МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Л.И. Самочернова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть II

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

2-е издание, исправленное

Издательство
Томского политехнического университета
2005

УДК 514.12
С17

Самочернова Л.И.
С17 Высшая математика. Часть II: учебное пособие / Л.И. Самочернова; Томский политехнический университет. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2005. – 164 с.

Учебное пособие включает три раздела высшей математики: 1) введение в математический анализ (предел последовательности и функции, бесконечно малые и бесконечно большие величины, сравнение бесконечно малых, непрерывность функции, точки разрыва); 2) дифференциальное исчисление функции одной переменной (производная и дифференциал функции, применения дифференциального исчисления к исследованию функций); 3) интегральное исчисление (неопределенный интеграл, определенный интеграл, геометрические приложения определенного интеграла).

Пособие подготовлено на кафедре прикладной математики и предназначено для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 080400 «Управление персоналом», 080200 «Менеджмент», 080100 «Экономика», 100700 «Торговое дело».

УДК 514.12

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры ТГУ
С.Я. Гриншпон

Кандидат технических наук,
доцент факультета систем управления ТУСУРа
А.И. Кочегуров

1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Числовая последовательность и её предел

Определение 1. Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определенное число x_n, то говорят, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1.1)$$

Другими словами, числовая последовательность – это функция натурального аргумента: $x_n = f(n)$.

Числа, составляющие последовательность, называются её **членами**, а x_n – **общим** или ***n*-м членом** последовательности.

Пример числовой последовательности: 2, 4, 6, 8, ..., $2n$, ...

Для этой последовательности $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6, \ldots,\ x_n = 2n$ – общий член последовательности чётных чисел.

Пример 1. Зная общий член последовательности $x_n = \dfrac{n}{n+2}$, написать её первые пять членов.

Решение. Давая n значения 1, 2, 3, 4, 5, получим

$$x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{2}{4};\ x_3 = \frac{3}{5};\ x_4 = \frac{4}{6};\ x_5 = \frac{5}{7}.$$

Вообще же последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{n}{n+2}$ запишется так:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots, \frac{n}{n+2}, \ldots$$

Отметим, что поскольку $x_n = f(n)$ есть функция, то есть, вообще говоря, переменная величина, то для удобства будем в дальнейшем часто называть функцию x_n переменной величиной, или просто **переменной** x_n.

Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если существует такое вещественное число M (число m), что каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $x_n \le M\ (x_n \ge m)$.

При этом число M (число m) называется верхней гранью (нижней гранью) последовательности $\{x_n\}$, а неравенство $x_n \le M\ (x_n \ge m)$ называется **условием ограниченности** последовательности сверху (снизу).

Определение 3. Последовательность называется ограниченной с обеих сторон, или просто **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, то есть, если существуют числа m и M такие, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенствам: $m \le x_n \le M$.

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена и M и m – её верхняя и нижняя грани, то все элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|x_n| \le A, \tag{1.2}$$

где A – максимальное из двух чисел $|M|$ и $|m|$. Обратно, если все элементы последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенству (1.2), то выполняются также неравенства $-A \le x_n \le A$ и, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Таким образом, неравенство (1.2) представляет собой другую форму условия ограниченности последовательности. Уточним понятие неограниченной последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **неограниченной**, если для любого положительного числа A найдется элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$.

Примеры: 1. Последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+1} \sin 3n$ ограничена, т. к. при всех n выполняется неравенство

$$|x_n| = \left|(-1)^n\right| \cdot \frac{2n}{n+1} \cdot |\sin 3n| \le \frac{2n}{n+1} < 2 \quad (A = 2).$$

2. Последовательность 1, 2, 3, 4, ..., n, ..., общий член которой $x_n = n$, очевидно, неограниченная. В самом деле, каково бы ни было положительное число A, среди элементов этой последовательности найдутся элементы, превосходящие A.

Монотонные последовательности

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ называется **неубывающей** (**невозрастающей**), если каждый последующий член этой последовательности не меньше (не больше) предыдущего, то есть для всех номеров n справедливо неравенство $x_n \le x_{n+1} \quad (x_n \ge x_{n+1})$.

Неубывающие и невозрастающие последовательности объединяются общим наименованием **монотонные последовательности**. Если элементы монотонной последовательности $\{x_n\}$ для всех номеров n удовлетворяют неравенству $x_n < x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1})$, то последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей** (**убывающей**). Возрастающие и убывающие последовательности называются также **строго монотонными**.

Пример 2. Последовательность нечётных чисел 1, 3, 5, 7, ..., $2n$–1, ..., где $x_n = 2n - 1$, – монотонно возрастающая.

Действительно, $x_{n+1} - x_n = [2(n+1)-1] - (2n-1) = 2$, так что $x_{n+1} - x_n > 0$, т. е. $x_{n+1} > x_n$ при всех n.

Предел последовательности

Определим одно из важнейших понятий математического анализа – предел последовательности, или, что то же самое, предел переменной величины x_n, пробегающей последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Определение 5. Постоянное число a называется **пределом последовательности** $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ или **пределом переменной** x_n, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Тот факт, что последовательность (1.1) имеет своим пределом число a, обозначается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\to} a;$$

(lim есть сокращённое обозначение латинского слова limes, означающего «предел»).

Последовательность, имеющую пределом число a, иначе называют последовательностью, **сходящейся** к a. Последовательность, не имеющая предела, называется **расходящейся**.

Замечание. Величина N зависит от ε, которое мы выбираем произвольным образом **(**N=N(ε)**)**. Чем меньше ε, тем N, вообще говоря, будет больше. Исключением является случай, когда последовательность состоит из одинаковых членов.

Пример 3. Доказать, что последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ с общим членом $x_n = \frac{n}{n+1}$ имеет предел, равный 1.

Решение. Выберем произвольно положительное число ε и покажем, что для него можно найти такое натуральное число N, что для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство (1.3), в котором надо взять a =1; $x_n = \frac{n}{n+1}$, то есть неравенство

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

После приведения к общему знаменателю в левой части неравенства (1.4) получим

$$\left|\frac{n+1-n}{n+1}\right|<\varepsilon \quad \text{или} \quad \left|\frac{1}{n+1}\right|<\varepsilon.$$

Но если $|1/(n+1)|<\varepsilon$, то и $1/(n+1)<\varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что $n+1>1/\varepsilon$, $n>1/\varepsilon-1$. Следовательно, за N можно взять наибольшее целое число, содержащееся в $(1/\varepsilon - 1)$, то есть $E(1/\varepsilon - 1)$. Тогда неравенство (1.4) будет выполняться при всех $n > N$**.** Если окажется, что $E(1/\varepsilon - 1) \le 0$, то N можно взять равным 1. Поскольку ε брали произвольно, то этим и доказано, что 1 есть предел последовательности с общим членом $x_n = n/(n+1)$. В частности, если ε = 0,01, то $N = E(1/0{,}01-1)=E(100 - 1)=99$; если ε=1/2, то $N=E(1/0{,}5-1)=1$ и т. д. Выбранные таким образом N для различных значений ε будут наименьшими из возможных.

Геометрическая интерпретация предела числовой последовательности

Числовую последовательность (1.1) можно рассматривать как последовательность точек прямой. Точно так же и о пределе можно говорить как о точке на прямой. Так как неравенство $|x_n - a|<\varepsilon$ равносильно неравенству $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, которое, в свою очередь, равносильно такому $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то определение предела числовой последовательности можно сформулировать и так.

Определение 6. Точка a называется пределом последовательности точек (1.1), если, какую бы окрестность $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ точки a мы ни задали, найдётся такое число N, что все точки последовательности (1.1) с номерами $n > N$ попадут в заданную окрестность.

Изобразим числа a, $a - \varepsilon$, $a+\varepsilon$ и значения переменной x_n точками на числовой оси (рис. 1). Выполнение неравенства (1.3) при условии $n > N$ геометрически означает, что все точки x_n, начиная с точки x_{N+1}, то есть с точки, индекс которой превосходит некоторое натуральное число N, будут непременно лежать в ε-окрестности точки a. Вне этой окрестности, если и будут находиться точки x_n, то их окажется лишь конечное число.

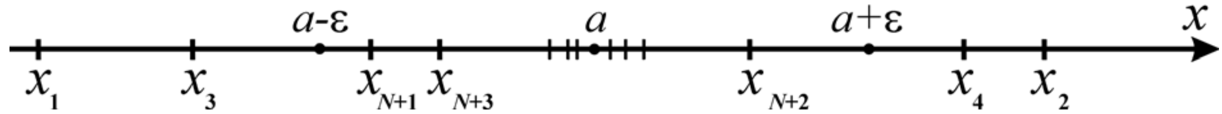


Рис. 1

Признак сходимости монотонной последовательности

Теорема 1. Всякая невозрастающая (неубывающая) ограниченная снизу (сверху) последовательность $\{x_n\}$ или переменная величина x_n имеет предел.

1.2. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение 1. Переменная величина x_n называется **бесконечно малой**, если она имеет предел, равный нулю.

Следуя определению предела, можно сказать, что x_n будет бесконечно малой, если для любого сколь угодно малого ε > 0 найдется такое *N*, что для всех *n* > *N* выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$. Иначе говоря, бесконечно малой называется такая переменная величина x_n, которая при своём изменении, начиная с некоторого номера *n*, становится и остаётся по абсолютной величине меньше любого наперёд заданного числа ε > 0.

Примерами бесконечно малой могут служить переменные $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x_n = -\dfrac{1}{n}$, $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $x_n = q^n$ при $|q| < 1$ и другие.

Пример 1. Доказать, что $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ есть бесконечно малая.

Решение.

Возьмем произвольное ε > 0. Из неравенства $|x_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ получаем $n > 1/\varepsilon$. Если взять $N = E(1/\varepsilon)$, то для $n > N$ будет $|x_n| < \varepsilon$. При $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ получим $N = \mathrm{E}(10) = 10$, при $\varepsilon = 4/15$ получим $N = E(15/4) = 3$ и т. д. А это и значит, что $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ есть бесконечно малая.

Замечание 1. Нельзя смешивать постоянное очень малое число с бесконечно малой величиной. Единственным числом, которое рассматривается в качестве бесконечно малой величины, служит нуль (в силу того, что предел постоянной равен ей самой).

Определение 2. Переменная величина x_n называется **бесконечно большой** величиной, если для любого наперед заданного сколь угодно большого числа *M* > 0 можно указать такое натуральное число *N*, что для всех номеров *n* > *N* выполняется неравенство $|x_n| > M$. Иначе говоря, переменная величина x_n называется бесконечно большой, если, начиная с некоторого номера, она становится и остаётся при всех последующих номерах по абсолютной величине больше любого наперед заданного положительного числа *M*.

О бесконечно большой переменной x_n говорят, что она стремится к бесконечности или имеет **бесконечный предел**, и пишут:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty .$$

В связи с введением нового понятия – «бесконечный предел» – условимся предел в ранее определенном смысле называть **конечным пределом**.

Пример 2. Величина $x_n = (-1)^n \cdot n$, принимающая последовательно значения -1, 2, -3, 4, -5, ..., $(-1)^n n, \ldots$ – бесконечно большая.

Действительно, $|x_n| = \left|(-1)^n n\right| = n$. Отсюда ясно, что, каково бы ни было число M, для всех n, начиная с некоторого, будет $|x_n| = n > M$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Определение 3. Переменная величина x_n называется **положительной бесконечно большой** величиной, если для любого числа M можно указать такое натуральное число N, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $x_n > M$.

В этом случае говорят, что переменная величина x_n стремится к плюс бесконечности и символически записывают это так:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Определение 4. Переменная величина x_n называется **отрицательной бесконечно большой** величиной, если для любого числа M можно указать такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $x_n < M$.

В этом случае говорят, что переменная величина x_n стремится к минус бесконечности и записывают это так:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Так, например, $x_n = n$ будет положительной, а $x_n = -n$ – отрицательной бесконечно большой величиной.

Переводя предыдущие определения на геометрический язык, мы можем сказать: если x_n – бесконечно большая величина, то, как бы ни был велик сегмент длины $2M$ ($M > 0$) с центром в начале координат, точка x_n, изображающая значения бесконечно большой величины, при достаточно большом номере n окажется вне указанного сегмента и при дальнейшем увеличении n будет оставаться вне его (рис. 2). При этом, если x_n – положительная (отрицательная) бесконечно большая величина, то точка, изображающая её значения, окажется для достаточно больших номеров n вне указанного сегмента с правой (левой) стороны от начала координат.

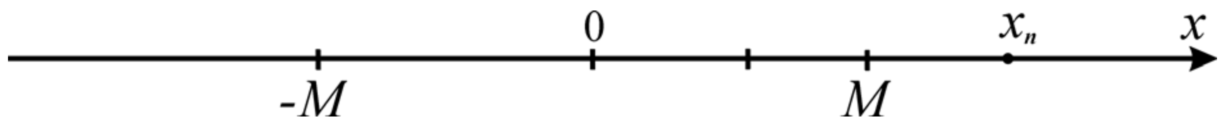


Рис. 2

Замечание 2.

1. Символы $\infty, +\infty, -\infty$ не являются числами, а вводятся только для упрощения записи и для сокращенного словесного выражения того факта, что переменная величина является бесконечно большой, положительной бесконечно большой и отрицательной бесконечно большой. Следует твердо запомнить, что никаких арифметических действий над этими символами производить нельзя!

2. Нельзя смешивать постоянное очень большое число с бесконечно большой величиной.

Связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами

Теорема 1. Пусть $x_n \neq 0$ (при любом n). Если x_n – бесконечно большая, то $y_n = 1/x_n$ – бесконечно малая; если x_n – бесконечно малая, то $y_n = 1/x_n$ – бесконечно большая.

1.3. Арифметические действия над переменными величинами. Основные теоремы о пределах переменных (последовательностей)

Введём понятие об арифметических операциях над переменными величинами. Пусть имеем две переменные величины x_n и y_n, принимающие соответственно значения:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots.$$

Под суммой двух данных переменных x_n и y_n понимают переменную, каждое значение которой равно сумме соответствующих (с одними и теми же номерами) значений переменных x_n и y_n, то есть переменную, принимающую последовательность значений

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots$$

Мы будем обозначать эту переменную через $x_n + y_n$.

Аналогично определяется сумма любого числа переменных, их произведение, а также разность двух переменных и их частное.

Таким образом, возникают новые переменные:

$$x_n + y_n,\ \ x_n - y_n,\ \ x_n \cdot y_n \quad \text{и} \quad x_n \,/\, y_n.$$

(В последнем случае предполагается, что, хотя бы с некоторого номера $y_n \neq 0$, и частное $x_n \,/\, y_n$ рассматривается только для таких номеров).

Аналогичным образом эти определения формулируются в терминах последовательностей.

Теоремы о пределах переменных

Теорема 1. Переменная x_n может иметь только один предел.

Между переменными величинами, имеющими предел, и бесконечно малыми величинами существует связь.

Теорема 2. Переменную величину, имеющую предел, можно представить в виде суммы своего предела и некоторой бесконечно малой величины.

Теорема 3 (обратная к теореме 2). Если переменную величину x_n можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{1.5}$$

где a есть некоторое число, а α_n – бесконечно малая, то a есть предел переменной величины x_n.

Теорема 4. Если переменная x_n имеет конечный предел, то она ограничена.

Следствие. Бесконечно малая переменная ограничена.

Лемма 1. Алгебраическая сумма любого (но ограниченного) числа бесконечно малых величин есть также величина бесконечно малая.

Лемма 2. Произведение ограниченной переменной величины x_n на бесконечно малую α_n есть величина бесконечно малая.

Следствие 1. Произведение любого конечного числа бесконечно малых величин представляет собой бесконечно малую величину.

Следствие 2. Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

Следствие 3. Произведение переменной величины, стремящейся к пределу, на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

Пользуясь леммами 1 и 2 можно доказать следующие теоремы о пределах.

Теорема 5. Если переменные x_n и y_n имеют конечные пределы, то их сумма, разность, произведение также имеют конечные пределы, причем:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Замечание 1. Эта теорема верна для любого фиксированного числа слагаемых и сомножителей.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(cx_n\right) = c \lim_{n\to\infty} x_n,$$

где c – какая-либо постоянная.

Теорема 6. Если переменные x_n и y_n имеют конечные пределы и $y_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то и частное этих переменных также имеет предел, причем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Теорема 7. Если переменная x_n имеет конечный предел, то для любого действительного числа α имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{\alpha}\right)=\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{\alpha}$$

в предположении, что степени x_n^{α} и $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\alpha}$ имеют смысл.

Замечание 2. Во всех теоремах п. 1.3 условие существования конечных пределов у переменных x_n и y_n является существенным. Без этого условия теоремы неверны.

Леммы и теоремы, установленные в этом пункте, имеют очень большое не только теоретическое, но и практическое значение. Если до сих пор мы могли лишь проверять, пользуясь определением предела, будет ли то или иное заранее угаданное число пределом данной переменной величины, то теперь открывается возможность и для вычисления предела переменной.

Пример 1. Переменная величина x_n имеет предел -1. Найти предел переменной $y_n=\dfrac{4-3x_n-x_n^2}{1-x_n}$.

Решение. Пользуясь теоремой 5 и следствием теоремы 5, находим

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2=(-1)^2=1;\quad \lim_{n\to\infty}(3x_n)=3\lim_{n\to\infty} x_n=3(-1)=-3;$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(4-3x_n-x_n^2\right)=\lim_{n\to\infty}4-\lim_{n\to\infty}(3x_n)-\lim_{n\to\infty}x_n^2=4-(-3)-1=6;$$
$$\lim_{n\to\infty}(1-x_n)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}x_n=1-(-1)=2\neq 0.$$

Применяя далее теорему 6, получим

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4-3x_n-x_n^2}{1-x_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-3x_n-x_n^2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-x_n)}=\frac{6}{2}=3.$$

1.4. Особые случаи пределов и неопределенности

В теоремах предыдущего пункта указаны способы нахождения пределов суммы, разности, произведения и частного двух переменных x_n и y_n, имеющих соответственно конечные пределы a и b. Остановимся теперь на рассмотрении отдельных возможных случаев вычисления пределов, которые не охватываются указанными выше способами.

1. Рассмотрим сначала частное $\dfrac{x_n}{y_n}$ $(y_n \neq 0)$.

1) Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, а y_n – бесконечно большая. Тогда частное x_n / y_n будет бесконечно малая, так как его можно представить в виде $(1/y_n)\cdot x_n$, где $1/y_n$ – бесконечно малая, а x_n – ограниченная величина. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

2) Пусть $x_n \to a \neq 0$, а y_n – бесконечно малая, не принимающая нулевых значений. Тогда x_n / y_n будет бесконечно большой, так как обратная величина $y_n / x_n = (1/x_n)\cdot y_n$ есть бесконечно малая $\left(1/x_n \to 1/a\right)$.

3) Пусть x_n – бесконечно большая, а y_n – бесконечно малая $\left(y_n \neq 0\right)$. Тогда x_n / y_n будет бесконечно большая, так как обратная величина y_n / x_n может быть представлена в виде произведения двух бесконечно малых $y_n / x_n = (1/x_n)\cdot y_n$ и является, следовательно, бесконечно малой.

4) Пусть x_n – бесконечно большая, а $y_n \to b \neq 0$. Тогда x_n / y_n будет бесконечно большая, так как обратная ей величина по установленному в 1) есть бесконечно малая.

5) Пусть x_n и y_n – бесконечно малые величины. В этом случае о пределе отношения x_n / y_n никакого общего заключения сделать нельзя, так как в зависимости от характера изменения переменных x_n и y_n возможны различные ответы. Так, например,

а) если $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, $y_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = 1 \to 1$;

б) если $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, $y_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = n \to \infty$;

в) если $x_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$, $y_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$;

г) если $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$, $y_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ предела вовсе не имеет.

Таким образом, отношение двух бесконечно малых может быть величиной бесконечно малой, бесконечно большой, может иметь пределом число, отличное от нуля, а может и вовсе не иметь предела. Следовательно, на вопрос о том, чему равен предел отношения бесконечно малых, можно ответить только тогда, когда известны законы изменения этих бесконечно малых, то есть если бесконечно малые заданы. В связи с этим говорят, что отношение бесконечно малых в общем случае представляет собой **неопределённость вида** $\mathbf{\dfrac{0}{0}}$. Когда на основании исследования законов изменения данных бесконечно малых предел их отношения найден или установлено, что его нет, то говорят, что **неопределённость раскрыта**.

6) Пусть x_n и y_n – бесконечно большие величины. В этом случае о пределе отношения x_n / y_n также никакого общего заключения сделать нельзя. Так, например,

а) если $x_n = n^2 \to \infty$, $y_n = n \to \infty$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = n \to \infty$;

б) если $x_n = n \to \infty$, $y_n = n^2 \to \infty$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$;

в) если $x_n = n \to \infty$, $y_n = n \to \infty$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = 1 \to 1$;

г) если $x_n = n(-1)^n \to \infty$, $y_n = n \to \infty$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ предела не имеет.

Из этих примеров следует, что отношение двух бесконечно больших может быть величиной бесконечно большой, бесконечно малой, может иметь пределом число, отличное от нуля, а также может вовсе не иметь предела. Поэтому говорят, что отношение двух бесконечно больших в общем случае представляет собой также **неопределённость**, но уже **вида** $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если бесконечно большие x_n и y_n конкретно заданы и нам удалось найти предел их отношения или доказать, что он не существует, то мы будем говорить, что неопределённость раскрыта.

2. Рассмотрим сумму двух переменных $x_n + y_n$.

1) Пусть $x_n \to \infty$, $y_n \to b$. Тогда $(x_n + y_n) \to \infty$. В частности, если $x_n \to +\infty$, то и $(x_n + y_n) \to +\infty$; если $x_n \to -\infty$, то $(x_n + y_n) \to -\infty$.

2) Пусть $x_n \to +\infty$ и $y_n \to +\infty$. Тогда $x_n + y_n \to +\infty$. Если $x_n \to -\infty$, $y_n \to -\infty$, то $x_n + y_n \to -\infty$, так как сумма бесконечно больших одного знака есть величина бесконечно большая.

3) Пусть x_n и y_n есть бесконечно большие разных знаков. Тогда о пределе суммы $x_n + y_n$ ничего определённого сказать нельзя до тех пор, пока не будут известны законы изменения x_n и y_n. Этот предел может быть равен нулю, бесконечности, числу, отличному от нуля, а также может и вовсе не существовать. Например:

а) если $x_n = (n + 1/n) \to +\infty$, $y_n = -n \to -\infty$, то $x_n + y_n = 1/n \to 0$;

б) если $x_n = 2n \to +\infty$, $y_n = -n \to -\infty$, то $x_n + y_n = n \to +\infty$;

в) если $x_n = (n+2) \to +\infty$, $y_n = -n \to -\infty$, то $x_n + y_n = 2 \to 2$;

г) если $x_n = n + (-1)^n \to +\infty$, $y_n = -n \to -\infty$, то $x_n + y_n = (-1)^n$ предела не имеет.

Таким образом, сумма двух бесконечно больших разных знаков представляет собой в общем случае **неопределённость вида** $\infty - \infty$.

3. Рассмотрим произведение двух переменных $x_n \cdot y_n$.

1) Пусть x_n и y_n являются бесконечно большими. Тогда их произведение будет также величиной бесконечно большой, так как в данном случае $1/x_n$ и $1/y_n$, а значит, и $1/(x_n \cdot y_n)$ будут величинами бесконечно малыми.

2) Пусть одна из переменных имеет конечный предел, отличный от нуля, а другая – бесконечно большая. Тогда их произведение будет величиной бесконечно большой. Действительно, если $x_n \to a \neq 0$, а y_n – бесконечно большая, то $1/y_n$ будет бесконечно малой, а $1/x_n$ – величиной ограниченной $(1/x_n \to 1/a)$. Следовательно, их произведение $1/(x_n \cdot y_n)$ будет бесконечно малой, а тогда $x_n y_n$ будет бесконечно большой.

3) Пусть x_n – бесконечно малая, а y_n – бесконечно большая. Тогда имеем случай **неопределённости**, которая обозначается символом $0 \cdot \infty$. Например:

а) если $x_n = 1/n \to 0$, $y_n = n^2 \to \infty$, то $x_n \cdot y_n = n \to \infty$;

б) если $x_n = 1/n^2 \to 0$, $y_n = n \to \infty$, то $x_n \cdot y_n = 1/n \to 0$;

в) если $x_n = 3/n \to 0$, $y_n = n \to \infty$, то $x_n \cdot y_n = 3 \to 3$;

г) если $x_n = (-1)^n / n \to 0$, $y_n = n \to \infty$, то $x_n \cdot y_n = (-1)^n$ предела не имеет.

Кроме рассмотренных нами неопределённостей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, и $0 \cdot \infty$, существуют еще другие случаи неопределённостей, связанные с рассмотрением степеней: 0^0, 1^∞, ∞^0. С ними мы познакомимся в п. 2.2.2.

Раскрытие неопределённостей в некоторых случаях представляет собой значительную трудность. В каждом отдельном случае приходится использовать особый приём, позволяющий преобразовать выражение к такому виду, когда о пределе возможно дать определённый ответ.

Рассмотрим на примерах некоторые типичные приёмы раскрытия неопределённостей.

Пример 1. Пусть x_n есть многочлен степени *k* относительно *n*:

$$x_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \ldots + a_{k-1} n + a_k \qquad (a_0 \neq 0).$$

Как ведёт себя этот многочлен при $n \to +\infty$?

Решение. Если бы все коэффициенты были одного знака, то, очевидно, x_n была бы бесконечно большой такого же знака. При разных знаках коэффициентов имеем неопределённость вида $\infty - \infty$. Для раскрытия этой неопределённости вынесем за скобки высшую степень *n*:

$$x_n = n^k \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k} \right).$$

В скобках все слагаемые, кроме первого, являются бесконечно малыми. Следовательно, предел выражения, стоящего в скобках, равен a_0. Множитель n^k есть величина бесконечно большая. Отсюда заключаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, если $a_0 > 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, если $a_0 < 0$.

Пример 2. Найти предел переменной $x_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 2}$.

Решение. Как уже установлено в примере 1, числитель и знаменатель являются величинами бесконечно большими. Следовательно, имеем случай неопределённости вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия этой неопределённости вынесем за скобки n^2 в числителе и n^2 в знаменателе:

$$x_n = \frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 2} = \frac{n^2\left(2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)} = \frac{2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{2}{n^2}}.$$

Замечая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, и применяя теоремы 5 и 6 п. 1.3 о пределах, найдём

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2}} = 2.$$

Пример 3. Пусть x_n представляет собой частное двух многочленов:

$$x_n = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + b_2 n^{m-2} + \ldots + b_{m-1} n + b_m} \qquad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0).$$

Рассмотреть все возможные случаи поведения частного при $n \to +\infty$.

Решение. Как показано в примере 1, числитель и знаменатель являются величинами бесконечно большими. Следовательно, имеем неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Вынося за скобки в числителе n^k, а в знаменателе n^m, получим

$$x_n = n^{k-m} \cdot \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \dfrac{a_2}{n^2} + \ldots + \dfrac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \dfrac{a_k}{n^k}}{b_0 + \dfrac{b_1}{n} + \dfrac{b_2}{n^2} + \ldots + \dfrac{b_{m-1}}{n^{m-1}} + \dfrac{b_m}{n^m}}.$$

Предел второго множителя равен $a_0 / b_0 \neq 0$. Что же касается предела первого множителя, то он будет зависеть от соотношения чисел k и m. Если $k>m$, то $n^{k-m} \to \infty$ и, следовательно, $x_n \to \pm\infty$ (знак совпадает со знаком a_0/b_0). Если же $k = m$, то $n^{k-m} = n^0 = 1$ и $x_n \to a_0/b_0$. Наконец, если $k < m$, то $n^{k-m} = 1/n^{m-k} = 0$ и $x_n \to 0$.

Пример 4. Найти предел переменной $x_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}$.

Решение. Выражение переменной x_n представляет собой неопределённость вида $\infty - \infty$. Если правую часть умножить и разделить на сумму $\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}$, то мы придём к неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$, которая раскрывается приемом, изложенным в примерах 2 и 3:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}\right)}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right)}+\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}} = \infty.$$

В этом примере мы использовали теоремы 5, 6, 7 п. 1.3 и теорему 1 п. 1.2 о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

1.5. Предел функции

В п. 1.1 мы рассмотрели понятие предела применительно к числовой последовательности, то есть к функции натурального аргумента. Перейдём теперь к выяснению этого понятия для функций произвольного действительного аргумента.

Введём понятие предельной точки числового множества.

Определение 1. Точка x_0 называется **предельной точкой** или точкой сгущения числового множества E, если в любой окрестности $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ этой точки содержится хотя бы одна точка из E, отличная от x_0.

Замечания: **1.** Сама предельная точка x_0 при этом может принадлежать, а может и не принадлежать множеству E.

2. Если в любой левой (правой) полуокрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка данного множества E, то точка x_0 называется **левосторонней (правосторонней) предельной точкой** множества E. Если при этом точка x_0 окажется только левосторонней (правосторонней) предельной точкой множества E, то она называется **односторонней предельной точкой** множества E; в противном случае она называется **двусторонней предельной точкой**.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором числовом множестве $D=\{x\}$, имеющем предельную точку x_0. Точка x_0 может принадлежать множеству D, а может и не принадлежать ему.

Определение 2. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности значений x:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots\ ,$$

входящих в область определения функции и сходящихся к x_0, но отличных от x_0, соответствующая последовательность значений функции $f(x)$:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

сходится и притом всегда к одному и тому же числу A.

Тот факт, что A – предел функции $f(x)$ в точке x_0 записывается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

или ещё так:

$$f(x)\to A \quad \text{при } x\to x_0 .$$

Данное определение предела функции часто называют определением предела функции **по Гейне**. Оно основано на понятии предела числовой последовательности, поэтому его иногда называют также определением **«на языке последовательностей».**

Дадим другое, часто применяемое определение предела функции **по Коши** (снова считая, что x_0 – предельная точка области D определения функции $f(x)$).

Определение 3. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta>0$, что для всех $x \neq x_0$, $x \in D$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|\, f(x) - A \,| < \varepsilon.$$

Это определение использует понятие ε-окрестности и δ-окрестности и потому его называют ещё определением **«на языке ε – δ»**.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то на графике функции $y=f(x)$ это иллюстрируется следующим образом (см. рис. 3): так как из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то это значит, что для всех точек x, отстоящих от точки x_0 не далее, чем на δ, точки M графика функции $y=f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$.

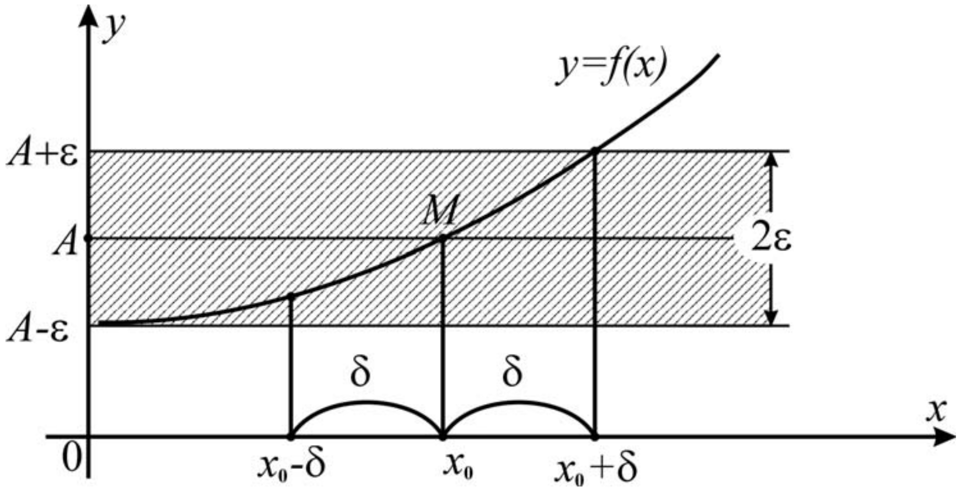


Рис. 3

Теорема 1. Определения 2 и 3 предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны, то есть если функция имеет предел в точке x_0 согласно одному из определений, то этот же предел функция будет иметь и по другому определению.

Пример 1. Исходя из определения предела функции по Коши, доказать, что функция $f(x) = 3x - 5$ имеет в точке $x = 2$ предел, равный 1. Каково должно быть δ, если ε равно $1, 1/2$ и $1/100$?

Решение. Возьмём любое ε > 0. Задача состоит в том, чтобы по этому ε найти такое δ > 0, при котором из неравенства $|x-2| < \delta$ следовало бы неравенство $|(3x-5)-1| < \varepsilon$. Последнее преобразуется к виду $|3(x-2)| < \varepsilon$ или $|x-2| < \varepsilon/3$. Отсюда видно, что можно взять δ = ε/3. В частности, если ε = 1, то $\delta = 1/3$; если $\varepsilon = 1/2$, то $\delta = 1/6$; если $\varepsilon = 1/100$, то $\delta = 1/300$.

Пример 2. Пользуясь определением предела функции «на языке последовательностей», доказать, что функция $f(x) = x^2 - 3x - 1$ имеет в точке $x = 2$ предел, равный -3, то есть $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x - 1) = -3$.

Решение. Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность значений x, сходящихся к 2, то есть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$. Тогда, применив теорему 5 п. 1.3 о пределе произведения, получим

$$\lim_{x_n \to 2} x_n^2 = \lim_{x_n \to 2}(x_n \cdot x_n) = 2 \cdot 2 = 4, \quad \lim_{x_n \to 2} 3x_n = 3 \cdot 2 = 6.$$

По теореме о пределе суммы и разности получим

$$\lim_{x_n \to 2} f(x_n) = \lim_{x_n \to 2}(x_n^2 - 3x_n - 1) = 4 - 6 - 1 = -3.$$

Поскольку последовательность $\{x_n\}$ предполагалась произвольной (с одним лишь требованием, чтобы $x_n \to 2$), то на основании определения 2 предела функции по Гейне заключаем, что $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x-1\right)=-3$.

Таким образом, решение свелось к тому, что в выражение данной функции мы подставили $x=2$.

Замечание 3. Рассуждение, приведённое в примере 2, применимо к любому многочлену, и мы можем сделать следующий общий вывод: для того, чтобы найти предел многочлена

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

при стремлении x к некоторому числу α, достаточно подставить в выражение этого многочлена вместо x число α, то есть

$$\lim_{x\to\alpha}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\right)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n.$$

Односторонние пределы

Кроме рассмотренного нами понятия предела функции в точке, существуют также понятия **предела в точке слева** и **предела в точке справа**.

Пусть функция $f(x)$ определена на числовом множестве D и x_0 – левая (правая) предельная точка этого множества (она может быть и двусторонней). Если в определении предела функции потребовать, чтобы x стремилось к x_0 не любым способом, а только слева (оставаясь все время меньше x_0), то получим определение предела **слева** в точке x_0.

Определение 4. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** x_0 **слева** или левосторонним пределом, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдётся такое число $\delta>0$, что для всех $x\in D$, удовлетворяющих неравенству $x_0-\delta<x<x_0$, выполняется неравенство: $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Тот факт, что A – предел функции $f(x)$ в точке x_0 **слева** записывается так:

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A \quad\text{или}\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}}f(x)=A \quad\text{или}\quad f(x_0-0)=A.$$

Определение 5. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** x_0 **справа** или правосторонним пределом, если для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что для всех $x\in D$, удовлетворяющих неравенству $x_0<x<x_0+\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Предел справа обозначается так:

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A \quad\text{или}\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}}f(x)=A \quad\text{или}\quad f(x_0+0)=A.$$

В случае $x_0 = 0$ вместо $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x)$ пишут $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$, а вместо $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$ пишут $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$.

Правый и левый пределы функции называются **односторонними пределами** функции в точке. Связь между односторонними пределами функции устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела предел A, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела левый и правый пределы и чтобы оба этих предела были равны A:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Из этой теоремы следует, что если односторонние пределы функции существуют, но не равны, то предела функции в рассматриваемой точке не существует.

Пример 3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \le 1, \\ x+1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

В точке $x = 1$ эта функция не имеет предела, но имеет предел слева $f(1-0) = 1$ и предел справа $f(1+0) = 2$ (рис. 4).

