

Несобственные интегралы (н.и.)

		Несобственные интегралы (или)	
		I рода (по бесконечному промежутку)	II рода (от неограниченной на промежутке интегрирования функции)
Определение н.и.	1	$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$	$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$
	2	$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$
	3	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Определение сходимости н.и.	Несобственный интеграл сходится , если существуют конечные пределы в правых частях равенств, определяющих эти интегралы. Если эти пределы бесконечны или не существуют , то несобственный интеграл расходится . $\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} A - \text{конечное число} \Rightarrow \text{интеграл } \textit{сходится}; \\ \infty \\ -\infty \end{cases} - \text{интеграл } \textit{расходится}.$		
Признаки сходимости н.и.	1	$\varphi(x), f(x)$ непрерывны $\forall x \in [a, +\infty)$	$\varphi(x), f(x)$ непрерывны $\forall x \in [a, b)$ $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$
	$0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$		
	Сходимость $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$ Расходимость		Сходимость $\int_a^b \varphi(x)dx \quad \int_a^b f(x)dx$ Расходимость
	2	$\varphi(x) > 0, f(x) > 0, \forall x \in [a, +\infty)$	$\varphi(x), f(x)$ непрерывны $\forall x \in [a, b)$ $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$
	$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \neq 0$		$\exists \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \neq 0$
	Несобственные интегралы от функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ ведут себя одинаково: или оба сходятся, или оба расходятся		
3	$\int_a^{+\infty} f(x) dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ <i>сходится $\Rightarrow$ сходится абсолютно</i> <i>расходится $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{сходится условно;} \\ \text{расходится.} \end{cases}$</i>	$\int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ <i>сходится $\Rightarrow$ сходится абсолютно</i> <i>расходится $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{сходится условно;} \\ \text{расходится.} \end{cases}$</i>	
	$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \begin{cases} \frac{a^{-k+1}}{k-1} - \text{сходится, если } k > 1, \\ +\infty - \text{расходится, если } k \leq 1. \end{cases}$		$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сходится, если } k < 1, \\ \infty - \text{расходится, если } k \geq 1. \end{cases}$ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сходится, если } k < 1, \\ \infty - \text{расходится, если } k \geq 1. \end{cases}$
Эталонные н.и.			

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема. Если величина Q обладает на $[a, b]$

- свойством аддитивности, а именно, если $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$, то $Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \dots + \Delta Q_n$, где ΔQ_i – значение Q на $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- свойством линейности Q в малом: $\Delta Q \approx f(x) \Delta x$, где $f(x)$ – интегрируемая на $[a, b]$ функция, то величину Q можно найти интегралом от ее элемента $dQ = f(x)dx$ по промежутку $[a, b]$:

$$Q = \int_a^b f(x)dx$$

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
S , п л о щ а д ь п л о с к о й ф и г у р ы D	1		Д. С. К. $D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f_2(x) \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$ Одна кривая границы области D не выше другой.	$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$	S , п л о щ а д ь п л о с к о й ф и г у р ы D
	2		Д. С. К. $D = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ f_2(y) \leq x \leq f_1(y) \end{cases}$ Одна кривая границы области D не левее другой.	$S = \int_c^d (f_1(y) - f_2(y))dy$	
	3		Д. С. К. $\alpha \leq t \leq \beta$ $x(\alpha)=a, x(\beta)=b$ ($y(t) \geq 0, \forall t \in [\alpha, \beta]$) Верхняя граница области задана параметрически	$S = \int_a^b y(t)x'_t dt$	
	4		П. С. К. $D = \begin{cases} \alpha \leq \phi \leq \beta \\ \rho_2(\phi) \leq \rho \leq \rho_1(\phi) \end{cases}$	$S = \frac{1}{2} \int_a^b (\rho_1^2(\phi) - \rho_2^2(\phi))d\phi$	
l , д л и н а к р и в о й L	1		Д. С. К. $L = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y = f(x) \end{cases}$	$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$	l , д л и н а к р и в о й L
	2		Д. С. К. $L = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ x = f(y) \end{cases}$	$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy$	
	3		Д. С. К. $L = \begin{cases} \alpha \leq t \leq \beta \\ x = x(t), y = y(t) \\ x(\alpha) = a, x(\beta) = b \end{cases}$ Линия L задана параметрически	$l = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$	
	4		П. С. К. $L = \begin{cases} \alpha \leq \phi \leq \beta \\ \rho = \rho(\phi) \end{cases}$	$l = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\phi$	

