ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Координаты вектора $\overline{AB}$ находят, вычитая из координат точки $B(b_x, b_y, b_z)$, являющейся концом вектора, соответствующие координаты точки $A(a_x, a_y, a_z)$, являющейся началом вектора.

$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z) = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}$.

Косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению длин этих векторов: $\cos\left(\overline{AB}, \widehat{\ }\,\overline{CD}\right) = \dfrac{\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{CD}\right|}$.

Скалярное произведение двух векторов в ортонормированном (декартовом) базисе равно сумме произведений одноименных координат этих векторов: если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $(a,b) = (b,a) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Длина вектора $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$ в ортонормированном базисе равна корню квадратному из суммы квадратов координат этого вектора. Например, если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. $np_{\bar{b}}\, \overline{a} = \dfrac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|}$ – **проекция вектора** $\overline{a}$ **на вектор** $\overline{b}$ **.**

В ортонормированном базисе векторное произведение находят, раскладывая определитель, в первой строке которого – орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат, во второй строке – координаты левого из перемножаемых векторов, а в третьей строке – координаты правого из перемножаемых векторов.

Например, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда векторное произведение этих векторов в декартовой системе координат можно найти так:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойства векторного произведения

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = -\left[\overline{b}, \overline{a}\right]; \quad \mathrm{mod}\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = |\overline{a}||\overline{b}|\sin(\overline{a} \,\widehat{\ }\, \overline{b});$$

$$\textit{тройка}\ \overline{a}, \overline{b}, \left[\overline{a}, \overline{b}\right] - \textit{правая.}$$

Геометрический смысл векторного произведения.	**Модуль** векторного произведения численно равен **площади параллелограмма,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах. Обычно векторы приводят к общему началу. **Половина модуля** векторного произведения численно равна **площади треугольника,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах этого треугольника. Обычно векторы приводят к общему началу.
Определение и условие компланарности векторов.	Векторы, лежащие **в одной или параллельных плоскостях**, называются компланарными. **Смешанное** произведение ненулевых **компланарных** векторов равно **нулю**.

Смешанное произведение трех векторов получают**,** умножая векторное произведение двух векторов на третий вектор скалярно.

В ортонормированном базисе смешанное произведение равно определителю, строками или столбцами которого являются координаты перемножаемых векторов. Обычно первой строкой определителя записывают координаты первого вектора, второй строкой – координаты второго вектора, а третьей строкой – координаты третьего вектора, если считать векторы слева направо.

Полезно помнить такие **свойства** смешанного произведения: 1) **при перестановке** двух любых **соседних** векторов смешанное произведение **меняет знак** на противоположный; 2) **при циклической** перестановке (последний вектор ставится впереди первого) смешанное произведение **не изменяется**, поскольку при этом два раза переставляются соседние векторы.

Геометрический смысл смешанного произведения.	**Модуль** смешанного произведения трех векторов равен **объему параллелепипеда**, построенного на этих векторах как на ребрах. Обычно векторы приводят к общему началу. **Объём пирамиды**, построенной на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, равен одной шестой объёма параллелепипеда, построенного на этих же векторах как на ребрах
Деление отрезка в отношении λ.	$\lambda = \pm\dfrac{\lvert\overrightarrow{AK}\rvert}{\lvert\overrightarrow{KB}\rvert}$**:** $x_K = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; y_K = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; z_K = \dfrac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$**.**

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Точка $A(x_A, y_A, z_A)$, **точка** $B(x_B, y_B, z_B)$

Вектор $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Условие **ортогональности** векторов
$\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ $(\overline{a} \perp \overline{b}) : (\overline{a}, \overline{b}) = 0$

Условие **коллинеарности** векторов $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ $(\overline{a} \,||\, \overline{b}, \quad \overline{a} = \lambda \overline{b})$:
$[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$

Условие **компланарности** векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} : (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$

Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ – **ЧИСЛО** $(\overline{a}, \overline{b})$:

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$;

2. $(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}, \overline{c}) = \alpha(\overline{a}, \overline{c}) + \beta(\overline{b}, \overline{c})$;

3. $(\overline{a}, \overline{a}) \geq 0$;

4. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0, (\overline{a} = \overline{0} \cup \overline{b} = \overline{0})$.

Векторное произведение векторов $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ – **ВЕКТОР** $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$:

1. $\overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b}$;

2. $\left|[\overline{a}, \overline{b}]\right| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\overline{a}, {}^\wedge \overline{b})$;

3. Тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – **правая.**

Смешанное произведение векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – **ЧИСЛО** $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$:

$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) =$
$= ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$

1. Длина вектора $\overline{a} : |\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$;

2. Проекция вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$:

$$np_{\overline{b}}\, \overline{a} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|};$$

3. Угол между векторами $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$:

$$\cos\left(\overline{a}, {}^\wedge \overline{b}\right) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

Свойства:

1. $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$;

2. $[\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}, \overline{c}] = \alpha[\overline{a}, \overline{c}] + \beta[\overline{b}, \overline{c}]$.

Свойства:

1. Циклическая перестановка векторов $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a})$;

2. Перестановка двух любых соседних векторов $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c})$.

В ортонормированном базисе (**ДСК**):
$(\overline{a}, \overline{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,
если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

В ортонормированном базисе (**ДСК**):

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\overline{c} = (c_x, c_y, c_z)$.

В ортонормированном базисе (**ДСК**):

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$