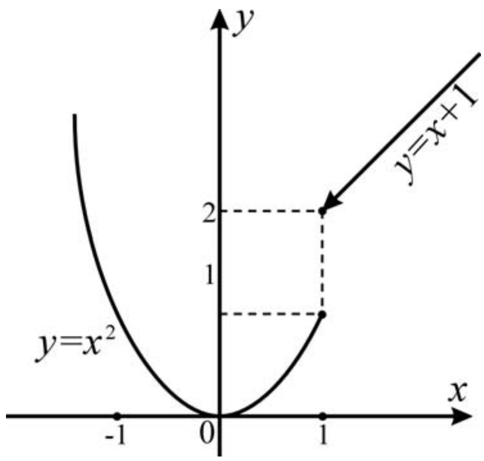


Рис. 4

На «языке последовательностей» определения 4 и 5 сформулируйте самостоятельно.

Бесконечно большие предельные значения функции

Обобщим понятие предела функции на случай, когда функция по абсолютной величине неограниченно возрастает.

Пусть x_0 – предельная точка множества D-области определения функции $f(x)$.

Определение 6. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 **бесконечный предел**, если для любого сколь угодно большого положительного числа M найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех значений $x \in D$ $(x \neq x_0)$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Бесконечный предел функции $f(x)$ в точке x_0 записывается так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad f(x) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Частными случаями определения 6 являются определения 7 и 8.

Определение 7. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 пределом плюс бесконечность $(+\infty)$, если для любого числа $M > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех значений $x \in D$ $(x \neq x_0)$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) > M$.

Записывают это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Геометрически определение 7 означает, что все точки графика функции $y = f(x)$, для которых $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, лежат выше прямой $y = M$, где $M > 0$ – произвольно, а δ подобрано в зависимости от M (рис. 5).

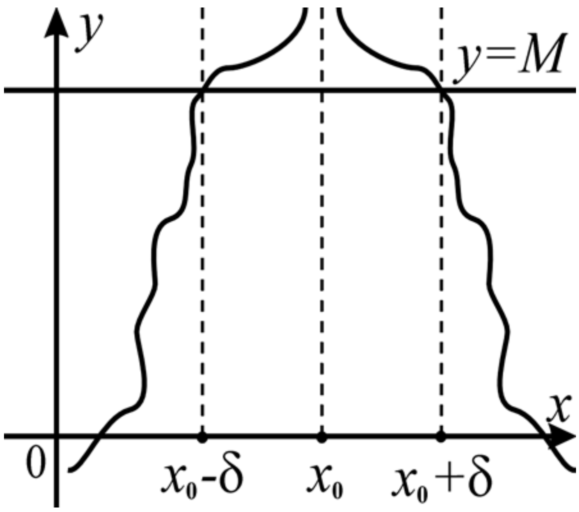


Рис. 5

Определение 8. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 пределом минус бесконечность $(-\infty)$, если для любого наперёд заданного числа $M < 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех значений $x \in D$ $(x \neq x_0)$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) < M$.

Пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Геометрически определение 8 означает, что все точки графика функции $y = f(x)$, для которых $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, лежат ниже прямой $y = M$, где $M < 0$ – произвольно, а δ подобрано в зависимости от M (рис. 6).

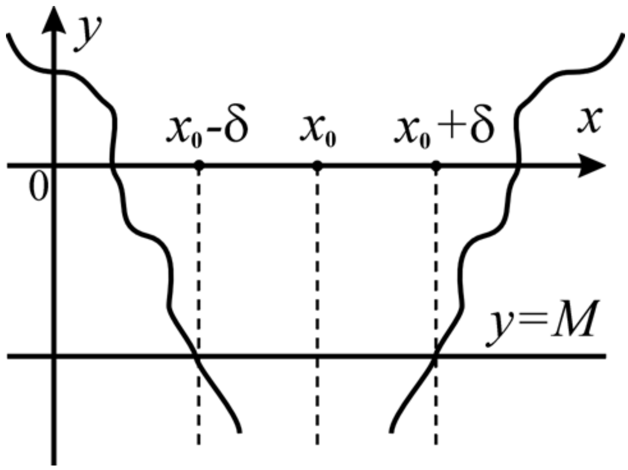


Рис. 6

Если бесконечный предел функции $f(x)$ в точке x_0 получается при стремлении x к x_0 только слева $(x \to x_0 - 0)$ или только справа $(x \to x_0 + 0)$, то в этом случае имеем дело с **односторонними бесконечными пределами**.

Предел функции на бесконечности

Выше введено определение предела функции в данной точке $x = x_0$. Введём теперь понятие предела функции на бесконечности.

Пусть функция $f(x)$ задана на неограниченном множестве D.

Определение 9. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ **при** x **стремящемся к бесконечности** $(x \to \infty)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое вещественное число P, что для всех $|x| > P$, принадлежащих области определения функции, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если A есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, то пишут

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Число A при этом часто называют **пределом функции** $f(x)$ **на бесконечности**.

Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Учитывая последнее, можно дать следующее геометрическое истолкование предела функции на бесконечности: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ геометрически означает, что какое бы $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, найдётся такое P, что для всех значений

$|x| > P$ кривая $y = f(x)$ будет находиться между прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. (рис. 7).

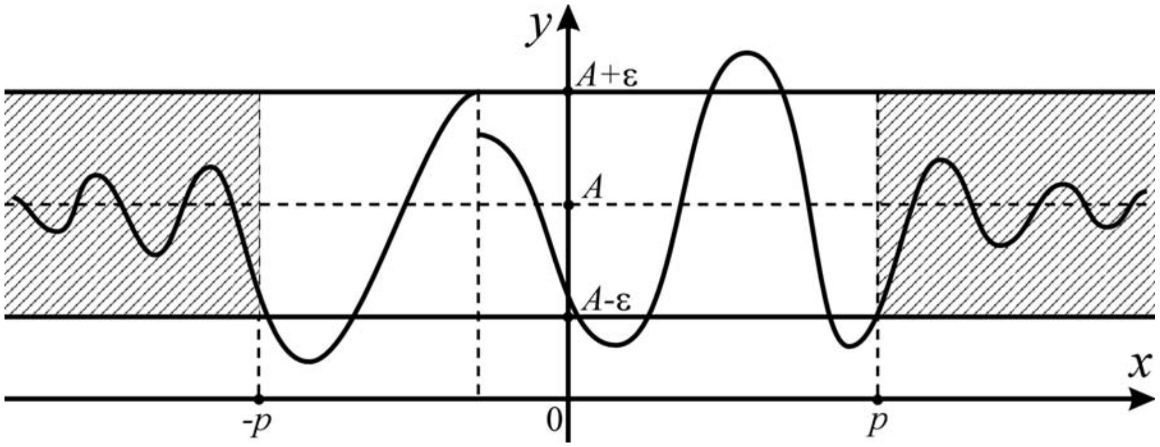


Рис. 7

Если известно, что множество D не ограничено сверху (снизу), то можно говорить о пределе функции при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$).

Определение 10. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число P, что для всех $x > P$ ($x < P$), принадлежащих области определения функции, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пишут: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ (соответственно $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$). Геометрическую интерпретацию пределов: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ рекомендуем читателю дать самостоятельно.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Ограниченные функции

Аналогично понятию бесконечно малой и бесконечно большой переменной x_n вводится понятие бесконечно малой и бесконечно большой функции.

Определение 11. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией при** $x \to a$ (или в окрестности точки а), если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Определение 12. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно большой функцией при** $x \to a$ (или в окрестности точки a), если имеет место одно из равенств:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \infty; \quad \lim_{x\to a} \alpha(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to a} \alpha(x) = -\infty.$$

В определениях 11 и 12 a может быть как числом, так и одним из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Пример 4. Функция $\alpha(x)=(x-1)^3$ есть бесконечно малая при $x\to 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^3=0$.

Пример 5. Функция $\beta(x)=1/x^2$ есть бесконечно большая при $x\to 0$ и бесконечно малая при $x\to\infty$, так как

$$\lim_{x\to 0}\beta(x)=\lim_{x\to 0}1/x^2=\infty,\quad \text{а}\quad \lim_{x\to\infty}\beta(x)=\lim_{x\to\infty}1/x^2=0.$$

Определение 13. Функция $y=f(x)$ называется **ограниченной** в области D (в которой функция определена), если существует такое положительное число K, что для всех значений аргумента x, взятых из области D, имеет место неравенство

$$|f(x)|<K. \tag{1.6}$$

Если нельзя найти такое число K, чтобы неравенство (1.6) выполнялось одновременно для всех значений $x\in D$, то функция $f(x)$ называется **неограниченной** в этой области.

В частности, можно говорить о функциях, ограниченных на сегменте, в интервале и т. д. Если функция ограничена в интервале $(-\infty,+\infty)$, то говорят, что она ограничена на всей прямой, или просто ограничена.

Так как неравенство (1.6) равносильно неравенствам $-K<y<K$, то ограниченность функции $f(x)$ в области D геометрически означает, что точки графика функции $y=f(x)$, соответствующие всем абсциссам $x\in D$, лежат между двумя прямыми: $y=-K$ и $y=K$, параллельными оси OX (рис. 8).

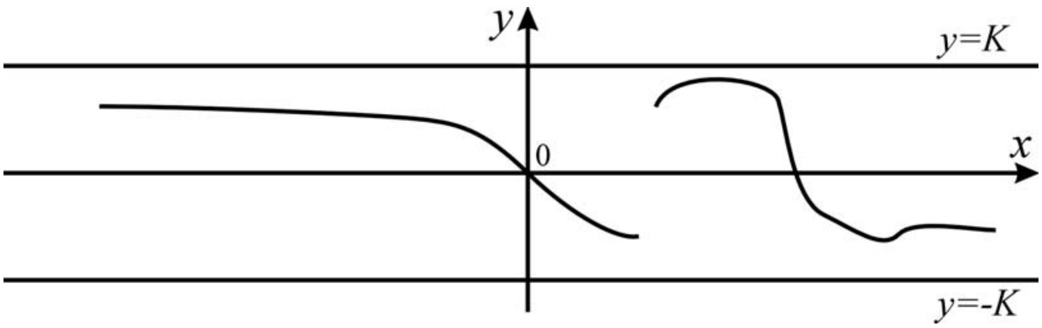


Рис. 8

Распространение теорем о пределах на случай произвольных функций

Для предела функции $f(x)$ при $x\to x_0$ остаются верными все теоремы о пределах, сформулированные в п. 1.3. В качестве примера рассмотрим теорему о пределе суммы, разности, произведения и частного. Прежде всего заметим, что арифметические действия над функциями можно производить только в общей части их областей определения.

Теорема 3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определённые на некотором числовом множестве D, в точке x_0, предельной для этого множества, имеют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда функции, представляющие собой сумму, разность, произведение и частное этих функций (последнее при условии $B \neq 0$), имеют в точке x_0 также конечные пределы, причём

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) / g(x) = A / B.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \left(3x^2 - 6x + 5\right)$.

Решение. Применяя теоремы о пределах функций, найдём

$$\lim_{x \to 1} \left(3x^2 - 6x + 5\right) = \lim_{x \to 1} 3x^2 - \lim_{x \to 1} 6x + \lim_{x \to 1} 5$$

$$= 3\left(\lim_{x \to 1} x\right)^2 - 6 \lim_{x \to 1} x + 5 = 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 5 = 2.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 + 7}$.

Решение. Применяя теоремы о пределе суммы и произведения функций, находим

$$\lim_{x \to 2} \left(2x^2 - 1\right) = 7, \quad \lim_{x \to 2} \left(3x^3 - 6x^2 + 7\right) = 7.$$

Таким образом, пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя отличен от нуля. Теперь, пользуясь теоремой о пределе частного, получаем:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 + 7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Первый замечательный предел

Теорема 4. Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ имеет предел, равный 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство этой теоремы приведено, например, в [1].

Рассмотренный предел часто называют **первым замечательным пределом**. Он находит большое применение при отыскании пределов величин, в выражении которых участвуют тригонометрические функции.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$ (k – const).

Решение. Сделаем замену: $kx = y$. При $x\to 0$ $y\to 0$. $x=\dfrac{y}{k}$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{y}{k}}=\lim_{y\to 0}\frac{k\sin y}{y}=k\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=k\cdot 1=k.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin lx}$ (k, l – const).

Решение. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin lx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin kx}{x}}{\frac{\sin lx}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin lx}{x}}=\frac{k}{l}.$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}kx}{x}$ (k – const).

Решение. $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x\cos kx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=k\frac{1}{\cos 0}=k.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$ (m – const).

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}=2\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{m}{2}=\frac{m^2}{2}.$$

Второй замечательный предел

В математическом анализе встречается несколько важных пределов переменных величин. Одним из таких является предел переменной

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{1.7}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Теорема 5. Переменная величина (1.7) при $n\to\infty$ имеет предел, заключенный между 2 и 3.

Определение 11. Предел переменной величины $(1+1/n)^n$ при $n\to\infty$ называется числом e:

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n.$$

Число e – иррациональное и поэтому не может быть точно выражено какой-нибудь конечной дробью. С точностью до 15-го десятичного знака число e=2,718281828459045… . При практических вычислениях обычно ограничиваются первыми двумя–тремя десятичными знаками этого числа. Число e играет очень важную роль в математическом анализе.

Теорема 6. Функция $(1+1/x)^x$ стремится при $x \to \infty$ к пределу e:

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e. \tag{1.8}$$

Этот предел часто называют **вторым замечательным пределом.**

Замечание 4. Наряду с (1.8) имеют место равенства [6]:

$$\lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x = e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/a} = e.$$

Последнее равенство получается из (1.8) следующим образом: сделаем замену $1/a = x$. При α→0, x→∞. $\alpha = 1/x$. Тогда $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/a} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$.

Рассмотрим примеры на вычисление предела функций, сходящихся к числу e.

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$, где k – некоторое число, отличное от нуля.

Решение. Сделаем замену $\frac{x}{k} = y$. При x→∞, y→∞. $\frac{k}{x} = \frac{1}{y}$, $x = ky$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k = \left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k = e^k.$$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}$, где k – число, отличное от нуля.

Решение. Сделаем замену kx=y. При x→0, y→0. $\frac{1}{x} = \frac{k}{y}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^k = \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^k = e^k.$$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t}{1+t}\right)^t$.

Решение.

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t}=\frac{1}{e}.$$

Замечание 5. Все изложенное в п. 1.4 об особых случаях пределов и неопределенностях верно и для произвольной функции $f(x)$.

Как уже отмечалось выше, для раскрытия неопределенностей даже одного какого-нибудь вида нельзя указать единого способа. В зависимости от конкретного примера неопределенность раскрывается тем или иным способом. В п. 2.2.2 с помощью дифференциального исчисления будут получены некоторые общие способы раскрытия неопределенностей. Здесь же продолжим рассмотрение некоторых наиболее употребляемых способов и приемов раскрытия неопределенностей, начатое в конце п. 1.4.

Пример 15. Найти предел многочлена n-й степени при $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\right)\qquad(a_0\neq 0).$$

Решение. В данном случае можно повторить все рассуждения, проведенные нами при решении примера 1 в 1.4. В случае коэффициентов с разными знаками имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Для раскрытия этой неопределенности вынесем за скобки высшую степень x, получим

$$\lim_{x\to+\infty}x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right).$$

Предел выражения в скобках, очевидно, будет равен первому слагаемому a_0 (так как остальные слагаемые являются бесконечно малыми), а предел x^n – бесконечности. Следовательно, все выражение будет иметь своим пределом $+\infty$ или $-\infty$, в зависимости от знака a_0.

Пример 16. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+3x+4}{2x^3+3x+8}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Такие неопределенности, как уже показано в примере 3 в п. 1.4, раскрываются делением числителя и знаменателя на высшую степень x, в данном случае – на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2+3x+4}{2x^3+3x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}{2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 17. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Решаем аналогично примеру 4 в п. 1.4. Разделив и умножив на $x+\sqrt{x^2-4}$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}{x+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}}=0\,.$$

Пример 18. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{4x^2+1}-\dfrac{3x^2}{12x+1}\right)$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Произведём вычитание дробей

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{4x^2+1}-\frac{3x^2}{12x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2}{48x^3+4x^2+12x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{48+\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{48}\,.$$

Замечание 6. Для того чтобы определить предел дробно-рациональной функции

$$\lim_{x\to a}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_m}\quad\left(a_0\neq0,b_0\neq0\right)$$

в случае, когда при $x\to a$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, надо числитель и знаменатель дроби разделить на $x-a$ $\left(x\neq a\right)$ и перейти к пределу.

Пример 19. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^3-x^2+4x-4}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0/0$. Воспользуемся приемом, изложенным в замечании 6.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-x-2 & x-1 \\ \underline{-\;3x^2-3x} & 3x+2 \\ 2x-2 & \\ \underline{-\;2x-2} & \\ 0 & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} x^3-x^2+4x-4 & x-1 \\ \underline{-\;x^3-x^2\qquad\quad} & x^2+4 \\ 4x-4 & \\ \underline{-\;4x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на $x-1$, получим

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{x^3-x^2+4x-4}=\lim_{x\to1}\frac{3x+2}{x^2+4}=1\,.$$

Замечание 7. Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональное выражение в случае, когда предел и числителя, и знаменателя дроби равны нулю, надо перенести иррациональность из числителя в знаменатель или наоборот. После чего сделать упрощения и перейти к пределу.

Пример 20. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Перенесем иррациональность из числителя в знаменатель и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(2-\sqrt{x+3}\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{\left(x^2-1\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{4-x-3}{\left(x^2-1\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=-\frac{1}{8}.$$

Замечание 8. При отыскании пределов вида

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} \tag{1.9}$$

в случае, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$, имеет место формула [6]:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}. \tag{1.10}$$

В формуле (1.9) a может обозначать и число, и один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Пример 21. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^5}\right)^{\frac{3x}{3x+1}}$.

Решение. На основании формулы (1.10)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^5}\right)^{\frac{3x}{3x+1}}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{3x+1}}=0^1=0.$$

Если в (1.9) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\pm\infty$, то формула (1.10) неприменима. В этом случае имеем неопределенность вида 1^∞. Рассмотрим общий прием для раскрытия этой неопределенности. Функцию $f(x)$ представим в виде $f(x)=1+[f(x)-1]$, а показатель степени $\varphi(x)$ запишем в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]\varphi(x).$$

Тогда

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]\varphi(x)}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to a}[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\varphi(x)}.$$

Сделаем подстановку $f(x)-1=z$. Так как по предположению при $x\to a$ $f(x)\to 1$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]=0$, то есть $z\to 0$, когда $x\to a$.

На основании предыдущего равенства

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\left[\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\varphi(x)}. \quad (1.11)$$

Пример 22. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$.

Решение.

Обозначим $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}$; $\varphi(x)=8x^2+3$. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(8x^2+3)=\infty$. Имеем неопределенность вида 1^∞. Воспользуемся формулой (1.11):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)[f(x)-1]}.$$

Здесь

$$f(x)-1=\frac{2x^2+3}{2x^2+5}-1=-\frac{2}{2x^2+5};\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x)[f(x)-1]=-\lim_{x\to\infty}\frac{2(8x^2+3)}{2x^2+5}=-8.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{-8}$.

1.6. Сравнение бесконечно малых

Пусть функции $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to a$, то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, причем a может быть как числом, так и одним из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Определение 1. Две бесконечно малые α и β называются бесконечно малыми **одного порядка**, если предел их отношения равен некоторому числу, отличному от нуля, то есть если

$$\lim_{x\to a}(\alpha/\beta)=A\neq 0.$$

Бесконечно малые одного порядка характеризуются как бы «одинаковой скоростью» стремления к нулю.

Пример 1. Функции $\sin 3x$ и $\sin 5x$ являются при $x \to 0$ бесконечно малыми одного порядка, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} = \dfrac{3}{5}$. (См. пример 9 в п. 1.5).

Среди бесконечно малых одного порядка особое место занимают бесконечно малые, называемые эквивалентными.

Определение 2. Две бесконечно малые α и β называются **эквивалентными**, если предел их отношения при $x \to a$ существует и равен единице, то есть если

$$\lim_{x\to a}(\alpha/\beta) = 1.$$

В этом случае пишут $\alpha \sim \beta$.

Пример 2. Функции $\sin x$ и x являются при $x \to 0$ эквивалентными бесконечно малыми, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Определение 3. Если $\lim\limits_{x\to a}(\alpha/\beta) = 0$ (а $\lim\limits_{x\to a}(\beta/\alpha) = \infty$), то α называется бесконечно малой **высшего порядка** малости по сравнению с бесконечно малой β, напротив, β называется при этом бесконечно малой **низшего порядка** малости по сравнению с α.

Основное содержание этого определения состоит в том, что если порядок бесконечно малой α выше порядка бесконечно малой β, то α стремится к нулю как бы «быстрее», чем β.

Пример 3. При $x \to 0$ функция $\alpha(x) = 5x^4$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\beta(x) = x^2$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0}\frac{5x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0}5x^2 = 0.$$

Пример 4. При $x \to \infty$ функция $\alpha(x) = 4/x^3$ будет бесконечно малой более высокого порядка, чем бесконечно малая $\beta(x) = 1/x$, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\infty}\frac{4/x^3}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} = 0.$$

В отдельных случаях оказывается недостаточно знать, что из двух данных бесконечно малых одна является бесконечно малой высшего порядка, чем другая. Нужно еще оценить количественно – числом, насколько выше или как высок этот порядок. Последнее имеет важное значение при изучении характера изменения бесконечно малых.

Определение 4. Бесконечно малая α называется **бесконечно малой *k*-го порядка** по отношению к бесконечно малой β, если α и β^k будут бесконечно малыми одного порядка, то есть если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta^k} = A \neq 0$.

Пример 5. Если $\beta(x)=x$, $\alpha(x)=x^3$, то при $x\to 0$ бесконечно малая α является бесконечно малой третьего порядка по отношению к бесконечно малой β, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(x)^3}=1.$$

Желая сравнить скорость стремления к нулю двух бесконечно малых α и β, мы должны составить их отношение α/β (или β/α) и заняться отысканием его предела. Но может оказаться, что такого предела вовсе нет (ни конечного, ни бесконечного).

Определение 5. Если отношение α/β при $x\to a$ не стремится ни к какому пределу: ни к конечному, ни к бесконечному, то говорят, что **бесконечно малые α и β несравнимы** между собой.

Пример 6. Функции $\alpha(x)=x^2\sin(1/x)$ и $\beta(x)=x^2$ – бесконечно малые при $x\to 0$ несравнимы между собой, так как их отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{x^2\sin(1/x)}{x^2}=\sin\dfrac{1}{x}$ при $x\to 0$ не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности.

Теорема 1. (О замене бесконечно малых функций им эквивалентными).

Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них или какую-либо одну заменить эквивалентными им, то есть если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to a$ и если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ и $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Используя теорему 1, легко показать, что если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$ и если $\alpha(x)\sim\gamma(x)$, $\beta(x)\sim\gamma(x)$, то $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$.

Решение. Так как $\sin 2x\sim 2x$, то имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}2\sqrt{x}=0.$$

Таким образом, теорема 1 в ряде случаев облегчает задачу раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций [8-9]
($\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to 0$)

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
2) $\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
3) $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{[\alpha(x)]^2}{2}$;
4) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
5) $\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
6) $\ln[1+\alpha[x]] \sim \alpha(x)$;
7) $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a \quad (a>0)$, в частности $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$;
8) $[1+\alpha(x)]^P-1 \sim P\alpha(x)$, в частности, $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$.

Существует простой признак эквивалентности двух бесконечно малых.

Теорема 2. Для того, чтобы бесконечно малые α и β были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их разность $\beta-\alpha$ являлась бесконечно малой высшего порядка, чем каждая из бесконечно малых α и β.

Следствие. Если при $x \to a$ бесконечно малая α низшего порядка малости, чем каждая из бесконечно малых $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, то бесконечно малая $\gamma = \alpha + \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$, представляющая собой сумму бесконечно малых $\alpha, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, эквивалентна бесконечно малой α.

Это следствие бывает полезно при вычислении предела дроби, числитель или знаменатель которой есть сумма бесконечно малых. Если в сумме, стоящей в числителе (знаменателе), имеется **одно** слагаемое, представляющее бесконечно малую низшего порядка, то можно отбросить под знаком предела все остальные слагаемые, ибо сумма эквивалентна только этому одному слагаемому.

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4}{\mathrm{tg}^3 x-6\sin^2 x+x-5x^3}$.

Решение. Так как при $x \to 0$ $1-\cos x \sim 1/2x^2$, $\sin x \sim x$, $\mathrm{tg}x \sim x$, то в силу следствия имеем: $1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4 \sim 2x$; $\mathrm{tg}^3 x-6\sin^2 x+x-5x^3 \sim x$.

Поэтому по теореме 1 получаем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4}{\mathrm{tg}^3 x-6\sin^2 x+x-5x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$$

1.7. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа – понятие непрерывности функции.

Различные определения непрерывности

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D = \{x\}$ и x_0 – предельная точка этого множества. Говоря в п. 1.5 о пределе функции $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, мы совершенно не интересовались тем, определена ли данная функция $f(x)$ в самой точке x_0, а если определена, то каково именно её значение в этой точке. Тем самым мы допускали возможность существования следующих случаев:

1) Предел A существует, в то время как $f(x)$ в точке x_0 не определена.

2) Предел A существует, существует и $f(x_0)$, но $A \neq f(x_0)$.

3) Предел A существует и $f(x_0)$ существует, причем $A = f(x_0)$.

Среди функций, имеющих пределы, в особый класс выделяются функции, отмеченные в случае 3, то есть функции, для которых выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.12}$$

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** при $x = x_0$ или **в точке** x_0, если

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности;

2) функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to x_0$;

3) предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен значению функции $f(x)$ в точке x_0, то есть выполняется равенство (1.12).

Если в точке x_0 функция непрерывна, то точка x_0 называется **точкой непрерывности** данной функции.

Замечание 1. Равенство (1.12), определяющее понятие непрерывности функции в точке, можно представить в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) \tag{1.13}$$

(так как $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$) и словами можно сказать так: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если предел функции в этой точке равен значению функции от предела аргумента, то есть если возможен предельный переход под знаком функции. Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна и нужно вычислить её предел при $x \to x_0$, то достаточно в выражении функции вместо x подставить x_0 и подсчитать соответствующее значение $f(x_0)$. Это и будет искомый предел.

Соответственно двум определениям предела функции можно дать два определения непрерывности функции: «на языке последовательностей» и «на языке ε–δ».

Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 (предельной для области определения функции), если какова бы ни была последовательность значений x:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \ldots,$$

из области определения $f(x)$, имеющая пределом x_0 ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), соответствующая последовательность значений функции $f(x)$:

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots,$$

сходится, и притом к $f(a)$ (то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$).

Эту форму определения непрерывности функции будем называть **определением непрерывности функции на «языке последовательностей»** или **определением непрерывности по Гейне**.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, предельной для области определения этой функции, если для любого наперед заданного числа ε>0 существует такое δ>0, что для всех значений x из области определения $f(x)$, для которых $|x - x_0|$<δ, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| <$ ε.

Определение 3 называется **определением непрерывности на «языке ε–δ»,** или **определением по Коши**.

Пример 1. Используя определение непрерывности на «языке ε-δ» доказать, что функция $f(x) = 4x - 7$ непрерывна при $x = 3$.

Решение. Возьмем любое ε>0. Задача состоит в том, чтобы по этому ε найти такое δ>0, при котором из неравенства $|x-3|$<δ следовало бы неравенство $|(4x-7)-5|$<ε (поскольку $f(x_0) = f(3) = 5$). Последнее неравенство преобразуется к виду $4|x-3|$<ε, или $|x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$. Отсюда видно, что, выбрав δ=$\frac{\varepsilon}{4}$, мы получим, что при $x_0 = 3$ неравенство $|x - x_0|$<δ влечёт за собой неравенство $|f(x) - f(x_0)|$<ε, так что действительно $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0 = 3$.

Обозначим через $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента. Приращением функции $y = f(x)$ в данной точке x_0 называется разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (см. рис. 9).

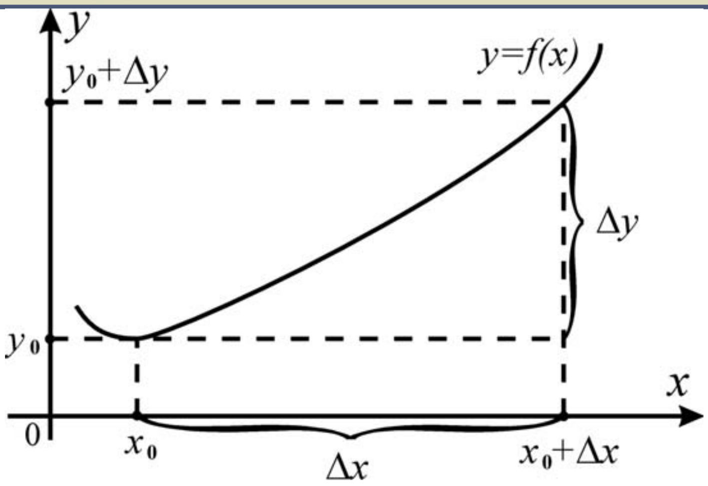


Рис. 9

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если эта функция определена в какой-нибудь окрестности точки x_0 и если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то есть если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример 2. Пользуясь определением 4 непрерывности функции, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ непрерывна в произвольной точке $x \in (-\infty, +\infty)$.

Решение.

$$f(x + \Delta x) = 5(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 2;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 10x\Delta x - 6\Delta x + 5\Delta x^2 = (10x - 6)\Delta x + 5\Delta x^2.$$

Найдем теперь предел Δy при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(10x - 6)\Delta x + 5\Delta x^2\right] = 0$$

при любом значении x, что и доказывает непрерывность заданной функции при любом значении $x \in (-\infty, +\infty)$.

Иногда приходится пользоваться понятием **односторонней непрерывности**.

Определение 5. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 **справа (слева)**, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$).

Замечание 2. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и слева и справа, то она непрерывна в этой точке.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на множестве** $D = \{x\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если функция непрерывна в каждой внутренней точке сегмента $[a,b]$ и, кроме того, непрерывна справа в точке a и слева в точке b, то говорят, что она непрерывна на сегменте $[a,b]$.

Действия над непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть заданные на одном и том же множестве функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке x_0 (частное при условии $g(x_0)\neq 0$).

Замечание 3. Теорема 1 справедлива для любого числа слагаемых или сомножителей.

Теорема 2. Если $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$ и $f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Используя эти теоремы, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Этот вопрос подробно изложен в [2–4].

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin x$.

Решение. Функция $y=\sin x$ непрерывна в любой точке и потому

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin x = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2.$$

Пример 4. Доказать равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e. \tag{1.14}$$

Решение. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e.$$

В силу непрерывности логарифмической функции мы перешли к пределу под знаком логарифма. (Смотри формулу 1.13). В частности, при $a=e$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \tag{1.15}$$

то есть $\ln(1+x)\sim x$.

Пример 5. Доказать равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (1.16)$$

Решение. Для доказательства этого равенства положим $a^x-1=\beta$. Тогда $a^x=1+\beta$, $x=\log_a(1+\beta)$. При $x\to 0$ по непрерывности показательной функции $a^x\to 1$; следовательно $\beta\to 0$ и, пользуясь уже решенным примером 4, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(1+\beta)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

Докажите самостоятельно следующее равенство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu \quad (\mu-\mathrm{const}). \qquad (1.17)$$

Пределы (1.14) – (1.17) используются в дифференциальном исчислении. С их помощью легко решаются также многие задачи на раскрытие неопределенностей.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$.

Решение. Преобразуем выражение

$$\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}=\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{3^{2x}-1}=\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{(9^x-1)/x},$$

так как $3^{2x}=9^x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{(9^x-1)/x}=\frac{1}{\ln 9}.$$

Здесь мы использовали формулы (1.15) и (1.16).

Некоторые свойства непрерывных функций

Теорема 4. Всякая непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция ограничена на этом сегменте (рис. 10).

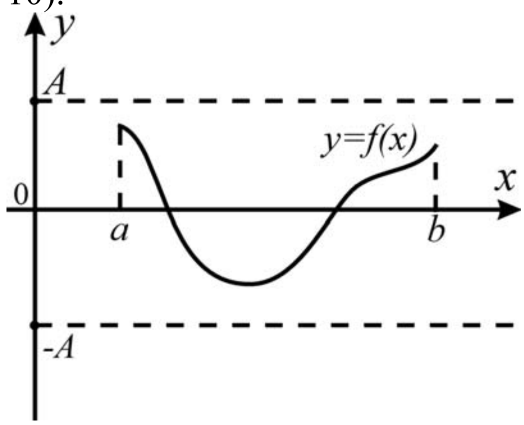


Рис. 10

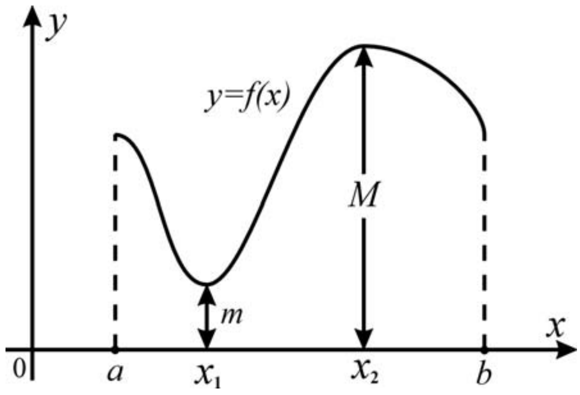


Рис. 11

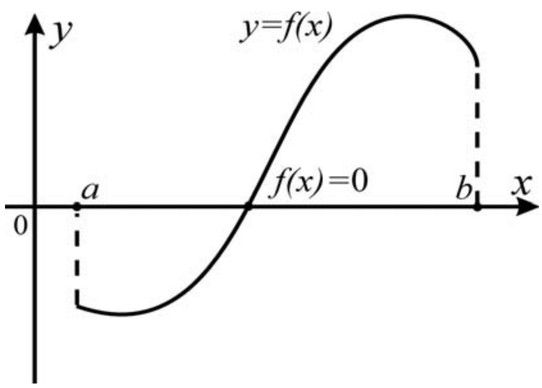


Рис. 12

Теорема 5. Функция, непрерывная на сегменте $[a,b]$, принимает, по крайней мере, в одной его точке, наибольшее значение и, по крайней мере в одной его точке – наименьшее значение (рис. 11).

Заметим, что наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ называется такое значение $f(x_0)$, что для всех точек $x\in[a,b]$ выполняется неравенство $f(x_0)\geq f(x)$ $[f(x_0)\leq f(x)]$.

Теорема 6. Функция, непрерывная на сегменте $[a,b]$, принимающая на концах этого сегмента значения противоположных знаков, по крайней мере в одной внутренней точке сегмента $[a,b]$, обращается в нуль (рис. 12).

Теорема 7. Функция, непрерывная на сегменте $[a,b]$, принимает в этом сегменте все промежуточные значения между своими наибольшим и наименьшим значениями соответственно M и m.

Точки разрыва и их классификация

Определение 7. Если в какой-либо точке x_0 функция не является непрерывной, то точка x_0 называется **точкой разрыва** функции, а сама функция – **разрывной** в этой точке.

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точке x_0; в самой же точке x_0 функция может быть как определена, так и не определена.

Различают два вида точек разрыва – точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода.

I. Точки разрыва первого рода.

Определение 8. Если в точке разрыва x_0 существуют конечные односторонние пределы функции, то разрыв функции называется **разрывом первого рода**.

Если при этом $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то x_0 – **точка устранимого разрыва** (рис. 13); если же $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то x_0 – точка неустранимого разрыва первого рода, а разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется **скачком функции** $f(x)$ в точке x_0 (рис. 14).

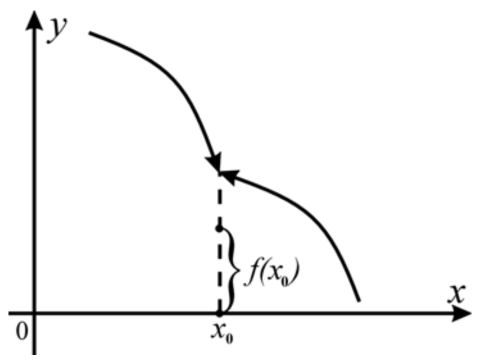


Рис. 13

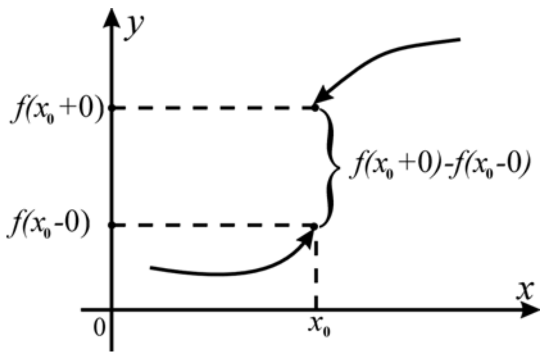


Рис. 14

Пример 7. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2 & \text{при} \quad x\le 2,\\ x & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти точки разрыва функции, скачок функции в каждой точке разрыва и построить график.

