МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы

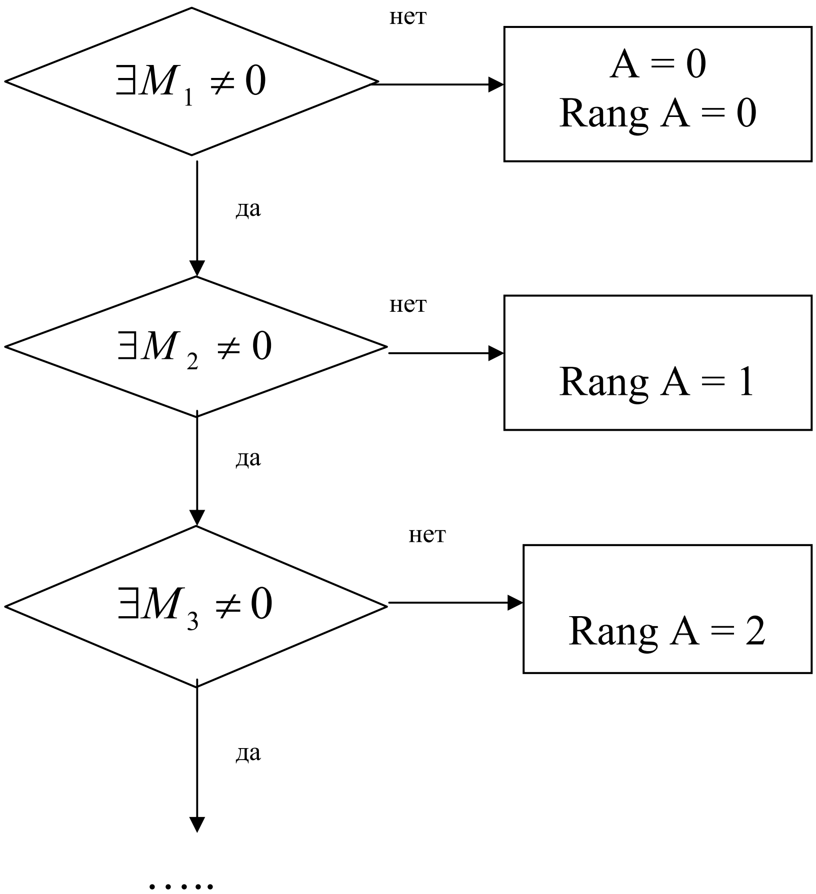
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Определение минора.

Минором M_k ***порядка k*** матрицы A называется любой определитель k-го порядка этой матрицы, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых её «*к*» столбцов и любых её «*к*» строк

$$M_1 = a_{ij}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{sj} & a_{sk} \end{vmatrix}, \quad и\ т.\ д.$$

$$i,\ s = 1,\dots,m, \quad j,k = 1,\dots,n$$



Определение ранга матрицы.

Рангом *r* матрицы A называется **наибольший порядок *r*** минора этой матрицы, отличного от нуля:

$$\exists M_r \neq 0, \forall M_k = 0\ или\ \overline{\exists} M_k, \quad k = r+1, r+2, \dots$$

(существует минор порядка r, не равный нулю, а все миноры более высоких порядков равны нулю или не существуют).

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями

Условимся называть **рабочей** строку, которая не изменяется на проводимом этапе элементарных преобразований (перестановке строк; умножении строки на число и сложении с соответствующими элементами другой строки; вычеркиванием всех пропорциональных строк, кроме одной из них).

Рабочая строка первая. Получим нули в первом столбце на местах всех элементов первого столбца за исключением элемента в первой строке a_{11}. Для этого ***умножим все элементы первой строки*** на такие числа, чтобы при сложении с элементами первого столбца остальных строк получить нули в первом столбце, за исключением элемента первой строки a_{11}.

Если в системе, которую Вы решаете, коэффициент при x_1 в первом уравнении не равен единице, поменяйте местами строки, записав первой ту, в которой коэффициент при неизвестном x_1 равен единице.

Если при неизвестном x_1 во всех уравнениях коэффициенты отличны от единицы, можно:

1) умножить первую строку расширенной матрицы системы на число, противоположное тому, на месте которого Вы хотите получить ноль; а строку, в которой хотите получить ноль, умножьте на коэффициент при x_1 в первой строке;

2) сложите соответствующие элементы умноженной первой строки и умноженной другой строки.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 5 & -3 & 1 & \vdots & 3\\ 7 & 2 & -3 & \vdots & 6\end{bmatrix}\begin{matrix}(-5)(-7)\\ +\\ \end{matrix}\ (3)\ \sim\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\end{bmatrix}\sim$$

Далее нужно получить нули во втором столбце ниже главной диагонали.

