

Рекомендации по применению достаточных признаков сходимости рядов.

1. **Признак Даламбера** применяют, если общий член ряда содержит **показательные** функции a^n или **факториалы** $n!$. Если же общий член ряда содержит только степенные функции n^k , где k – любое конечное вещественное число, признак Даламбера, как правило, ответа не даёт.
2. **Интегральный** признак Коши применяют, если легко найти **первообразную** общего члена ряда.
3. **Радикальный** признак Коши применяют, если легко извлекается **корень n -й степени** из общего члена ряда. При этом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$, где k – любое конечное вещественное число. Также полезной бывает **формула Стирлинга**:

$$n! \sim \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

4. **Признаки сравнения** применяют, когда легко подобрать для сравнения **эталонные ряды**, используя при этом сравнение бесконечно малых функций.

$\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$			
1	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$\log_a (1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
2	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6a	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
3	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
4	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7a	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
5	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1 + \alpha(x))^\mu - 1 \sim \mu \alpha(x)$

Следует иметь в виду, что при вычислении пределов отношений конечного числа б. б. складываемых функций слагаемые более низкого порядка роста можно отбрасывать, а сумму заменять слагаемым **самого высокого порядка роста**.

При $n \rightarrow \infty$ **самый высокий** порядок **роста** имеет **показательная** функция $f(n) = a^n$; степенная функция $f(n) = n^k$ имеет порядок роста, более низкий по сравнению с показательной функцией, но более высокий по сравнению с логарифмической; логарифмическая функция $f(n) = \log_a n$ имеет самый низкий порядок роста по сравнению и с показательной функцией, и со степенной. Это обозначают так:

$$\log_a n \ll n^k \ll a^n, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Очень эффективным при вычислении пределов оказывается применение следующих **правил**:

1. **Предел отношения б. м. ф. (б. б. ф.)** не изменится, если заменить эти функции **эквивалентными**.
2. **Разность эквивалентных б. м. ф. (б. б. ф.)** есть б. м. ф. (б. б. ф.) **более высокого порядка малости (роста)** по сравнению с уменьшаемой и вычитаемой б. м. ф. (б. б. ф.).
3. **Сумма конечного числа б. м. (б. б.) слагаемых разного порядка малости (роста)** эквивалентна **слагаемому самого низкого (высокого) порядка малости (роста)**.
4. Если б. м. ф. $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ при $x \rightarrow a$, $A = \text{const} \neq 0$, то $A + \alpha(x) \sim A + \alpha_1(x)$ при $x \rightarrow a$.

Рекомендации по разложению функции в ряд Тейлора

1. Найти формулу для производной n -го порядка в точке z_0 , записать ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \text{ Найти область сходимости полученного ряда.}$$

2. Воспользоваться известными разложениями функций и тождественными преобразованиями данной функции привести её к известному разложению. Найти область сходимости полученного ряда.
3. Дробные рациональные функции разложить на простые дроби. Простые дроби преобразовать тождественными преобразованиями к сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Найти область сходимости полученного ряда.
4. Воспользоваться почленным дифференцированием или почленным интегрированием, чтобы привести данную функцию к известному разложению. Найти область сходимости полученного ряда.

$e^z = e^{(z-z_0)+z_0} = e^{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}, z-z_0 < \infty$
$\begin{aligned} \cos z &= \cos((z-z_0)+z_0) = \cos(z-z_0)\cos z_0 - \sin(z-z_0)\sin z_0 = \\ &= \cos z_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^{2n}}{(2n)!} - \sin z_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}, z-z_0 < \infty \end{aligned}$
$\begin{aligned} \frac{Mz+N}{z^2+bz+c} &= \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2} = \frac{A}{(z-z_0)+(z_0-z_1)} + \frac{B}{(z-z_0)+(z_0-z_2)} = \\ &= \frac{A}{(z-z_0)(1+\frac{z_0-z_1}{z-z_0})} + \frac{B}{(z_0-z_2)(1+\frac{z-z_0}{z_0-z_2})} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A (z_0-z_1)^n}{(z-z_0)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B (z-z_0)^n}{(z_0-z_2)^{n+1}}, \\ r &= z_0-z_1 < z-z_0 < z_0-z_2 = R \end{aligned}$
$(\ln(1+z))' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, z < 1$