§ Ортогональные системы вещественных функций

Определение ортогональных функций	Две интегрируемые функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются **ортогональными** на промежутке $[a,b]$, если $\int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)dx=0$.

Определение ортогональной системы вещественных функций	Система функций $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots$ называется ортогональной на $[a,b]$, если эти функции попарно ортогональны на $[a,b]$, то есть $\int\limits_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=0$, если $i\neq j$, $\int\limits_a^b \varphi_i^2(x)dx>0$.

§ Ряд Фурье по ортогональной системе вещественных функций

Определение ряда по ортогональной системе функций	Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – ортогональная система вещественных функций на $[a,b]$. Рядом по ортогональной системе вещественных функций называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$, где c_n – вещественные коэффициенты.

Теорема о коэффициентах ряда Фурье	Пусть ряд по ортогональной системе вещественных функций равномерно сходится на $[a,b]$ к функции $f(x)$. Тогда коэффициенты этого ряда c_n имеют вид $c_n=\dfrac{\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx}$ и называются коэффициентами Фурье.

§ Тригонометрический ряд Фурье

Определение тригонометрического ряда Фурье	Тригонометрическим рядом Фурье называется ряд $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\dfrac{\pi n x}{\ell}+b_n\sin\dfrac{\pi n x}{\ell}$, *где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам* $a_n=\dfrac{1}{\ell}\int\limits_a^{a+2\ell} f(x)\cos\dfrac{\pi n x}{\ell}dx$, ($T=2\ell$ – *период функции* $f(x)$) $b_n=\dfrac{1}{\ell}\int\limits_a^{a+2\ell} f(x)\sin\dfrac{\pi n x}{\ell}dx.$

Теорема Дирихле (достаточные условия представимости функции в виде суммы своего ряда Фурье)	Пусть функция $f(x)$ 1. периодическая, с периодом $T=2\ell$; 2. кусочно-непрерывная на любом конечном промежутке $[x_1, x_2]$ и может иметь разрывы только I рода; 3. кусочно-монотонная. Тогда ряд Фурье, составленный для этой функции, сходится к функции $f(x)$ в каждой точке непрерывности и к среднему арифметическому односторонних пределов в точках разрыва первого рода: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \begin{cases} f(x) - \textit{в точках непрерывности}, \\ \dfrac{f(x-x_0)+f(x+x_0)}{2} \end{cases}$ (x_0 - точки разрыва I-го рода).

§ **Ряд Фурье для чётной и нечётной функции, для функций, заданных на интервале $[0, l]$ и непериодических функций**

Лемма 1	Если $f(x)$ – чётная функция на промежутке $[-a, a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Лемма 2	Если $f(x)$ – нечётная функция на промежутке $[-a, a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Пример. Разложение функций в ряд Фурье.

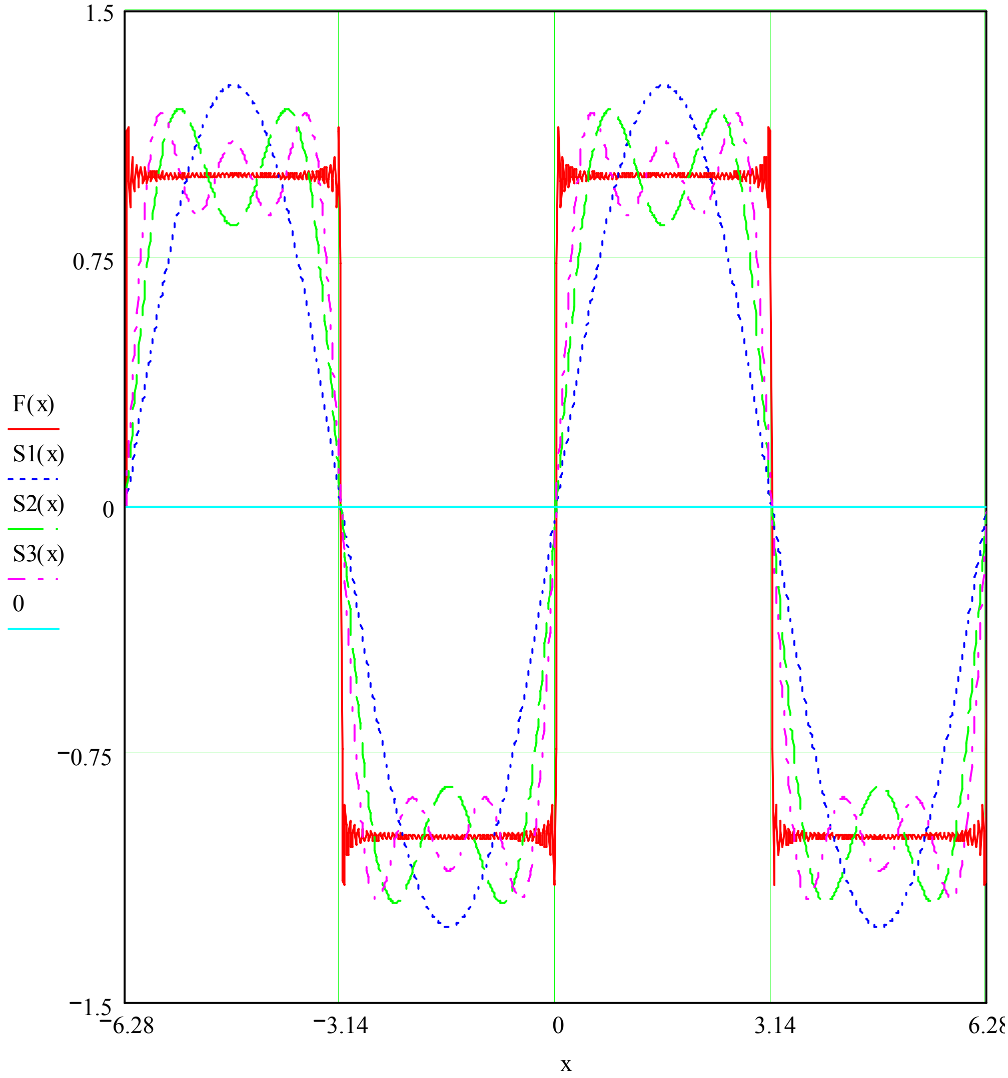
$$f(x) := \mathrm{if}(x < 0, -1, 0) + \mathrm{if}(x \ge 0, 1, 0)$$

