

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения первого порядка

№	Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения	Метод решения уравнения	Результат применения метода
1	Уравнения с разделенными переменными	$M(x)dx + N(y)dy = 0$	Функция при dx зависит только от x , функция при dy зависит только от y .	Проинтегрировать каждое слагаемое в уравнении.	Общий интеграл $\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$
2	Уравнения с разделяющимися переменными	$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ или $y' = f_1(x)f_2(y); \quad (y' = \frac{dy}{dx})$.	Функции при дифференциалах распадаются на произведения функций, зависящих только от одной из переменных.	Разделить уравнение на произведение $N_1(y)M_2(x) \neq 0$.	Уравнение с разделенными переменными и общий интеграл: $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c$
3	Однородные уравнения	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ или $y' = f(\frac{y}{x})$.	Уравнение не изменяет своего вида при замене x и y на λx и λy .	Сделать замену переменной $y = tx$, $y' = t'x + t$, $dy = tdx + xdt$.	Уравнение с разделяющимися переменными $t'x = f(t) - t$.
4	Уравнения, приводящиеся к однородным	$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2};$	Производная равна отношению линейных комбинаций переменных $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.	$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$	Однородное уравнение $\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v};$
5	Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2};$	Производная равна отношению линейных комбинаций переменных $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.	$z = a_1x + b_1y$ $z' = a_1 + b_1y'$	Уравнение с разделяющимися переменными $\frac{z' - a_1}{b_1} = \frac{z + c_1}{kz + c_2}; k = \frac{a_2}{a_1}$
6	Уравнения Лагранжа	$y = x\varphi(y') + \psi(y')$	φ, ψ - известные функции от y'	$p = y'$; линейное уравнение относительно x	$(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p)$
7	Уравнения Клеро	$y = xy' + \psi(y')$	ψ - известная функция от y'	$y = cx + \psi(c)$	Общее решение

Дифференциальные уравнения первого порядка

№	Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения	Метод решения уравнения	Результат применения метода
8	Линейные уравнения	$y' + p(x)y = q(x)$ $x' + p(y)x = q(y)$	Искомая функция и её производная входят в уравнение в первой степени и между собой не перемножаются.	1. Метод Бернулли $y = uv$; $y' = u'v + uv'$ 2. Метод вариации произвольной постоянной $a) q(x) = 0, \quad y = y_0(c, x);$ $b) y = y_0(c(x), x), \quad q(x) \neq 0$	1. $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$ Система двух ДУ с разделяющимися переменными 2. ДУ с разделяющимися переменными
9	Уравнения Бернулли	$y' + p(x)y = q(x)y^m$ или $x' + p(y)x = q(y)x^m$	Левая часть уравнения – такая же, как у линейного уравнения, а правая отличается на сомножитель: искомую функцию в степени m .	1. Метод Бернулли $y = uv$; $y' = u'v + uv'$ 2. $z = y^{1-m},$ $z' = (1-m)y^{-m}y'$	1. Система двух ДУ с разделяющимися переменными $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x)u^m v^m. \end{cases}$ 2. Линейное уравнение $z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x)$
10	Уравнения в полных дифференциалах	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$	Условие полного дифференциала $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$	1. $\begin{cases} u = \int M(x, y)dx + \varphi(y) = c, \\ (\int M(x, y)dx)'_y + \varphi'(y) = N(x, y) \end{cases}$ 2. $u = \int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy = c$ $x = const \neq x_0$ или $u = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy = c$ $y = const \neq y_0$	Общий интеграл.
11	Приводящиеся к уравнению в полных диф.	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$	$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$	$F(x) = \frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x});$ $W(y) = \frac{1}{M}(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})$	$\mu(x) = e^{\int F(x)dx}; \mu(y) = e^{\int W(y)dy}$ $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифф-лах

