Функциональные ряды

§ Функциональный ряд, его сумма и область сходимости

Определение функционального ряда	Пусть в области Δ вещественных или комплексных чисел z дана последовательность функций $\{f_k(z)\}$, $k = 1, 2, \ldots$. **Функциональным рядом** называется сумма всех членов функциональной последовательности: $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \ .$$

Определение области поточечной сходимости функционального ряда	Множество $D \subset \Delta$ всех точек z, в которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется **областью поточечной сходимости** этого ряда.

Определение суммы функционального ряда	Функция $S(z)$ такая, что для любой точки $z_0 \in D$ число $S(z_0)$ является суммой числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$, называется **суммой функционального ряда**. То есть $S(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)$.

§ Равномерная и поточечная сходимость

Определение равномерной и поточечной сходимости функционального ряда	Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится в области D к функции $S(z)$, и $H \subseteq D$ − некоторое множество. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется **равномерно сходящимся на множестве** $H \subseteq D$, если $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N(\varepsilon) > 0)\ (\forall n > N, \forall z \in H \Rightarrow \lvert S(z) - S_n(z) \rvert < \varepsilon)$, или: $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N(\varepsilon) > 0)\ (\forall n > N, \forall z \in H \Rightarrow \lvert r_n(z) \rvert < \varepsilon)$. Если такой номер N зависит не только от $\varepsilon > 0$, но и от $z \in D$, т.е. $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N(\varepsilon, z) > 0)\ (\forall n > N \Rightarrow \lvert r_n(z) \rvert < \varepsilon)$, то ряд называется **сходящимся поточечно (неравномерно)** в D.

Признак Вейерштрасса (достаточный признак равномерной сходимости)	Если при любом $z \in D$ выполняется неравенство $\lvert f_n(z) \rvert \le c_n$, $n = 1, 2, \ldots$, а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится в области D **равномерно.**

§ Свойства равномерно сходящихся рядов

Свойство 1 (о непрерывности суммы ряда)	Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ непрерывны в области D, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в этой области, то его сумма $S(z)$ **непрерывна** в D.

Свойство 2 (о почленном интегрировании ряда)	Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ непрерывны на некоторой дуге L, и ряд сходится равномерно на этой дуге к функции $S(z)$, то ряд можно почленно интегрировать вдоль этой дуги, т.е. $\int_L S(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z)dz$

Определение аналитической функции	Функция $f(z)$ называется **аналитической в точке**, если она дифференцируема в точке и некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется **аналитической в области**, если она аналитическая в каждой точке этой области.

Свойство 3 (об аналитичности суммы ряда)	Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются аналитическими в области D функциями и ряд в этой области сходится равномерно, то его сумма $S(z)$ в области D является функцией аналитической.

Свойство 4 (о почленном дифференцировании ряда с комплексными членами)	Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются аналитическими в области D функциями и ряд в этой области сходится равномерно, то этот ряд можно дифференцировать почленно в области D любое число раз, т.е. $S^{(m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}(z)$.

Свойство 4а (о почленном дифференцировании ряда с вещественными членами)	Пусть дан ряд с вещественными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, члены которого на отрезке $[a, b]$ непрерывны вместе со своими производными. Если на $[a, b]$ данный ряд сходится к функции $S(x)$, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, то функция $S(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и при этом $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

§ Степенные ряды

Определение степенного ряда	Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ называется **степенным рядом**, где a_n – комплексные числа, не зависящие от z, называются коэффициентами степенного ряда; z_0 – фиксированное комплексное число, называется центром сходимости степенного ряда. Если $z_0 = 0$, то степенной ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. .

Теорема Абеля	Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке $z_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом z, удовлетворяющем неравенству: $\lvert z \rvert < \lvert z_1 \rvert$; при этом он сходится равномерно в любом круге $\lvert z \rvert \leq \rho < \lvert z_1 \rvert$. Если ряд в точке $z_1 \neq 0$ расходится, то он расходится во всех точках z, для которых $\lvert z \rvert > \lvert z_1 \rvert$

Теорема (о радиусе сходимости степенного ряда)	Для всякого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ существует неотрицательное число R такое, что при $\lvert z \rvert < R$ (если $R > 0$) ряд сходится и притом абсолютно, а при $\lvert z \rvert > R$ (если $R \neq \infty$) ряд расходится. Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда, а круг $\lvert z \rvert < R$ – его **кругом сходимости**.

Теорема (о свойствах степенного ряда)	**Сумма** степенного ряда является функцией **аналитической** в его круге сходимости. Степенной ряд можно **почленно дифференцировать** любое число раз, при этом радиус сходимости рядов не изменяется. Степенной ряд можно **почленно интегрировать** по любой кривой, расположенной в его круге сходимости.

§ Ряды Тейлора

Теорема (о ряде Тейлора)	Если функция $f(z)$ аналитична в круге $\lvert z-z_0\rvert<R$, то в этом круге функция $f(z)$ представима в виде суммы степенного ряда $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, который называется **рядом Тейлора** для функции $f(z)$.

Теорема (единственности ряда Тейлора)	Любой сходящийся в круге $\lvert z-z_0\rvert<R$ к функции $f(z)$ степенной ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ является **рядом Тейлора** для своей суммы $f(z)$.

§ Ряды Тейлора некоторых элементарных функций

Определение ряда Маклорена	Рядом Маклорена называют ряд Тейлора с центром сходимости в точке ноль: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$.

$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	
$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	$shz=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$
$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	$chz=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$
$\frac{b}{1-q(z)}=b\sum\limits_{n=0}^{\infty}(q(z))^n,\quad \lvert q(z)\rvert<1$	
$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n z^n}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1},\quad \lvert z\rvert<1,\ z=1$	
$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n,\quad \lvert z\rvert<1$	
$arctgz=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1},\quad \lvert z\rvert<1$	

Рекомендации по разложению функции в ряд Тейлора

1. Найти формулу для производной n-го порядка в точке z_0, записать ряд Тейлора $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$. Найти область сходимости полученного ряда.
2. Воспользоваться известными разложениями функций и тождественными преобразованиями данной функции привести её к известному разложению. Найти область сходимости полученного ряда.
3. Дробные рациональные функции разложить на простые дроби. Простые дроби преобразовать тождественными преобразованиями к сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Найти область сходимости полученного ряда.
4. Воспользоваться почленным дифференцированием или почленным интегрированием, чтобы привести данную функцию к известному разложению. Найти область сходимости полученного ряда.

§ Применение рядов Тейлора

Оценка остатка ряда Тейлора	Остаток $r_n(x)$ ряда Тейлора $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x)$ вещественной функции вещественной переменной $f(x)$ может быть представлен остаточным членом **в форме Лагранжа**: $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, точка c расположена между x и x_0; **Пеано:** $r_{n+1}(x)=o((x-x_0)^{n+1})$; **Коши:** $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}$, $0\le\theta\le1$. **Для знакочередующегося ряда** $\lvert r_n(x)\rvert<\left\lvert\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right\rvert$.

Ряды Тейлора применяются
для приближённого вычисления **значений функции, определённых интегралов,**
нахождения первообразных неберущихся интегралов,
значений иррациональных чисел,
интегрирования дифференциальных уравнений,
для вычисления пределов, значений производных функции в точке
и во многих других случаях.