимости ряда	Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел общего члена ряда a_n равен нулю: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходитс} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$
--	--

Следствие из необходимого признака сходимости (достаточный признак расходимости)	Если предел общего члена ряда не равен нулю, то ряд расходится: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится}.$
---	---

§ Некоторые свойства сходящихся рядов

Свойство 1 (об остатке)	Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой из его остатков, т.е. отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.
-----------------------------------	---

Свойство 2 (линейности)	Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к числам S и σ соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n$ также сходится, и его сумма равна $\alpha S + \beta \sigma$ (α и β – произвольные константы).
-----------------------------------	--

Свойство 3 (коммутативности)	Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и его сумма равна S, то члены этого ряда можно, не переставляя, объединять в одно слагаемое произвольным образом, причём сумма полученного ряда также будет равна S.
--	--

§ Абсолютная и условная сходимость

Определение абсолютной сходимости	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей членов этого ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Определение условной сходимости	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если ряд из модулей членов ряда расходится ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится), а исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
Теорема об абсолютной сходимости	Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е. из абсолютной сходимости следует сходимость исходного ряда.
Теорема о коммутативности абсолютно сходящегося ряда	Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится), и его сумма равна S, то при любой перестановке его членов вновь полученный ряд сходится к той же сумме S.
Критерий абсолютной сходимости ряда с комплексными членами	Чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\beta_n$ сходился абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходились абсолютно.
Критерий условной сходимости ряда с комплексными членами	Чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\beta_n$ сходился условно, необходимо и достаточно, чтобы оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходились, причём хотя бы один из них условно.
Теорема Римана	Если ряд с вещественными членами сходится условно, то для любого вещественного числа L, конечного или нет, можно так переставить члены этого ряда, чтобы полученный ряд имел сумму, равную L.

§ Критерий абсолютной сходимости рядов

Для рядов с **положительными вещественными членами** понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Критерий абсолютной сходимости рядов	Для того чтобы ряд с положительными членами сходил, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена в совокупности, т.е. $\exists M : \forall n \Rightarrow S_n \leq M$.
---	--

§ Достаточные признаки абсолютной сходимости рядов

Интегральный признак Коши абсолютной сходимости рядов	Пусть неотрицательная на луче $[k, \infty)$ функция $f(x)$ монотонно убывает при $x \rightarrow \infty$, и при целых $n = 1, 2, \dots$ имеет место равенство $f(n) = a_n$. Тогда ряд $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ сходится (абсолютно), если сходится интеграл $\int_k^{\infty} f(x) dx$ и ряд $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ расходится, если расходится $\int_k^{\infty} f(x) dx$.
--	---

Первая теорема сравнения рядов с положительными членами	Если для всех $n > n_0 \geq 1$ выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из (абсолютной) сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует (абсолютная) сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
--	---

Замечание 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ либо расходится, либо сходится условно. Нужны дополнительные исследования.

Если же ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ содержат лишь **положительные вещественные члены**,

то из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Вторая теорема сравнения рядов с положительными членами	Пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ a_n }{ b_n } = q$. Если $q \in [0, \infty)$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится (абсолютно), то сходится (абсолютно) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $q > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
--	---

Замечание 2. Если $q = \infty$, то тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|a_n|} = 0$, то из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$.

Замечание 3. Если $q \neq 0$ и $q \neq \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ ведут себя одинаково: или оба сходятся, или оба расходятся.

Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ требуются дополнительные исследования. Каждый из них, независимо от другого, может либо сходиться условно, либо расходиться.

Если же члены этих рядов вещественны и положительны, то при $q \neq 0$, $q \neq \infty$ ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ или оба сходятся, или оба расходятся.

Признак Даламбера абсолютной сходимости рядов	Если существует предел отношения модулей последующего члена ряда к предыдущему, т.е.: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ a_{n+1} }{ a_n } = q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (абсолютно) при $q < 1$ и расходится при $q > 1$. (При $q = 1$ никакого вывода о сходимости ряда сделать нельзя, требуются дополнительные исследования).
--	--

Радикальный признак Коши абсолютной сходимости рядов	Если существует предел корня n-й из модуля общего члена ряда, т.е.: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (абсолютно) при $q < 1$ и расходится при $q > 1$. (При $q = 1$ никакого вывода о сходимости ряда сделать нельзя, требуются дополнительные исследования).
---	--

Рекомендации по применению достаточных признаков сходимости рядов.

1. **Признак Даламбера** применяют, если общий член ряда содержит **показательные функции** a^n или **факториалы** $n!$. Если же общий член ряда содержит только степенные функции n^k , где k – любое конечное вещественное число, признак Даламбера, как правило, ответа не даёт.
2. **Интегральный** признак Коши применяют, если легко найти **первообразную** общего члена ряда.
3. **Радикальный** признак Коши применяют, если легко извлекается **корень n -й степени** из общего члена ряда. При этом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$, где k – любое конечное вещественное число. Также полезной бывает **формула Стирлинга**:

$$n! \sim \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

4. **Признаки сравнения** применяют, когда легко подобрать для сравнения **эталонные ряды**, используя при этом сравнение бесконечно малых функций.

$\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$			
1	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$\log_a (1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
2	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6a	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
3	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
4	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7a	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
5	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1 + \alpha(x))^\mu - 1 \sim \mu \alpha(x)$

Следует иметь в виду, что при вычислении пределов отношений конечного числа б. б. складываемых функций слагаемые более низкого порядка роста можно отбрасывать, а сумму заменять слагаемым **самого высокого порядка роста**.

При $n \rightarrow \infty$ **самый высокий** порядок **роста** имеет **показательная** функция $f(n) = a^n$; степенная функция $f(n) = n^k$ имеет порядок роста, более низкий по сравнению с показательной функцией, но более высокий по сравнению с логарифмической; логарифмическая функция $f(n) = \log_a n$ имеет самый низкий порядок роста по сравнению и с показательной функцией, и со степенной. Это обозначают так:

$$\log_a n \ll n^k \ll a^n, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Очень эффективным при вычислении пределов оказывается применение следующих правил:

1. Предел отношения б. м. ф. (б. б. ф.) не изменится, если заменить эти функции эквивалентными.
2. Разность эквивалентных б. м. ф. (б. б. ф.) есть б. м. ф. (б. б. ф.) более высокого порядка малости (роста) по сравнению с уменьшаемой и вычитаемой б. м. ф. (б. б. ф.).
3. Сумма конечного числа б. м. (б. б.) слагаемых разного порядка малости (роста) эквивалентна слагаемому самого низкого (высокого) порядка малости (роста).
4. Если б. м. ф. $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ при $x \rightarrow a$, $A = \text{const} \neq 0$, то $A + \alpha(x) \sim A + \alpha_1(x)$ при $x \rightarrow a$.

§ Признаки Лейбница и Дирихле

Определение знакопередающего ряда	Ряд с вещественными членами называется знакопередающим, если два любых его соседних члена имеют противоположные знаки: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$ ($\forall a_n \in R$, т.е. вещественны и $\forall a_n > 0$).
Признак Лейбница	Если члены знакопередающего ряда 1) убывают по абсолютной величине, т.е. $a_{n+1} < a_n$ и 2) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится, его остаток не превышает первого члена остатка, а по знаку совпадает со знаком первого члена остатка.
Признак Дирихле	Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $ ограничена, а числовая последовательность $\{b_n\}$ монотонная и бесконечно малая, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.