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная; она задана двумя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрыв в точке $x=2$, где меняется её аналитическое выражение.

Исследуя точку $x=2$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-2,$$

так как слева от точки $x=2$ функция $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2$;

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} x=2,$$

так как справа от точки $x=2$ функция $f(x)=x$.

Левый и правый пределы функции конечны, но не равны между собой. Поэтому $x=2$ – точка неустранимого разрыва первого рода. В этой точке разрыва функция имеет конечный скачок:

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)-\lim_{x\to 2-0} f(x)=2-(-2)=4.$$

Во всех остальных точках числовой оси функция $f(x)$ непрерывна, так как обе формулы, которыми она задана, представляют собой элементарные непрерывные функции. График этой функции приведен на рис. 15.

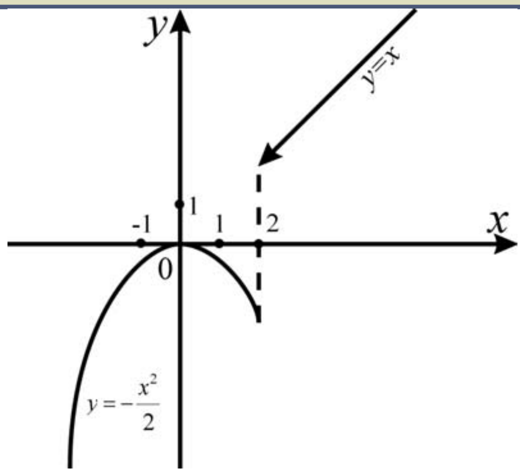


Рис. 15

II. Точки разрыва второго рода.

Определение 9. Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ не существует или бесконечен.

Пример 8. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{при} \quad -\infty < x < -1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad -1 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Найти точки разрыва и скачок функции в каждой точке разрыва.

Решение. Неэлементарная функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. Это значит, что в точке $x=0$ функция разрывна. Исследуем эту точку:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}(1/x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}(1/x) = +\infty.$$

Следовательно, $x=0$ – точка разрыва второго рода (бесконечного).

Исследуем далее точку $x=-1$. Поскольку функция $f(x)$ неэлементарная, она может иметь разрыв в этой точке, где меняется её аналитическое выражение:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0}(2x+5) = 3,$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0}(1/x) = -1.$$

Найденные односторонние пределы функции конечные, но различные. Поэтому в точке $x=-1$ функция имеет неустранимый разрыв первого рода; её конечный скачок в этой точке равен

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) - \lim_{x\to -1-0} f(x) = -4.$$

Во всех остальных точках числовой оси функция $f(x)$ непрерывна; её график показан на рис. 16.

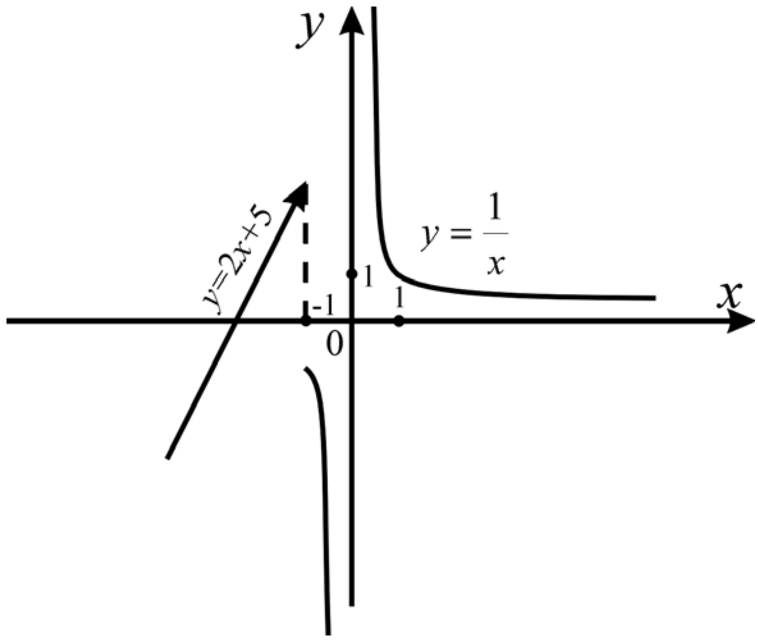


Рис. 16

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Производная и дифференциал

2.1.1. Определение производной, ее механический и геометрический смысл

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

К понятию производной приводит ряд задач из различных областей знания [1–4]. Рассмотрим одну из них.

Задача о скорости прямолинейного движения

Пусть материальная точка совершает прямолинейное неравномерное движение по закону $s = f(t)$, где t – время, а s – путь, проходимый точкой за время t. Пусть t_0 – фиксированный момент времени; $s_0=f(t_0)$ – путь, пройденный точкой к моменту t_0. Поставим задачу: определить скорость v_0 материальной точки в момент t_0. Пусть Δt – бесконечно малый промежуток времени. Рассмотрим момент времени $t_0 + \Delta t$. За время $t_0 + \Delta t$ точка прошла путь $\Delta s=s - s_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ (рис. 17).

Рис. 17

Средняя скорость движения $v_{ср}$ на промежутке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ определяется отношением:

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Скоростью v_0 в момент времени t_0 называется предел (если он существует):

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \qquad (2.1)$$

Таким образом, чтобы найти скорость v_0 в момент времени t_0, нужно найти предел (2.1) отношения приращения функции Δs к приращению аргумента Δt при $\Delta t \to 0$.

Понятие скорости, заимствованное из механики, успешно применяется и к исследованию поведения произвольной функции, приобретая при этом более общий характер.

Пусть на промежутке X определена некоторая функция $y=f(x)$. Возьмем какое-нибудь значение x_0 из этого промежутка и придадим ему приращение Δx. Это вызовет соответствующее приращение функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$. (см. рис. 9).

Заметим, что приращение аргумента может быть выбрано произвольно как по знаку, так и по величине, однако с таким расчетом, чтобы значение $x_0+\Delta x$ не выходило за границы промежутка X. В противном случае $f(x_0+\Delta x)$ теряет смысл, так как вне X функция не определена.

Приращение Δy есть величина, на которую изменилось значение функции $y=f(x)$ при изменении значения аргумента от x_0 до $x_0+\Delta x$.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение 1. Средней скоростью изменения функции $y=f(x)$ на отрезке $[x_0, x_0+\Delta x]$ называется отношение приращения функции Δy к приращению Δx независимой переменной

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение 2. Скоростью изменения функции $y=f(x)$ при фиксированном значении $x=x_0$ независимого переменного называют предел, к которому стремится средняя скорость изменения функции при стремлении к нулю Δx:

$$v=\lim_{\Delta x\to 0} v_{\text{ср}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Определяя скорость изменения функции, мы уже подошли, по существу, к понятию производной. Дадим определение производной.

Определение 3. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю произвольным образом, то есть

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если такого предела не существует, то говорят, что данная функция в точке x_0 производной не имеет.

Таким образом, производная при данном значении $x=x_0$ – если существует – есть определенное число. Если же производная существует во всем промежутке X, то есть при каждом значении $x\in X$, то она является функцией от x. Эта функция называется **производной функцией** от данной функции

$f(x)$, или просто **производной** от этой функции. Функция, имеющая конечную производную, называется **дифференцируемой**, а действие нахождения производных называется **дифференцированием.**

Производная обозначается одним из символов: $f'(x)$, y', y'_x, dy/dx, а ее значение при $x = x_0$ обозначается $f'(x_0), y'(x_0), y'_x(x_0), y'_0, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Таким образом, по определению

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}. \qquad (2.2)$$

В случае, когда передел (2.2) равен бесконечности определенного знака говорят, что существует **бесконечная производная.**

Замечание 1. Из определения производной функции вытекает и способ ее вычисления. Чтобы вычислить производную функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 , необходимо:

1) значению аргумента $x=x_0$ дать некоторое приращение Δx и получить новое значение аргумента $x= x_0 + \Delta x$;

2) найти соответствующее приращение функции $\Delta y=f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

3) составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

3) вычислить предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, если он существует.

Пример 1. Пользуясь определением, найти производную функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение.

1) Дадим значению аргумента $x_0=1$ приращение Δx. Новым значением аргумента будет $1 + \Delta x$.

2) Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = \sqrt[3]{1+\Delta x} - 1.$$

3) Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{1+\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

4) Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{1}{3}.$$

Здесь мы воспользовались пределом (1.17), рассмотренным в п. 1.7.

Пример 2. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = \sin x$ в некоторой фиксированной точке x.

Решение.

1. Дадим некоторому значению x приращение Δx.
2. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

3. Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x}$.

4. Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+(\Delta x/2))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\cos(x+\Delta x/2) = \cos x,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} = 1$, и, в силу непрерывности функции, $\cos x$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2) = \cos x.$$

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x=x_0$, то она в этой точке непрерывна.

Замечание 2. Обратное заключение неверно, то есть из того, что в какой-нибудь точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ непрерывна, еще не следует, что в этой точке она дифференцируема: функция $f(x)$ может и не иметь производной в точке x_0.

Пример 3. Дана функция $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \ge 0, \\ -x & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$ (рис. 18).

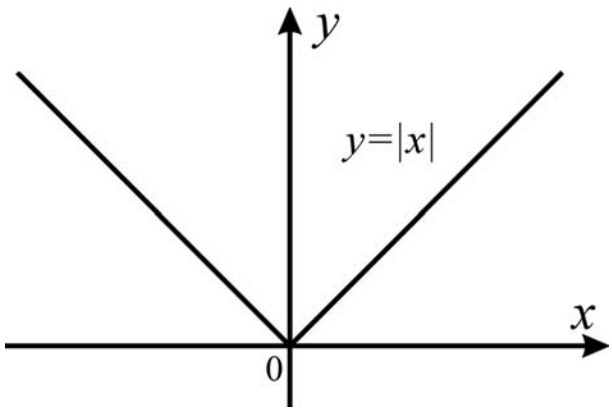


Рис. 18

Доказать, что эта функция непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет производной в этой точке.

Решение.

1) В точке $x = 0$ эта функция непрерывна, так как

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} x = 0;$$
$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} (-x) = 0,$$

так что $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ существует и равен нулю. Но и $f(0)=0$. Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ (как, впрочем, и во всякой другой точке).

2) Покажем, что функция $f(x)= | x |$ не имеет производной в точке $x = 0$. В самом деле,

$$f(0+\Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|,$$
$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad \Delta x>0, \\ -1 & \text{при} \quad \Delta x<0. \end{cases}$$

Отсюда очевидно, что

$$\lim_{\Delta x\to+0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = +1,$$

в то время как

$$\lim_{\Delta x\to-0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = -1.$$

Таким образом, записанные правый и левый пределы различны и, значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ не существует, то есть для данной функции не существует производной в точке $x = 0$. С геометрической точки зрения это означает, что график функции $y = f(x)$ не имеет в точке $x_0 = 0$ касательной (см. рис. 18).

Механический смысл производной

Возвращаясь к задаче, рассмотренной в начале п. 2.1.1, получим

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt},$$

то есть скорость v прямолинейного неравномерного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t.

В этом и заключается механический смысл производной.

Геометрический смысл производной

Пусть функция $f(x)$ имеет при $x=x_0$ производную $f'(x_0)$. Покажем, что кривая $y=f(x)$ имеет в точке $M(x_0, f(x_0))$ касательную, причем угловой коэффициент этой касательной равен значению производной $f'(x_0)$. С этой целью дадим значению аргумента x_0 приращение Δx и обозначим через N точку $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ (см. рис. 19). Секущая MN образует с положительным направлением оси OX некоторый угол β. Как видно из чертежа,

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{или} \qquad \beta=\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

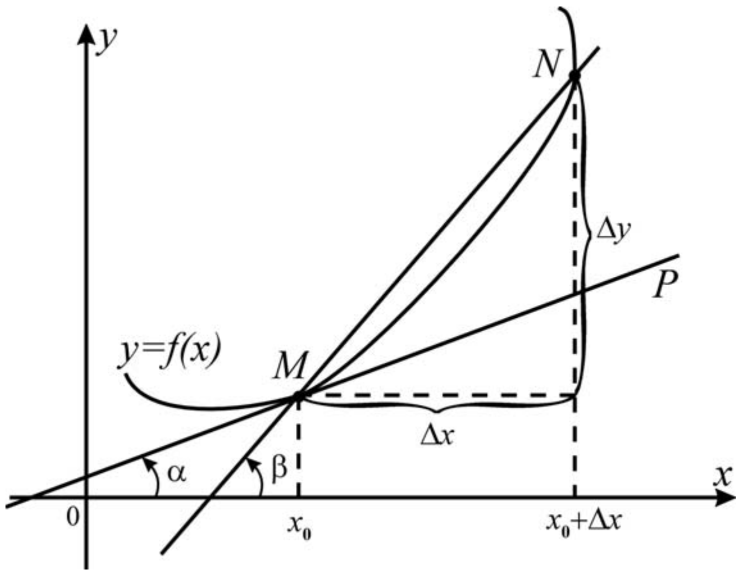


Рис. 19

Если $\Delta x\to 0$, то

1) точка N будет неограниченно приближаться к точке M, двигаясь вдоль по кривой $y=f(x)$;

2) секущая MN будет поворачиваться вокруг точки M;

3) соответственно будет изменяться и угол β.

Так как по условию производная $f'(x_0)$ существует, то, пользуясь непрерывностью функции $\operatorname{arctg} x$, можем записать

$$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{acrtg}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Но тогда существует и предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta=\operatorname{arctg} f'(x_0)$, то есть существует предельное значение угла β, которое мы обозначим через α. А это значит, что существует предельное положение MP секущей MN, то есть прямая MP является касательной к кривой $y=f(x)$ в точке M и $\operatorname{arctg} f'(x_0)=\alpha$ или $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, **производная функции $f(x)$ в данной точке x_0 геометрически представляет собой угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, то есть тангенс угла между касательной и положительным направлением оси OX.**

Если в некоторой точке производная обращается в бесконечность, то это значит, что касательная к кривой в этой точке параллельна оси ординат. Если же производная в точке равна нулю, то касательная к кривой в этой точке параллельна оси абсцисс (см. рис. 20).

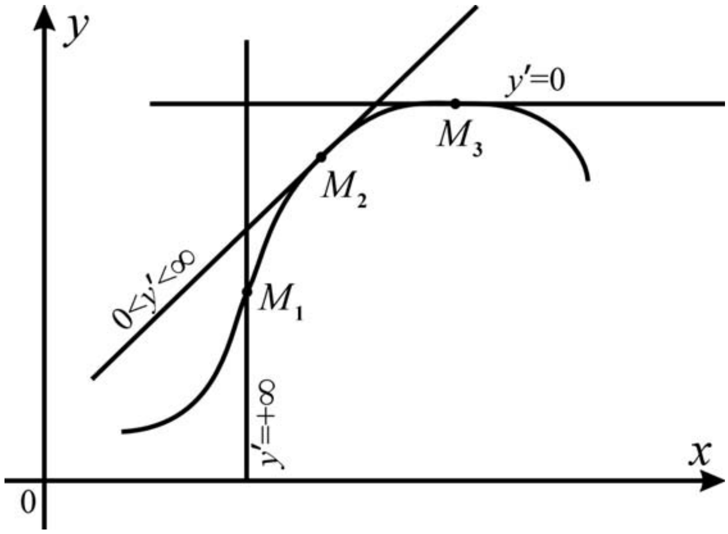


Рис. 20

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, проходящая через точку касания (x_0, y_0) перпендикулярно к касательной, называется **нормалью** к кривой в этой точке. Уравнение нормали имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

2.1.2. Дифференцирование функций

Непосредственное дифференцирование функций, осуществляемое на основе определения производной, очень утомительно при применении его к сложно устроенным функциям, поэтому устанавливают некоторые общие правила дифференцирования и выводят производные для первичных элементарных функций.

Общие правила дифференцирования

Теорема 1. Производная постоянной равна нулю, то есть если $y = C$, где $C = \text{const}$, то $y' = 0$.

Теорема 2. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме производных этих функций.

Для случая, например, трех слагаемых имеем

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'. \qquad (2.3)$$

Теорема 3. Производная от произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную от второй функции, то есть, если

$$Y = uv, \text{ то } y' = u'v + uv'. \qquad (2.4)$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, то есть, если $y = cu$, где $c = \text{const}$, а u – дифференцируемая функция, то $y' = cu'$.

Следствие 2. $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$ (если u – функция, имеющая производную, а c – постоянная).

Замечание 1. Теорема 3 может быть распространена на случай произведения любого конечного числа сомножителей. Например, для трех функций имеем

$$(u\,v\,w)' = u'vw + v'uw + w'uv.$$

Теорема 4. Производная дроби (то есть частного от деления двух функций) равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя, то есть если

$$y = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0), \qquad \text{то} \qquad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (2.5)$$

Следствие. Пусть в (2.5) $u=c$ ($c=\text{const}$). Тогда имеем

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{c'v - cv'}{v^2}$$

или (так как $c'=0$):

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2}v'. \qquad (2.6)$$

Производная обратной функции

Теорема 5. Если монотонная и непрерывная на данном промежутке функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 этого промежутка производную, отличную от нуля $f'(x_0) \neq 0$, то и обратная к $f(x)$ функция $x = \varphi(y)$, построенная на соответствующем промежутке, имеет в соответствующей точке y_0 ($y_0 = f(x_0)$) производную, причем $\varphi'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Пример 1. Найти производную функции $y = \arcsin x$.

Решение. Функция $y = \arcsin x$ на (-1; +1) будет обратной для функции $x = \sin y$, рассматриваемой на $\left(-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right)$. На этом промежутке $\dfrac{dx}{dy} = \cos y \neq 0$ (см. пример 2 п. 2.1.1). Следовательно,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<+1), \text{ то есть}$$

$$\mathbf{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Перед корнем берем знак плюс, потому что $\cos y > 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right)$.

Аналогично устанавливается [3], что

$$\mathbf{(\arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<+1)},$$

$$\mathbf{(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)},$$

$$\mathbf{(\mathrm{arcctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)}.$$

Производная сложной функции

Если $y = f(u)$, а u является не независимой переменной, а функцией независимой переменной x: $u=\varphi(x)$, то таким образом, $y = f[\varphi(x)]$.

Функция у называется в этом случае **сложной функцией *x*.** Переменная u называется **промежуточной переменной.**

Теорема 6. Если функция $u=\varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u_x'=\varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ имеет при соответствующем значении и производную $y_u'=f'(u)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ в указанной точке x также имеет производную, которая равна

$$y'_x = f'_u(u)\cdot\varphi'(x),$$

где вместо u должно быть подставлено выражение $u = \varphi(x)$. Коротко,

$$\mathbf{y'_x = y'_u \cdot u'_x} \tag{2.7}$$

то есть производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента по x.

Замечание 2. Теорема 6 распространяется и на сложные функции, которые задаются с помощью цепи, содержащей три и более звена. Например, если $y = f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$, то есть, если $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$, то

$$\mathbf{y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x}. \tag{2.8}$$

Формулы (2.7) и (2.8) дифференцирования сложной функции являются очень важными.

Используя определение производной, теоремы 5, 6 и, проводя рассуждения, аналогичные тем, которые приведены в примере 2 в п. 2.1.1 и в примере 1 в п. 2.1.2, получим следующую таблицу [1–2].

Таблица производных элементарных функций

1. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n – действительное число).

   1а. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. 1б. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

2. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

3. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

4. $(\mathrm{tg}\,u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.

5. $(\mathrm{ctg}\,u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

6. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u}\log_a e = \dfrac{u'}{u\ln a}$.

   6а. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. 6б. $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$.

7. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u' (a\rangle 0, a \neq 1)$.

   7а. $(e^u)' = e^u u'$.

8. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

9. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

10. $(\mathrm{arctg}\,u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

11. $(\mathrm{arcctg}\,u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

12. $(\sec u)' = \sec u \cdot \mathrm{tg}\,u \cdot u'$.

13. $(\mathrm{cos\,ec}\,u)' = -\mathrm{cos\,ec}\,u \cdot \mathrm{ctg}\,u \cdot u'$.

Замечание 3. Если функция, которую надо продифференцировать, не является сложной, то мы в формулах 1–13 таблицы производных элементарных функций будем полагать, что $u=x$, то есть u – независимая переменная, а тогда $u'_x=1$ (производная независимой переменной равна единице) и поэтому, применяя указанные формулы, на u' умножать не придется, так как такое умножение равносильно умножению на единицу. Так, например, при $u=x$ формула 1 примет вид: $(x^n)'=nx^{n-1}$, формулы 6а и 7а примут соответственно вид $(\ln x)'=1/x$, $(e^x)'= e^x$ и так далее.

Пример 2. Найти производную функции $y=5x^4-3x^2+x-6$.

Решение.

$$y'=(5x^4-3x^2+x-6)'=(5x^4)'-(3x^2)'+(x)'-(6)'=5(x^4)'-3(x^2)'+(x)'-(6)'=$$
$$5\cdot 4\cdot x^3-3\cdot 2\cdot x+1-0=20x^3-6x+1.$$

Здесь мы воспользовались теоремами 1, 2, следствием 1 к теореме 3 и формулой 1 в таблице производных элементарных функций при $u=x$.

Пример 3. Найти производную функции $y=e^{x^2}$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y=e^u$, где $u=x^2$. Тогда по формуле (2.7) $y'_x=y'_u\cdot u'_x=e^u\cdot 2x$. Заменив u на x^2, окончательно получим: $y'=e^{x^2}\cdot 2x$.

Пример 4. Найти производную функции $y=x^3\cdot\sin x$.

Решение. Используя формулу (2.4), получим

$$y'=\left(x^3\right)'\cdot\sin x+x^3(\sin x)'=3x^2\cdot\sin x+x^3\cos x.$$

Пример 5. Найти производную функции $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.5)

$$y'=\frac{\left(x^2\right)'\left(x^2+1\right)-x^2\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y=\cos\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.8) дифференцирования сложной функции. Здесь цепочка из трех звеньев: $y=\cos u$; $u=\sqrt{v}$; $v=\dfrac{1}{1+x}$. В этом примере следует сначала продифференцировать косинус. Так как косинус вычисляется от квадратного корня, то вслед за этим надо продифференцировать корень. Но корень вычисляется от дроби, а поэтому надо продифференцировать дробь и все три полученные производные перемножить:

$$y'=\underbrace{-\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}}_{\text{производная косинуса}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}}}_{\text{производная корня}}\cdot\underbrace{\left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]}_{\text{производная дроби}}.$$

Окончательно $$y'=\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}.$$

Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать по основанию e, а потом уже приступить к дифференцированию. Этот прием получил название **логарифмического дифференцирования**. Производная от логарифма функции называется логарифмической производной.

Рассмотрим способ логарифмического дифференцирования. Пусть требуется найти производную y' функции $y = f(x)$.

1) Прологарифмируем эту функцию по основанию e:

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x).$$

2) Продифференцируем обе части полученного равенства, учитывая, что $\ln y$ есть сложная функция от x: $\dfrac{y'}{y} = \varphi'(x)$.

3) Заменим y его выражением через x и определим y':

$$y' = y\varphi'(x) = f(x)\varphi'(x).$$

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной от показательно-степенной функции

$$y = [u(x)]^{v(x)}, \quad (u(x) > 0), \tag{2.9}$$

то есть когда и основание, и показатель степени есть функции от x.

Пример 7. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{\dfrac{\sin x \cdot \sqrt{1+x}}{(1-x)^2 \cdot \mathrm{arctg} x}}$.

Решение.

1) Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \frac{1}{3}\left[\ln(\sin x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) - 2\ln(1-x) - \ln(\mathrm{arctg} x)\right].$$

2) Продифференцируем обе части полученного равенства:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left[\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{2(1+x)} + \frac{2}{1-x} - \frac{1}{\mathrm{arctg} x(1+x^2)}\right].$$

3) Найдем y':

$$y' = y \cdot \frac{1}{3}\left[\mathrm{ctg} x + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{2}{1-x} - \frac{1}{\mathrm{arctg} x(1+x^2)}\right].$$

Заменяя y его выражением через x, получим окончательно

$$y' = \sqrt[3]{\frac{\sin x \cdot \sqrt{1+x}}{(1-x)^2 \cdot \mathrm{arctg} x}} \cdot \left[\frac{1}{3}\mathrm{ctg} x + \frac{1}{6(1+x)} - \frac{2}{3(1-x)} - \frac{1}{3\mathrm{arctg} x(1+x^2)}\right].$$

Производная показательно-степенной функции

Применяя логарифмическое дифференцирование, найдем производную показательно-степенной функции (2.9). Пусть $u'(x)$ и $v'(x)$ существуют.

1) Прологарифмируем по основанию e обе части (2.9):

$$\ln y = v(x)\ln u(x).$$

2) Найдем производную от обеих частей последнего равенства

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

3) Умножая теперь обе части этого равенства на y и учитывая (2.9), получим окончательно

$$y' = [u(x)]^{v(x)}\left\{v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right\}.$$

Пример 8. Найти производную функции $y = x^x \quad (x > 0)$.

Решение. Применяя логарифмическое дифференцирование, последовательно находим:

1) $\ln y = x\ln x$.

2) Дифференцируем обе части этого равенства, считая $\ln y$ сложной функцией от x:

$$\frac{y'}{y} = x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

3) Выражаем y':

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(1 + \ln x).$$

Производные высших порядков. Формула Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a,b]$. Значения производной $f'(x)$, вообще говоря, зависят от x, то есть **производная $f'(x)$ представляет собой тоже функцию от x**. Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную от функции $f(x)$.

Производная от первой производной называется **производной второго порядка,** или **второй производной** от первоначальной функции, и обозначается символом y'' или $f''(x)$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$$(y')' = y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Пример 9. Найти вторую производную функции $y = x^5$.

Решение.

$$y' = 5x^4, \quad y'' = \left(5x^4\right)' = 20x^3.$$

Производная от второй производной называется **производной третьего порядка,** или **третьей производной,** и обозначается y''' или $f'''(x)$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$:

$$\left(y''\right)' = y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} \cdot 1$$

Вообще, **производной *n*-го порядка от функции *f*(*x*)** называется производная (первого порядка) от производной (*n* – 1)-го порядка и обозначается символом $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$, или $\dfrac{d^ny}{dx^n}$:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

(Порядок производной берется в скобки для того, чтобы его нельзя было принять за показатель степени).

Производные четвертого, пятого и высших порядков обозначаются также с помощью римских цифр: y^{IV}, y^{V}, y^{VI},... В таком случае порядок производной можно писать без скобок. Например, если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{\mathrm{IV}} = y^{(4)} = 120x$, $y^{\mathrm{V}} = y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0$.

Производные, начиная со второй, называются **производными высшего порядка**.

Для нахождения производной высшего порядка от данной функции приходится последовательно находить все ее производные низших порядков.

Для произведения двух функций можно получить производную любого *n*-го порядка, пользуясь формулой Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots\ldots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)},$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – некоторые функции, имеющие производные любого порядка.

Пример 10. Найти производную $y^{(n)}$ от функции $y = e^{ax} \cdot x^2 \quad (a = \mathrm{const})$.

Решение.

$$u = e^{ax}, \qquad v = x^2,$$
$$u' = ae^{ax}, \qquad v' = 2x,$$
$$u'' = a^2e^{ax}, \qquad v'' = 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u^{(n)} = a^ne^{ax}, \quad v''' = v^{\mathrm{IV}} = \ldots = v^{(n)} = 0,$$

тогда по формуле Лейбница:

$$y^{(n)} = a^n e^{ax} \cdot x^2 + na^{n-1} e^{ax} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} e^{ax} \cdot 2 =$$
$$= e^{ax}\left[a^n x^2 + 2na^{n-1} x + n(n-1)a^{n-2}\right].$$

Дифференцирование неявных функций

До сих пор, рассматривая функции, заданные аналитически, мы все время предполагали, что в левой части равенства, определяющего функцию, стоит только y, а в правой – выражение, зависящее от x: $y = f(x)$. Именно такие функции мы и будем называть **явными**.

Определение 1. Неявной функцией y аргумента x называется функция, значения которой находятся из уравнения

$$f(x, y) = 0, \qquad (2.10)$$

связывающего x и y и не разрешенного относительно y.

Для нахождения производной от неявно заданной функции обе части уравнения (2.10) дифференцируются по x с учетом, что y есть функция от x, и из полученного уравнения определяется y'.

Пример 11. Найти производную y' неявной функции $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Решение. Дифференцируя уравнение по x и имея ввиду, что y есть функция от x, получаем $2x + 2yy' = 0$, откуда $y' = -\frac{x}{y}$.

Параметрическое задание функций. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Зависимость функции y от аргумента x не всегда выражается формулой, связывающей непосредственно y и x. Связь между ними может осуществляться и через посредство некоторой третьей переменной t, называемой **параметром**:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \le t \le \beta). \qquad (2.11)$$

В этом случае говорят, что функция y от x задана **параметрически**.

Если x и y рассматривать как прямоугольные координаты точки на плоскости, то уравнения (2.11) ставят в соответствие каждому значению t из некоторой области его изменения $[\alpha, \beta]$ определенную точку (x, y) на плоскости. С изменением t точка (x, y) опишет некоторую кривую на плоскости. Уравнения (2.11) называются **параметрическими уравнениями** этой кривой.

Если из уравнений (2.11) можно исключить параметр t, то y определяется как явная или неявная функция x. Однако исключение параметра t является часто задачей трудной, а иногда и неразрешимой.

Пример 12. Составить параметрические уравнения окружности радиуса a с центром в начале координат (рис. 21).

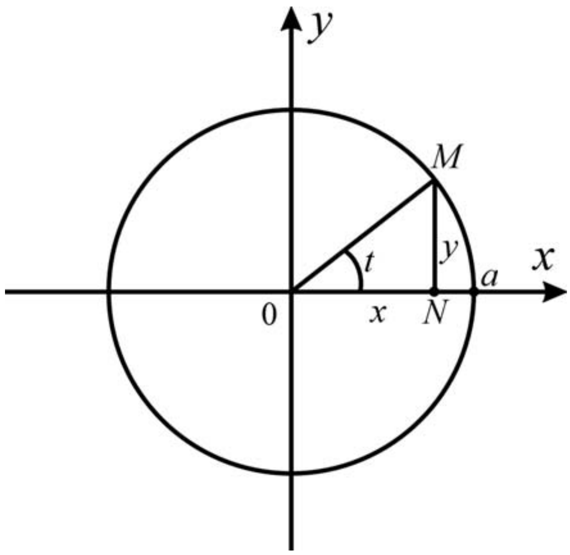


Рис. 21

Решение. Возьмем на указанной окружности произвольную точку $M(x, y)$. Примем за параметр t угол, образованный с осью абсцисс радиусом OM. Из треугольника OMN следует, что

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right\}.$$

Эти уравнения являются параметрическими уравнениями окружности. Когда t пробегает интервал $[0,2\pi]$, точка с координатами (x, y) один раз обегает всю окружность, начиная с точки $(a,0)$.

Исключив из этих уравнений параметр t, получим обычное уравнение окружности. В данном случае для исключения параметра достаточно каждое из уравнений возвести в квадрат и полученные уравнения сложить:

$$+\begin{array}{l} x^2 = a^2\cos^2 t \\ y^2 = a^2\sin^2 t \end{array}$$

$$x^2 + y^2 = a^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right), \text{ т. е.}$$

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Последнее уравнение является уравнением окружности радиуса a с центром в начале координат.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть в параметрическом задании функции (2.11) функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ имеют производные, причем $\varphi'(t)\neq 0$ (на некотором промежутке). Кроме того, для $x=\varphi(t)$ существует обратная функция, имеющая конечную производную. Тогда производная функции

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}$$

вычисляется по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (2.12)$$

Пример 13. Найти производную y'_x от функции

$$\left.\begin{aligned} x&=2t+t^2\\ y&=t^2-2t^3\end{aligned}\right\}.$$

Решение. Используя формулу (2.12), получим

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2t-6t^2}{2+2t}=\frac{2\left(t-3t^2\right)}{2(1+t)}=\frac{t(1-3t)}{1+t}.$$

Применение понятия производной в экономике. Эластичность функции

Издержки производства однородной продукции k есть функция количества продукции x. Поэтому можно записать $k=k(x)$. Пусть количество продукции увеличится на Δx. Количеству продукции $x+\Delta x$ соответствуют издержки производства $k(x+\Delta x)$. Следовательно, приращению количества продукции Δx соответствует приращение издержек производства продукции $\Delta k=k(x+\Delta x)-k(x)$.Среднее приращение издержек производства есть $\Delta k/\Delta x$. Предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta k/\Delta x)=k'(x)$ называется **предельными издержками производства**.

Если обозначить через $u(x)$ выручку от продажи x единиц товара, то $\boldsymbol{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta u(x)/\Delta(x))=u'(x)}$ называется **предельной выручкой**. С помощью производной можно вычислить приращение зависимой переменной, соответствующее приращению независимой переменной. Часто удобнее вычислять процент прироста (относительное приращение) зависимой переменной, соответствующий проценту прироста независимой переменной. Это приводит нас к понятию эластичности функции.

Пусть дана функция $y=f(x)$, для которой существует производная $y'=f'(x)$.

Определение 2. Эластичностью функции $y = f(x)$ относительно переменной x называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \dfrac{x}{y} f'(x)$. Его обозначают $E_x(y) = (x/y) f'(x) = (x/y) dy/dx$. Эластичность относительно x есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1 %.

Пример 14. Вычислить эластичность функции $y = 3x - 6$.

Решение. Находим $y' = 3$, $E_x(y) = \dfrac{x}{y} \cdot y' = \dfrac{x}{3x-6} \cdot 3 = \dfrac{x}{x-2}$. Если, например, $x = 10$, то $E_x(y) = \dfrac{10}{(10-2)} = 1{,}25$. Это означает, что если x возрастает на 1 %, то y увеличивается на 1,25 %. Если предприятие производит x единиц какого-либо товара и определена функция полных затрат, то эластичность полных затрат $E_x(k) = E_k = \dfrac{x}{k} \cdot \dfrac{dk}{dx} = \dfrac{dk/dx}{k/x}$. Следовательно, эластичность полных затрат есть отношение предельных издержек к средним издержкам.

2.1.3. Дифференциал функции

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая в данной точке x конечную производную $f'(x)$. Так как $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то, согласно теореме 1, рассмотренной в п. 1.3, можно записать

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \qquad (2.13)$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

При данном x приращение Δy есть функция только от Δx. При этом оба слагаемых в правой части (2.13) стремятся к нулю при $\Delta x \to 0$ и являются величинами бесконечно малыми. Так как при данном x $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha \cdot \Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\alpha}{f'(x)} = 0$, то бесконечно малая $\alpha \cdot \Delta x$ будет более высокого порядка, чем бесконечно малая $f'(x)\Delta x$.

На этом основании первое слагаемое в правой части формулы (2.13) называют **главной линейной частью** приращения функции.

Определение 1. Главная линейная часть приращения функции, равная произведению производной этой функции в выбранной точке на приращение независимой переменной, называется **дифференциалом функции в некоторой точке** и обозначается символом dy или $df(x)$.

Таким образом, по определению

$$\boldsymbol{dy = f'(x)\cdot \Delta x}. \qquad (2.14)$$

Правая часть равенства (2.14) представляет собой произведение двух переменных величин: производной $f'(x)$, которая зависит от x, и приращения аргумента Δx, которому можно придавать произвольные значения. Поэтому дифференциал функции есть функция двух независимых переменных: аргумента x и его приращения Δx.

Согласно введенному обозначению дифференциала (2.14), равенство (2.13) можно переписать в виде:

$$\Delta y = dy + \alpha\cdot\Delta x. \qquad (2.13')$$

Это равенство показывает, что, вообще говоря, надо различать **приращение** функции и ее **дифференциал**, который **является** лишь **главной частью** этого **приращения**. Однако при достаточно малом Δx мы можем пользоваться приближенным равенством

$$\Delta y \approx dy, \qquad (2.15)$$

которое дает тем лучшее приближение для Δy, чем меньше Δx.

Соотношение (2.15) широко применяется в теории приближенных вычислений. Его можно переписать так: $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ или

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (2.16)$$

Пример 1. Найти приращение и дифференциал функции $y = 3x^3 + x - 1$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0{,}1$. Найти абсолютную и относительную погрешности, которые допускаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение.