Дифференциальные уравнения высших порядков

№	Тип уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения	Метод решения уравнения
1	Допускает понижение порядка	$y^{(n)} = f(x)$	Ур-ние записано явно относительно старшей производной; в правой части ур-ния ф-ция зависит только от x .	Последовательное понижение порядка производной n -кратным интегрированием $y = \underbrace{\int \dots \int}_n f(x) \underbrace{dx dx \dots dx}_n + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_n$
2	Допускает понижение порядка	$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	Уравнение не содержит явно искомой функции y и её первых производных до порядка $k-1$ включительно	Понижение порядка уравнения на k единиц заменой переменной $y^{(k)} = p(x), \quad y^{(k+1)} = p'(x), \dots, y^{(n)} = p^{(n-k)}(x).$
3	Допускает понижение порядка	$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$	Уравнение не содержит явно независимой переменной x	Понижение порядка уравнения на единицу заменой переменной $y' = p(y), y'' = p \frac{dp}{dy}, y''' = p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}$ и так далее.
4	Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (ЛОДУ)	$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$	Искомая функция и все её производные входят в уравнение в первой степени и между собой не перемножаются; правая часть уравнения равна нулю.	Нахождение корней характеристического уравнения $k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0.$ Каждому действительному корню k кратности r характеристического уравнения соответствует r линейно независимых частных решений ЛОДУ: $y_1 = e^{kx}, y_2 = x e^{kx}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{kx}$ Каждой паре комплексных корней $k = \alpha \pm i\beta$ кратности s хар-кого ур-ния соответствует $2s$ линейно нез-мых Ч.Р. ЛОДУ: $e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$ $e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x,$ Если $s = 1$, то $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ ОР ЛОДУ $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$

Дифференциальные уравнения высших порядков

№	Тип ур-я	Вид уравнения	Признак ур-ия	Метод решения уравнения
5	Линейные неоднородные с постоянными коэффициентами (ЛНДУ).	$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$	Искомая функция и все её производные входят в уравнение в первой степени и между собой не перемножаются; функция в правой части уравнения зависит только от x .	Метод вариации произвольных постоянных. Интегрируются решения алгебраической системы линейных уравнений (АСЛУ) с неизвестными функциями $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x)$ и фундаментальной системой частных решений ЛОДУ $y_1, y_2, \dots, y_n, (f(x)=0)$. Решения АСЛУ можно найти методом Крамера: $\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' = 0, \\ \dots = 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \Rightarrow c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & \dots & y_n \\ 0 & y_2' & \dots & y_n' \\ 0 & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ f(x) & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}};$ $c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 & \dots & y_n \\ y_1' & 0 & \dots & y_n' \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & f(x) & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}; \dots, c_n' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & 0 \\ y_1' & y_2' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}.$ Общее решение ЛНДУ: $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \dots + c_n(x)y_n$.
5'	ЛНДУ	$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$ $f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x)$	Правая часть специального вида	Метод неопределенных коэффициентов. Общее решение ЛНДУ получают как сумму общего решения y_0 соответствующего ЛОДУ и частного решения y_n ЛНДУ: $y = y_0 + y_n = y_0 + x^s e^{\alpha x} (U_w(x) \cos \beta x + V_w(x) \sin \beta x)$: $w = \max(m, l)$; s – кратность корня $\alpha \pm \beta i$ характерного уравнения

Системы дифференциальных уравнений

№	Тип с-мы ур-й	Вид НСДУ	Признак НСДУ	Метод решения НСДУ
1	Нормальная система дифференциальных уравнений (НСДУ)	$y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n);$ $y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n);$ $y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$	Уравнения записаны явно относительно первой производной; функции в правой части уравнений зависят только от аргумента x и искомым функций $y_1, y_2, \dots, y_n.$	Метод исключения неизвестных. Дифференцированием уравнений и выражением одних функций через другие НСДУ сводят к одному или нескольким дифференциальным уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом. Метод выделения интегрируемых комбинаций. Получают из системы такие уравнения, которые можно проинтегрировать и найти первый интеграл системы. Если найдены n независимых первых интегралов НСДУ, то их совокупность дает общий интеграл этой системы. Для выделения интегрируемых комбинаций из НСДУ её записывают в так называемой симметрической форме: $\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1}$ и используют следующее свойство равных дробей: если $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \dots = \frac{u_n}{v_n} = \gamma,$ то при любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ имеет место соотношение $\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n} = \gamma (*).$ Значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ подбираются таким образом, чтобы числитель в (*) был полным дифференциалом знаменателя или же числитель и знаменатель были равны нулю.