Рабочая строка вторая. Получаем нули во втором столбце ниже элемента *a*$_{22}$.

Умножим третью строку на (–14) и сложим с соответствующими элементами второй строки. (Или можно было поменять местами вторую и третью строки, чтобы на главной диагонали оказалась единица (см. (∗))).

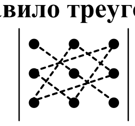
$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ +(-14)\\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & -57 & \vdots & -57\end{bmatrix};$$

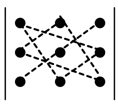
$$\left(\sim\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\end{bmatrix}(-14)\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \vdots & 2\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\\ 0 & 0 & -57 & \vdots & -57\end{bmatrix}\right)\ (*)\quad Rang\ A=3$$

З а м е ч а н и е . Полученная в скобках матрица (∗) также эквивалентна исходной матрице A , то есть имеет тот же ранг, а системы уравнений, соответствующие этим матрицам, имеют одинаковые решения.

Вычисление определителей

Правило треугольников для вычисления определителей третьего порядка:

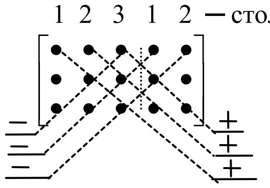

+


–

+ – произведения элементов берутся с тем же знаком,
— – произведения элементов берутся с противоположным знаком.

Таблица Саррюса для вычисления определителей третьего порядка:

1 2 3 1 2 — столбцы.



Правило разложения определителя по элементам какой-либо его строки или столбца с использованием понятия минора и алгебраического дополнения

Определение минора M_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка.	**Минором** M_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка называется определитель $(n\!-\!1)$-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием элементов i-й строки и j-го столбца.

Определение алгебраического дополнения A_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{(i+j)}$:

$A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$

В соответствии со свойствами определитель порядка n может быть представлен в виде разложения этого определителя по элементам *i*-й строки:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}.$$

То есть ***определитель квадратной матрицы А порядка n равен сумме произведений элементов какой-либо i-й его строки на алгебраические дополнения этих элементов.***

Аналогичным образом можно разложить этот же определитель по элементам любого его столбца.

Так для определителя третьего порядка формула разложения определителя по элементам второго столбца получится следующей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}).$$

Определители второго порядка получаются, если вычеркнуть в определителе третьего порядка второй столбец и, соответственно, первую, потом вторую, потом третью строки.

Действия над матрицами

Определение суммы двух матриц.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ с одинаковым количеством m строк и n столбцов называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.)$. Обозначение: $C = A + B$.

$$Если\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, то \qquad C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & -1+4 \\ -2-5 & -3+0 \\ 5+1 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение произведения матрицы на число.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица, у которой **каждый** элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ:

$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}), \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{pmatrix}.$$

Определение произведения матрицы-строки на матрицу-столбец.

Произведением матрицы-строки, имеющей n столбцов, на матрицу-столбец, имеющий столько же строк, **называется матрица, состоящая из одного элемента,** который равен сумме произведений соответствующих элементов перемножаемых матриц: $A_{1\times n} \cdot B_{n\times 1} = C_{1\times 1}$,

.
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot(-4) + 4\cdot 3) = (16).$$

$$\lambda A = (-1)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 & -1\cdot 0 & -1\cdot(-1) \\ -1\cdot 3 & -1\cdot 1 & -1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства матриц и определителей

Действие	**Матрица** $A_{m\times n}$ (**таблица** из m строк и n столбцов)	**Определитель** Δ **порядка** n (**число** для матрицы $A_{n\times n}$)
Транспонирование	$Rang(A) = Rang(A^T)$	Δ не изменяется
Перестановка двух строк	Ранг не изменяется	Δ меняет знак
Умножение одной строки на число $\lambda \neq 0$	Ранг не изменяется	Δ изменяется в λ раз (Δ умножается на число λ)
Умножение всех строк на число λ	A изменяется в λ раз (A умножается на число λ)	Δ изменяется в λ^n раз (Δ умножается на число λ^n)
Умножение одной строки на число λ и сложение с соответствующими элементами другой строки	Ранг не изменяется	Δ не изменяется
Получение нулевых и пропорциональных строк	Ранг не изменяется при вычёркивании всех нулевых и пропорциональных строк, кроме одной из ненулевых	$\Delta = 0$

Условие существования произведения двух матриц. Произведение матриц $A \cdot B$ существует только в тех случаях, **когда число <u>столбцов</u> матрицы** A **равно числу <u>строк</u> матрицы** B, то есть $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$. При этом матрица-произведение имеет число строк матрицы A и число столбцов матрицы B.

Определение перестановочных матриц. Квадратные матрицы, **произведение которых коммутативно:** $AB = BA$, называются перестановочными.