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \left[3(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x) - 1\right] - \left(3x^3 + x - 1\right) =$$

$$= 9x^2\Delta x + 9x\Delta x^2 + 3\Delta x^3 + \Delta x = \underbrace{\left(9x^2+1\right)\Delta x}_{dy} + \underbrace{9x\Delta x^2 + 3\Delta x^3}_{\alpha\cdot\Delta x}.$$

Таким образом, $dy = \left(9x^2+1\right)\Delta x$. Отсюда $\Delta y - dy = 9x\Delta x^2 + 3\Delta x^3$. При $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}1$ получаем $\Delta y - dy = 0{,}09 + 0{,}003 = 0{,}093$, $dy = 1$; $\Delta y = 1{,}093$. Определим абсолютную погрешность, которую мы допустим, если приращение функции заменим дифференциалом функции dy. Эта погрешность равна $|\Delta y - dy| = 0{,}093$. Относительная погрешность равна

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}093}{1{,}093} \approx 0{,}085 \text{ или } 8{,}5\%.$$

Замечание 1. Определение дифференциала функции вместо ее приращения дает значительную экономию в вычислениях, а допускаемая при этом погрешность будет тем меньше, чем меньше приращение аргумента.

Пример 2. Вычислить приближенное значение $\sin 30^\circ 1'$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.16). В данном примере $f(x) = \sin x$, $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$, $f'(x) = \cos x$, тогда

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x.$$

Полагая в этой формуле $x = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x = 1' = 0{,}00029$, а $\sin 30^\circ = 0{,}50000$; учитывая, что $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 = 0{,}86602$, получим

$$\sin 30^\circ 1' = 0{,}50000 + 0{,}86602 \cdot 0{,}00029 = 0{,}50025.$$

До сих пор мы говорили лишь о дифференциале функции. Введем понятие дифференциала независимого переменного.

Определение 2. Дифференциалом *dx* независимого переменного *x* называется его приращение, то есть по определению $\boldsymbol{dx = \Delta x}$**.**

Замечание 2. Целесообразность именно такого определения для dx может быть мотивирована тем, что для функции $y = x$ дифференциал dy как раз равен Δx: $dy = y'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Используя определение 2, можно выражение дифференциала функции представить в следующем окончательном виде:

$$\boldsymbol{dy = f'(x)dx}. \tag{2.17}$$

Из (2.17) следует, что $f'(x) = dy \div dx = \dfrac{dy}{dx}$, то есть, что производная данной функции равна частному от деления дифференциала от этой функции на дифференциал независимого переменного. Тем самым обозначение производной через $\dfrac{dy}{dx}$ перестает теперь быть лишь символом, а становится обычным обозначением частного.

Из формулы (2.17) следует, что задача нахождения дифференциала функции равносильна нахождению производной, так как умножив последнюю на дифференциал аргумента, получим дифференциал функции. Следовательно, большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняют свою силу и для дифференциалов [1–3]. Так, например, правила для нахождения дифференциалов имеют вид:

$$1)\ \boldsymbol{d(cu) = cdu} \quad (\boldsymbol{c = \mathrm{const}}),$$

$$2)\ \boldsymbol{d(u \pm v) = du \pm dv}, \tag{2.18}$$

$$3)\ \boldsymbol{d(u \cdot v) = du \cdot v + udv}, \tag{2.19}$$

$$4)\ \boldsymbol{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}}. \tag{2.20}$$

Пример 3. Найти дифференциал функции

$$y = (x^2 + 1)\cdot(\mathrm{arctg}x)^2 - 2x\mathrm{arctg}x + \ln(1 + x^2).$$

Решение. Применяя (2.18) и (2.19), найдем

$$dy = d(x^2+1)\cdot(\operatorname{arctg} x)^2 + (x^2+1)\,d\,(\operatorname{arctg} x)^2 - d(2x)\cdot \operatorname{arctg} x -$$
$$-2x\cdot(\operatorname{arctg} x) + d\ln(1+x^2).$$

Применяя соответствующие формулы для отыскания производных, мы теперь отсюда выводим с помощью (2.17):

$$dy = 2x(\operatorname{arctg}x)^2 dx + 2\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx - 2\operatorname{arctg}x\cdot dx -$$
$$-\frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{2x}{1+x^2}dx = 2x(\operatorname{arctg}x)^2 dx.$$

Здесь можно было и не пользоваться формулами (2.18) и (2.19), а найти сначала y' и затем составить $dy = y'dx$. Проделайте это самостоятельно.

Инвариантность формы дифференциала

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ или $y = f[\varphi(x)]$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции $dy/dx = f'_u(u)\varphi'(x)$, следовательно, $dy = f'_u(u)\varphi'(x)dx$; но $\varphi'(x)dx = du$, поэтому

$$\boldsymbol{dy = f'(u)du}.$$

Таким образом, дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент и был независимой переменной. Иначе говоря, **форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента**. В этом и заключается свойство **инвариантности (неизменяемости) формы дифференциала** функции.

Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где x – независимая переменная. Дифференциал этой функции имеет вид (2.17). Поскольку x – независимая переменная, то $dx = \Delta x$ и может быть взят произвольным, независимо от того или иного выбора x. Поэтому мы можем в (2.17), зафиксировав dx, считать x по-прежнему переменным. В таком случае dy будет функцией от одного переменного x и мы имеем право говорить о дифференциале этой функции.

Определение 3. Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется **дифференциалом второго порядка** и обозначается через d^2y или $d^2 f(x)$, то есть $\boldsymbol{d^2y = d(dy)}$. Дифференциал dy в связи с этим, естественно теперь называть **дифференциалом первого порядка**.

Дифференциал от дифференциала второго порядка называется **дифференциалом третьего порядка** и обозначается d^3y или $d^3f(x)$, то есть $\boldsymbol{d^3y = d(d^2y)}$.

Вообще **дифференциалом *n*-го порядка** называется первый дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка и обозначается $d^n y$, то есть

$$\boldsymbol{d^n y = d\left(d^{n-1} y\right)}. \tag{2.21}$$

Выражение для $d^2 y$ можно получить из (2.17) с помощью дифференцирования, рассматривая в (2.17) dx как постоянный множитель: $d^2 y = d(dy) = \left(f'(x)dx\right)' dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2$. Итак,

$$\boldsymbol{d^2 y = f''(x)dx^2}. \tag{2.22}$$

Из (2.22) найдем выражение для $d^3 y$: $d^3 y = d\left(d^2 y\right) = \left[f''(x)dx^2\right]' dx = f'''(x)dx^3$. Итак,

$$\boldsymbol{d^3 y = f'''(x)dx^3}. \tag{2.23}$$

Методом математической индукции из (2.21) легко вывести, что

$$\boldsymbol{d^n y = f^{(n)}(x)dx^n}. \tag{2.24}$$

Под обозначениями dx^2, dx^3,..., dx^n следует понимать степени дифференциала dx, то есть $(dx)^2$, $(dx)^3$,..., $(dx)^n$.

Замечание 3. Формулы (2.22) – (2.24) справедливы только тогда, когда x является независимой переменной. Действительно, пусть имеем сложную функцию

$$y = F(u),\ u = \varphi(x). \tag{2.25}$$

Мы видели, что дифференциал первого порядка имеет инвариантную форму, независимо от того, будет ли u независимой переменной или функцией от x:

$$dy = F'_u(u)du. \tag{2.26}$$

Дифференциал второго порядка и последующие дифференциалы этим свойством не обладают.

Действительно, на основании (2.25) и (2.26) получаем $d^2 y = d\left(F'_u(u)du\right)$. Но здесь $du = \varphi'(x)dx$ зависит от x, и потому мы получаем $d^2 y = d\left(F'_u(u)\right)du + F'_u(u)d(du)$ или

$$d^2 y = F''_{uu}(u)(du)^2 + F'_u(u)d^2 u, \tag{2.27}$$

где $d^2 u = \varphi''(x)(dx)^2$.

Аналогичным образом находятся $d^3 y$ и т. д.

Пример 4. Найти дифференциалы dy, $d^2 y$ от функции $y = x^4 - 3x^2 + 2$ в случаях, когда:

1) x – независимая переменная,
2) x – функция от другой независимой переменной.

Решение. Дифференциал первого порядка dy в силу свойства инвариантности его формы записывается в обоих случаях одинаково:

$$dy = y'dx = \left(4x^3 - 6x\right)dx = 2\left(2x^3 - 3x\right)dx.$$

В первом случае под dx понимается приращение независимой переменной Δx $(dx = \Delta x)$, во втором случае – дифференциал от x как от функции $(dx \neq \Delta x)$.

Так как дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности, то при отыскании d^2y рассмотрим два случая.

1. Пусть x – независимая переменная. Тогда, имея в виду, что в этом случае dx является постоянной величиной и ее можно выносить за знак дифференциала, получим

$$d^2y = d(dy) = d\left[2\left(2x^3 - 3x\right)dx\right] = 2dx \cdot d\left(2x^3 - 3x\right) =$$
$$= 2dx\left(6x^2 - 3\right)dx = 6\left(2x^2 - 1\right)dx^2.$$

2. Пусть x является функцией от другой переменной. В этом случае величина dx уже не будет постоянной и выносить ее за знак дифференциала, как мы это делали в первом случае, нельзя. Нужно вычислить дифференциал от $y'dx = 2\left(2x^3 - 3x\right)dx$ как от произведения двух переменных. Получим

$$d^2y = d(dy) = d\left[2\left(2x^3 - 3x\right)dx\right] = 2d\left[\left(2x^3 - 3x\right)dx\right] =$$
$$= 2\left[d\left(2x^3 - 3x\right)dx + \left(2x^3 - 3x\right)d(dx)\right] = 2\left[3\left(2x^2 - 1\right)dx \cdot dx + \left(2x^3 - 3x\right)d^2x\right] =$$
$$= 6\left(2x^2 - 1\right)dx^2 + 2\left(2x^3 - 3x\right)d^2x.$$

2.2. Применения дифференциального исчисления к исследованию функций

2.2.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 1 (Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке X и во внутренней точке x_0 этого промежутка имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке x_0 существует конечная производная, то она равна нулю, то есть $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что в точке на кривой, имеющей абсциссу x_0 (с указанным в теореме свойством), касательная к кривой $y = f(x)$, если она существует, оказывается параллельной оси OX (см. рис. 22).

Теорема 2 (Ролля). Пусть на $[a,b]$ определена функция $y = f(x)$, причем:

1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$;

2) на (a,b) существует конечная производная $f'(x)$;

3) $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри $[a,b]$ найдется такая точка c, что $f'(c) = 0$.

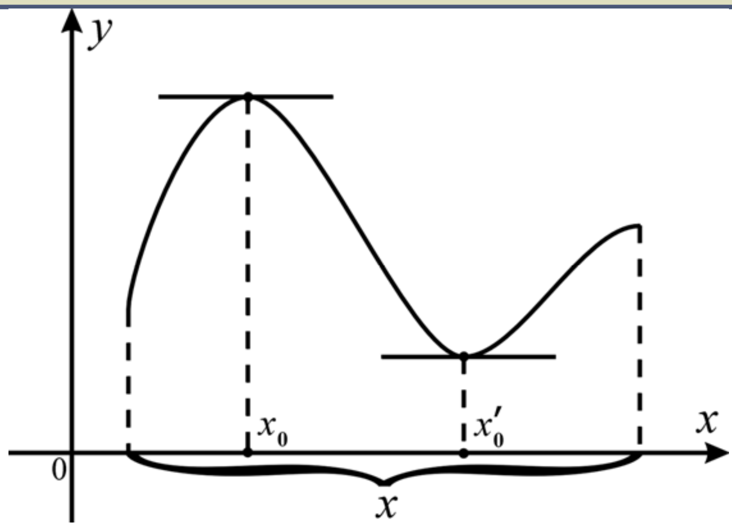


Рис. 22

Геометрически теорема Ролля означает, что если непрерывная кривая изображает дифференцируемую функцию, то между двумя точками, лежащими на одинаковой высоте, всегда имеется точка, в которой касательная параллельна оси OX. Таких точек может оказаться и несколько (рис. 23).

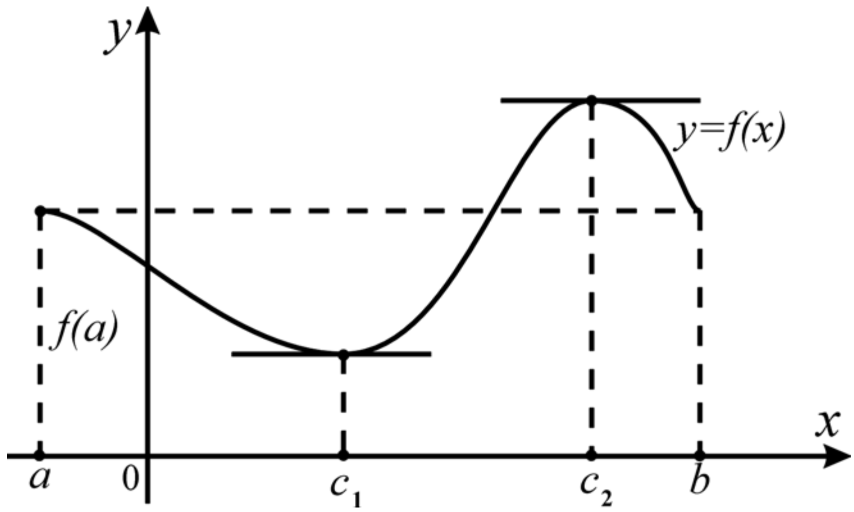


Рис. 23

Теорема 3 (Лагранжа). Пусть на $[a,b]$ определена функция $y = f(x)$, причем: 1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$; 2) на (a,b) существует конечная производная $f'(x)$. Тогда внутри $[a,b]$ найдется такая точка c, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{2.28}$$

Равенство (2.28) называют также **формулой Лагранжа**. Ею иногда удобнее пользоваться в виде $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$, где $a<c<b$.

Выясним геометрический смысл теоремы Лагранжа (рис. 24). Левая часть равенства (2.28) есть тангенс угла α между секущей AB и осью OX, то есть $\operatorname{tg}\alpha$. Правая же часть, как известно, есть тангенс угла α' между касательной в точке $(c, f(c))$ и осью OX, то есть $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha'$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha'$ или $\alpha = \alpha'$. Иначе: на дуге AB найдется точка, в которой касательная параллельна секущей AB. Таких точек может быть и несколько.

Замечание 1. Легко видеть, что теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа, когда секущая AB параллельна оси OX, то есть когда $f(b) = f(a)$.

Теорема 4 (Коши). Пусть на $[a,b]$ заданы функции $f(x)$ и $g(x)$, причем: 1) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$; 2) на (a,b) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ и, кроме того, $g'(x) \neq 0$. Тогда внутри $[a,b]$ найдется такая точка c, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Это равенство называют **формулой Коши**.

Замечание 2. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши (при $g(x) = x$).

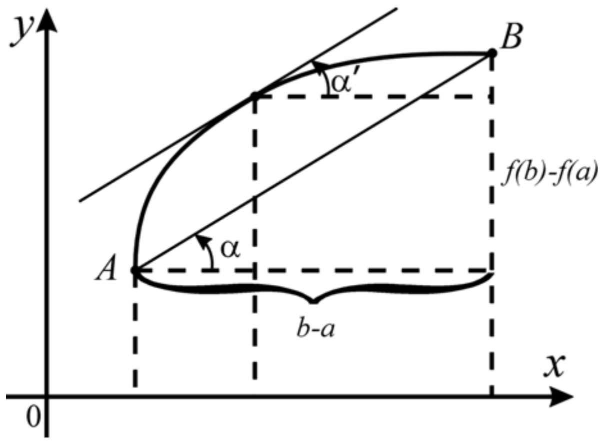


Рис. 24

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши часто называют **теоремами о средних значениях**.

2.2.2. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

Как отмечено в п. 1.4, раскрытие неопределенностей в некоторых случаях представляло собой значительную трудность. Основная трудность заключалась в том, что мы не могли указать общего способа решения задачи. В большинстве случаев приходилось изыскивать различные способы и приемы раскрытия неопределенностей в зависимости от вида неопределенности, а также и от конкретного примера.

Дифференциальное исчисление значительно облегчает задачу раскрытия неопределенностей, предоставляя в наше распоряжение эффективный способ раскрытия неопределенностей правило Лопиталя.

Пусть при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ обе бесконечно малые или обе бесконечно большие. Тогда их отношение не определено в точке $x = a$ и в этом случае говорят, что оно представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или соответственно $\frac{\infty}{\infty}$.

Раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ в точке $x = a$ означает найти

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ когда } \lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ в точке $x = a$ означает найти

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если } \lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x \to a} g(x) = \infty.$$

Одним из способов раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ является правило Лопиталя.

Правило Лопиталя

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

1) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

или

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ и $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

2. Они имеют первые производные в окрестности точки $x = a$ (за исключением самой точки a) и $g'(x) \neq 0$ для всех точек этой окрестности.

3. Существует предел отношения производных $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ (конечный или бесконечный).

Тогда отношение функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ также имеет предел, и он равен k, т. е.

$$\lim_{x \to \mathbf{a}} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\boldsymbol{g'(x)}} = \boldsymbol{k}.$$

Сущность этого правила состоит в том, что в случае неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ вычисление предела отношения функций, при соблюдении указанных требований, заменяется вычислением предела отношения их производных, которое в большом числе случаев оказывается проще.

Замечание 1. Правило Лопиталя применимо и в том случае, если $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ [1].

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Пример 1. Применяя правило Лопиталя, найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}\quad (a=\mathrm{const}).$$

Решение. Здесь обе функции $f(x)=e^{ax}-e^{-2ax}$ и $g(x)=\ln(1+x)$ – бесконечно малые в окрестности нуля, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1-1=0$; $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\ln 1=0$.

Далее $f'(x)=ae^{ax}+2ae^{-2ax}$ и $g'(x)=\frac{1}{1+x}$ существуют во всякой окрестности точки $x=0$, не содержащей точки $x=-1$, причем $g'(x)=\frac{1}{1+x}\neq 0$ $(x>-1)$.

Наконец, существует предел отношения производных:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{\frac{1}{(1+x)}}=3a.$$

Поэтому применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{\frac{1}{(1+x)}}=3a. \qquad (*)$$

Замечание 2. Вычисление предела отношения по правилу Лопиталя обычно записывают сразу так, как это сделано в (∗). В существовании нужных производных и пределов убеждаются в самом ходе вычислений. Если при этом отношение производных $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ снова представляет собой неопределенность, то правило Лопиталя применяют повторно, пока не устранится неопределенность или обнаружится, что нужные пределы не существуют. Поэтому в дальнейшем приводится только запись необходимых преобразований, а проверка выполнения условий их применимости предоставляется читателю.

Пример 2. Применяя правило Лопиталя, найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$ $(a,b-\mathrm{const})$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}5x}$.

Решение. а) Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для вычисления предела применим дважды правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{b\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos ax}{b^2\cos bx}=\frac{a^2}{b^2}.$$

б) Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя 2 раза правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{3x^3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\frac{2}{9}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0.$$

в) Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tg5x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=\frac{0}{0}.$$

Для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ еще раз применим правило Лопиталя, предварительно преобразовав дробь

$$\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x}\right)^2=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{-1}\right)=\frac{5}{3}.$$

Замечание 3. Применяя правило Лопиталя, надо дифференцировать не дробь, а отдельно ее числитель и знаменатель.

Замечание 4. На каждом этапе применения правила Лопиталя следует пользоваться упрощающими отношение тождественными преобразованиями, а также комбинировать это правило с любыми другими приемами вычисления пределов.

Раскрытие неопределенности вида $0\cdot\infty$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ (запись $x\to a$ может означать здесь также и $x\to\infty$ $(+\infty,-\infty)$). Рассмотрим вопрос о вычислении предела вида: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ (неопределенность вида $0\cdot\infty$).

Если искомое выражение переписать в виде

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/g(x)}$$

или в виде

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{1/f(x)},$$

то вопрос может быть сведен к раскрытию неопределенности либо вида $\frac{0}{0}$, либо вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 3. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x \quad (n>0)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, после чего применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-n}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-nx^{-n-1}}=-\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}x^n=0, \text{ так как } n>0.$$

Раскрытие неопределенности вида ∞ - ∞

Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$. Ставится вопрос об отыскании предела вида $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ (неопределенность вида $\infty-\infty$).

Для определения этого предела можно преобразовать разность $f(x)-g(x)$ к такому виду:

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}},$$

тогда

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}.$$

Получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую раскроем по правилу Лопиталя.

Неопределенность вида $\infty-\infty$ можно раскрыть и другим способом, преобразовав разность $f(x)-g(x)$ к виду:

$$f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right),$$

затем найти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ (неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$). Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$. Если же $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, то получим неопределенность $0\cdot\infty$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Преобразуем выражение, стоящее в скобках

$$\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$

– получаем уже неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Применяя правило Лопиталя дважды, находим

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\ln^3 x\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Применим второй прием:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln^3 x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right).$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^3 x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=6\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=$ $=6\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, то есть $\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\ln^3 x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right)=\infty$.

Раскрытие неопределенностей вида 0^0, ∞^0, 1^∞ .

Пусть надо найти предел вида $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ (где $f(x)>0$ в некоторой окрестности точки a) в одном из следующих трех случаев:

а) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ (неопределенность вида 0^0);

б) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ (неопределенность вида ∞^0);

в) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ (неопределенность вида 1^∞).

Неопределенности этих видов сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$, которая была рассмотрена выше. Это достигается с помощью тождества

$$\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}. \tag{2.29}$$

Теперь можно написать, что

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}. \qquad (2.30)$$

и дело сводится к определению предела $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0. На основании (2.29) можем записать, что $x^x = e^{x\ln x}$, а потому на основании (2.30):

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x}. \qquad (2.31)$$

Найдем теперь $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ (здесь имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$):

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\substack{\text{Неопределенность}\\ \text{вида } \frac{\infty}{\infty}\text{. Применяем}\\ \text{правило Лопиталя.}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Подставляя этот результат в (2.31), получим, что $\lim\limits_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. На основании (2.29) можем записать что $\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^x + x\right)}$, а потому

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^x + x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(e^x + x\right)}. \qquad (2.32)$$

Найдем теперь $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(e^x + x\right)$:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(e^x + x\right)}_{\substack{\text{Неопределенность}\\ \text{вида } 0\cdot\infty}} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x}}_{\substack{\text{Неопределенность}\\ \text{вида } \frac{0}{0}\text{. Применяем}\\ \text{правило Лопиталя.}}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2.$$

Подставляя найденное значение в (2.32), получим, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = e^2$.

2.2.3. Формула Тейлора. Приложение к приближенным вычислениям

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные до (n)-го порядка включительно, а в каждой внутренней точке отрезка имеет конечную производную (n + 1)-го порядка, то при $x \in [a,b]$ справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots$$

$$\ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора. Существуют различные формы остаточного члена.

Чаще всего пользуются остаточным членом в форме Лагранжа:

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, где точка ξ лежит между точками a и x, то есть $\xi = a + \theta(x-a)$, причем $0 < \theta < 1$.

Если положить в этой формуле $a = 0$, то получим **формулу Маклорена**

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$ (остаточный член в форме Лагранжа).

Формула Маклорена дает разложение функции по степеням самой независимой переменной.

Приведем разложения некоторых функций по формуле Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$;

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{m+1} x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x),$$

где $R_{2m}(x) = (-1)^m \cos\theta x \cdot \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x),$$

где $R_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos\theta x \cdot \dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$;

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}\cdot x^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$ (всюду $0<\theta<1$).

Так как среди всех функций многочлены являются особенно простыми, то приближенное представление функций многочленами занимает важное место в математическом анализе и его приложениях. Формула Тейлора позволяет приближенно представить функцию $y=f(x)$ при определенных условиях в виде многочлена:

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^{n_0},$$

где n_0 – минимальный из номеров n, для которых $|R_n(x)|<\varepsilon$, где ε – заданная точность.

Пример 1. Представить функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в виде многочлена пятой степени относительно двучлена $x-1$.

Решение. Вычислим значения функции $f(x)=x^{1/3}$ и ее производных до пятого порядка включительно при $a=1$: $f(1)=1$, $f'(x)=\left(1/3\right)x^{-2/3}$, $f'(1)=1/3$; $f''(x)=-\left(2/9\right)x^{-5/3}$, $f''(1)=-2/9$; $f'''(x)=\left(10/27\right)x^{-8/3}$, $f'''(1)=10/27$; $f^{\mathrm{IV}}(x)=-\left(80/81\right)x^{-11/3}$, $f^{\mathrm{IV}}(1)=-80/81$; $f^{\mathrm{V}}(x)=\left(880/243\right)x^{-14/3}$, $f^{\mathrm{V}}(1)=880/243$.
Следовательно, по формуле Тейлора получим

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3-$$
$$-\frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-1)^5+R_5(x),$$

где $R_5(x)=\dfrac{f^{\mathrm{VI}}(\xi)}{6!}(x-1)^6=-\dfrac{12320}{729\cdot 6!}\xi^{-\frac{17}{3}}(x-1)^6$, $1<\xi<x$.

Формула Тейлора широко используется при вычислении значений функции с заданной степенью точности [5–6].

Пример 2. Вычислить с точностью до $\varepsilon=10^{-3}$ приближенное значение $\sqrt[3]{29}$.

Решение. Представим заданный корень так: $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=3(1+2/27)^{1/3}$.
Воспользуемся биномиальным разложением

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+R_n(x).$$

Отсюда получаем приближенное равенство:

$$(1+x)^m \approx 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

погрешность которого

$$R_n(x)=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+}(1+\theta x)^{m-n-1}$$

может быть сделана как угодно малой при $|x|<1$ и при достаточно большом n.

Полагая $x=2/27$ и $m=1/3$, получим

$$\sqrt[3]{29}=3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}-\frac{2^5\cdot 5}{81^4}+\ldots+R_n(x)\right).$$

Оценивая величины последовательных ошибок вычисления $3|R_n|$, находим

$$3|R_1|<\frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2}<0{,}002,\quad 3|R_2|<\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}<0{,}0003.$$

Следовательно, для вычисления с заданной точностью $\varepsilon=10^{-3}$ достаточно взять три члена, которые предшествуют остатку R_2, то есть

$$\sqrt[3]{29}\approx 3(1+0{,}024-0{,}0006)=3{,}072.$$

2.2.4. Исследование функций и построение графиков

Аппарат дифференциального исчисления представляет возможность для создания более совершенных методов исследования функций. С помощью производных первого и второго порядка можно достаточно быстро и полно выяснить все наиболее характерные особенности в поведении той или иной функции. Из самых различных областей науки и техники возникает большое количество практических задач, решение которых связано с исследованием функций и, в частности, с нахождением наибольших и наименьших значений.

Условия постоянства, возрастания и убывания функций

Определение 1. Функция $f(x)$, заданная на некотором промежутке, называется **возрастающей** (или **строго возрастающей**) на этом промежутке, если для любой пары точек промежутка x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $x_1<x_2$, выполняется соотношение $f(x_1)<f(x_2)$. Если при условии $x_1<x_2$ выполняется соотношение $f(x_1)\le f(x_2)$, то $f(x)$ называется **неубывающей**.

Определение 2. Функция $f(x)$называется **убывающей** (или **строго убывающей**) на некотором промежутке, если для любых двух значений x_1 и x_2 аргумента x, взятых из этого промежутка, неравенство $x_1<x_2$ влечет за

собой неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется **невозрастающей** на этом промежутке.

Функции возрастающие и убывающие, а также функции неубывающие и невозрастающие называются **монотонными**.

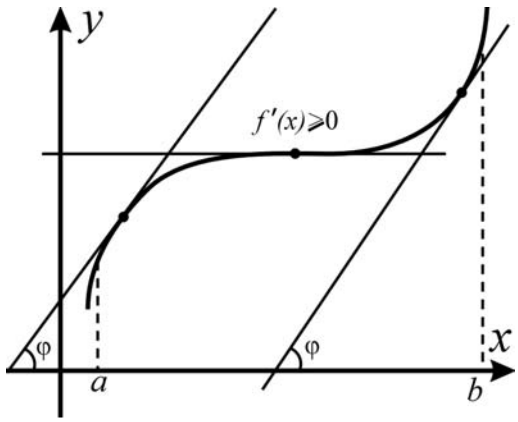
Теорема 1. Пусть на $[a,b]$ определена непрерывная функция $f(x)$, имеющая на (a,b) конечную производную. Тогда:

1. Для того, чтобы $f(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на $[a,b]$, **необходимо и достаточно**, чтобы выполнялось условие $f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$ для всех x из (a,b).

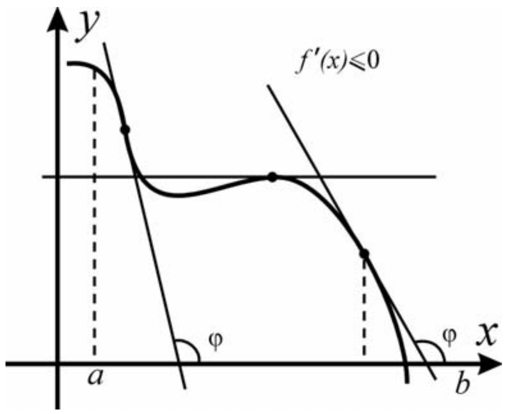
2. Для того, чтобы $f(x)$ была строго возрастающей (строго убывающей) на $[a,b]$, **достаточно**, выполнения условия $f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)$ для всех x из (a,b).

3. Для того, чтобы $f(x)$ была постоянной на $[a,b]$, **необходимо и достаточно**, чтобы $f'(x) = 0$ для всех x из (a,b).

Замечание 1. Условие $f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)$ не является необходимым для строгого возрастания (убывания) функции. Например, функция $y = x^3$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$, так как при $x_1 < x_2$ имеем: $x_1^{\,3} < x_2^{\,3}$. Но ее производная $y' = 3x^2$ равна нулю при $x = 0$. Таким образом, строго монотонная дифференцируемая функция в отдельных точках может иметь производную, равную нулю (рис. 25).



а



б

Рис. 25

Замечание 2. Если вспомнить, что значение производной $f'(x)$ в данной точке x_0 есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, то рассмотренные условия постоянства и монотонности функции становятся еще более наглядными. Если на отрезке $[a,b]$ функция

$f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке на этом отрезке образует с осью OX острый угол φ или в отдельных точках – горизонтальна; тангенс этого угла не отрицателен: $f'(x) = \mathrm{tg}\varphi \geq 0$ (рис. 25, *а*). Если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то угол наклона касательной – тупой (или – в отдельных точках – касательная горизонтальна); тангенс этого угла не положителен (рис. 25, *б*).

Теорема 1 позволяет судить о возрастании или убывании функции по знаку ее производной.

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x^4$.

Решение. Областью определения данной функции является вся ось OX. Находим производную функции $y' = 4x^3$. Из неравенств $4x^3 > 0$ и $4x^3 < 0$ получаем, что данная функция строго возрастает на $(0, +\infty)$ и строго убывает на $(-\infty, 0)$. Производная функция $4x^3$ обращается в нуль при $x = 0$. В точке $x = 0$ функция переходит от убывания к возрастанию (рис. 26).

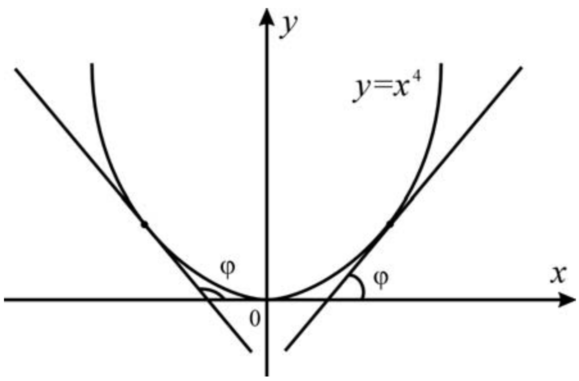


Рис. 26

Максимумы и минимумы функций

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке и x_0 – внутренняя точка этого промежутка.

Определение 3. Точка x_0 называется точкой **максимума** (**минимума**) функции $f(x)$, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ данной точки, что для всякого x из этой окрестности выполняется соотношение

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Если $f(x) < f(x_0)$ $\quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $(x \neq x_0)$, то x_0 называется **точкой строгого максимума**; в противном случае этот максимум называется **нестрогим**. Аналогично определяются точки строгого и нестрогого минимума.

Само значение $f(x_0)$ также принято называть максимумом (минимумом) функции и обозначать: $f_{\max}(x_0)$, $f_{\min}(x_0)$, или просто $f_{\max}$ и $f_{\min}$.

Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума функции**, а значения функции в этих точках – ее **экстремумами**.

Необходимое условие существования экстремума

Теорема 2. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ максимум или минимум, то ее производная обращается в нуль в этой точке, то есть $f'(x_0) = 0$.

Геометрическое истолкование этой теоремы очевидно: касательная к кривой $y = f(x)$ в точке, которая соответствует экстремальному значению функции, параллельна оси OX (или совпадает с ней) (рис. 27).

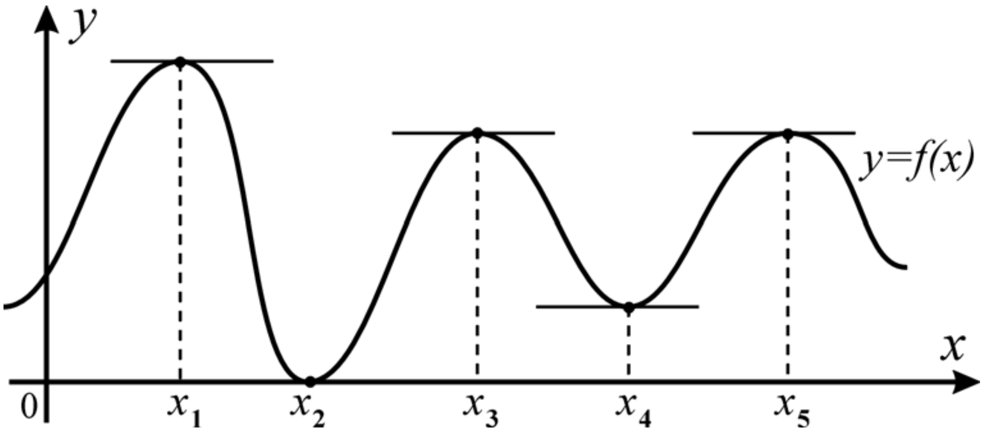


Рис. 27

Замечание 3. Функция может иметь экстремум и в таких точках, в которых производная обращается в бесконечность или вовсе не существует.

Точки, в которых производная функции равна нулю, бесконечности или не существует, называются **критическими** точками, или **точками, подозрительными на экстремум**. Те критические точки, в которых производная равна нулю, называются **стационарными точками**.

Экстремумы функции следует искать среди ее критических точек!

Замечание 4. Не всякая критическая точка является точкой экстремума. Так, например, функция $f(x) = x^3$ имеет производную $f'(x) = 3x^2$, которая при $x_0 = 0$ равна нулю, но в этой критической точке, как легко видеть, экстремума нет (см. рис. 28).

Следовательно, указанное условие является необходимым, но не является достаточным для существования экстремума.

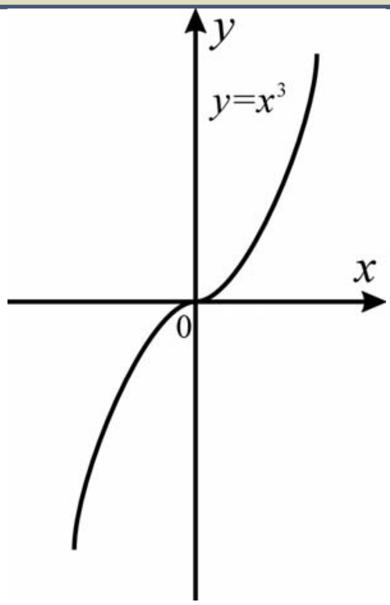


Рис. 28

Достаточные условия существования экстремума функции

Условимся, что в дальнейшем, говоря об экстремуме функции, мы будем подразумевать только строгий экстремум (если не будет оговорено противное).

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_0$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_0 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум. Если производная не меняет знака при переходе через x_0, то экстремума нет.