$$L := \pi \qquad N := 10(\qquad n := 0..N$$

$$a_0 := \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad a_n := \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right)dx \qquad b_n := \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right)dx$$

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{N} b_n\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right)$$

$$S1(x) := \frac{4\cdot\sin(x)}{\pi} \qquad S2(x) := S1(x) + \frac{4\cdot\sin(3\cdot x)}{3\cdot\pi} \qquad S3(x) := S2(x) + \frac{4\cdot\sin(5\cdot x)}{\pi\cdot 5}$$



Разложение функций в ряд Фурье в интервале $[0, l]$	Функцию, заданную на интервале $[0, l]$ доопределяют на интервал $[-l, 0]$ чётным образом, если $f(0) \neq 0$ и нечётным образом, если $f(0) = 0$. Вне интервала $[-l, l]$ продолжают периодическим образом. Проверяют выполнение условий Дирихле для полученной функции, вычисляют коэффициенты Фурье по соответствующим формулам и записывают ряд Фурье.

Разложение функций в ряд Фурье непериодических функций	Функцию, заданную на интервале $[a, a+2l]$, вне интервала $[a, a+2l]$ продолжают периодическим образом. Проверяют выполнение условий Дирихле для полученной функции, вычисляют коэффициенты Фурье по соответствующим формулам и записывают ряд Фурье.

§ Ряд Фурье в комплексной форме

Определение ортогональной системы комплексных функций	Пусть дана система комплексных функций вещественных переменных: $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$ Эта система называется ортогональной на промежутке $[a, b]$, если при $i \neq j$: $\int_a^b \varphi_i(t)\overline{\varphi_j}(t)dt = 0$, при этом $\int_a^b \varphi_i(t)\overline{\varphi_i}(t)dt = \int_a^b \lvert\varphi_i(t)\rvert^2 dt \neq 0$.

Определение ряда Фурье в комплексной форме	Рядом Фурье в комплексной форме для функции $f(t)$, имеющей период $T = 2l$, по ортогональной системе функций $e^{i\frac{\pi n t}{l}}$ называется ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n t}{l}}$, где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам $c_n = \frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} f(t)e^{-i\frac{\pi n t}{l}}dt$.

Достаточные условия Дирихле сходимости ряда Фурье к порождающей его функции	Ряд Фурье в комплексной форме сходится к функции, порождающей этот ряд, если действительная и мнимая часть функции $f(t)$ удовлетворяют условиям Дирихле.

§ Связь ряда Фурье в комплексной форме с тригонометрическим рядом Фурье

Теорема о связи рядов Фурье	Если вещественная функция удовлетворяет условиям Дирихле, то между её тригонометрическим рядом Фурье и рядом Фурье в комплексной форме существует связь. Один ряд может быть получен из другого, если воспользоваться следующей зависимостью между коэффициентами: $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$; $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$; $c_0 = \frac{a_0}{2}$.