Определение произведения матриц. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$, имеющей m строк и n столбцов, на матрицу $B = (b_{ij})$, имеющую n строк и p столбцов, называется матрица $C = (c_{ij})$, имеющая m строк и p столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B,

то есть $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, $\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, p. \end{pmatrix}$.

Произведение матриц обозначается $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$.

Замечание. Правило умножения матриц можно легко запомнить, если сформулировать его в следующем виде: элемент c_{ij} матрицы C, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, есть скалярное произведение i -й вектор – строки матрицы A и j -го вектор – столбца матрицы B.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot7+2\cdot8+3\cdot9 & 0\cdot10+2\cdot11+3\cdot12 & 0\cdot13+2\cdot14+3\cdot15 \\ 4\cdot7+5\cdot8+6\cdot9 & 4\cdot10+5\cdot11+6\cdot12 & 4\cdot13+5\cdot14+6\cdot15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 58 & 73 \\ 122 & 167 & 212 \end{pmatrix}.$$

Определение единичной матрицы. Квадратная матрица, **на главной диагонали которой все элементы равны единице, а все остальные элементы нули,** называется единичной матрицей и обозначается буквой E.

Определение обратной матрицы.	Обратной для матрицы A называется такая матрица A^{-1}, что их произведение равно единичной матрице: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.
Теорема существования обратной матрицы.	Для любой квадратной матрицы A, определитель которой не равен нулю $(\det A \neq 0)$, существует единственная обратная матрица A^{-1}.
Определение невырожденной и вырожденной матриц.	Матрица, определитель которой **не равен нулю**, называется **невырожденной.** Матрица, определитель которой **равен нулю**, называется **вырожденной.**

Чтобы найти обратную для A матрицу A^{-1}, можно действовать следующим образом:

1. Вычислить определитель матрицы A $(\det A \neq 0)$.

   Если $\det A = 0$, то матрица A не имеет обратной A^{-1}.
2. Составить союзную матрицу из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A: (A_{ij}).
3. Транспонировать союзную матрицу, то есть заменить строки на столбцы с такими же номерами: $(A_{ij})^T$.
4. Разделить транспонированную союзную матрицу на определитель матрицы A: $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^T}{\det A} = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T$.

Например.

1. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$. 2. $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Вспомните, что $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3. $(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверим, правильно ли найдена обратная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-2) + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 0\cdot(-2) + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Определение линейной зависимости (независимости) системы	Система строк (столбцов, векторов, решений) $x_1, x_2, ..., x_n$ называется **линейно зависимой**, если линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$, когда **не все** коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ − нули, и называется **линейно независимой**, если линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$, когда **все** коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ − нули.

Исследование и решение произвольной системы линейных уравнений

Определение базисного минора и базисных неизвестных.	Любой, **не равный нулю** минор, имеющий **порядок ранга** основной и расширенной матриц системы, называется базисным минором, а неизвестные, коэффициенты при которых **вошли** в базисный минор – базисными неизвестными**.**
Определение свободных неизвестных.	Неизвестные, коэффициенты при которых **не вошли** в базисный минор, называются свободными.
Определение СОЛУ.	Система линейных уравнений называется **однородной**, если **свободные члены** во всех уравнениях этой системы равны **нулю**. *AX = 0* – матричная запись СОЛУ.

Система однородных линейных уравнений всегда совместна, поскольку имеет так называемое тривиальное решение, когда все неизвестные равны нулю: *X = 0*, $\Rightarrow$ $A \cdot 0 = 0$. Ранги основной и расширенной матриц системы однородных линейных уравнений всегда равны, так как вычеркивание нулевого столбца свободных членов не изменяет ранга матрицы, поэтому **по теореме Кронекера-Капели** СОЛУ всегда совместна.

Определение ФСЧР СОЛУ.	**Фундаментальной системой частных решений** системы однородных линейных уравнений называется **система линейно независимых частных решений**, число решений в которой равно числу свободных неизвестных системы.

Если n – число неизвестных системы, r – её ранг, то ФСЧР СОЛУ должна содержать $k = n - r$ линейно независимых частных решений.

Фундаментальную систему частных решений получают обычно, последовательно приравнивая свободные неизвестные элементам строк единичной матрицы E порядка $k = n - r$.

Замечание. ФСЧР СОЛУ можно получить также, приравнивая свободные неизвестные элементам строк произвольной квадратной матрицы A порядка $k = n - r$, если $\det A \neq 0$.

Схема исследования и решения произвольной системы линейных уравнений

$R(A)$ – ранг основной матрицы системы;
$R(B)$ – ранг расширенной матрицы системы;
M_r – базисный минор;
n – число неизвестных.