Схема исследования дифференцируемой функции на максимум и минимум с помощью первой производной

Сформулируем следующее правило для исследования дифференцируемой функции $y = f(x)$ на максимум и минимум:

1. Ищем первую производную функции, то есть $f'(x)$.
2. Находим критические точки функции $f(x)$; для этого:

а) приравниваем первую производную нулю и находим действительные корни полученного уравнения $f'(x) = 0$;

б) находим значения x, при которых $f'(x) = \infty$ или не существует.

3. Исследуем знак производной слева и справа от критической точки. Так как знак производной остается постоянным в интервале между двумя

критическими точками, то для исследования знака производной слева и справа, например, от критической точки x_2 (рис. 29) достаточно определить знак производной в точках α и β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, где x_1 и x_3 – ближайшие критические точки).

4. Найти значения функции в точках, где она достигает экстремума (экстремальные значения функции).

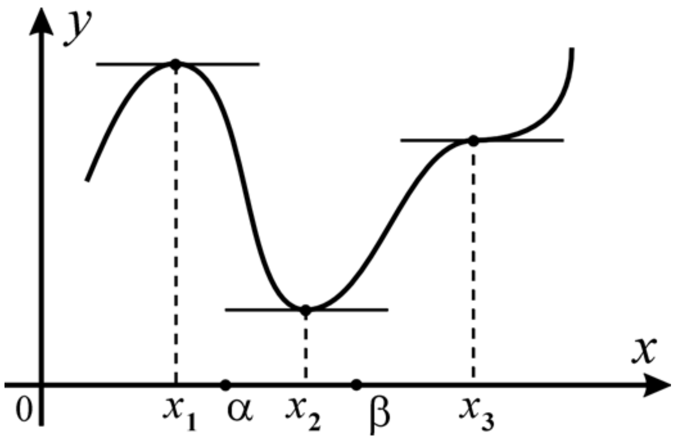


Рис. 29

Пусть $x=x_1$ – критическая точка, то есть $f'(x_1)=0$ или $f'(x_1)=\infty$ или $f'(x_1)$ не существует. Тогда схематическое изображение возможных случаев имеет вид:

Знак $f'(x_1)$ при $x_1-\delta<x<x_1$	**Знак $f'(x_1)$ при $x_1<x<x_1+\delta$**	**Характер критической точки**
+	–	Точка максимума
–	+	Точка минимума
+	+	Нет ни максимума, ни минимума (функция возрастает)
-	-	Нет ни максимума, ни минимума (функция убывает)

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$$

Решение.

1. Находим первую производную: $y'=x^2-4x+3$.

2. Решаем уравнение $y'=0$, то есть уравнение $x^2-4x+3=0$.

Это квадратное уравнение имеет два действительных корня: $x_1 = 1, \quad x_2 = 3$.

Производная всюду непрерывна. Значит других критических точек нет.

3. Располагаем критические точки в порядке возрастания абсцисс: 1; 3. Рассмотрим интервалы (-∞, 1); (1, 3); (3, +∞). Выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак первой производной по выражению $y' = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

В интервале (-∞, 1) возьмем, например, точку x=0: $y'(0) = (-1)(-3) = 3 > 0$; в интервале (1,3) возьмем точку x=2: $y'(2) = (2-1)(2-3) = 1 \cdot (-1) < 0$; в интервале (3, +∞) возьмем точку x=4: $y'(4) = (4-1)(4-3) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$ (вместо этих точек читатель может в каждом из интервалов взять любые другие).

Таким образом, в интервалах первая производная имеет такую последовательность знаков: + – +

Значит, при переходе (слева направо) через значение $x_1 = 1$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при x=1 функция имеет максимум, а именно $y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$. При переходе через значение x=3 производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при x=3 функция имеет минимум, а именно $y_{\min}(3) = 1$. Результаты исследований сведем в таблицу:

x \ ***y′***	**(- ∞, 1)**	**1**	**(1, 3)**	**3**	**(3, + ∞)**
y′	+	0	–	0	+
y	Возрастает	Максимум $y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$	Убывает	Минимум $y_{\min}(3) = 1$	Возрастает

На основании проведенного исследования строим эскиз графика функции (рис. 30).

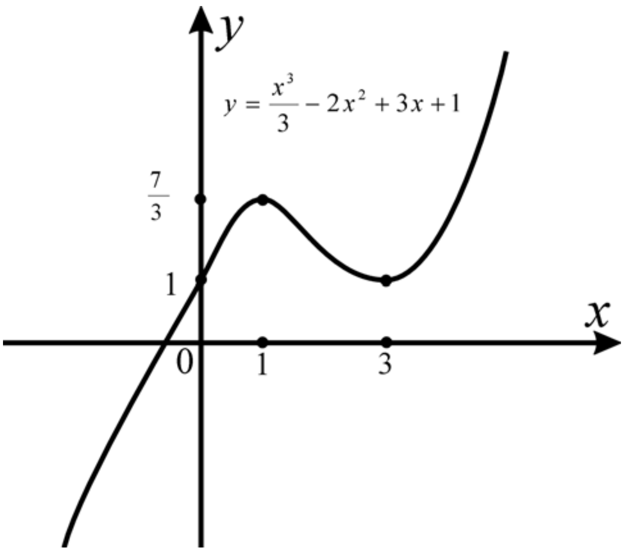


Рис. 30

Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной

Теорема 4 (о достаточных условиях экстремума).

Пусть x_0 – подозрительная стационарная точка, то есть $f'(x_0)=0$. Пусть, кроме того, вторая производная $f''(x)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и $f''(x_0)\neq 0$, тогда x_0 – точка экстремума, причем, если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума, если $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума.

Замечание 5. В тех случаях, когда в критической точке вторая производная обращается в нуль или не существует, второй достаточный признак существования экстремума, сформулированный в теореме 4, неприменим. В этих случаях приходится пользоваться первым достаточным признаком, основанным на перемене знака первой производной.

Схему исследования функции на экстремум с помощью второй производной можно изобразить в следующей таблице:

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	**Характер критической точки**
0	–	Точка максимума
0	+	Точка минимума
0	0	Неизвестен

Пример 3. Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию примера 2. В примере 2 рассматривалась функция

$$y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$$

Там же установлено, что точки $x_1=1$, $x_2=3$ являются критическими точками. Находим вторую производную: $y''=2x-4$.

Так как $y''(1)=2\cdot 1-4=-2<0$, то в точке $x_1=1$ – максимум.

Так как $y''(3)=2\cdot 3-4=2>0$, то в точке $x_2=3$ – минимум.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения. При этом они могут достигаться как во внутренних точках отрезка, так и на его концах. Однако, если наибольшее (наименьшее) значение функции достигается в какой-нибудь внутренней точке x_0, то x_0 обязательно будет точкой максимума (минимума). Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на $[a, b]$, нужно:

1) найти все точки максимума и минимума, лежащие в интервале (a, b);

2) вычислить значения функции во всех этих точках, а также значения на концах отрезка, то есть $f(a)$ и $f(b)$;

3) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$, заданной на отрезке [-2, 2].

Решение. Исследуем функцию на экстремум. Находим первую производную: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$. Решаем уравнение $4x(x^2 - 1) = 0$ и находим стационарные точки: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ $x_3 = 1$. Других критических точек нет. Исследуем функцию на экстремум с помощью второй производной. Находим вторую производную: $y'' = 4(3x^2 - 1)$. Так как $y''(0) = -4 < 0$, то в точке $x_1 = 0$ – максимум, $y_{\max}(0)=5$; так как $y''(\pm 1) = 8 > 0$, то в max точках $x_2 = -1$ и $x_3 = 1$ – минимум, $y(\pm 1)=4$. Определяем значения функции на концах отрезка: $y(-2)=y(2)=13$.

Сравнивая экстремальные значения функции и значения на концах, заключаем, что $y=4$ является наименьшим, а $y=13$ – наибольшим значениями функции на указанном отрезке.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Рассмотрим на плоскости кривую $y = f(x)$, являющуюся графиком однозначной дифференцируемой функции $f(x)$.

Определение 4. Говорят, что кривая обращена **выпуклостью вверх (выпуклостью вниз)** на интервале (a, b), если все точки кривой лежат ниже (выше) любой ее касательной на этом интервале.

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть **выпуклой**, а обращенную выпуклостью вниз – **вогнутой**. На рис. 31 показана кривая, выпуклая на интервале (a, b) и вогнутая на интервале (b, c).

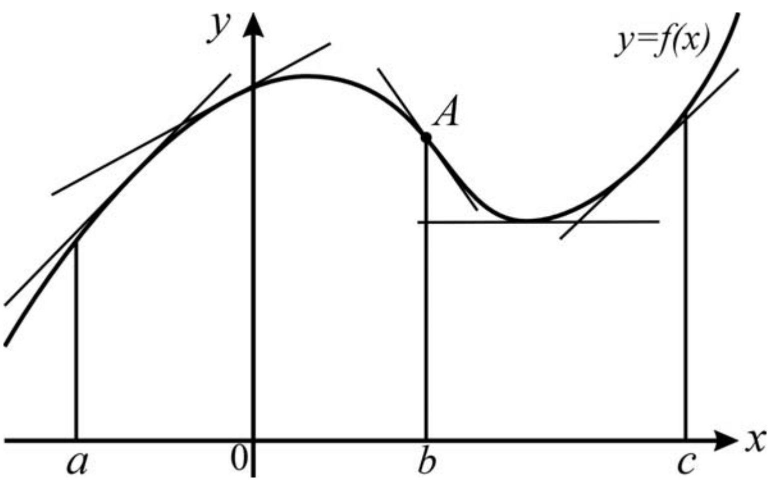


Рис. 31

Направление выпуклости кривой является важной характеристикой ее формы.

Установим признаки, по которым можно исследовать функцию $y=f(x)$ на выпуклость и вогнутость на различных интервалах.

Теорема 5. Если во всех точках интервала $(a,\ b)$ вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то есть $\boldsymbol{f''(x)<0}$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале **выпукла**, если же $\boldsymbol{f''(x)>0}$ $\forall\ x\in(a,\ b)$, то кривая $y=f(x)$ – **вогнута** на этом интервале.

Определение 4. Точка $\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ графика функции $y=f(x)$, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба** кривой.

На рис. 31 A – точка перегиба. Очевидно, что в точке перегиба касательная, если она существует, пересекает кривую, так как с одной стороны от этой точки кривая лежит под касательной, а с другой стороны – над нею.

Необходимые условия существования точек перегиба

Если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y=f(x)$, то либо $\boldsymbol{f''(x_0)=0}$, либо $\boldsymbol{f''(x_0)}$ **не существует.**

Определение 5. Точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются **критическими точками II рода**.

Точки перегиба кривой $y=f(x)$ надо искать только среди критических точек II рода.

Достаточные условия существования точек перегиба

Пусть x_0 – критическая точка II рода. Точка $(x_0,\ y_0)$ есть точка перегиба линии $y=f(x)$, если $f''(x)$ меняет знак при переходе x через x_0.

Пример 5. Найти интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба кривой $y=x^4+x^3-18x^2+24x-12$.

Решение. Найдем первую и вторую производные: $y'=4x^3+3x^2-36x+24$, $y''=12x^2+6x-36=12\left(x^2+\dfrac{x}{2}-3\right)$, откуда $y''(x)=0$ при $x_1=-2$, $x_2=\dfrac{3}{2}$ (критические точки). Вторая производная конечна и существует при любом $x\in(-\infty,+\infty)$, поэтому других критических точек нет.

Следовательно, $y''>0$ на интервалах $(-\infty,-2)$ и $(\frac{3}{2},\infty)$; $y''<0$ на интервале $(-2,\ \frac{3}{2})$. Знак второй производной определяет выпукла или вогнута кривая в данном интервале. Полученные результаты сведем в таблицу.

x	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < +\infty$
Знак y''	+	-	+
$f(x)$	Вогнута	Выпукла	Вогнута

Поскольку при переходе через точки $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{3}{2}$ вторая производная меняет знак, точки (-2, -124) и $\left(\frac{3}{2}, -8\frac{1}{16}\right)$ являются точками перегиба.

Асимптоты

Понятие асимптот вводится для кривых, ветви которых уходят в бесконечность, то есть если точка M, движущаяся по этой кривой, может удалиться от начала координат как угодно далеко. Это может быть в случаях, когда функция не ограничена или когда она задана на неограниченном промежутке.

Определение 5. Прямая линия L называется **асимптотой** для кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки M (x, y), лежащей на кривой, до этой прямой стремится к нулю при движении точки M вдоль какой-нибудь ветви кривой в бесконечность (рис. 32).

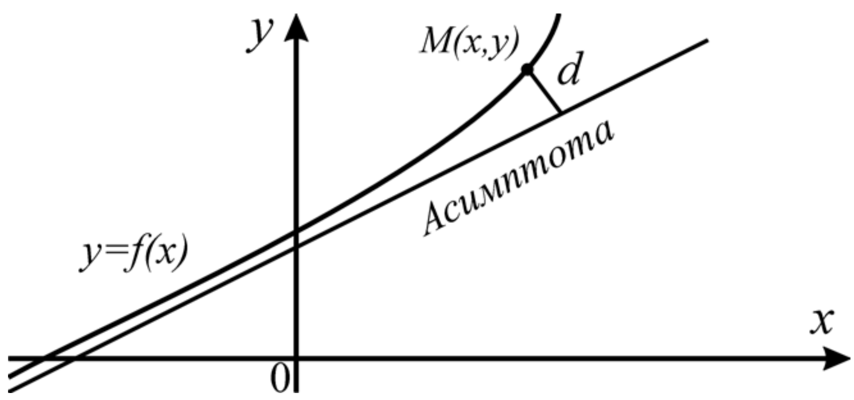


Рис. 32

Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты

Если хотя бы один из пределов функции $f(x)$ в точке a справа или слева равен бесконечности: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, то прямая $x=a$ – **вертикальная асимптота.**

Горизонтальные асимптоты

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A < \infty$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A < \infty$, то прямая ***y*=*A* – горизонтальная асимптота** (правая при $x \to +\infty$ и левая при $x \to -\infty$).

Пример 6. Найти вертикальные и горизонтальные асимптоты кривой $y = \dfrac{2}{x-5}$.

Решение. Кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 5$, так как

$$\lim_{x\to5\pm0} y = \lim_{x\to5\pm0} \frac{2}{x-5} = \pm\infty,$$

то есть точка $x = 5$ есть точка разрыва второго рода.

Найдем горизонтальную асимптоту:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-5} = 0,$$

то есть $y = 0$ – горизонтальная асимптота. Итак, кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 5$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$ (рис. 33).

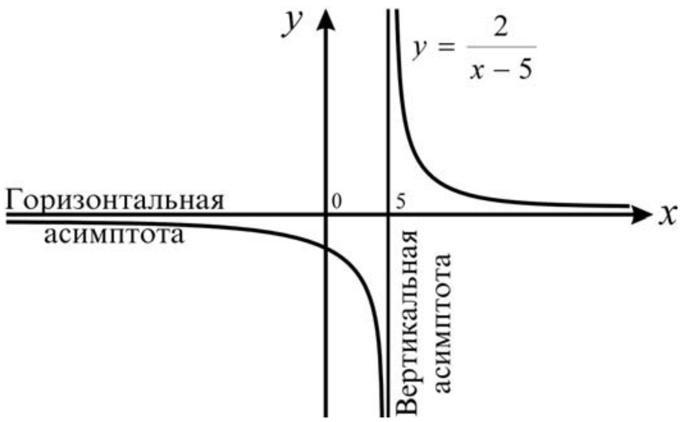


Рис. 33

Наклонные асимптоты

Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - k_1 x\right] = b_1$, то прямая $y = k_1 x + b_1$ – **наклонная (правая) асимптота.**

Если существуют пределы

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - k_2 x\right] = b_2,$$

то прямая $y = k_2 x + b_2$ – **наклонная (левая) асимптота.** (k_1, b_1, k_2, b_2 – const).

Горизонтальную асимптоту можно рассматривать как частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$.

Пример 7. Найти наклонные асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение. Для данной кривой $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2} = 1$,

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [y - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x}\right] = 2.$$

Следовательно, прямая $y=x+2$ – наклонная асимптота данной кривой (рис. 34).

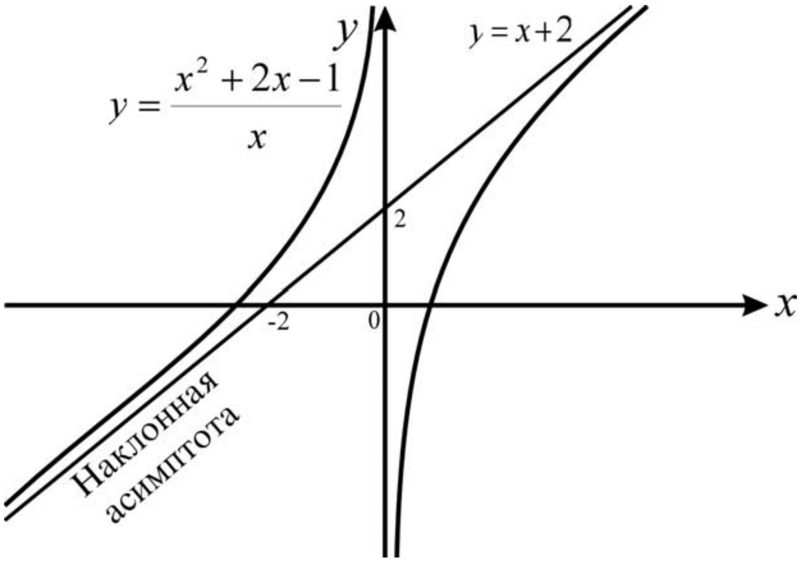


Рис. 34

Самостоятельно покажите, что $x = 0$ – вертикальная асимптота данной кривой.

Общее исследование функций и построение их графиков

Общее исследование функций и построение их графиков удобно выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Проверить четность, нечетность и периодичность функции.
3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти точки экстремума функции, вычислить значения функции в этих точках. Установить интервалы монотонности функции.
6. Найти точки пересечения кривой с осями координат.
7. Найти точки перегиба графика функции, интервалы выпуклости и вогнутости функции.

8. Используя результаты исследования, построить график функции. При необходимости уточнить отдельные участки кривой, вычислив координаты дополнительных точек.

Эскиз графика рекомендуется набрасывать уже после нахождения асимптот, если они имеются. Основными ориентирами при построении графика функции являются точки кривой, соответствующие экстремальным значениям функции, точки перегиба, асимптоты.

Пример 8. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1. Данная функция определена на всей числовой оси, кроме точек $x = \pm\sqrt{3}$.

2. Функция нечетная, так как $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. На этом основании можно ограничиться исследованием и построением графика только для $0 \le x < +\infty$. Затем, пользуясь симметричностью, можно будет легко получить и остальную часть графика.

3. Функция имеет разрыв второго рода в точке $x = \sqrt{3}$, причем

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty$$

Следовательно, прямая $x = \sqrt{3}$ является вертикальной асимптотой кривой.

4. Выясним вопрос об асимптотах.

а) Наличие вертикальной асимптоты $x = \sqrt{3}$ уже установлено в п. 3.

б) $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{3-x^2} = \infty$. Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

в) Выясним существование наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3-x^2} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[y-(-x)\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2} = 0.$$

Следовательно, прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой данной кривой. Так как пределы найдены для $x \to \infty$ (то есть они одинаковы и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$), то к асимптоте $y = -x$ график функции будет приближаться как при удалении вправо, так и при удалении влево (см. рис. 35).

5. Определим интервалы возрастания, убывания функции и экстремум функции. Находим первую производную:

$$y' = \frac{3x^2(3-x^2)-x^3\cdot(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2}.$$

Приравниваем ее нулю: $\dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2}=0$, откуда $x^2(3-x)(3+x)=0$. Последнее имеет место при x = -3, x = 0 и x = 3 (критические точки). Нам придется исследовать на экстремум только точку x = 3 (точку x = 0 на экстремум не исследуем, так как она является крайней точкой области $[0, +\infty)$). Знак производной слева и справа от точки x = 3, очевидно, будет зависеть от знака числителя в выражении производной, так как знаменатель всегда положителен. В окрестности точки x=3 имеем y'>0 при x<3 и y' < 0 при x > 3. Следовательно, в точке $x=3$ функция имеет максимум и $y_{\max}(3)=-4\dfrac{1}{2}$. Если $x\in(0,\sqrt{3})\bigcup(\sqrt{3},3)$, то $y'(x)$ > 0, то есть функция на этих интервалах возрастает. Если $x\in(3,+\infty)$, то $y'(x)$ < 0, то есть при x > 3 функция монотонно убывает. В точке $x=\sqrt{3}$, как отмечено в п. 3, функция имеет бесконечный разрыв.

6. Так как y=0 только при x=0, то пересечение с осями координат происходит только в начале координат.

7. Определим точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функции. Найдем $y''(x)$: $y''(x)=\dfrac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$.

Мы видим, что y'' = 0 только при x = 0 (критическая точка второго рода). При этом в окрестности точки x=0 будет y'' < 0 при x < 0 и y'' > 0 при x>0. Следовательно, в начале координат кривая имеет перегиб (впрочем, наличие перегиба в начале координат обнаружилось бы и после симметричного продолжения графика налево от оси OY). Направление вогнутости может измениться при переходе через разрыв кривой, поэтому следует выяснить знак y'' и около точек разрыва функции. В данном случае y'' > 0 на промежутке $(0,\sqrt{3})$ и y'' < 0 на промежутке $(\sqrt{3},+\infty)$. Следовательно, кривая вогнута на $(0,\sqrt{3})$ и выпукла на $(\sqrt{3},+\infty)$.

Итак, исследуемая кривая характеризуется для $x\geq 0$ следующей таблицей:

x	**0**	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},3)$	**3**	$(3,+\infty)$
y'	0	+	не существует	+	0	–
y''	0	+	не существует	–	–	–
y	0	Возрастает. Кривая вогнута	Разрыв 2-го рода $f(\sqrt{3}-0)=+\infty$ $f(\sqrt{3}+0)=-\infty$	Возрастает	Максимум $y(3)=-4\frac{1}{2}$	Убывает
					Кривая выпукла	

8. По данным исследования строим график (рис. 35).

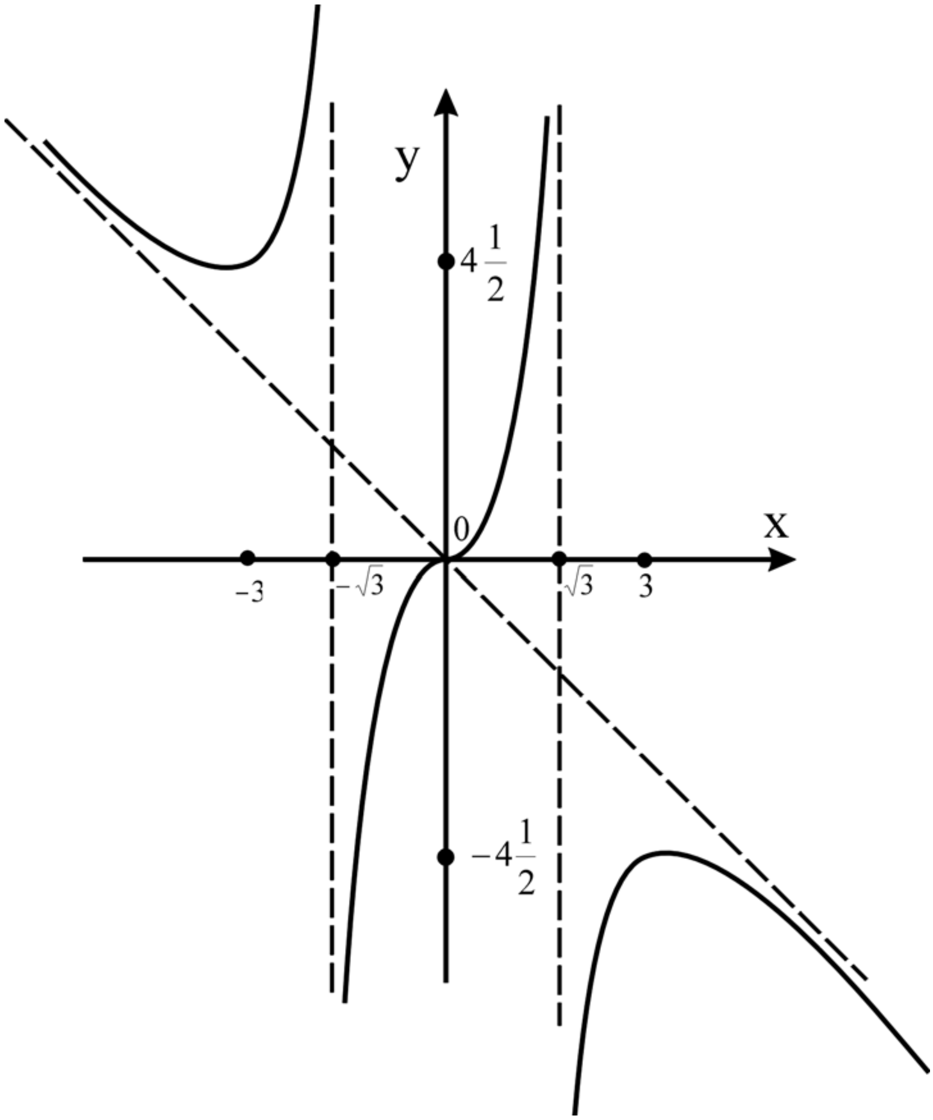


Рис. 35

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Неопределенный интеграл

3.1.1. Неопределенный интеграл и простейшие приемы его вычисления

Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

Как известно, основная задача дифференциального исчисления заключается в отыскании производной или дифференциала заданной функции.

Можно поставить обратную задачу: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, которая бы удовлетворяла условию $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$. Отыскание функции по заданной её производной или дифференциалу и является одной из основных задач интегрального исчисления. Задачи восстановления функции по ее производной или дифференциалу часто возникают в различных областях знания, например в геометрии, физике, механике, а также в технике.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** для функции $f(x)$, если для любого x из области определения $f(x)$ выполняется равенство $\boldsymbol{F'(x)=f(x)}$ или $\boldsymbol{dF(x)=f(x)dx}$.

Пример 1. Первообразной функцией для функции $f(x)=3x^2$ на $(-\infty,+\infty)$ является функция $F(x)=x^3$, так как $F'(x)=\left(x^3\right)'=3x^2=f(x)$. Возникает вопрос: если данная функция имеет первообразную функцию, то единственна ли эта первообразная? Оказывается, что первообразная у заданной функции не одна. Так, для функции $f(x)=3x^2$ первообразной будет не только функция $F(x)=x^3$, но и функция $F_1(x)=x^3+1$ и $F_2(x)=x^3-\sqrt{3}$ и вообще всякая функция вида $\Phi(x)=x^3+C$, где C – произвольное действительное число.

Указанное обстоятельство справедливо для любой функции $f(x)$, имеющей первообразную. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если в некотором (конечном или бесконечном, замкнутом или нет) промежутке X функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – любая постоянная, также будет первообразной. Обратно, каждая функция, первообразная для $f(x)$ в промежутке X, может быть представлена в этой форме.

Из теоремы 1 следует, что любые две первообразные для одной и той же функции могут отличаться друг от друга только на постоянное слагаемое. Значит, если для данной функции $f(x)$ известна одна первообразная $F(x)$, то совокупность всех ее первообразных представляется выражением

$$F(x)+C, \tag{3.1}$$

где C – произвольная постоянная. Иными словами, других первообразных, не входящих в выражение (3.1), быть не может. В силу этого выражение (3.1) исчерпывает все семейство первообразных функций для $f(x)$ и представляет собой самый общий вид функции, которая имеет производную $f(x)$ или дифференциал $f(x)dx$.

Определение 2. Если $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$, то выражение $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Итак, по определению

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}. \tag{3.2}$$

Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, произведение $f(x)dx$ – **подынтегральным выражением**, а переменная x – **переменной интегрирования**.

Для всякой ли функции $f(x)$, заданной на некотором промежутке, существует первообразная $F(x)$ (а значит, и неопределенный интеграл)? Оказывается, что не для всякой. Однако, если $f(x)$ непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нем первообразную (а следовательно, и неопределенный интеграл). Всюду в п. 3.1 будем говорить лишь об интегрировании непрерывных функций.

Восстановление функции по ее производной, или, что тоже самое, отыскание неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции, называют **интегрированием**.

Поскольку интегрирование – обратное действие по отношению к дифференцированию, то благодаря этому проверка правильности результата интегрирования осуществляется дифференцированием последнего: дифференцирование должно дать подынтегральную функцию.

Пример 2. Проверить, что $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + C$. Дифференцирование дает: $\left(\dfrac{x^4}{4} + C\right)' = x^3$. Следовательно, интегрирование выполнено верно.

Основные свойства неопределенного интеграла

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие его свойства.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$
$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, то есть

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть если $a = \mathrm{const} \neq 0$, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции в отдельности, то есть

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций.

Таблица основных интегралов

В п. 2.1 мы получили таблицу производных простейших элементарных функций, представляющую собой вычислительный аппарат дифференциального исчисления. Каждая формула этой таблицы, устанавливающая, что для некоторой функции $F(x)$ производной будет $f(x)$, непосредственно приводит к соответствующей формуле интегрального исчисления

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Например, из формулы $(\sin x)' = \cos x$ получаем $\int \cos x dx = \sin x + C$. Таким путем мы приходим к следующей таблице основных неопределенных интегралов:

1. $\int \mathbf{0} \cdot d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}$.
2. $\int \mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$.
3. $\int \boldsymbol{x}^n d\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{x}^{n+1}}{\boldsymbol{n}+1} + \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{n} \neq -1)$.
4. $\int \dfrac{d\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}} = \ln|\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{x} \neq 0)$.
5. $\int \boldsymbol{a}^x d\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{a}^x}{\ln \boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C} \quad (0 < \boldsymbol{a} \neq 1)$.
6. $\int \boldsymbol{e}^x d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^x + \boldsymbol{C}$.
7. $\int \sin \boldsymbol{x} d\boldsymbol{x} = -\cos \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$.
8. $\int \cos \boldsymbol{x} d\boldsymbol{x} = \sin \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a$.

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0; x \neq \pm a)$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad \left(a \neq 0; x \neq \pm\sqrt{-a}\right)$.

Формулы 13 и 14 занимают исключительное положение в нашей таблице, ибо эти формулы не имеют аналогов среди формул таблицы производных. Формулы 13, 14 будут выведены в п. 3.1.3. Для проверки этих формул достаточно убедиться в том, что производные выражений, стоящих в правых частях этих формул, совпадают с соответствующими подынтегральными функциями. Проделайте это самостоятельно!

Приведенную таблицу, также как и таблицу производных основных элементарных функций, следует знать наизусть.

Замечание 1. Производная любой элементарной функции представляет собой также элементарную функцию [3]. Иными словами, мы установили, что **операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций**.

Отметим сразу же, что с операцией интегрирования дело обстоит иначе. Можно доказать, что интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями. Примерами таких интегралов могут служить следующие:

$1^0.\ \int e^{-x^2} dx$, $\quad 2^0.\ \int \cos\left(x^2\right) dx$, $\quad 3^0.\ \int \sin\left(x^2\right) dx$,

$4^0.\ \int \frac{dx}{\ln x} \quad (0 < x \neq 1)$, $\quad 5^0.\ \int \frac{\cos x}{x} dx \quad (x \neq 0)$, $\quad 6^0.\ \int \frac{\sin x}{x} dx \quad (x \neq 0)$.

Каждый из указанных интегралов **представляет собой функцию, не являющуюся элементарной**. Указанные функции не только реально существуют, но и играют большую роль в различных вопросах физики. Так, например, интеграл 1^0, называемый интегралом Пуассона или интегралом ошибок, широко используется в статистической физике, в теории теплопроводности и диффузии, интегралы 2^0 и 3^0, называемые интегралами Френеля, широко применяются в оптике. Часто встречаются в приложениях и интегралы $4^0 - 6^0$, первый из которых называется интегральным логарифмом, а последние два – интегральными косинусом и синусом.

Для всех перечисленных новых функций (интеграла Пуассона, интегралов Френеля, интегрального логарифма, синуса и косинуса) составлены таблицы и графики. Ввиду важности для приложений, эти функции изучены с такой же полнотой, как и простейшие элементарные функции.

Замечание 2. Заметим, что хотя и существуют определенные правила отыскания для данной непрерывной функции первообразной, однако интегрирование по сравнению с дифференцированием может представлять значительные трудности, а иногда даже требует некоторой изобретательности.

Дело в том, что в дифференциальном исчислении задача нахождения производной или дифференциала данной функции сводилась к отысканию в таблице соответствующей формулы и затем по ней – производной или дифференциала этой функции.

В интегральном же исчислении, напротив, нет общего приема для вычисления неопределенного интеграла, а имеется ряд методов, дающих возможность свести данный интеграл к табличному и затем записать его по соответствующей формуле. В настоящем пособии будут рассмотрены следующие: метод непосредственного интегрирования, метод замены переменной или способ подстановки, метод интегрирования по частям.

3.1.2. Метод непосредственного интегрирования

Непосредственным интегрированием называют интегрирование, заключающееся в непосредственном использовании таблицы простейших интегралов и их основных свойств.

Чтобы найти неопределенный интеграл от какой-нибудь функции $f(x)$, нужно прежде всего отыскать в таблице интегралов формулу, в левой части которой стоит интеграл такого же вида, как данный, и записать ответ в соответствии с правой частью этой формулы.

Пример 1. Найти $\int x^7 dx$.

Решение. Такого вида интеграл стоит в левой части формулы 3 таблицы интегралов. Согласно этой формуле $\int x^7 dx = \dfrac{x^8}{8} + C$.

Пример 2. Найти $\int 2\sqrt[3]{x^2}\, dx$.

Решение. Имеем $\int 2\sqrt[3]{x^2}\, dx = \int 2x^{2/3} dx$. Применяя свойство 3 неопределенного интеграла и формулу 3 таблицы основных интегралов, получаем

$$\int 2x^{2/3} dx = 2\int x^{2/3} dx = 2\frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{6}{5} x\sqrt[3]{x^2} + C.$$

В тех случаях, когда под знаком интеграла стоит алгебраическая сумма некоторых функций, обычно используют свойство 4 неопределенного интегралаграла, то есть разлагают данный интеграл на сумму нескольких интегралов, из которых каждый можно найти по соответствующей формуле.

Пример 3. Найти $\int\left(2x^3+9x^2-5\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Решение. Применяя свойства 4, 3 неопределенного интеграла и формулу 3 таблицы основных интегралов, получим

$$\int\left(2x^3+9x^2-5\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx=2\int x^3dx+9\int x^2dx-5\int x^{\frac{1}{2}}dx+4\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=$$

$$=2\cdot\frac{x^4}{4}+9\frac{x^3}{3}-5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+4\cdot 2\sqrt{x}+C=\frac{x^4}{2}+3x^2-\frac{10}{3}x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C\ .$$

Отметим, что метод непосредственного интегрирования требует определенных навыков, связанных с преобразованием подынтегральной функции на сумму легко интегрируемых слагаемых.

Пример 4. Найти $\int\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2dx$.

Решение. Используя свойства 2 и 4 неопределенных интегралов, а также формулу 9 таблицы интегралов, получим

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\int(1+\sin x)dx=\int dx+\int\sin xdx=x-\cos x+C.$$

Замечание 1. Все формулы основной таблицы интегралов остаются справедливыми и в том случае, когда переменная интегрирования не является независимой, а представляет функцию от некоторой другой переменной.

Действительно, пусть имеем формулу

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{3.2}$$

где переменная интегрирования x является независимой переменной. В частности, под этой формулой можно понимать любую из формул основной таблицы.

С другой стороны, пусть нам дан интеграл, в котором подынтегральное выражение может быть записано в виде $f(u)du$, где $u=\varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция *u*, следовательно, $du=\varphi'(x)dx$. Иными словами, подынтегральное выражение имеет вид: $f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$. Образуем сложную функцию $F(u)=F[\varphi(x)]$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$F'[\varphi(x)]_x=F'(u)\varphi'(x)=f(u)\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

Тогда

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C,$$

что коротко может быть записано и так:

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{du} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{C}. \tag{3.3}$$

Таким образом, для интеграла $\int f(u)du$ (где u – функция от другой переменной) мы получили формулу, имеющую тот же вид, что и формула (3.2). Благодаря этому область применения основной таблицы интегралов значительно расширяется. Например, из таблицы интегралов имеем формулу

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

На основании формулы (3.3) получаем

$$\int \sin^2 x d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C, \qquad \int \ln^2 x d\ln x = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Решение. Так как $\cos x dx = d\sin x$, то

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Здесь мы применили формулу 3 таблицы интегралов, предварительно заменив в ней x на $u = \sin x$. Справедливость полученного результата легко проверяется дифференцированием.