Системы дифференциальных уравнений

№	Тип системы	Вид системы	Признак системы	Метод решения системы
2	Нормальная линейная однородная система n -го порядка (НЛОС).	$y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n,$ $y_2'(x) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n,$ $\dots\dots\dots$ $y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n.$ Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций зависят от аргумента x.	Ур-я записаны явно относительно первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.	Метод исключения неизвестных (см. НСДУ). Фундаментальной системой решений НЛОС называется совокупность произвольных n линейно независимых решений $Y_k(x) = (y_1^{(k)}(x), y_2^{(k)}(x), \dots, y_n^{(k)}(x)), \quad k = 1, 2, \dots, n.$ Если $Y_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n,$ – фундаментальная система решений ЛОС, то общее решение имеет вид $Y(x) = \sum_{k=1}^n C_k Y_k(x), \quad \text{где } C_1, C_2, \dots, C_n \text{ - произвольные постоянные.}$
3а	Нормальная линейная однородная система n -го порядка с постоянными коэффициентами	$y_1'(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n,$ $y_2'(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n,$ $\dots\dots\dots$ $y_n'(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n.$ Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций постоянны. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{ матрица из коэффициентов при искомых функциях.}$	Уравнения записаны явно относительно первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.	Матричный метод. Из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ находят различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ и для каждого корня λ (с учетом его кратности) определяют соответствующее ему частное решение $Y^{(\lambda)}(x)$. Общее решение имеет вид $Y(x) = \sum_{k=1}^n C_k Y^{(\lambda_k)}(x)$. При этом, если а) λ – действительный корень кратности 1 (один), то $Y^{(\lambda)}(x) = Y^{(\lambda)} e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(\lambda)} \\ \xi_2^{(\lambda)} \\ \dots \\ \xi_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda x}, \quad \text{где } Y^{(\lambda)} - \text{собственный вектор матрицы } A, \text{ соответствующий собственному значению } \lambda, \text{ то есть } AY^{(\lambda)} = \lambda Y^{(\lambda)}, Y^{(\lambda)} \neq 0$

Системы дифференциальных уравнений

36	Нормальная линейная однородная система n -го порядка с постоянными коэффициентами	$y_1'(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n,$ $y_2'(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n,$ $\dots$ $y_n'(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n.$ Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций постоянны. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица}$ из коэффициентов при искомых функциях.	Ур-я записаны явно от-но первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.	Матричный метод. Из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ находят различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ и для каждого корня λ (с учетом его кратности) определяют соответствующее ему частное решение $Y^{(\lambda)}(x)$. Общее решение имеет вид $Y(x) = \sum_{k=1}^n C_k Y^{(\lambda_k)}(x).$ Если б) λ – комплексный корень кратности 1 (один), тогда корнем характеристического уравнения является также сопряженное с λ число $\bar{\lambda}$. Вместо комплексных частных решений $Y^{(\lambda)}(x)$ и $Y^{(\bar{\lambda})}(x)$ следует взять действительные частные решения $Y_1^{(\lambda)}(x) = \operatorname{Re} Y^{(\lambda)}(x)$ и $Y^{(\lambda)}(x) = \operatorname{Im} Y^{(\lambda)}(x)$.
3в	Нормальная линейная однородная система n -го порядка с постоянными коэффициентами	$y_1'(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n,$ $y_2'(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n,$ $\dots$ $y_n'(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n.$ Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций постоянны. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица}$ из коэффициентов при искомых функциях.	Уравнения записаны явно относительно первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.	Матричный метод. Если в) λ – корень кратности $r \geq 2$, то соответствующее этому корню решение системы ищут в виде вектора $Y^{(\lambda)}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}x + \dots + \alpha_1^{(r)}x^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}x + \dots + \alpha_2^{(r)}x^{r-1} \\ \dots \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}x + \dots + \alpha_n^{(r)}x^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda x} \quad (**),$ коэффициенты которого $\alpha_i^{(j)}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r$ определяются из системы линейных уравнений, получающихся приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях x в результате подстановки вектора (**) в исходную систему.