

Глава 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ Основные понятия и определения

Определение дифференциального уравнения	Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = f(x)$ и производные искомой функции $y', y'', \dots, y^{(n)}$: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.
Определение обыкновенного дифференциального уравнения	Если искомая функция $y = f(x)$ является функцией одного аргумента x , то дифференциальное уравнение называется обыкновенным .
Определение порядка дифференциального уравнения	Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.
Определение решения дифференциального уравнения	Решением или интегралом дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, подстановка которой в дифференциальное уравнение обращает дифференциальное уравнение в тождество. График функции, являющейся решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой .
Определение общего решения дифференциального уравнения	Общим решением дифференциального уравнения $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ называется такое его решение $y = y(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$, которое содержит столько линейно независимых произвольных постоянных $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, каков порядок этого уравнения. Если общее решение записано в неявном виде $\Phi(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$, то оно называется общим интегралом .
Определение частного решения дифференциального уравнения	Всякое решение дифференциального уравнения, которое получается из общего решения, если присвоить определённые числовые значения произвольным постоянным, в него входящим, называется частным решением этого дифференциального уравнения.
Правило проверки	Если в результате решения дифференциального уравнения найдена некоторая функция, то <i>подставив</i> эту функцию в данное дифференциальное уравнение, можно проверить правильность решения: если получится тождество , то дифференциальное уравнение решено правильно .
Определение понятия задачи Коши	Задачей Коши называют задачу нахождения частного решения дифференциального уравнения $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего n заданным начальным условиям: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

§ Дифференциальные уравнения первого порядка

Теорема существования и единственности решения задачи Коши	Если правая часть $f(x, y)$ уравнения $y' = f(x, y)$ и её частная производная по y , то есть $f'_y(x, y)$, определены и непрерывны в некоторой области D изменения переменных x и y , то какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) этой области, данное уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$, принимающее при $x = x_0$ заданное значение $y = y_0$.
---	--

§ Дифференциальные уравнения первого порядка с разделёнными переменными

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения с разделёнными переменными	$M(x)dx + N(y)dy = 0$	Функция при dx зависит только от x , функция при dy зависит только от y .

Метод решения уравнения	Результат применения метода
Проинтегрировать каждое слагаемое в уравнении.	Общий интеграл $\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$

§ Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения с разделяющимися переменными	$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ или $y' = f_1(x)f_2(y); \quad (y' = \frac{dy}{dx})$.	Функции при дифференциалах распадаются на произведения функций, зависящих только от одной из переменных.

Метод решения уравнения	Результат применения метода
Разделить уравнение на произведение $N_1(y)M_2(x) \neq 0$.	Уравнение с разделёнными переменными и общий интеграл: $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c$

§ Понятие об особых решениях

Определение особого решения	Решение, график которого таков, что через каждую его точку проходит по крайней мере ещё одна <i>касающаяся</i> его интегральная кривая, называется особым решением дифференциального уравнения.
------------------------------------	--

Определение огибающей семейства кривых	Огибающей семейства кривых называется такая кривая, которая касается каждой кривой семейства и притом вся состоит из этих точек касания.
---	---

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения Клеро	$y = xy' + \psi(y')$	$\psi(y')$ - известная функция от y' .

Метод решения уравнения	Результат применения метода
$y = cx + \psi(c)$	Общее решение

§ Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение однородной функции двух переменных степени однородности m.	Функция двух переменных $f(x, y)$ называется однородной функцией степени однородности m , где m – целое число, если при любом k выполняется равенство: $f(kx, ky) = k^m f(x, y)$
--	--

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Однородные уравнения	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ или $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Уравнение не изменяет своего вида при замене x и y на λx и λy .

Метод решения уравнения	Результат применения метода
Сделать замену переменной $y = tx$, $y' = t'x + t$, $dy = tdx + xdt$	Уравнение с разделяющимися переменными $t'x = f(t) - t$

§ Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к однородным

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения, приводящиеся к однородным	$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2};$	Производная равна отношению линейных комбинаций переменных $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2};$	Производная равна отношению линейных комбинаций переменных $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$
---	---	--

Метод решения уравнения	Результат применения метода
$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$	Однородное уравнение $\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v};$
$z = a_1x + b_1y$ $z' = a_1 + b_1y'$	Уравнение с разделяющимися переменными $\frac{z' - a_1}{b_1} = \frac{z + c_1}{kz + c_2}; k = \frac{a_2}{a_1}$

§ Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Линейные уравнения	$y' + p(x)y = q(x)$ $x' + p(y)x = q(y)$	Искомая функция и её производная входят в уравнение в первой степени и между собой не перемножаются.

Метод решения уравнения	Результат применения метода
1. Метод Бернулли $y = uv$; $y' = u'v + uv'$ 2. Метод вариации произвольной постоянной $a) q(x) = 0, \quad y = y_0(c, x);$ $b) y = y_0(c(x), x), \quad q(x) \neq 0$	$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$ 1. Система двух ДУ с разделяющимися переменными 2. ДУ с разделяющимися переменными

§ Дифференциальные уравнения Бернулли

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения Бернулли	$y' + p(x)y = q(x)y^m$ или $x' + p(y)x = q(y)x^m.$	Левая часть уравнения – такая же, как у линейного уравнения, а правая отличается на сомножитель: искомую функцию в степени m .

Метод решения уравнения	Результат применения метода
1. Метод Бернулли $y = uv$; $y' = u'v + uv'$ 2. $z = y^{1-m}$, $z' = (1-m)y^{-m}y'$	1. Система двух ДУ с разделяющимися переменными $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x)u^m v^m. \end{cases}$ 2. Линейное уравнение $z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x)$

§ Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах

Теорема о полном дифференциале функции двух аргументов	Для того, чтобы дифференциальное выражение $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ в некоторой области D, необходимо и достаточно, чтобы для <i>непрерывных частных производных</i> этой функции в области D выполнялось равенство: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
---	--

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения в полных дифференциалах	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	Условие полного дифференциала $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Метод решения уравнения	Результат применения метода
1. $\begin{cases} u = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = c, \\ (\int M(x,y)dx)'_y + \varphi'(y) = N(x,y) \end{cases}$	Общий интеграл.
2. $u = \int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy = c$ $x=const \neq x_0$ или $u = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy = c$ $y=const \neq y_0$	