Чтобы использовать формулу (3.3), надо очень хорошо знать табличные интегралы и табличные производные, чтобы довольно быстро сообразить, что, например,

$$dx = \frac{1}{a}d(ax), \quad dx = d(x+b) \ (a,\, b - \text{const}),$$

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b), \quad xdx = \frac{1}{2}d(x^2),$$

$$x^2 dx = \frac{1}{3}d(x^3), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x),$$

$$\sin x dx = -d(\cos x), \quad \frac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg} x)$$

и так далее.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{x^2+3}$.

Решение. Постараемся получить в числителе дифференциал знаменателя. Для этого запишем интеграл так:

$$\int \frac{xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+3}.$$

Замечая, что $2xdx = d(x^2+3)$, будем иметь

$$\int \frac{xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+3\right)}{x^2+3} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C.$$

В этом примере мы воспользовались формулой 4 в таблице интегралов, заменив в ней x на $u = x^2 + 3$.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

Решение. Так как $e^x dx = de^x$, то

$$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{de^x}{1+\left(e^x\right)^2} = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

В данном случае мы применили формулу 12 в таблице интегралов, положив в ней $a = 1$ и заменив x на $u = e^x$.

Отметим одно полезное следствие из формулы (3.3). Пусть $u = ax + b$ $(a \neq 0)$. Тогда $du = adx$, откуда $dx = \frac{1}{a}du$. Подставляя это в формулу (3.3), получим

$$\boldsymbol{\int f\left(ax+b\right)dx = \frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C}. \qquad (3.4)$$

Часто встречаются случаи, когда $b = 0$:

$$\boldsymbol{\int f\left(ax\right)dx = \frac{1}{a}F\left(ax\right)+C} \qquad (3.5)$$

или $a = 1$:

$$\boldsymbol{\int f\left(x+b\right)dx = F\left(x+b\right)+C}. \qquad (3.6)$$

Например, используя формулу (3.5), получим

$$\int \cos 7x dx = \frac{1}{7}\sin 7x + C.$$

С учетом формулы (3.6) будем иметь, например,

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln\left|x+3\right| + C.$$

Используя формулу (3.4), получим

$$\int \sin\left(2x-6\right)dx = -\frac{1}{2}\cos\left(2x-6\right)+C.$$

Из сказанного следует, что если мы умеем интегрировать функцию $f(x)$, то мы можем легко проинтегрировать и $f(ax+b)$. Так, например, если учесть, что

$$\int \frac{dx}{x} = \ln\left|x\right| + C,$$

то, согласно правилу, выраженному формулой (3.4), находим

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Точно также

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \mathrm{tg}x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Отсюда, в частности, в силу формулы (3.4), следует и более общий результат:

$$\int \mathrm{tg}(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + C.$$

Несмотря на то, что применение обобщенной таблицы основных интегралов значительно увеличивает класс функций, интегралы от которых берутся непосредственно, однако существуют многие классы функций, интегрирование которых не может быть выполнено только с помощью этой таблицы. Наша ближайшая задача и будет состоять в том, чтобы научиться интегрировать как можно более широкие классы функций. Этому вопросу и будет посвящена остальная часть п. 3.1.

3.1.3. Интегрирование методом замены переменной или способом подстановки

Наиболее общим приемом интегрирования функций является способ подстановки, который применяется тогда, когда искомый интеграл

$$\int f(x)dx \tag{3.7}$$

не является табличным, но путем ряда элементарных преобразований он может быть сведен к табличному. Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

I. $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$**,** где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид:

$$\boldsymbol{\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}. \tag{3.8}$$

Действительно, используя свойство 1 неопределенного интеграла, продифференцируем обе части этого равенства. С одной стороны,

$$d\int f(x)dx = f(x)dx,$$

а с другой,

$$d\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = f(x)dx$$

(так как $dx = \varphi'(t)dt$). Таким образом, обе части формулы (3.8) имеют один и тот же дифференциал и потому выражают собой одно и то же семейство первообразных для функции $f(x)$. Это и доказывает равенство (3.8) в том смысле, что правая и левая части его могут отличаться между собой разве лишь на постоянное слагаемое.

Таким образом, для вычисления интеграла (3.7) с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ нужно не только в функции $f(x)$ заменить x через $\varphi(t)$, но и dx выразить через t и dt, то есть положить $dx=\varphi'(t)dt$. Функцию $x=\varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства (3.8). При вычислении неопределенного интеграла с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ мы получаем искомую функцию, выраженную через t. Чтобы возвратиться к прежней переменной x, достаточно в полученной функции заменить t значением, которое находится из соотношения $x=\varphi(t)$, то есть значением $t=\psi(x)$, где $\psi(x)$ – обратная функция для $\varphi(x)$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1}$.

Решение. Здесь полезно применить подстановку $x=t^6$, освобождающую нас от радикалов. Дифференцируем это равенство: $dx=6t^5dt$. Тогда

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1}=\int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^2+1}=6\int \frac{t^8 dt}{t^2+1}=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right)+C.$$

(Целую часть дроби $\frac{t^8}{t^2+1}$ выделяем делением).

Возвращаясь к старой переменной x, получим

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx=6(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x})+\mathrm{C}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^2+3x-1}{\sqrt{x+2}}dx$.

Решение. Чтобы под радикалом в знаменателе стоял одночлен, сделаем замену переменной вида $x=u-2 \quad (0<u<+\infty)$. Имеем

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{\sqrt{x+2}}dx=\int \frac{2(u-2)^2+3(u-2)-1}{\sqrt{u}}du=\int \frac{2u^2-5u+1}{\sqrt{u}}du=$$

$$=2\int u^{\frac{3}{2}}du-5\int u^{\frac{1}{2}}du+\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{2}{15}u^{\frac{1}{2}}(6u^2-25u+15)+\mathrm{C}.$$

Возвращаясь к старой переменной x, получим

$$\int \frac{2x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x+2}} = \frac{2}{15}(6x^2 - x - 11)\sqrt{x+2} + \text{C}.$$

Здесь удобно было бы также применить подстановку: $x = u^2 - 2 \ \ (u > 0)$. Вычислите самостоятельно интеграл, используя указанную подстановку.

II. При замене переменной часто удобнее задавать не x как функцию от t, а, наоборот, задавать t как функцию от x, то есть использовать подстановку вида:

$$\boldsymbol{t = \psi(x)},$$

где $\psi(x)$ – дифференцируемая функция. Формула замены переменной при такой подстановке имеет вид:

$$\int \boldsymbol{f[\psi(x)]\psi'(x)dx = \int f(t)dt}. \qquad (3.9)$$

Пусть нужно вычислить интеграл, имеющий вид: $\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$. Здесь удобно положить $\psi(x) = t$, тогда $\psi'(x)dx = dt$,

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C,$$

то есть если в подынтегральном выражении некоторого интеграла числитель есть дифференциал знаменателя, то этот интеграл равен (с точностью до постоянного слагаемого) натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя.

Применим этот результат к вычислению нескольких интегралов.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \text{ctg}x dx$.

Решение. Так как $\text{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$, то интеграл можно записать в виде:

$$\int \text{ctg}x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x}.$$

Теперь, замечая, что $d\sin x = \cos x dx$, полагаем $t = \sin x$. Это дает: $dt = \cos x dx$ и $\int \text{ctg}x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2}{1+x^3}dx$.

Решение. Подстановка $t = x^3 + 1$, $dt = 3x^2 dx$ даёт

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|x^3 + 1| + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (a \neq 0)$.

Решение. Для вычисления этого интеграла сделаем предварительные преобразования:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\cdot\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

Теперь находим

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}=\frac{1}{2a}\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{d(x+a)}{x+a}=$$

$$=\frac{1}{2a}\ln|x-a|-\frac{1}{2a}\ln|x+a|+C,$$

то есть $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Здесь мы использовали формулу (3.9) Этим установлена формула 13 таблицы интегралов.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ $\quad (a\neq 0; x\neq\pm\sqrt{-a})$.

Решение. Положим $x+\sqrt{x^2+a}=t$. Тогда с целью отыскания dx найдём первоначально dt: $dt=(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}})dx=\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{tdx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Отсюда мы можем найти не только само dx, но и сразу всё подынтегральное выражение: $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}$,

так что

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C$$

или

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

Этим установлена формула 14 таблицы интегралов.

3.1.4. Метод интегрирования по частям

К числу эффективных методов интегрирования относится метод интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям основан на обращении формулы дифференцирования произведения двух функций.

Пусть u и v – дифференцируемые функции от x. Тогда

$$d(uv)=udv+vdu,$$

откуда

$$udv=d(uv)-vdu.$$

Проинтегрировав обе части этого равенства, получим формулу

$$\int udv = uv - \int vdu. \quad (3.10)$$

Эта формула называется **формулой интегрирования по частям**. Метод интегрирования, основанный на её применении, называется **методом интегрирования по частям**. Он сводит вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым для интегрирования.

Применение метода интегрирования по частям состоит в том, что подынтегральное выражение данного интеграла стараются представить в виде произведения $u \cdot dv$, где u и v – некоторые функции от x, причём эти функции выбирают так, чтобы $\int vdu$ был для вычисления проще, чем исходный интеграл. При этом для вычисления $\int vdu$ предварительно находят du и $v = \int dv$. (Точнее говоря, в качестве v берут одну какую-либо из искомых первообразных функций, находимых по dv, так как тождество (3.10) имеет место при любой из таких первообразных. Поэтому в дальнейшем при вычислении v постоянное C в записи будет нами опускаться).

Рассмотрим ряд примеров на применение формулы (3.10).

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Интересной особенностью данного примера является то, что разложение на множители u и dv подынтегрального выражения здесь как бы уже дано в готовом виде и нам остается положить $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, откуда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$.

Применяя формулу (3.10), получим

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Далеко не всегда интегрирование по частям совершается так относительно просто, как это было в примере 1. В более сложных случаях все искусство применения формулы (3.10) заключается в том, чтобы удачно разбить подынтегральное выражение на два множителя: u и dv, что, разумеется, не всегда сразу удается. Например, если бы мы, пытаясь применить формулу (3.10) к интегралу $\int xe^x dx$, взяли $u = e^x$, $dv = xdx$, откуда $du = e^x dx$, $v = 1/2 \cdot x^2$, то получили бы

$$\int xe^x dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx,$$

то есть пришли бы к еще более сложному интегралу, чем тот, от которого отправлялись. То же самое получится и в случае, если взять $u = xe^x$, $dv = dx$.

Однако, если принять $u = x$, $dv = e^x dx$ и, значит $du = dx$, $v = e^x$, то формула (3.10) быстро приводит к цели:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Таким образом, приведенный пример показывает, что u и dv нельзя выбирать как попало. Только последний выбор оказался удачным, и это не случайно. В самом деле, из двух множителей подынтегральной функции второй множитель (то есть e^x) при дифференцировании и интегрировании не изменяется; первый же (то есть x) при интегрировании повышает степень, а при дифференцировании обращается в единицу – выражение более простое, чем он сам. Поэтому выгоднее первый множитель дифференцировать, а второй интегрировать, то есть положить $u = x$, $dv = e^x dx$, что и сделано выше.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int x \ln x dx$.

Решение. Этот интеграл отличается от предыдущего только тем, что вместо e^x стоит $\ln x$. Но если бы мы здесь за u взяли x, а $\ln x dx$ за dv, то пришлось бы искать ещё отдельно и v. Хотя таким путем задачу всё-таки можно было бы довести до конца, всё же и здесь, руководствуясь теми же соображениями, что и выше, можно указать иной путь, более простой, а именно: положим $u = \ln x$, $dv = xdx$. Отсюда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$. Тогда

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Замечание 1. Правило интегрирования по частям имеет более узкую область применения, чем метод замены переменной. Однако следует иметь в виду, что есть интегралы, которые могут быть вычислены только с помощью метода интегрирования по частям, например, следующие: $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin axdx$, $\int x^n \cos axdx$, $\int x^n \ln^m xdx$, $\int x^n \mathrm{arctg} xdx$, $\int x^n \arcsin xdx$ и др.

Замечание 2. Следует иметь в виду, что разложение подынтегрального выражения $f(x)dx$ на два множителя u и dv нужно производить так, чтобы в правой части равенства (3.10) получился более простой интеграл, чем данный. За u надо принять такую функцию, которая упрощается при дифференцировании, а множитель dv должен легко интегрироваться. Например, в интегралах вида $\int x^n \cos axdx$, $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin axdx$ упрощается при дифференцировании множитель x^n, его и надо принять за u: $u = x^n$, $du = nx^{n-1} dx$, тогда в интеграле справа в (3.10) показатель степени уменьшится на 1. В интегралах вида $\int x^n \ln xdx$, $\int x^n \mathrm{arctg} xdx$, $\int x^n \arcsin xdx$ более существенно упрощается при дифференцировании множитель $\ln x$, $\mathrm{arctg} x$, $\arcsin x$; его и принимают за u:

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x}dx,$$

$$u = \text{arctg}x, \quad du = \frac{1}{1+x^2}dx,$$

$$u = \arcsin x, \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

В результате под интегралом в правой части равенства (3.10) вместо трансцендентной функции будет алгебраическая.

Часто формулу интегрирования по частям приходится применять последовательно несколько раз.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int x^2 \sin xdx$.

Решение. Пусть $u = x^2$, $dv = \sin xdx$, тогда $du = 2xdx$, $v = -\cos x$. Следовательно,

$$\int x^2 \sin xdx = -x^2 \cos x + 2\int x\cos xdx.$$

К последнему интегралу опять применим правило интегрирования по частям, полагая $u = x$, $dv = \cos xdx$, $du = dx$, $v = \sin x$. Тогда

$$\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

и окончательно получаем

$$\int x^2 \sin xdx = -x^2 \cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

Таким же образом вычисляется и интеграл $\int x^2 \cos xdx$.

Иногда повторное интегрирование по частям приводит заданный интеграл к самому себе. В этом случае может получиться или ничего не дающее тождество (значит, интегрирование было проведено нерационально), или такое уравнение первой степени относительно искомого интеграла, из которого находится заданный интеграл. Иллюстрируем сказанное следующим примером.

Пример 4. Вычислить интегралы $I_1 = \int e^{ax} \cos bxdx$ и $I_2 = \int e^{ax} \sin bxdx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям к второму интегралу. Положим $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}dx$, отсюда $du = b\cos bxdx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и, следовательно, по формуле (3.10) будем иметь

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos bxdx.$$

Полученный интеграл вычисляем снова интегрированием по частям; полагая $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}dx$, откуда $du = -b\sin bxdx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$, так что

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{a}e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin bxdx, \qquad (3.11)$$

то есть мы пришли к исходному интегралу – это обычный камень преткновения для начинающих. Может показаться, что надо искать другой способ; на самом же деле задача почти решена. Действительно, подставляя значение этого интеграла в предыдущее выражение, получим

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

Перенося интеграл из правой части этого равенства в левую, получим

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2}e^{ax} + C$$

и окончательно

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bxdx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C. \qquad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) следует:

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bxdx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$

Замечание 3. При интегрировании часто приходится последовательно применять метод подстановки и метод интегрирования по частям. Покажем это на примере.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Положим здесь $t=\sqrt{x}$, так что $x=t^2$ и, значит, $dx = 2tdt$. Тогда получим

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int te^t dt.$$

Применим к последнему интегралу метод интегрирования по частям. Положим, $u=t$, $dv = e^t dt$, так что $du = dt$, $v = e^t$, откуда находим

$$2\int te^t dt = 2(te^t - \int e^t dt) = 2(te^t - e^t) + C.$$

Наконец, возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

3.1.5. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

I. Рассмотрим интеграл $\boldsymbol{I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}$.

Преобразуем предварительно трехчлен, стоящий в знаменателе, представив его в виде суммы или разности квадратов:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right],$$

где обозначено $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$.

Знак плюс или минус берется в зависимости от того, будет ли выражение, стоящее слева, положительным или отрицательным, то есть будут ли корни трехчлена ax^2+bx+c комплексными или действительными.

Таким образом, интеграл I_1 принимает вид:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$.

Тогда получим $I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$. Это табличные интегралы (смотри формулы 12 и 13 в таблице основных интегралов).

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$.

Решение. Преобразуя трехчлен, стоящий в знаменателе, получим

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}.$$

Делаем замену переменной $x+2=t$, $dx=dt$. Подставляя в интеграл, получаем табличный интеграл

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}+C.$$

Подставляя вместо t его выражение через x, окончательно находим

$$I=\frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

II. Рассмотрим интеграл более общего вида $I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$.

Произведем тождественное преобразование подынтегральной функции:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx.$$

Последний интеграл представим в виде суммы двух интегралов. Вынося постоянные множители за знак интегралов, получим

$$I_2 = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Второй интеграл есть интеграл I_1, вычислять который мы умеем. В первом интеграле сделаем замену переменной $ax^2+bx+c=t$, $(2ax+b)dx = dt$. Следовательно,

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + C.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$I_2 = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$.

Решение. Применим указанный прием:

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3 + \frac{1}{2}\cdot 2\right)}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5} + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + 2\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right| + C.$$

III. Рассмотрим интеграл $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}$.

С помощью преобразований, рассмотренных в пункте I, этот интеграл сводится, в зависимости от знака a, к табличным интегралам вида $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ при $a>0$ или $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$ при $a<0$, которые уже рассмотрены в таблице интегралов (смотри формулы 11 и 14).

IV. Интеграл вида $\int \frac{\boldsymbol{Ax+B}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}\boldsymbol{dx}$ вычисляется с помощью следующих преобразований, аналогичных тем, которые были рассмотрены в пункте II:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Применив к первому из полученных интегралов подстановку

$$ax^2+bx+c=t\,,\quad (2ax+b)dx=dt\,,$$

получим

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C\,.$$

Второй же интеграл был рассмотрен нами в пункте III.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$.

Решение. Делая преобразования, описанные выше, получим

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=\int\frac{5/2(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right|+C=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C\,.$$

3.1.6. Интегрирование рациональных функций

Как было отмечено выше, далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций, интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, то есть в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n}\,.$$

Будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется **правильной**, в противном случае дробь называется **неправильной**.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}; \tag{3.13}$$

здесь $P_1(x)$ – многочлен, а $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ – правильная дробь.

Пример 1. Пусть дана неправильная рациональная дробь $\dfrac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$. Представить ее в виде (3.13).

Решение. Разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 3 & x^2 + 2x + 1 \\
\underline{x^4 + 2x^3 + x^2} & \underbrace{x^2 - 2x + 3}_{\textit{целая часть}} \\
\quad -2x^3 - x^2 - 3 & \\
\quad \underline{-2x^3 - 4x^2 - 2x} & \\
\qquad 3x^2 + 2x - 3 & \\
\qquad \underline{3x^2 + 6x + 3} & \\
\qquad \underbrace{-4x - 6}_{\textit{остаток}} &
\end{array}$$

Следовательно, после выделения целой части получаем

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании правильных рациональных дробей.

Определение 1. Правильные рациональные дроби вида:

I. $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{x - a}}$,

II. $\dfrac{\boldsymbol{A}}{(\boldsymbol{x - a})^{\boldsymbol{k}}}$ ($k \geq 2$ – целое положительное число),

III. $\dfrac{\boldsymbol{Ax + B}}{\boldsymbol{x^2 + px + q}}$ (корни знаменателя комплексные, то есть $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$),

IV. $\dfrac{\boldsymbol{Ax + B}}{(\boldsymbol{x^2 + px + q})^{\boldsymbol{k}}}$ ($k \geq 2$ – целое положительное число; корни знаменателя комплексные), называются **простейшими дробями I, II, III, и IV типов**.

Далее будет показано, что всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. Поэтому мы рассмотрим сначала интегралы от простейших дробей.

Интегрирование простейших дробей типа I, II и III не составляет большой трудности, поэтому мы проведем их интегрирование без каких-либо дополнительных пояснений:

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$.

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \int A(x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$.

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$ (см. п. 3.1.5).

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа. Пусть нам дан интеграл такого типа:

IV. $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$. Произведем преобразования:

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}.$$

Первый интеграл берется подстановкой $x^2+px+q=t$, $(2x+p)dx = dt$:

$$\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C = \frac{1}{(1-k)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + C.$$

Второй интеграл – обозначим его через I_k – запишем в виде

$$I_k = \int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k},$$

полагая $x+\dfrac{p}{2}=t$, $dx=dt$, $q-\dfrac{p^2}{4}=m^2$ (по предположению корни знаменателя комплексные, а следовательно, $q-\dfrac{p^2}{4}>0$). Далее поступаем следующим образом:

$$\begin{aligned} I_k&=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{\left(t^2+m^2\right)-t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}dt=\\ &=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}dt. \end{aligned}\tag{3.14}$$

Интегрируя последний интеграл по частям и подставляя полученное выражение в (3.14), получим

$$I_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{t}{2m^2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}.$$

В правой части содержится интеграл того же типа, что I_k, но показатель степени знаменателя подынтегральной функции на единицу ниже: $(k-1)$. Таким образом, мы выразили I_k через I_{k-1}.

Продолжая идти тем же путем, дойдем до известного интеграла:

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C.$$

Подставляя затем всюду вместо t и m их значения, получим выражения интеграла IV через x и заданные числа A, B, p, q.

Итак, мы установили, что интеграл от каждой простой дроби выражается через элементарные функции, или, как принято говорить, каждая простая дробь может быть проинтегрирована в конечном виде. Этим исчерпывается вопрос об интегрировании простых дробей.

Разложение рациональной дроби на простейшие

Пусть нам дана правильная рациональная дробь

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}.\tag{3.15}$$

Будем предполагать, что коэффициенты входящих в неё многочленов - действительные числа и что данная дробь несократима (последнее означает, что числитель и знаменатель не имеют общих корней).

Пусть знаменатель $Q(x)$ в (3.15) имеет вещественные корни

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

соответственно, кратности

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

И пусть $Q(x)$, кроме того, имеет комплексные корни

$$\alpha_1+i\beta_1,\ \alpha_2+i\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_m+i\beta_m$$

соответственно, кратности

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_m.$$

Известно, что тогда существуют и сопряженные корни

$$\alpha_1-i\beta_1,\ \alpha_2-i\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_m-i\beta_m$$

той же кратности. Заметим, что

$$[x-(\alpha_i+i\beta_i)][x-(\alpha_i-i\beta_i)]=x^2-2\alpha_i x+\alpha_i^2+\beta_i^2=x^2+p_i x+q_i,$$

где $i=1,2,\ldots,m$, $p_i=-2\alpha_i$, $q_i=\alpha_i^2+\beta_i^2$.

Из алгебры известно (теорема Безу), что всякий многочлен с вещественными коэффициентами степени выше второй разлагается единственным образом на линейные и квадратичные множители с вещественными коэффициентами:

$$\begin{aligned}Q(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_n)^{k_n}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{e_1}\ldots\\ \ldots\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{e_m}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Разложение (3.16) знаменателя $Q(x)$ рациональной дроби на множители теснейшим образом связано с разложением самой дроби на простейшие дроби.

Имеет место следующая теорема о рациональных дробях:

Теорема 1. Если $Q(x)$ имеет вид (3.16), то всякая правильная рациональная дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей:

$$\begin{aligned}\frac{P_1(x)}{Q(x)}&=\frac{A^1{}_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A^1{}_{k_1-1}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A^1{}_1}{x-a_1}+\frac{A^2{}_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}}+\frac{A^2{}_{k_2-1}}{(x-a_2)^{k_2-1}}+\ldots\\ &+\frac{A^2{}_1}{x-a_2}+\ldots+\frac{A^n{}_{k_n}}{(x-a_n)^{k_n}}+\ldots+\frac{A^n{}_1}{x-a_n}+\frac{M^1{}_{e_1}x+N^1{}_{e_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{e_1}}+\ldots\\ &+\frac{M^1{}_1x+N^1{}_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M^m{}_{e_m}x+N^m{}_{e_m}}{\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{e_m}}+\ldots+\frac{M^m{}_1x+N^m{}_1}{x^2+p_mx+q_m},\end{aligned}\tag{3.17}$$

где $A^1{}_{k_1},\ldots,A^1{}_1,\ldots,A^n{}_{k_n},\ldots,A^n{}_1,\ldots M^1{}_{e_1},N^1{}_{e_1},\ldots,M^1{}_1,N^1{}_1,\ldots,M^m{}_{e_m},N^m{}_{e_m},\ldots,M^m{}_1,N^m{}_1$ – некоторые действительные числа.

Таким образом, зная разложение (3.16), мы, тем самым, знаем знаменатели всех тех простых дробей, на которые разлагается данная рациональная дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$. Остановимся на определении коэффициентов $A^i{}_{k_i}$, $M^j{}_{e_j}$, $N^j{}_{e_j}$; при этом заметим, что если степень многочлена $Q(x)$ равна n, то и всех коэффициентов будет тоже n. Коэффициенты можно определить из следующих соображений. Написанное равенство (3.17) есть тождество, поэтому, приведя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителях справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A^i{}_{k_i}$, $M^j{}_{e_j}$, $N^j{}_{e_j}$. Этот метод нахождения коэффициентов называется **методом неопределенных коэффициентов**. Можно определить коэффициенты и другим методом: **методом частных значений**. Суть его заключается в следующем: так как многочлены, получившиеся в правой и левой частях равенства, после приведения к общему знаменателю должны быть тождественно равны, то их значения равны при любых частных значениях x. Придавая x частные значения, получим уравнения для определения коэффициентов. Часто бывает полезно комбинировать оба метода вычисления коэффициентов.

Пример 2. Пусть дана дробь $\dfrac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}=\dfrac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}$. Разложить ее на простейшие дроби.

Решение. На основании формулы (3.17) имеем

$$\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2},$$

где коэффициенты A,B,C нам пока неизвестны и их численные значения требуется определить. Умножая обе части этого тождества на общий знаменатель дробей, то есть на $x(x-1)(x+2)$, и затем отбросив его, мы получим тождество:

$$2x^2-x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1), \qquad (3.18)$$

или, если раскрыть скобки и собрать члены, содержащие одинаковые степени x, получим тождество $2x^2-x+3=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого тождества, мы получим следующую систему из трех линейных уравнений относительно неизвестных A,B,C:

при x^2 | $A+B+C=2$,
при x | $A+2B-C=-1$,
при x^0 | $-2A=3$.

Решая эту систему, находим $A=-\dfrac{3}{2}$, $B=\dfrac{4}{3}$, $C=\dfrac{13}{6}$, так что искомое разложение будет

$$\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{3}{2x}+\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{6(x+2)}.$$

Замечание 1. В рассматриваемом примере коэффициенты A, B, C можно было бы определить быстрее, используя метод частных значений. Действительно, положим в тождестве (3.18) $x = 0$, тогда все слагаемые справа, кроме первого, уничтожаются и мы сразу получим, что $3 = -2A$, откуда $A = -3/2$. Затем, полагая последовательно $x = 1$, $x = -2$, мы аналогичным образом найдем $4 = 3B$, $13 = 6C$, откуда $B = 4/3$, $C = 13/6$. Если корни многочлена в знаменателе только простые вещественные, то для определения неизвестных коэффициентов целесообразно пользоваться именно этим методом, так как он требует затраты значительно меньшего труда. В остальных случаях для определения неизвестных коэффициентов можно комбинировать оба метода: метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов.

Интегрирование рациональных дробей

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, то есть интеграл $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)} dx$.

Перед интегрированием рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ надо сделать следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1) если дана неправильная рациональная дробь, то нужно выделить из неё целую часть, то есть представить её в виде (3.13);

2) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители, то есть представить $Q(x)$ в виде (3.16);

3) правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби в виде (3.17);

4) методом неопределенных коэффициентов или методом частных значений вычислить неизвестные коэффициенты $A^i{}_{k_i}$, $M^j{}_{e_j}$, $N^j{}_{e_j}$.

В результате интегрирование рациональной дроби сведётся к интегрированию многочлена и нескольких простейших дробей. Вид простейших дробей определяется корнями знаменателя $Q(x)$. Здесь возможны следующие случаи.

I случай. Знаменатель имеет только действительные различные корни, то есть разлагается на неповторяющиеся множители первой степени:

$$\boldsymbol{Q(x) = (x-a)(x-b)...(x-d)}.$$

В этом случае дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ разлагается на простейшие дроби I типа:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + ... + \frac{D}{x-d}$$

и тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \ldots + \int \frac{D}{x-d}dx = A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + \ldots + D\ln|x-d| + C.$$

II случай. Знаменатель имеет лишь действительные корни, причем некоторые из них кратные, то есть знаменатель разлагается на множители первой степени и некоторые из них повторяются:

$$\boldsymbol{Q(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}}.$$

В этом случае дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ разлагается на простейшие дроби I и II типов.

Пример 3. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$.

Решение. Множителю $(x-1)^3$ соответствует сумма трёх простейших дробей $\dfrac{A}{(x-1)^3} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-1}$, а множителю $(x+3)$ – простейшая дробь $\dfrac{D}{x+3}$. Итак,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}.$$

Освободимся от знаменателя:

$$x^2+1 = A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) + D(x-1)^3.$$

Для определения неизвестных коэффициентов A, B, C, D будем комбинировать метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов.

Для определения коэффициентов A и D применим метод частных значений. Для этого нужно придать x два частных значения. Особенно удобно придавать x значения, являющиеся действительными корнями знаменателя. Действительными корнями знаменателя являются числа 1 и -3. Полагая $x=1$, получаем $2=4A$, то есть $A=1/2$. При $x=-3$ имеем $10=-64D$, то есть $D=-5/32$.

Для определения коэффициента C воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Сравним коэффициенты при старшей степени x, то есть при x^3. В левой части нет члена с x^3, то есть коэффициент при x^3 равен 0. В правой части коэффициент при x^3 равен $C+D$. Итак, $C+D$=0, откуда $C=5/32$.

Остается определить коэффициент B. Для этого необходимо иметь ещё одно уравнение. Это уравнение можно получить путём сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x (например, при x^2) или придав x какое-нибудь числовое значение. Удобнее взять такое значение, при котором вычислений будет возможно меньше. Полагая, например, $x=0$, получаем

$$1=3A-3B+3C-D \quad \text{или} \quad 1=\frac{3}{2}-3B+\frac{15}{32}+\frac{5}{32}, \text{ то есть } B=\frac{8}{3}.$$

Окончательное разложение данной дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{5}{32(x-1)}-\frac{5}{32(x+3)}.$$

Таким образом, получим

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{(x-1)}-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{(x+3)}=$$

$$=-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C\ .$$

III случай. Среди корней знаменателя имеются простые комплексные корни, то есть разложение знаменателя содержит квадратичные неповторяющиеся множители:

$$\boldsymbol{Q(x)=(x^2+px+q)\ldots(x^2+ex+s)(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta}}.$$

В этом случае дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ разлагается на простейшие дроби I, II и III типов.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$.

Решение. Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}.$$

Следовательно, $x=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)$.

Полагая $x=1$, получим $1=2C$, $C=1/2$; полагая $x=0$, получим $0=-B+C$, $B=1/2$. Приравнивая коэффициенты при x^2, получим $0=A+C$, откуда $A=-1/2$.

Таким образом,

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C\,.$$

IV случай. Среди корней знаменателя имеются кратные комплексные корни, то есть разложение знаменателя содержит повторяющиеся квадратичные множители:

$$\boldsymbol{Q(x)=(x^2+px+q)^{\mu}\ldots(x^2+ex+s)^{\upsilon}(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta}}.$$

В этом случае разложение дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ будет содержать и простейшие дроби IV типа.

Пример 5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Решение. Так как x^2+1 есть двукратный множитель, то

$$\frac{x^3-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получим $x^3-2x=Ax+B+(Cx+D)\left(x^2+1\right)$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^3 | $1=C$,

x^2 | $0=D$,

x | $-2=A+C$; $A=-3$,

x^0 | $0=B+D$; $B=0$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^3-2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\frac{-3xdx}{\left(x^2+1\right)^2}+\int\frac{xdx}{x^2+1}=-\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{3}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.$$

Заметим, что данный интеграл можно было найти проще с помощью подстановки $x^2+1=t$.

Из всего изложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

1) через логарифмы – в случае простейших дробей I типа;
2) через рациональные функции – в случае простейших дробей II типа;
3) через логарифмы и арктангенсы – в случае простейших дробей III типа;
4) через рациональные функции и арктангенсы – в случае простейших дробей IV типа.

3.1.7. Интегралы от иррациональных функций

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В п. 3.1.7 мы рассмотрим некоторые иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, до конца интегрируются.

I. Рассмотрим интеграл: $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{m/n}, \ldots, \boldsymbol{x}^{r/s}\right)dx$, где R – рациональная функция своих аргументов.

Пусть k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Сделаем подстановку:

$$\boldsymbol{x = t^k, \quad dx = kt^{k-1}dt}.$$

Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x^{3/4}+1}$.

Решение. Общий знаменатель дробей $1/2$, $3/4$ есть 4; поэтому делаем подстановку $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$; тогда

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x^{3/4}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}t^3dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt = 4\int\left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt = 4\int t^2dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt =$$

$$= 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C = \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + C.$$

II. Рассмотрим теперь интеграл вида $\int \boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{x}, \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{\frac{r}{s}}\right]\boldsymbol{dx}$.

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}} = \boldsymbol{t^k}$, где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

Решение. Делаем подстановку $x+4 = t^2$, $x = t^2 - 4$, $dx = 2tdt$; тогда

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt = 2\int\left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right)dt =$$

$$2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} = 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

III. Рассмотрим интегралы вида $\int \boldsymbol{x^m\left(a+bx^n\right)^p dx}$, где a, b – любые постоянные, показатели m, n, p – рациональные числа. Подынтегральное выражение $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ называется биномиальным дифференциалом. Как доказал П. Л. Чебышев, интегралы от дифференциальных биномов выражаются через элементарные функции только в трёх случаях:

1) когда p – целое число;

2) когда $\frac{m+1}{n}$ – целое число;

3) когда $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число.

Если ни одно из этих условий не выполняется, то интеграл не берется в конечном виде.

В первом случае, когда p – целое положительное, интегрирование выполняется непосредственно. Для этого достаточно разложить бином в сумму по формуле Ньютона.

Если p – целое отрицательное, то рационализация достигается с помощью подстановки $x=t^{\mu}$, где μ – общий знаменатель дробей m и n.

Во втором случае, когда $\frac{m+1}{n}$ – целое число, рационализация интеграла осуществляется с помощью подстановки $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби $p=\frac{r}{s}$.

В третьем случае, когда $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число, подынтегральное выражение преобразуется к рациональному виду с помощью подстановки $a+bx^n=t^s x^n$, где s – по-прежнему знаменатель дроби $p=\frac{r}{s}$. Более подробное изложение вопроса интегрирования биномиального дифференциала смотри в [1–3].

IV. Рассмотрим интегралы вида $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}\right)\boldsymbol{dx}$, где $a\neq 0$ и R – рациональная функция от x и от $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Этот интеграл представляет интерес в том случае, когда квадратный трехчлен не имеет равных корней, в противном случае мы придём к рациональной функции, которую уже умеем интегрировать.

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера [1]:

1. Первая подстановка Эйлера. Если $a>0$, то полагаем

$$\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}=\pm\sqrt{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$.

Решение. Так как здесь $a=1>0$, то полагаем $\sqrt{x^2+c}=-x+t$; тогда $x^2+c=x^2-2xt+t^2$, откуда $x=\frac{t^2-c}{2t}$. Следовательно, $dx=\frac{t^2+c}{2t^2}dt$, $\sqrt{x^2+c}=-x+t=-\frac{t^2-c}{2t}+t=\frac{t^2+c}{2t}$.

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int \frac{\frac{t^2+c}{2t^2}dt}{\frac{t^2+c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right| + C_1.$$

2. Вторая подстановка Эйлера. Если $c>0$, то полагаем

$$\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}} = \boldsymbol{xt} \pm \sqrt{\boldsymbol{c}}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Решение. Полагаем $\sqrt{1+x-x^2} = tx-1$; отсюда $1+x-x^2 = t^2x^2-2tx+1$ и, следовательно,

$$x = \frac{1+2t}{t^2+1};\quad dx = \frac{2\left(1-t-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt,\quad \sqrt{1+x-x^2} = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$ Тогда

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = -2\int \frac{dt}{t^2+2t+2} = -2\int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = -2\operatorname{arctg}(t+1)+C =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x}+C.$$

3. Третья подстановка Эйлера. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет (различные) вещественные корни α и β, то (считая $x>\alpha$) мы получаем $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$. Следовательно, подынтегральная функция рационально зависит от x и радикала $\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}$, так что $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R_1\left(x,\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}\right)dx$ и мы пришли к рассмотренному выше интегралу I типа, который рационализируется с помощью подстановки $\sqrt{\boldsymbol{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}} = \boldsymbol{t}$. Эта подстановка и представляет собой третью подстановку Эйлера. Более подробно изложение вопроса об использовании подстановок Эйлера при интегрировании смотри в [2–4].