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

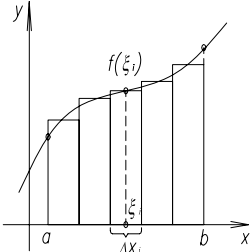
Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
V, о б ъ е м т е л а T	1		Д. С. К. $T_1 = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ S(x) \perp OX \end{cases}$ $T_2 = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ S(y) \perp OY \end{cases}$ $T_3 = \begin{cases} e \leq z \leq f \\ S(z) \perp OZ \end{cases}$	$V_1 = \int_a^b S(x) dx$ $V_2 = \int_c^d S(y) dy$ $V_3 = \int_e^f S(z) dz$	V, о б ъ е м т е л а T
	2		Д. С. К. $T = \begin{cases} a \leq x \leq b, y = f(x) \\ \pi y^2 = S(x) \perp OX \end{cases}$ Тело T образовано вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси OX	$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx$	T
σ, п л о щ а д ь п о в е р х н. ω	1		Д. С. К. $\omega_x = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y = f(x) \\ \Delta \sigma = 2\pi y(x) \Delta l \end{cases}$ Поверхность ω образована вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси OX	$\sigma_x = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$	σ, п л о щ а д ь п о в е р х н. ω
			Д. С. К. $\omega_x = \begin{cases} \alpha \leq t \leq \beta \\ y = y(t), x = x(t) \\ \Delta \sigma = 2\pi y(t) \Delta l \end{cases}$ Поверхность ω образована вращением кривой $y=f(x(t))$, заданной параметрически, вокруг оси OX	$\sigma_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$	
S, п у т ь	1		Д. С. К. $V = \begin{cases} t_1 \leq t \leq t_2 \\ V = V(t) \end{cases}$ V – скорость прямолинейного движения тела на промежутке времени $[t_1, t_2]$	$s = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt$	S, п у т ь
A, р а б о т а	1		Д. С. К. $F = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ F = F(x) \end{cases}$ Сила F направлена параллельно оси OX на промежутке $[a, b]$	$A = \int_a^b F(x) dx$	A, р а б о т а
P, д а в л	1		Д. С. К. $D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f_2(x) \leq y \leq f_1(x) \\ \Delta P = gx\mu(x)(f_1(x) - f_2(x)) \end{cases}$ μ – плотность жидкости, давящей на пластину D	$P = g \int_a^b x\mu(x)(f_1(x) - f_2(x)) dx$	P, д а в л.
m, м а с с а	1		Д. С. К. $L = \begin{cases} a \leq x \leq b, y = f(x) \\ \Delta m = \mu(x) \Delta l \end{cases}$ μ – линейная плотность кривой L	$m = \int_a^b \mu(x) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$	m, м а с с а

Статические моменты относительно координатных осей S_x, S_y , моменты инерции M_x, M_y , координаты центра тяжести x_c, y_c плоской кривой

$$y = f(x), a \leq x \leq b, dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2} d\varphi$$

$$S_x = \int_a^b \mu(x) y dl \quad S_y = \int_a^b \mu(x) x dl \quad M_x = \int_a^b \mu(x) y^2 dl \quad M_y = \int_a^b \mu(x) x^2 dl \quad x_c = \frac{S_y}{m} \quad y_c = \frac{S_x}{m}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

	Определенный интеграл
Ω	$M \in R_1$ $\Omega: \{\forall x \in [a, b]\}$ отрезок оси OX
$\Delta\Omega$ M_i	$\Delta\Omega = \Delta x$ $M_i = \xi_i \in \Delta x_i$
Определение, обозначение интеграла	$\int_a^b f(x) dx =$ $= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$
Геометрический смысл.	S – площадь криволинейной трапеции  The diagram shows a coordinate system with x and y axes. A curve y = f(x) is plotted between x = a and x = b. The area under the curve is approximated by several vertical rectangles. One rectangle is highlighted with its base on the x-axis from a to xi, and its height equal to f(xi). The width of this rectangle is labeled Delta x_i. $\int_a^b f(x) dx = S ;$ $f(x) = 1 \Rightarrow \int_a^b dx = b - a.$