3.1.8. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

В п. 3.1.8 мы рассмотрим некоторые классы тригонометрических функций, интегрируемых в конечном виде, для которых выработаны удобные на практике приёмы интегрирования.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx. \tag{3.19}$$

Покажем, что этот интеграл с помощью подстановки $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ всегда сводится к интегралу от рациональной функции. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, а следовательно, и через t:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Далее $x = 2\mathrm{arctg}t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Таким образом, $\sin x$, $\cos x$ и dx выразились рационально через t. Так как рациональная функция от рациональных функций есть функция рациональная, то, подставляя полученные выражения в интеграл (3.19), получим интеграл от рациональной функции:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. На основании написанных выше формул имеем

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Рассмотренная подстановка даёт возможность проинтегрировать всякую функцию вида $R(\cos x, \sin x)$. Поэтому её иногда называют «универсальной тригонометрической подстановкой». Однако на практике она часто приводит к слишком сложным рациональным функциям. Поэтому наряду с "универсальной подстановкой" бывает полезно знать также другие подстановки, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели.

1. Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x)\cos x dx$, то подстановка $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ приводит этот интеграл к виду $\int R(t)dt$.

2. Если интеграл имеет вид $\int R(\cos x)\sin x dx$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой $\cos x = t,\ \sin x dx = -dt$.

3. Если подынтегральная функция зависит только от $\mathrm{tg}x$, то замена $\mathrm{tg}x = t,\ \ x = \mathrm{arctg}t,\ \ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ приводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции $\int R(\mathrm{tg}x)dx = \int R(t)\dfrac{dt}{1+t^2}$.

4. Если подынтегральная функция имеет вид $R(\sin x, \cos x)$, но $\sin x$ и $\cos x$ входят только в чётных степенях, то применяется та же подстановка $\mathrm{tg}x = t$, так как $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через $\mathrm{tg}x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}; \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

После подстановки мы получим интеграл от рациональной функции.

5. Рассмотрим теперь ещё один интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ – именно интеграл, под знаком которого стоит произведение $\sin^m x \cos^n x dx$ (где m и n – целые числа). Здесь рассмотрим три случая.

5а. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n таковы, что, по крайней мере одно из них нечётное число. Допустим для определённости, что n нечётное. Положим $n = 2p+1$ и преобразуем интеграл

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p \cos x dx.$$

Сделаем замену переменного: $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$. Подставляя новую переменную в данный интеграл, получим

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1-t^2)^p dt,$$

а это есть интеграл от рациональной функции от t.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

Решение. $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \dfrac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \dfrac{(1-\sin^2 x)\cos x dx}{\sin^4 x}$.

Обозначая $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, получим

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

5б. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n – числа неотрицательные и чётные.

Положим $m=2p$, $n=2q$. Напишем формулы, известные из тригонометрии:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x. \qquad (3.20)$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим члены, содержащие $\cos 2x$ в нечётных и чётных степенях. Члены с нечётными степенями интегрируются, как указано в случае **5а.** Чётные показатели степеней снова понижаем по формулам (3.20). Продолжая так, дойдём до членов вида $\int \cos kx dx$, которые легко интегрируются.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \sin^4 x dx$.

Решение. $\int \sin^4 x dx = \frac{1}{2^2}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

5в. Если оба показателя – чётные, причём, хотя бы один из них отрицателен, то предыдущий прием не приводит к цели. Здесь следует сделать замену $\mathrm{tg}x = t$ (или $\mathrm{ctg}x = t$).

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x} dx = \int \mathrm{tg}^2 x(1+\mathrm{tg}^2 x)^2 dx.$

Положим $\mathrm{tg}x = t$, тогда $x = \mathrm{arctg}t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, и мы получаем

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int t^2(1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \\ = \int t^2(1+t^2)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + C.$$

6. Рассмотрим в заключение интегралы вида

$$\int \cos mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx.$$

Они берутся при помощи следующих формул $(m \neq n)$:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right].$$

Подставляя и интегрируя, получим

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx =$$
$$= \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Аналогично вычисляются и два других интеграла.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \sin 5x \sin 3x dx.$

Решение. $\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int\left[-\cos 8x + \cos 2x\right]dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

3.2. Определенный интеграл

3.2.1. Определение определенного интеграла. Условия существования определенного интеграла

Мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах является определенный интеграл – одно из основных понятий математического анализа. Вычисление площадей, ограниченных кривыми, длин дуг, объемов, работы, скорости, пути, моментов инерции и так далее сводится к вычислению определенного интеграла. Из многих физических, геометрических и других задач, приводящих к понятию определенного интеграла, мы остановимся на двух.

Задача 1. (О пройденном пути). В качестве первой задачи рассмотрим задачу из механики.

Определить путь S_0, пройденный материальной точкой за промежуток времени от момента t_0 до момента T, если известна скорость движения точки как функция времени t, то есть задано $v=f(t)$.

Решение. Для решения этой задачи разобьем рассматриваемый промежуток времени $[t_0, T]$ на n произвольных частей точками

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ \dots \ < t_i \ < \ t_{i+1} \ < \dots < \ t_{n-1} \ < \ t_n \ = T \text{ (рис. 36).}$$

В результате промежуток $[t_0, T]$ разобьется на частичные промежутки вида $[t_i, t_{i+1}]$, где i=0, 1, 2, …, n – 1. Величину i-го промежутка времени обозначим $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

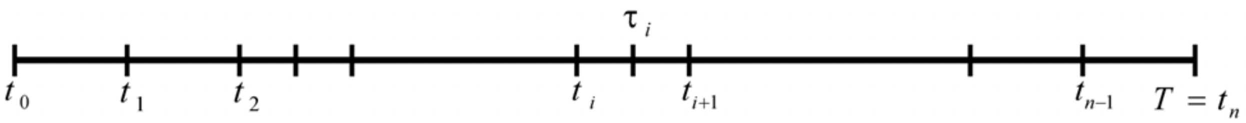


Рис. 36

Затем в каждом из них выберем произвольно момент времени τ_i, $t_i \le \tau_i \le t_{i+1}$ и вычислим скорость в это момент, то есть найдем $v_i = f(\tau_i)$. Если дробление промежутка $[t_0, T]$ достаточно мелко, то приближенно мы можем считать, что в течение каждого частичного промежутка времени движение происходит равномерно, то есть с постоянной скоростью.

Для определенности будем считать, что в течение всего i-го промежутка времени точка движется с постоянной скоростью, равной $v_i = f(\tau_i)$. Тогда путь, пройденный точкой за i-й промежуток времени, очевидно, будет приближенно равен $v_i \cdot \Delta t_i$ и, следовательно, путь, пройденный за все время от t_0 до T, приближенно будет равен сумме этих величин, то есть

$$S_0 \approx \sum_{i=0}^{n-1} v_i \Delta t_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)\Delta t_i. \tag{3.21}$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем мельче дробление промежутка $[t_0, T]$, то есть чем меньше частичные промежутки $[t_i, t_{i+1}]$, и в пределе, когда величина наибольшего частичного промежутка времени (которую мы обозначим через $\lambda = \max\limits_i \Delta t_i$) будет стремиться к нулю, получим точное равенство

$$S_0 = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)\Delta t_i.$$

Таким образом, решение задачи свелось к вычислению предела суммы вида (3.21). Мы видим, что эта сумма представляет собою некоторую переменную величину, имеющую весьма специальный вид. Определение предела такой переменной при $\lambda \to 0$ будет дано ниже.

Задача 2. Пусть надо вычислить площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$, с боков – ординатами $x = a$, $x = b$, а снизу – отрезком $[a, b]$ (рис. 37). Эту фигуру будем называть криволинейной трапецией.

Решение.

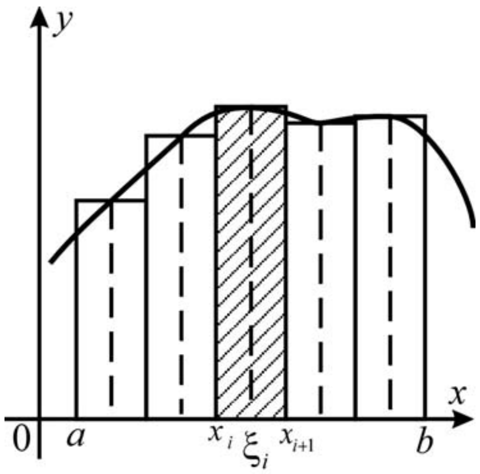


Рис. 37

Разобьем промежуток $[a, b]$ на части точками

$$a = x_0 < x_1 < \ \dots \ < x_i \ < \ x_{i+1} \ < \dots < x_n \ = b$$

и обозначим через $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ длину промежутка $[x_i, x_{i+1}]$. На каждом Δx_i построим прямоугольник высотой $f(\xi_i)$, где ξ_i – произвольная точка промежутка Δx_i (i=0, 1, …, n – 1). Площадь этого прямоугольника равна $f(\xi_i)\Delta x_i$. Площадь криволинейной трапеции равна

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (3.22)$$

За истинную площадь криволинейной трапеции примем

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Таким образом, мы видим, что такие понятия как путь и площадь определяются как пределы своеобразных сумм вида (3.21) и (3.22).

Перейдем к точным математическим определениям.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$. Разобьем этот промежуток на n произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 \ < x_2 < \ \dots \ < x_i \ < \ x_{i+1} \ < \dots < x_n \ = b.$$

Будем обозначать через λ наибольшую из длин частичных промежутков $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (i = 0, 1, …, n – 1). Выберем в каждом из частичных промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ произвольную точку $x = \xi_i$ $(x_i \le \xi_i \le x_{i+1})$ и составим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\,, \qquad (3.23)$$

которую будем называть **интегральной суммой** или суммой Римана для функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Говорят, что сумма σ при $\lambda \to 0$ имеет конечный предел J, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что как только $\lambda < \delta$ неравенство $|J - \sigma| < \varepsilon$ выполняется при любом выборе чисел ξ_i. Если существует конечный предел интегральной суммы (3.23) при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа дробления промежутка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек ξ_i, то этот предел называется **определенным интегралом** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается символом

$$\boldsymbol{J = \int_a^b f(x)dx}. \qquad (3.24)$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i}\,.$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется **интегрируемой** в промежутке $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно **нижним и верхним предела-**

ми интеграла, $f(x)$ – **подынтегральной функцией**, x – **переменной интегрирования**. Отрезок $[a, b]$ называется **отрезком интегрирования.**

При постоянных пределах a и b определенный интеграл (3.24) представляет собой постоянное число.

Замечание 1. Возвращаясь к задачам, рассмотренным в начале п. 3.2.1, мы можем полученные там формулы для пройденного пути S_0 и площади S криволинейной трапеции записать в следующем виде:

$$S_0 = \int_{t_0}^{T} f(t)dt; \qquad S = \int_a^b f(x)dx .$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (достаточное условие интегрируемости).

Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, то она интегрируема в этом промежутке, то есть интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Замечание 2. Непрерывность функции является достаточным, но не необходимым условием ее интегрируемости. Можно доказать, что существуют и другие классы интегрируемых на данном сегменте $[a, b]$ функций, например, класс функций, ограниченных и имеющих на рассматриваемом сегменте конечное число точек разрыва (I рода, устранимые), класс ограниченных и монотонных на $[a, b]$ функций.

3.2.2. Геометрическая интерпретация определенного интеграла. Расширение понятия определенного интеграла

Если построить график подынтегральной функции $y = f(x)$, то в случае $f(x) \geq 0$ $\int_a^b f(x)dx$ будет численно равен площади так называемой **криволинейной трапеции**, ограниченной указанной кривой, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью OX (рис. 38).

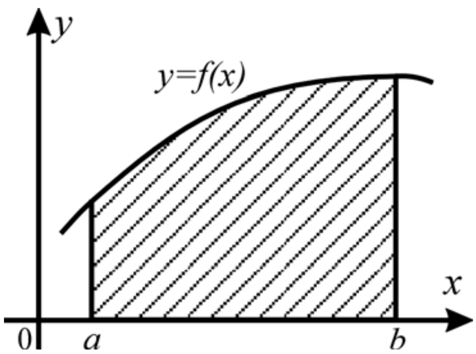


Рис. 38

Поэтому, если требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=$a, $x=b$ и осью OX, то эта площадь S вычисляется с помощью интеграла

$$\boldsymbol{S}=\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}. \qquad (3.25)$$

Расширение понятия определенного интеграла

Вводя понятие определенного интеграла данной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, мы, тем самым, предполагали, что нижний предел a интегрирования меньше верхнего предела b. Распространим теперь понятие интеграла на тот случай, когда $a \geq b$.

Примем по определению

а) Если $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

(в предположении, что $\int_b^a f(x)dx$ существует), то есть принимается, что при перестановке между собой верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл умножается на -1.

б) $\int_a^a f(x)dx=0$, то есть считается, что определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю.

3.2.3. Основные свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, если A=const, то

$$\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx.$$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b \left[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)\right]dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx\pm\cdots\pm\int_a^b f_n(x)dx.$$

3. Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$

если только все эти три интеграла существуют.

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы в промежутке $[a, b]$, где $a < b$ и всегда $f(x)\leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx\,,$$

то есть неравенства можно почленно интегрировать.

5. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$, где $a < b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\,.$$

6. **Теорема (о среднем).** Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то в этом промежутке существует хотя бы одна точка ξ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\,.$$

3.2.4. Определенный интеграл как функция верхнего предела

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования. Величина такого интеграла для данной подынтегральной функции зависит только от пределов интегрирования a и b. Следовательно, если мы будем изменять, например, верхний предел b, то величина интеграла будет, вообще говоря, меняться. Другими словами, интеграл с переменным верхним пределом представляет собой функцию своего верхнего предела. Таким образом, если мы имеем интеграл

$$\int_a^x f(t)dt \qquad (3.26)$$

с постоянным нижним пределом a и переменным верхним пределом x, то величина этого интеграла будет функцией верхнего предела x. Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$, то есть положим

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt\,.$$

Здесь переменную интегрирования мы обозначили буквой t с тем, чтобы не смешивать ее с верхним пределом x (это всегда возможно сделать, если учесть, что величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования).

Если $f(t)$ – неотрицательная функция, то величина $\Phi(x)$ численно равна площади криволинейной трапеции $aAXx$ (см. рис. 39) с основанием $[a,x]$. Очевидно, что эта площадь изменяется в зависимости от изменения x.

Найдем производную от $\Phi(x)$ по x, то есть найдем производную определенного интеграла (3.26) по верхнему пределу.

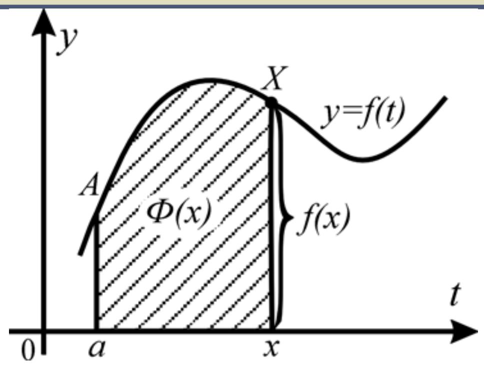


Рис. 39

Теорема 1. Если $f(t)$ – непрерывная функция и $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, то имеет место равенство $\Phi'(x)=f(x)$. Иными словами, производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела (при условии, что подынтегральная функция непрерывна).

Замечание 1. Из доказанной теоремы следует, что если функция $f(x)$ непрерывна, то она имеет первообразную, которая равна определенному интегралу

$$\int\limits_a^x f(t)dt.$$

Итак, мы установили, что всякая непрерывная функция имеет первообразную.

3.2.5. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Вычисление определенных интегралов методом, основанным на определении интеграла как предела интегральной суммы, как правило связано с большими трудностями. Поэтому, естественно, возникает задача: найти другой практически более удобный и легкий метод вычисления определенных интегралов. Такой метод существует, и он основан на тесной связи, существующей между понятиями неопределенного (первообразной) и определенного интегралов.

Теорема. Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (3.27)$$

Это и есть основная формула интегрального исчисления, которую также называют **формулой Ньютона-Лейбница.**

Заметим, что правую часть этой формулы часто обозначают символом $F(x)\Big|_a^b$ (знак двойной подстановки от a до b), и тогда формула (3.27) при этом обозначении принимает вид:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{F(x)}\Big|_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{F(b) - F(a)}.$$

Заметим, что здесь в качестве $F(x)$ может быть выбрана любая первообразная для $f(x)$ из семейства $F(x)+C$, и от этого разность $F(b)-F(a)$ не изменится (ведь все первообразные отличаются друг от друга на постоянную величину, которая при вычитании все равно уничтожается).

Итак, формула Ньютона – Лейбница, с одной стороны, устанавливает связь между определенным и неопределенным интегралами, с другой стороны, она дает простое, эффективное средство для вычисления определенного интеграла, которое можно сформулировать в виде следующего правила.

Правило. Значение определенного интеграла от непрерывной функции равно разности значений любой первообразной для неё при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Приведём несколько примеров на применение формулы Ньютона – Лейбница:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1;$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}} = -\frac{2}{3}\sqrt{4-3x}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(1-2) = \frac{2}{3};$

3. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6};$

4. $\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$

Таким образом, формула Ньютона-Лейбница даёт практически удобный способ вычисления определенных интегралов: она позволяет трудоёмкую задачу о вычислении предела интегральной суммы свести к более легкой в ряде случаев задаче отыскания первообразной для подынтегральной функции. Эта формула, по существу, устанавливает тесную связь между двумя фундаментальными разделами математического анализа – дифференциальным исчислением (куда и относится понятие первообразной) и интегральным исчислением. Эта связь впервые была установлена Ньютоном и Лейбницем. Именно поэтому формулу (3.27) связывают с именем Ньютона и Лейбница.

Только с открытием формулы (3.27) определенный интеграл смог получить то значение в математике и её приложениях, какое он имеет в настоящее время. Эта формула значительно расширила область применения определенного интеграла: благодаря этой формуле стало возможным решение многих задач геометрии, механики, физики и техники единым методом.

3.2.6. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где – $f(x)$ непрерывная в промежутке $[a,b]$ функция. Положим $x=\varphi(t)$, подчинив функцию $\varphi(t)$ условиям:

1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна в некотором промежутке $[\alpha,\beta]$ и не выходит за пределы промежутка $[a,b]$, когда t изменяется в $[\alpha,\beta]$;

2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

3) существует в $[\alpha,\beta]$ непрерывная производная $\varphi'(t)$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (3.28)$$

Замечание 1. Подчеркнём, что при переходе к новой переменной надо находить новые пределы интегрирования. Если при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной мы возвращались к старой переменной x, то при вычислении определенного интеграла по формуле (3.28) этого делать не нужно; вычислив правый интеграл в формуле (3.28), который представляет собой число, мы, тем самым вычислим и данный интеграл.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$.

Решение. Сделаем замену переменной: $x=a\sin t$, $dx=a\cos t dt$.

Определим новые пределы интегрирования: $x=0$ при $t=0$ и $x=a$ при $t=\frac{\pi}{2}$; следовательно, t изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Проверим законность такой подстановки.

Во-первых, подынтегральная функция $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ непрерывна в промежутке интегрирования; во-вторых, функция $x=\sin t$ непрерывна вместе со своей производной $x'_t=a\cos t$ в промежутке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и, в третьих, при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $x=\varphi(t)=a\sin t$ возрастает от 0 до a. При этом $\varphi(0)=0$ и $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$. Таким образом, данная подстановка действительно удовлетворяет всем требованиям правила о замене переменной в определенном интеграле и потому мы вправе применить формулу (3.28). На основании этой формулы указанная подстановка даёт

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi a^2.$$

3.2.7. Интегрирование по частям

Для определенных интегралов имеет место формула интегрирования по частям, аналогичная той, которая ранее была установлена нами для неопределенных интегралов.

Теорема. Если функции $u(x)$, $v(x)$ – непрерывные вместе со своими производными в промежутке $[a,b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv}\Big|_a^b - \int_a^b \boldsymbol{vdu}. \qquad (3.29)$$

Формула (3.29) называется **формулой интегрирования по частям для определенного интеграла**.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_1^e \ln x dx$.

Решение. Положим $u=\ln x$, $dv=dx$, отсюда $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$ и по формуле (3.29) находим

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = 1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^\pi x^2\cos x dx$.

Решение. Полагаем $u=x^2$, $dv=\cos x dx$; находим $du=2xdx$, $v=\sin x$. Используя формулу интегрирования по частям (3.29), получим

$$\int_0^\pi x^2\cos x dx = x^2\sin x\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi x\sin x dx.$$ Так как $x^2\sin x\Big|_0^\pi = 0$, то

$$\int_0^\pi x^2\cos x dx = -2\int_0^\pi x\sin x dx.$$

Интеграл $\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx$ будем снова вычислять по частям. Полагаем $u = x$, $dv = \sin x dx$ и находим $du = dx$, $v = -\cos x$. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos x dx = -2\left[-x\cos x\right]\Big|_0^{\pi} + 2\int\limits_0^{\pi} \cos x dx = -2\left[-x\cos x\right]\Big|_0^{\pi} + 2\sin x\Big|_0^{\pi} = -2\pi.$$

Из рассмотрения этих примеров видно, что при выполнении интегрирования по частям иногда выгоднее производить вычисления прямо по формуле (3.29), чем сначала применять метод интегрирования по частям к соответствующему неопределенному интегралу, а затем использовать формулу Ньютона – Лейбница.

3.3. Геометрические приложения определенного интеграла

Определенный интеграл имеет разнообразные приложения в области геометрии (вычисление площадей, объёмов, длин кривых) и механики (вычисление работы переменной силы и др.). Мы здесь рассмотрим некоторые из них.

3.3.1. Вычисление площадей плоских фигур

I. Площадь фигуры в декартовых координатах

Если на отрезке $[a,b]$ функция $f(x) \geq 0$, то, как известно из п. 3.2.2, площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 38), равна

$$\boldsymbol{S} = \int\limits_a^b \boldsymbol{f(x)dx}. \tag{3.30}$$

Фигуру, ограниченную непрерывной кривой $x = g(y) \geq 0$ $(c \leq y \leq d)$, осью OY и прямыми $y = c$, $y = d$ (см. рис. 40) также называют криволинейной трапецией (относительно оси OY). Площадь S такой фигуры выражается формулой

$$S = \int\limits_c^d g(y)dy. \tag{3.31}$$

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к вычислению определенного интеграла вида (3.30) или (3.31).

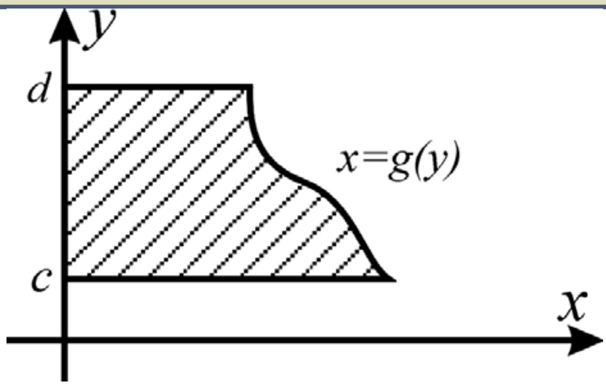


Рис. 40

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=0$, $x=1$, $x=3$ и кривой $y=\frac{1}{2}x^2$ (рис. 41).

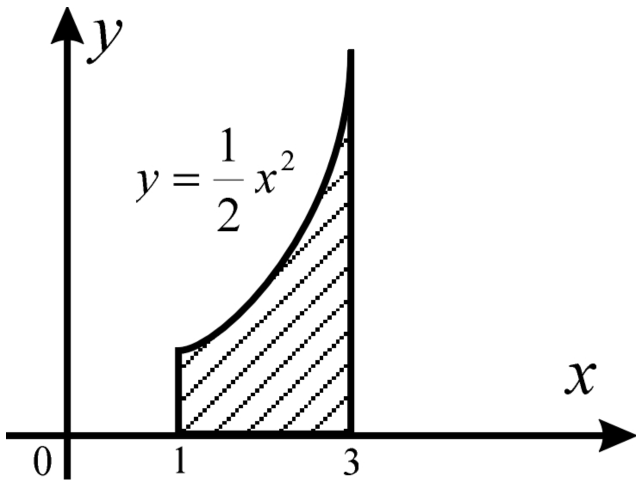


Рис. 41

Решение. По формуле (3.30) находим

$$S=\int_1^3 \frac{1}{2}x^2\,dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_1^3=\frac{13}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

Если криволинейная трапеция ограничена осью OX (OY) и дугой кривой $y=f(x)$ $[x=g(y)]$, где $f(x)$ $(g(y))$ – непрерывная, неотрицательная на данном сегменте функция, то для вычисления площади такой фигуры надо предварительно найти абсциссы (ординаты) точек пересечения кривой с осью OX (OY) и затем применить формулу (3.30) [соответственно (3.31)].

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OY и параболой $x=2y-y^2$ (см. рис. 42).

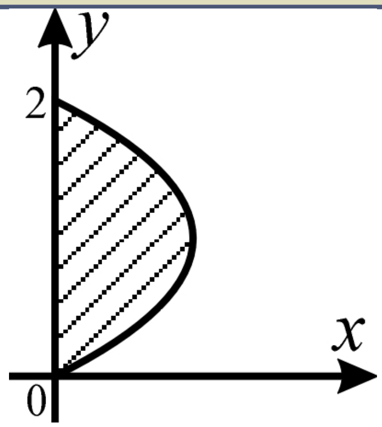


Рис. 42

Решение. Вычислим сначала ординаты точек пересечения параболы с осью OY: $2y - y^2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$. По формуле (3.31) искомая площадь

$$S = \int_0^2 \left(2y - y^2\right)dy = \left[y^2 - \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 1$, $y = \cos x$ и осью OX (рис. 43).

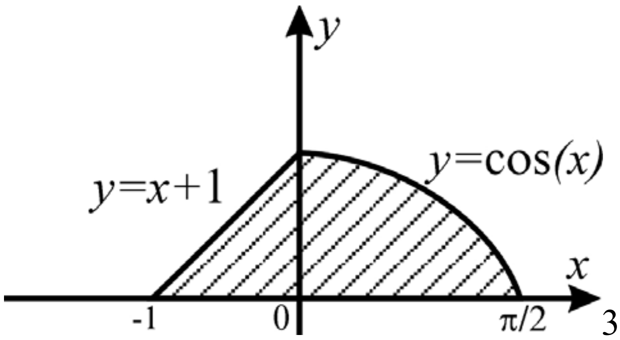


Рис. 43

Решение. Функция

$$y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если} \quad -1 \le x \le 0, \\ \cos x, & \text{если} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

очевидно, непрерывна на сегменте $\left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$, и рассматриваемая фигура является криволинейной трапецией, которая ограничена осью OX и кривой $y = f(x)$. Поэтому площадь данной фигуры по (3.30) равна $S = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ или

$$S=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0}+\left.\sin x\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(x)\le 0$, то есть кривая $y=f(x)$ и криволинейная трапеция, ограниченная снизу этой кривой, лежат под осью OX. Рассмотрим функцию $y=-f(x)$. Эта функция уже неотрицательная и, следовательно, график её лежит над осью OX и симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси OX, а криволинейная трапеция $aA'B'b$, ограниченная сверху кривой $y=-f(x)$, представляет собой зеркальное отражение первоначальной трапеции $aABb$ (рис. 44). Следовательно, фигуры $aABb$ и $aA'B'b$ конгруэнтны (равны), и, значит, площади их равны. Так как площадь криволинейной трапеции $aA'B'b$, лежащей над осью OX, выражается формулой

$$S=\int_{a}^{b}[-f(x)]dx=-\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (3.32)$$

или

$$S=\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right|,$$

то этой же формулой выражается площадь данной трапеции $aABb$, расположенной под осью OX.

Таким образом, если $f(x)\le 0$ на $[a,b]$, то определённый интеграл (3.25) по абсолютной величине также даёт площадь S криволинейной трапеции, расположенной под осью OX.

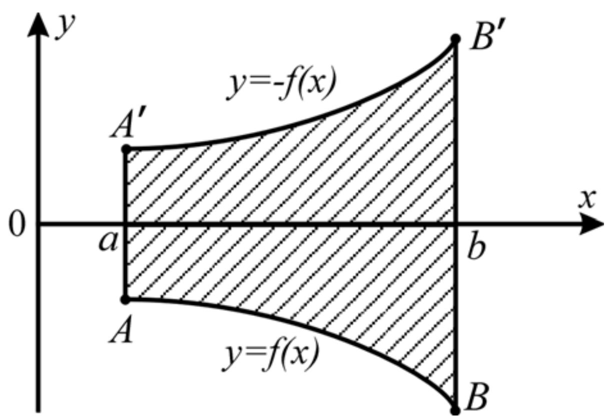


Рис. 44

Замечание. Формула (3.32), записанная в виде $\int_a^b f(x)dx = -S$, показывает, что в случае $f(x) \le 0$ определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ даёт площадь криволинейной трапеции $aABb$, лежащей под осью OX, но взятую со знаком минус. Это совсем не означает, что площадь отрицательна (площадь есть величина положительная), а говорит лишь о том, что перед числом S, выражающим площадь этой трапеции, стоит знак минус.

Пусть теперь непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $f(x)$ меняет на нём (конечное число раз) знак, обращаясь в нуль, например, при $x = p$, $x = q$ и $x = r$, где $a < p < q < r < b$, так что некоторые части графика данной функции находятся над осью OX, а другие под осью OX (рис. 45).

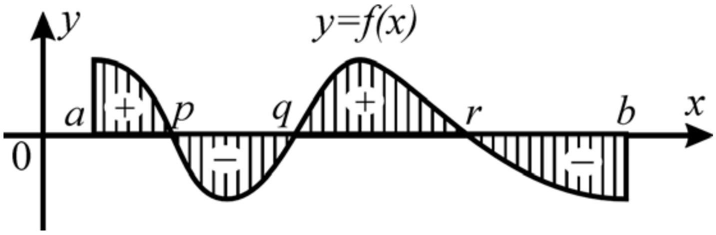


Рис. 45

В этом случае $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой алгебраическую сумму площадей тех частей фигуры, которые расположены над осью OX и тех её частей, которые находятся под осью OX; причём первые входят в сумму со знаком плюс, а вторые – со знаком минус (см. предыдущее замечание). Поэтому площадь всей фигуры в данном случае выразится формулой $\boldsymbol{S = \int_a^b |f(x)| dx}$, или (в случае, изображенном на рис. 45):

$$S = \int_a^p f(x)dx - \int_p^q f(x)dx + \int_q^r f(x)dx - \int_r^b f(x)dx.$$

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 3x$, прямой $x = -2$ и осью OX (см. рис. 46).

Решение. Часть фигуры находится над осью OX, а часть – под осью OX, следовательно, искомая площадь находится следующим образом:

$$S = \int_{-2}^{0} (x^2 - 3x)dx - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{0}^{3} = \frac{53}{6} \text{ (кв. ед.).}$$

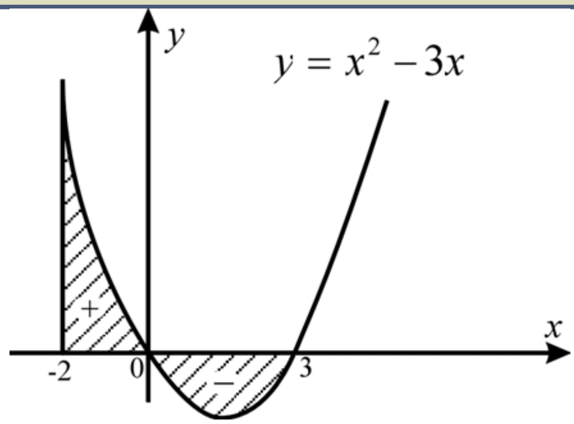


Рис. 46

Рассмотрим теперь плоскую фигуру, ограниченную непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \le f_2(x)$ на всём сегменте $[a, b]$ и ординатами $x = a$ и $x = b$ (рис. 47).

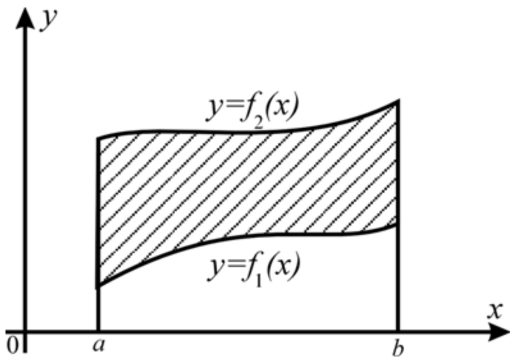


Рис. 47

Площадь такой фигуры находится как разность площадей двух криволинейных трапеций:

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

Итак,
$$\boldsymbol{S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}. \tag{3.33}$$

Заметим, что эта формула справедлива и тогда, когда $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принимают отрицательные значения.

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ $[\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)]$ и прямыми $y = c$ и $y = d$ (см. рис. 48) находится по формуле

$$\boldsymbol{S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]dy}. \tag{3.34}$$

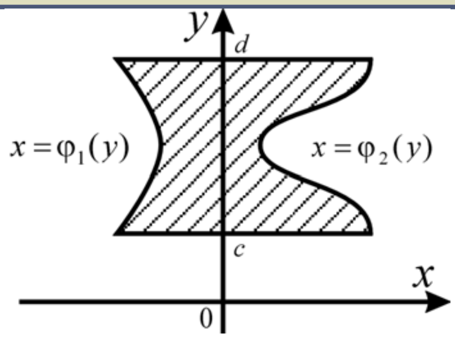


Рис. 48

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$ (рис. 49).

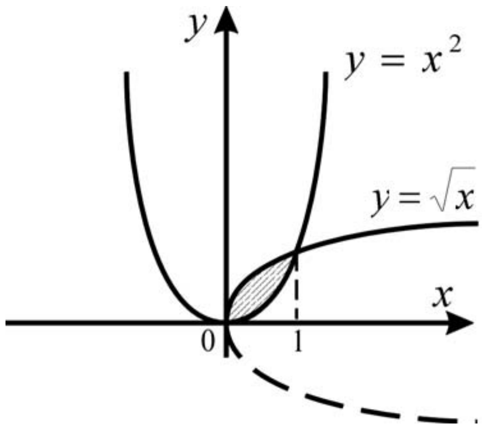


Рис. 49

Решение. Находим точки пересечения кривых: $\sqrt{x}=x^2$; $x=x^4$, откуда $x_1=0$, $x_2=1$. Следовательно,

$$S=\int_0^1\sqrt{x}dx-\int_0^1 x^2dx=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\text{ (кв. ед).}$$

Когда плоская фигура ограничена дугами нескольких кривых, то для вычисления площади такой фигуры стараются разбить эту фигуру на части прямыми, параллельными оси OX (или оси OY), так, чтобы к вычислению площади каждой полученной части можно было бы непосредственно применить либо одну из формул (3.30), (3.31), либо какую-либо из формул (3.33), (3.34). Площадь рассматриваемой фигуры вычисляется тогда как алгебраическая сумма площадей частей, на которые при этом оказалась разбитой данная фигура. Так, например, площадь фигуры, ограниченной дугами AB, BC, CD и DA (см. рис. 50), уравнения которых соответственно $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $y=f_3(x)$, $y=f_4(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ – непрерывные функции, будет равна

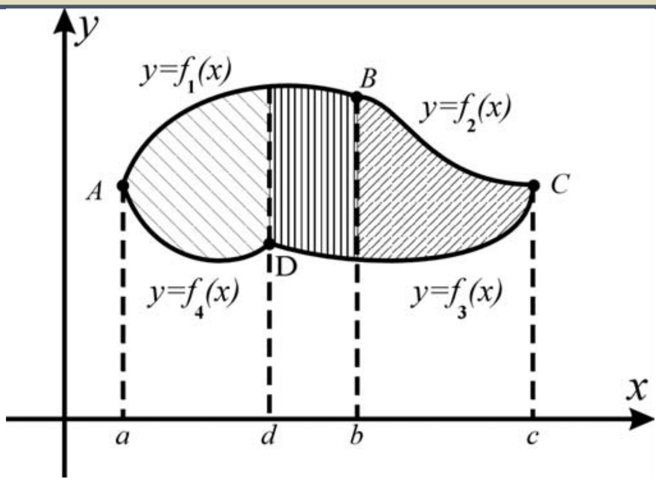


Рис. 50

$$S=\int_a^d\left[f_1(x)-f_4(x)\right]dx+\int_d^b\left[f_1(x)-f_3(x)\right]dx+\int_b^c\left[f_2(x)-f_3(x)\right]dx,$$

где a, b, c и d – абсциссы соответственно точек A, B, C и D.

Пример 6. Вычислить площадь фигуры ограниченной параболами $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=3x$ (рис. 51).

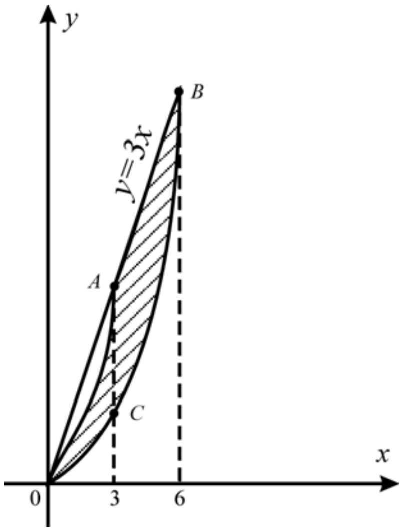


Рис. 51

Решение. Решая системы

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=3x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=3x \end{cases},$$

найдем абсциссы точек A и B пересечения прямой $y=3x$ с параболами $y=x^2$ и

$$y = \frac{1}{2}x^2: \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 6.$$

Прямой $x = 3$ разобьём данную фигуру на две части: $OACO$ и $CABC$. Площадь S данной фигуры будет равна сумме площадей этих частей:

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx + \int_3^6 \left(3x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{x^3}{6} \Bigg|_0^3 + \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} \right] \Bigg|_3^6 = 13{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

II. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной в параметрической форме

Пусть криволинейная трапеция ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, отрезком $[a, b]$ оси OX и кривой, заданной уравнениями в параметрической форме (рис. 52):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3.35}$$

где $\alpha \le t \le \beta$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Пусть уравнения (3.35) определяют некоторую функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и, следовательно, площадь криволинейной трапеции может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y dx.$$

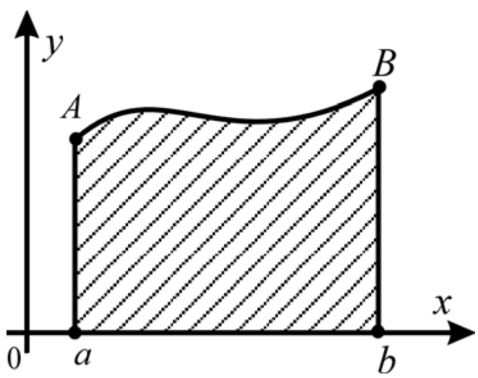


Рис. 52

Сделаем замену переменного в этом интеграле: $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$. На основании уравнений (3.35) получим $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Следовательно,

$$\boldsymbol{S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt}. \tag{3.36}$$

Это и есть формула для вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически.

Пример 7. Найти площадь, ограниченную осью OX и одной «аркой» циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (см. рис. 53).

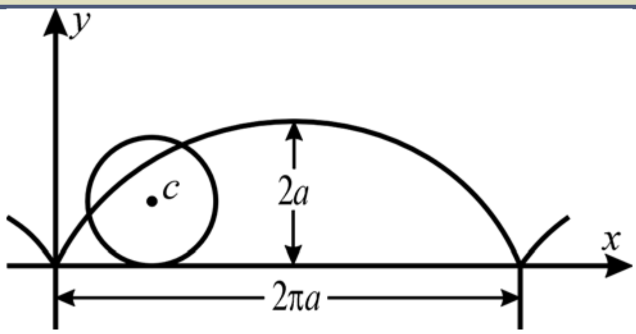


Рис. 53

Решение. Когда круг, производящий циклоиду, сделает один полный оборот, абсцисса той точки окружности круга, которая в начале движения совпадала с началом координат, станет равной $2\pi a$ (a – радиус окружности).

В формуле (3.36) надо взять $\psi(t) = y = a(1-\cos t)$; $\varphi'(t)$ находят из уравнения $\varphi(t) = x = a(t - \sin t)$. Получим $\varphi'(t) = a(1-\cos t)$.

Пределы интегрирования будут равны 0 и 2π, так как параметр t при одном полном обороте производящего круга пробегает отрезок $[0,\ 2\pi]$. Поэтому

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2\left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi\ a^2 \text{ (кв. ед.).}$$

Таким образом, искомая площадь в три раза больше площади катящегося круга.

III. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

Пусть в полярной системе координат имеем кривую, заданную уравнением $\rho = f(\theta)$, где $f(\theta)$ – непрерывная функция при $\alpha \le \theta \le \beta$.

Площадь криволинейного сектора OAB (см. рис. 54), ограниченного кривой $\rho = f(\theta)$ и двумя полярными радиусами $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$, находится по формуле $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta$ или

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\ d\theta}. \qquad (3.37)$$

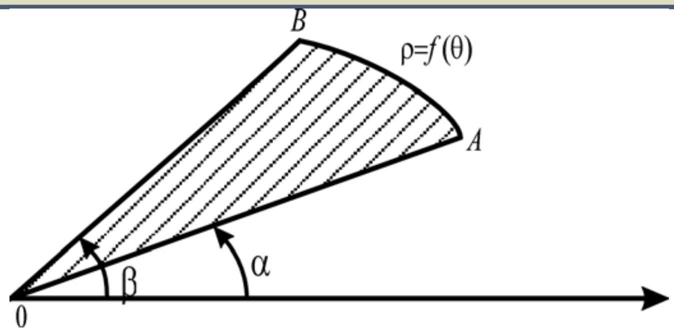


Рис. 54

Пример 8. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho^2 = 2\cos 2\theta$ (рис. 55).

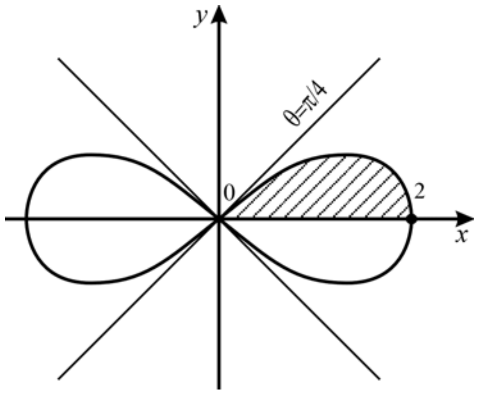


Рис. 55

Решение. Для вычисления площади, ограниченной лемнискатой, нам достаточно вычислить площадь её четвертой части, соответствующей изменению θ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ (эта часть заштрихована на рис. 55), а затем результат умножить на 4. Следовательно, искомая площадь равна

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\theta\, d\theta = 2\sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \text{ (кв. ед.)}.$$

3.3.2. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть плоская кривая AB (см. рис. 56) задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, где $f(x)$ – непрерывная функция на промежутке $[a,b]$. Найдём длину дуги AB этой кривой, заключенной между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 56).

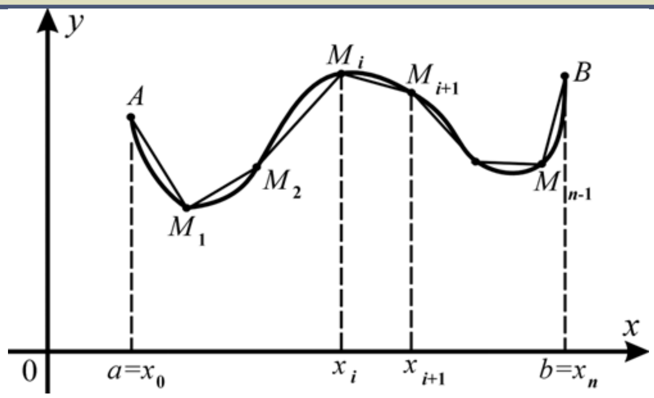


Рис. 56

Дадим определение длины дуги AB. Возьмём на дуге AB точки $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_i, ..., M_{n-1}, M_n = B$ с абсциссами $a = x_0, x_1, x_2, ...,$ $x_i, ..., x_n = b$ и проведём хорды $AM_1, M_1M_2, ..., M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Тогда получим ломаную $AM_1M_2...M_i...M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB. Длина ломаной равна $L_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta s_i$.

Определение 1. Длиной дуги AB называется предел (обозначим его через L), к которому стремится длина вписанной ломаной, при стремлении к нулю $\max \Delta s_i$ – наибольшей из длин отрезков ломаной, если этот предел существует и не зависит от выбора точек ломаной $AM_1M_2...M_iM_{i+1}...M_{n-1}B$:

$$L = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i .$$

Кривую, длина которой существует, называют спрямляемой.

I. Длина дуги в прямоугольных координатах

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ на промежутке $[a,b]$, то кривая AB спрямляема и длина её выражается формулой

$$\boldsymbol{L} = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx . \tag{3.38}$$

Пример 1. Вычислить длину дуги цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $(a > 0)$ (см. рис. 57) на сегменте $[-a, a]$.

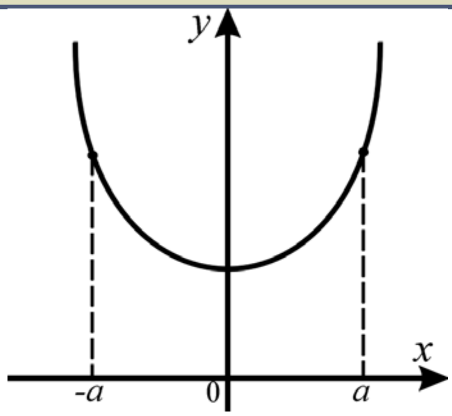


Рис. 57

Решение. Находим $f'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$,

$$1+f'^2(x)=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2=\frac{4+e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}}{4}=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2.$$

Следовательно, $\sqrt{1+f'^2(x)}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ и мы по формуле (3.38) получаем

$$L=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=a\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

Найдем теперь длину дуги кривой в том случае, когда уравнение кривой задано в параметрической форме:

$$\boldsymbol{x}=\varphi(\boldsymbol{t}),\quad \boldsymbol{y}=\psi(\boldsymbol{t})\quad \alpha\le \boldsymbol{t}\le\beta, \tag{3.39}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причём $\varphi'(t)$ на заданном участке не обращается в нуль. В этом случае уравнения (3.39) определяют некоторую функцию $y=f(x)$, непрерывную и имеющую непрерывную производную $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Пусть $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тогда, сделав в интеграле (3.38) подстановку $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$, получим $L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\,\varphi'(t)dt$ или

$$\boldsymbol{L}=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(\boldsymbol{t})]^2+[\psi'(\boldsymbol{t})]^2}\,\boldsymbol{dt}. \tag{3.40}$$

Итак, длина дуги кривой, заданной в параметрической форме (3.39) выражается формулой (3.40).

Замечание. Можно доказать, что формула (3.40) остаётся в силе и для таких кривых, которые пересекаются вертикальными прямыми более чем в одной точке (в частности, для замкнутых кривых), лишь бы во всех точках кривой были непрерывны обе производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Пример 2. Вычислить длину астроиды:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\},\quad (0 \le t \le 2\pi) \quad \text{(рис. 58)}.$$

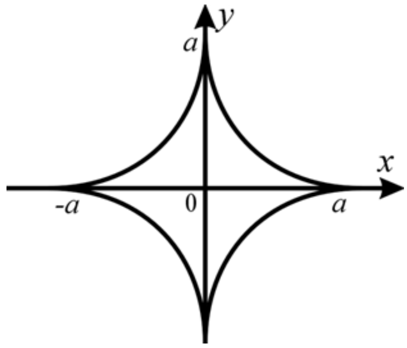


Рис. 58

Решение. Так как кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то вычислим сначала длину её четвёртой части, расположенной в первом квадранте. Находим: $\dfrac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t$, $\dfrac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$. Параметр t будет изменяться от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{4}L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt = 3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2};\quad L = 6a.$$

II. Длина дуги в полярных координатах

Наконец, рассмотрим случай, когда кривая AB задана в полярных координатах уравнением

$$\rho = f(\theta),\quad \alpha \le \theta \le \beta,$$

где $f(\theta)$ имеет непрерывную производную $f'(\theta)$ на промежутке $[\alpha,\beta]$; при этом точкам A и B соответствуют значения α и β. Известно, что прямоугольные координаты x и y связаны с полярными ρ и θ соотношениями

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta. \tag{3.41}$$

Если учесть, что $\rho = f(\theta)$, то уравнения (3.41) можно рассматривать как параметрическое задание кривой AB с параметром θ. Тогда,

$$x'_\theta = \rho'_\theta\cos\theta - \rho\sin\theta;\quad y'_\theta = \rho'_\theta\sin\theta + \rho\cos\theta,$$

так что $x'^2_\theta + y'^2_\theta = \rho^2 + \rho'^2_\theta$, и формула (3.40) дает

$$\boldsymbol{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\theta}\,d\theta}. \tag{3.42}$$

Пример 3. Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\theta)$ (рис. 59).

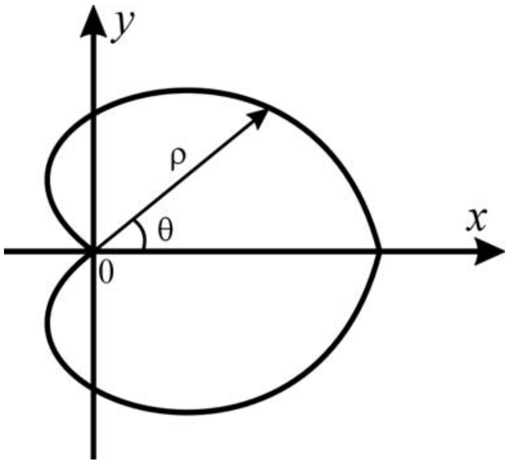


Рис. 59

Решение. Так как кривая симметрична относительно полярной оси, то при изменении θ от 0 до π полярный радиус ρ опишет половину кривой. Тогда, если учесть, что $\rho'_\theta = -a\sin\theta$, формула (3.42) даёт

$$L = 2\int_0^\pi \sqrt{\rho^2 + {\rho'_\theta}^2}\,d\theta = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta = 2\sqrt{2a}\int_0^\pi \sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta =$$

$$= 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = 8a.$$

3.3.3. Вычисление объёмов тел

I. Вычисление объёма тела по известным площадям поперечных сечений

Пусть имеем некоторое тело T. Допустим, что нам известна площадь любого его сечения, произведённого плоскостью, перпендикулярной к некоторой прямой, например, к оси OX (рис. 60).

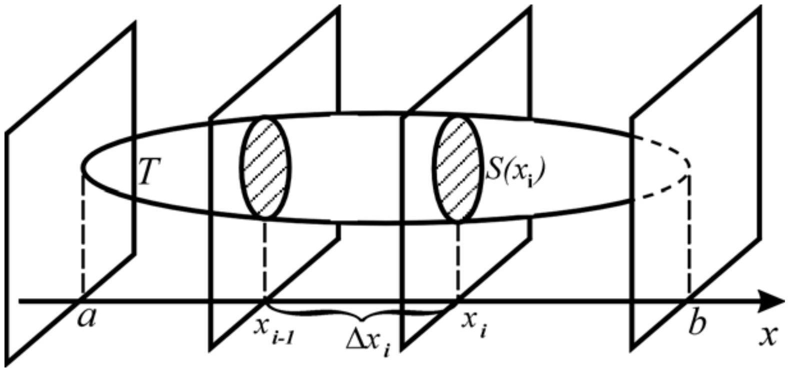


Рис. 60

Площадь сечения, перпендикулярного к оси OX, будет меняться вместе с перемещением секущей плоскости, то есть каждому x между a и b будет отвечать некоторое сечение с определённой площадью; поэтому площадь этого поперечного сечения будет некоторой функцией от x: $S = S(x)$. Предположим, что $S(x)$ есть непрерывная функция от x. Допустим, что любая пара сечений, будучи ортогонально спроектирована на плоскость, перпендикулярную к оси OX, даёт проекции, целиком лежащие одна в другой. При этих условиях тело Т имеет объём [3]. Определим объём данного тела. Проведём плоскости $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$, $x = x_n = b$. Эти плоскости разобьют тело T на слои.

В каждом частичном промежутке $x_{i-1} \le x \le x_i$ выберем произвольную точку ξ_i и для каждого значения $i = 1, 2, \ldots, n$ построим цилиндрическое тело, образующая которого параллельна оси OX, а направляющая представляет собой контур сечения тела T плоскостью $x = \xi_i$. Объём такого элементарного цилиндра с площадью основания $S(\xi_i)$ $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ и высотой Δx_i равен $S(\xi_i)\Delta x_i$. Объём всех цилиндров будет

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i .$$

Предел этой суммы при $\max \Delta x_i \to 0$ (если он существует) называется объёмом данного тела

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i .$$

Так как V_n представляет собой, очевидно, интегральную сумму для непрерывной функции $S(x)$ на отрезке $a \le x \le b$, то указанный предел существует и выражается определенным интегралом:

$$\boldsymbol{V = \int_a^b S(x)dx} . \qquad (3.43)$$

Пример 1. Вычислить объём трёхосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Решение. Данное тело (см. рис. 61) заключено между секущими плоскостями, соответствующими значениям $x = -a$ и $x = a$. В сечение эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости OYZ и отстоящей на расстоянии x от неё, получится эллипс:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}=1.$$

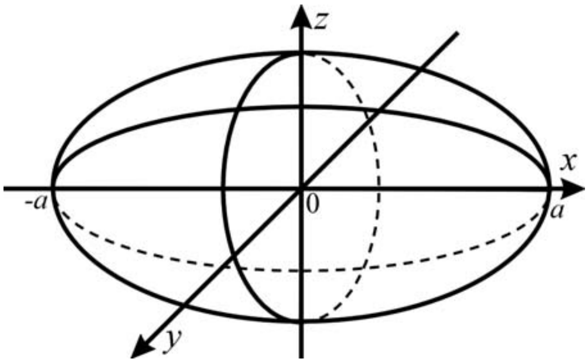


Рис. 61

Полуоси b_1 и c_1 этого эллипса будут

$$b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Следовательно, по известной формуле для площади эллипса [2] имеем

$$S(x)=\pi\, b_1\cdot c_1=\pi\, bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

По формуле (3.43) теперь искомый объём будет равен

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\, bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\, bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi\, abc.$$

II. Вычисление объёма тела вращения

Вычисление объёма тела с помощью определенного интеграла по формуле (3.43) связано с предварительным нахождением функции $S(x)$. Обычно она находится также путём интегрирования. Но в одном важном частном случае выражение для $S(x)$ находится непосредственно. Рассмотрим этот случай.

Пусть вокруг оси OX вращается криволинейная трапеция $aABb$, ограниченная осью OX, прямыми $x=a$ и $x=b$ и дугой AB кривой $y=f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная, неотрицательная на сегменте $[a,b]$ функция (см. рис. 62).

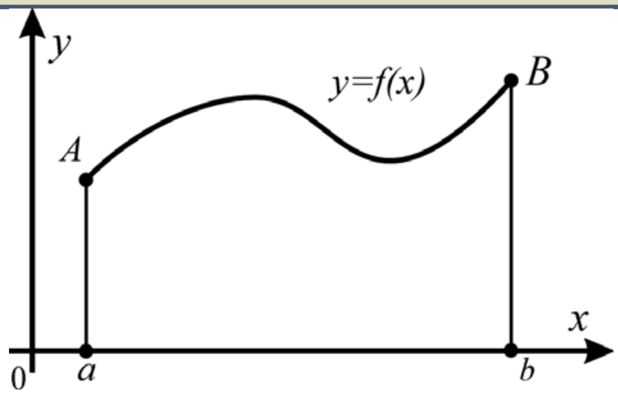


Рис. 62

Тогда эта трапеция опишет тело, являющееся телом вращения (рис. 63).

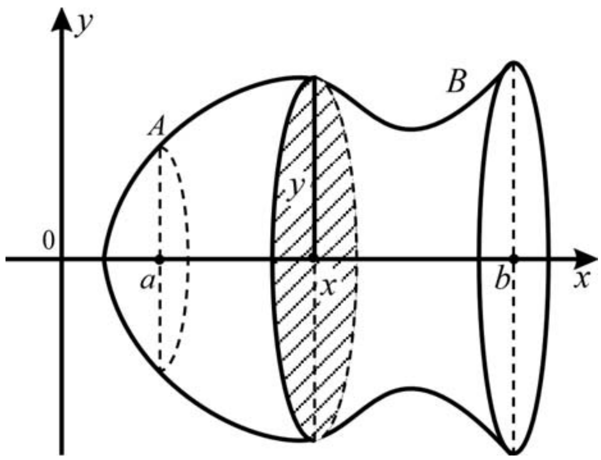


Рис. 63

В сечении этого тела плоскостями, перпендикулярными к оси OX, будут получаться круги площади $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$.

Подставив это в формулу (3.43), получим формулу для вычисления объёма тела вращения

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \tag{3.44}$$

Если тело образуется вращением криволинейной трапеции $cCDd$ (см. рис. 64), ограниченной осью OY, прямыми $y = c$, $y = d$ и дугой CD кривой $x = \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – непрерывная и неотрицательная на сегменте $[c, d]$ функция, то объём такого тела, очевидно, будет вычисляться по формуле

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

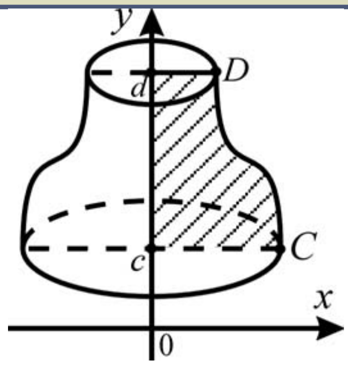


Рис. 64

Замечание 1. Формула (3.44) установлена в предположении, что $f(x) \geq 0$. Но так как правая часть этой формулы не зависит от знака $f(x)$, то она справедлива и в том случае, когда на сегменте $[a,b]$ $f(x) \leq 0$.

Если вокруг оси OX вращается фигура $A_1A_2B_2B_1$, ограниченная двумя кривыми: $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $(y_2 \geq y_1 \geq 0)$ и двумя прямыми: $x = a$ и $x = b$, то объём V получающегося при этом кольцеобразного тела вращения (рис. 65) определяется как разность двух объёмов, вычисляемых по формуле (3.44), то есть

$$V = \pi\int_a^b y_2{}^2 dx - \pi\int_a^b y_1{}^2 dx$$

$$V = \pi\int_a^b \left(y_2{}^2 - y_1{}^2\right)dx = \pi\int_a^b \left[f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x)\right]dx.$$

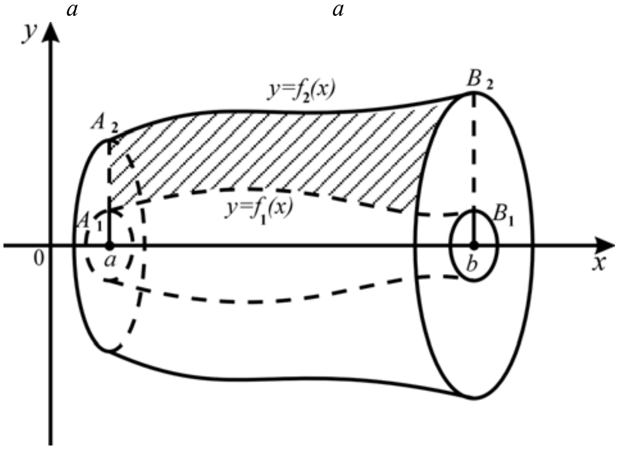


Рис. 65

Аналогично, если тело образовано вращением вокруг оси OY фигуры $C_1D_1D_2C_2$ (см. рис. 66), ограниченной кривыми $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ $(\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y) \geq 0)$ и прямыми $y = c$ и $y = d$, то для вычисления объёма этого тела пользуются формулой

$$V = \pi\int_c^d \left[\varphi_2{}^2(y) - \varphi_1{}^2(y)\right]dx.$$

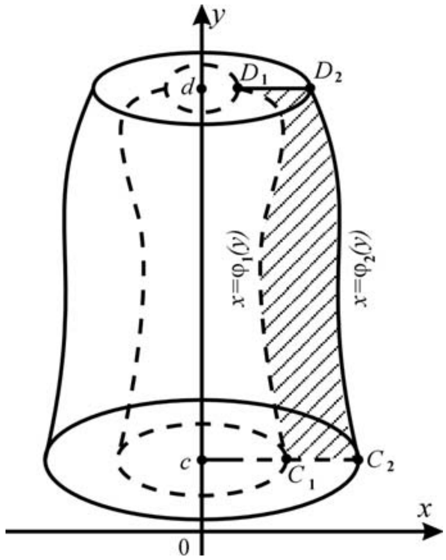


Рис. 66

Пример 2. Найти объём тела, образуемого вращением цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ вокруг оси OX на участке от $x=0$ до $x=b$ (рис. 67).

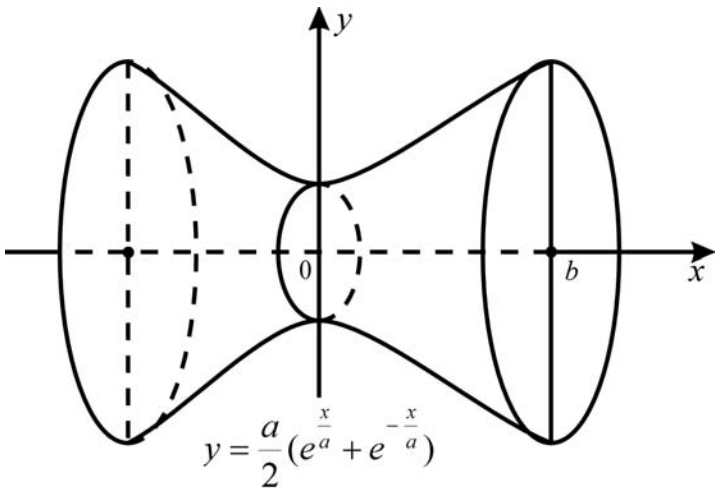


Рис. 67

Решение. Объём тела вращения по формуле (3.46) будет равен

$$V=\pi\frac{a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=\frac{\pi a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)^2dx=$$

$$=\pi\frac{a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]\Bigg|_0^b=\pi\frac{a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}\right)+\pi\frac{a^2b}{2}.$$

Пример 3. Найти объём тора (кольца), образуемого вращением круга $x^2+(y-4)^2\le 4$ вокруг оси OX (рис. 68).

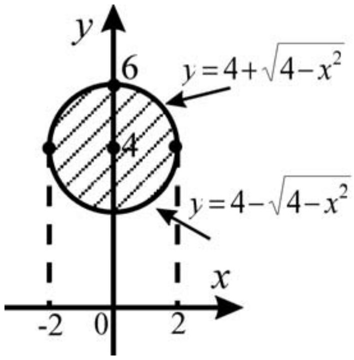


Рис. 68

Решение. Круг (заштрихован) можно рассматривать как разность двух криволинейных трапеций, ограниченных снизу отрезком $[-2,2]$ оси OX, прямыми $x=-2$ и $x=2$, а сверху верхней полуокружностью $y=4+\sqrt{4-x^2}$ и нижней полуокружностью $y=4-\sqrt{4-x^2}$. Тогда объём тора определится как разность двух объёмов, каждый из которых вычисляется по формуле (3.44):

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\left(4+\sqrt{4-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-2}^{2}\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)^2dx.$$

Объединяя интегралы и используя симметрию круга относительно оси OY, получим

$$V=2\pi\int_0^2 16\sqrt{4-x^2}\,dx=32\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Полагаем $x=2\sin t$, $dx=2\cos t dt$, откуда видно, что $x=0$ при $t=0$ и $x=2$ при $t=\frac{\pi}{2}$; следовательно t изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$V=32\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t dt=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=64\pi\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=32\pi^2 \quad \text{(объём тора).}$$

Замечание 2. Пусть кривая, вращением которой образуется тело вращения, задана параметрически:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta.$$

Предполагая, что на сегменте $[\alpha,\beta]$ функция $\psi(t)$ непрерывна и знакопостоянна, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную и знакопостоянную производную, и применяя к интегралу из (3.44) формулу замены переменной в определенном интеграле (см. п. 3.2.6), получим следующую формулу для вычисления объёма тела вращения:

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi^2(t)\cdot\varphi'(t)dt, \qquad (3.45)$$

где α и β таковы, что $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$.

Пример 4. Вычислить объём тела, образованного вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вокруг её основания (рис. 69).

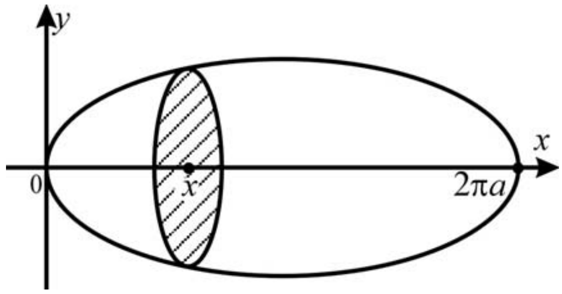


Рис. 69

Решение. Объём этого тела вычисляется по формуле (3.45). Следовательно,

$$V=\pi\int_0^{2\pi}y^2x_t'dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)dt=$$

$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi^2a^3.$$

3.3.4. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть в плоскости XOY дана спрямляемая кривая AB, заданная уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$, где функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной на сегменте $[a,b]$. Для простоты рассуждений будем считать, что кривая AB расположена над осью OX (рис. 70).

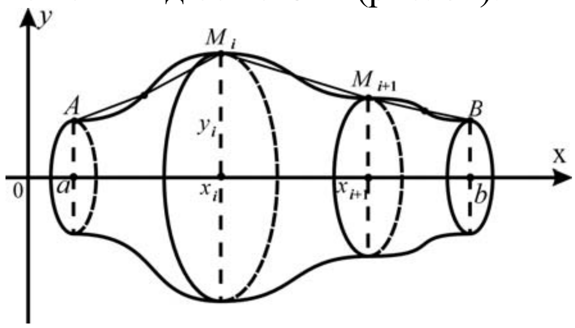


Рис. 70

Если кривую AB вращать вокруг оси OX, то она опишет некоторую поверхность, которую будем называть **поверхностью вращения**. Требуется вычислить площадь P этой поверхности.

Предварительно дадим определение площади поверхности вращения. С этой целью разобьём промежуток $[a,b]$ на n произвольных частей точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b,$$

затем впишем в нашу кривую ломаную линию с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ $i = 0,1,2,...,n$. Вместе с кривой будем вращать вокруг оси OX и эту ломаную, в результате она опишет поверхность, составленную из n усечённых конусов (в частном случае вырождающихся в цилиндры или конусы), площадь боковой поверхности которых вычисляется по известным нам правилам элементарной геометрии.

Пусть по-прежнему $\lambda = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$ – длина наибольшего частичного промежутка, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Под **площадью поверхности вращения** кривой будем понимать конечный предел (если этот предел существует) площади поверхности вращения ломаной при $\lambda \to 0$.

Таким образом, если через P_n обозначить площадь поверхности вращения ломаной, то, согласно определению площади поверхности вращения кривой будем иметь

$$P = \lim_{\lambda \to 0} P_n. \tag{3.46}$$

Площадь боковой поверхности усечённого конуса, образованного вращением i-го звена, равна $2\pi(f(x_i) + f(x_{i+1}))/2 \cdot l_i$, где l_i – длина хорды $\overline{M_i M_{i+1}}$. (Из этой формулы как частный случай получаются формулы для боковой поверхности цилиндра или конуса). Эта длина (как нам известно из аналитической геометрии) выражается формулой

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}.$$

Но по теореме Лагранжа $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$, $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$. Тогда $l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Значит, для площади поверхности вращения ломаной будем иметь

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i. \tag{3.47}$$

Можно показать, что переходя в равенстве (3.47) к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\boldsymbol{P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx} \tag{3.48}$$

или

$$\boldsymbol{P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2(x)}dx}. \tag{3.49}$$

Аналогично, если кривая задана уравнением $x = \varphi(y)$ (CD – дуга этой кривой, не пересекающая оси OY, c и d – соответственно ординаты точек C и D $(c < d)$ и $\varphi(y) \ge 0$ имеет непрерывную производную на сегменте $[c, d]$, то площадь поверхности, образуемой вращением дуги CD вокруг оси OY, будет вычисляться по формуле

$$P = 2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+x'^2}dy. \qquad (3.50)$$

Замечание. Если кривая, дуга AB которой вращается вокруг оси OX, задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

причём $\psi(t) \ge 0$ и функции $\psi'(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на сегменте $[\alpha,\beta]$, $\varphi'(t) \ne 0$ на этом сегменте и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то, производя замену переменной в формуле (3.48), получим

$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\,\varphi'(t)dt \text{ или } \boldsymbol{P = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt}. \qquad (3.51)$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, где $f(\theta)$ имеет непрерывную производную $f'(\theta)$, то площадь поверхности вращения кривой вычисляется по формуле [3]:

$$\boldsymbol{P = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho_\theta'^2}\,d\theta}, \qquad (3.52)$$

где α и β – углы полярных радиусов, соответствующих точкам A и B.

Пример 1. Найти площадь поверхности, образованной вращением цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (рис. 71) вокруг оси абсцисс от точки $x_1 = -a$ до точки $x_2 = a$.

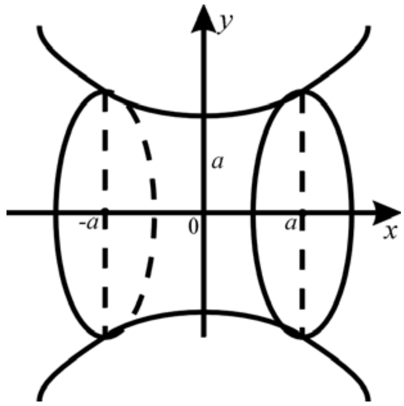


Рис. 71

Решение. Из уравнения цепной линии находим: $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Замечая далее, что рассматриваемая дуга цепной линии симметрична относительно оси OY, и применяя формулу (3.49), получим

$$P = 4\pi\int_0^a \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}dx = \pi a\int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi\cdot a^2}{2}\left[e^{\frac{2x}{a}} + 2x - e^{-\frac{2x}{a}}\right]\Bigg|_0^a = \frac{\pi\cdot a^2}{2}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right).$$

Пример 2. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OY одной «арки» циклоиды:

$$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1-\cos t),\quad (0 \le t \le 2\pi) \text{ (см. рис. 53).}$$

Решение. Находим: $x' = a(1-\cos t)$, $y' = a\sin t$ и с помощью формулы (3.51) получаем

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = 2\pi\, a^2\int_0^{2\pi} 2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 8\pi\, a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = 8\pi\, a^2\left(-2\cos\frac{t}{2}+\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi\, a^2.$$

Пример 3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1+\cos\theta)$ вокруг полярной оси (см. рис. 59).

Решение. Из уравнения кардиоиды находим

$$\rho'_\theta = -a\sin\theta, \text{ так что } \rho^2 + {\rho'_\theta}^2 = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Тогда по формуле (3.52) получим

$$P = 2\pi\int_0^{\pi}\rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+{\rho'_\theta}^2}\,d\theta = 4\pi\, a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= 16\pi\, a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = -32\pi\, a^2\,\frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{32}{5}\pi\, a^2.$$

В п. 3.3 мы рассмотрели только некоторые применения определенного интеграла в геометрии. Приложения определенных интегралов в механике, физике изложены, например, в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1978. – Т.1. – 456 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 432 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т. 1. – 479 с.

5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч. 1. – 304 с.

6. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: Изд. ХГУ, 1974. – Ч. 2. – 367 с.

7. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 464 с.

8. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. – М.: Наука, 1970. – 400 с.

9. Гурский Е.И., Домашов В.П. Руководство к решению задач по высшей математике. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1. – 349 с.

10. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1971. – 416 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

САМОЧЕРНОВА Лидия Ивановна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть II

Учебное пособие

Научный редактор
к.т.н. *А.В. Козловских*

Редактор *О.М. Васильева*

Верстка *Л.А. Егорова*

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
С качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати Формат 60×84/16.
Бумага «Снегурочка». Печать Xerox.
Усл. печ. л. 9,53. Уч.-изд. л. 8,63.
Заказ . Тираж экз.

Национальный исследовательский
Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru