Классификация поверхностей второго порядка

Основные понятия

Поверхностью второго порядка называется множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$, где коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{00} – действительные числа, причем a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} не равны нулю одновременно.

В теории поверхностей второго порядка классифицируют и изучают различные виды поверхностей. Методом их изучения является так называемый *метод сечения*: исследуются сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным или самими координатными плоскостями, и по виду сечений делается вывод о форме поверхности.

Существует семнадцать видов поверхностей второго порядка. Идея классификации поверхностей основана на приведении их уравнений к *каноническому* виду в результате преобразования системы координат в каноническую.

Рассмотрим подробнее шесть видов поверхностей второго порядка: эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, конус, эллиптический параболоид и гиперболический параболоид.

Эллипсоидом (рис.1) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

В частности, если $a = b = c$, то получаем *сферу* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ с центром в начале координат и радиусом a. Числа a, b, c называются *полуосями* эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется *трехосным*. Точки пересечения эллипсоида с осями координат: $A_1(-a; 0; 0)$, $A_2(a; 0; 0)$, $B_1(0; -b; 0)$, $B_2(0; b; 0)$, $C_1(0; 0; -c)$, $C_2(0; 0; c)$ называются его *вершинами*.

Оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипсоида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью xOy: $z = 0$. Оно задается системой уравнений

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

и представляет собой эллипс с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Рассматривая аналогично сечения эллипсоида координатными плоскостями xOz: $y = 0$ и yOz: $x = 0$, а также плоскостями, им параллельными ($x = h_1$, $y = h_2$, $z = h_3$), получаем кривые второго порядка *эллиптического* типа. Это – либо эллипс (при $h_1 < a$, $h_2 < b$, $h_3 < c$), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при $|h_1| = a$, $|h_2| = b$, $|h_3| = c$), либо мнимый эллипс (при $h_1 > a$, $h_2 > b$, $h_3 > c$).

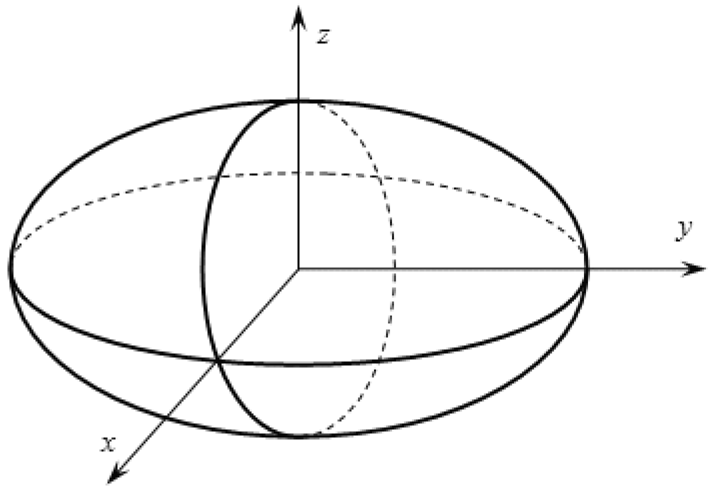

Рис 1.

Однополостным гиперболоидом (рис.2) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Оси канонической системы координат являются осями симметрии однополостного гиперболоида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии. Оси абсцисс и ординат пересекают однополостный гиперболоид в точках $A_1(-a; 0; 0)$, $A_2(a; 0; 0)$, $B_1(0; -b; 0)$, $B_2(0; b; 0)$, которые называются его *вершинами*. Ось аппликат Oz, не имеющая с гиперболоидом общих действительных точек, называется его *мнимой осью*.

Если рассмотреть сечения однополостного гиперболоида (16) плоскостью xOy: $z = 0$ или плоскостями, параллельными ей ($z = h_3$), то в сечении получаются эллипсы.

Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ называется *горловым*.

Теперь возьмем сечение однополостного гиперболоида плоскостью xOz: $y = 0$. Оно задается системой уравнений

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases}$$

и представляет собой гиперболу с действительной осью Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассматривая аналогично сечения гиперболоида плоскостью yOz: $x = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскостям xOz: $y = h_2$ и yOz: $x = h_1$, получаем кривые второго порядка *гиперболического* типа. Это – либо гипербола (при $|h_1| \neq a$, $|h_2| \neq b$), либо пара пересекающихся прямых (при $|h_1| = a$, $|h_2| = b$). Например, сечение однополостного гиперболоида плоскостью $x = a$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a, \end{cases}$$

и представляет собой пару пересекающихся прямых с каноническим уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

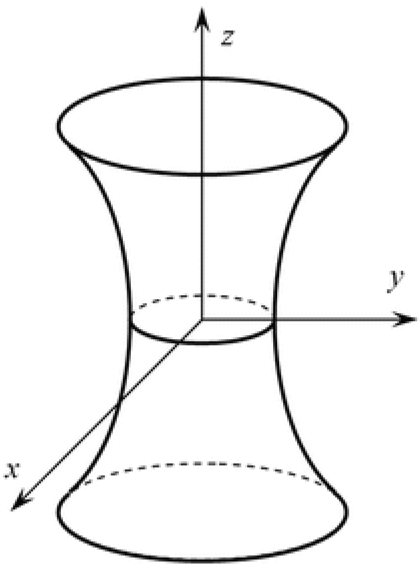

Рис 2.

Двуполостным гиперболоидом (рис.3) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Ось аппликат Oz канонической системы координат является осью симметрии двуполостного гиперболоида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии. Ось аппликат пересекает гиперболоид в точках $C_1(0;\,0;\,-c)$, $C_2(0;\,0;\,c)$ которые называются его *вершинами*. Сама ось аппликат называется *действительной осью* гиперболоида.

Если рассмотреть сечение двуполостного гиперболоида координатными плоскостями xOz: $y = 0$ и yOz: $x = 0$, и плоскостями, им параллельными ($x = h_1$, $y = h_2$), то в сечении получаются гиперболы.

Рассматривая аналогично сечения гиперболоида плоскостью xOy: $z = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскости xOy: $z = h$, получаем кривые второго порядка *эллиптического* типа. Это – либо эллипс (при $|h| > c$), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при $|h = c|$), либо мнимый эллипс (при $|h| < c$). Например, при $|h| > c$ сечение двуполостного гиперболоида плоскостью $z = h$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h, \end{cases}$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

и каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)b^2} = 1.$$

Конус второго порядка (рис. 4) в канонической системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Эта поверхность второго порядка состоит из прямых, пересекающихся в одной точке – *вершине* конуса. Действительно, если точка с координатами (x_0; y_0; z_0) удовлетворяет уравнению конуса, то ему удовлетворяют также точки с координатами

$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = z_0 t$$

при любом значении параметра t. Записанные уравнения являются параметрическими уравнениями прямой, проходящей через начало координат и точку (x_0; y_0; z_0). Конус состоит из таких прямых, называемых *образующими* конуса. Ось аппликат канонической системы координат называется его осью.

Оказывается, плоскость, проходящая через вершину конуса, либо не пересекает его в другой точке, либо пересекает по двум образующим, либо касается вдоль образующей. Любая плоскость, параллельная этим плоскостям, в первом случае пересекает конус по *эллипсу*, во втором случае – пересекает по *гиперболе*, в третьем случае – по *параболе*. Поэтому эллипс, гиперболу, параболу часто называют *коническими сечениями*.

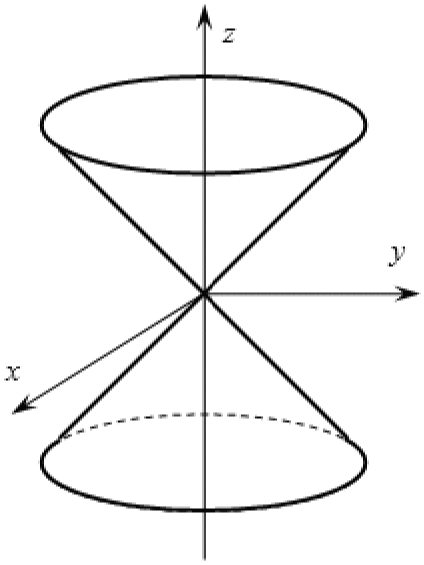

Рис 3.

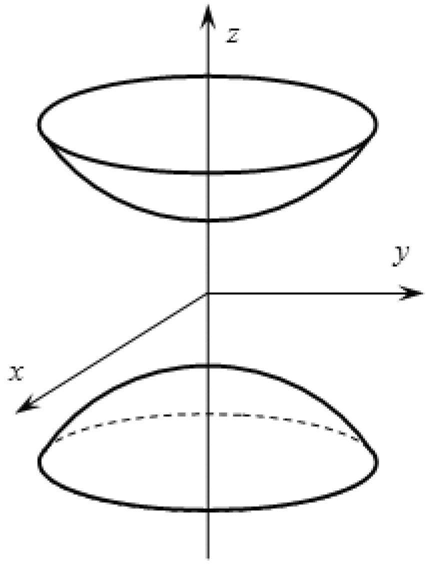

Рис 4.

Эллиптическим параболоидом (рис.5) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Ось аппликат Oz канонической системы координат является единственной осью симметрии эллиптического параболоида, плоскости xOz и yOz − плоскостями симметрии. Ось аппликат, называемая *осью* эллиптического параболоида, пересекает его в начале координат, эта точка называется *вершиной* параболоида.

Если рассмотреть сечение эллиптического параболоида координатными плоскостями xOz: $y = 0$ и yOz: $x = 0$, и плоскостями, им параллельными ($x = h_1$, $y = h_2$), то в сечении получаются параболы. Например, сечение эллиптического параболоида плоскостью $y = h_2$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h_2, \end{cases}$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} = 2z$ и уравнение параболы $x^2 = 2a^2 z - \frac{a^2 h_2^2}{b^2}$.

Получаемые таким образом параболы лежат в параллельных плоскостях, отличаясь лишь положением в пространстве.

Рассматривая аналогично сечения эллиптического параболоида плоскостью xOy: $z = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскости xOy: $z = h$, получаем кривые второго порядка *эллиптического* типа. Это – либо эллипс (при $h > 0$), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при $h = 0$), либо мнимый эллипс (при $h < 0$).

Гиперболическим параболоидом (рис.6) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z .$$

Ось аппликат Oz канонической системы координат является единственной осью симметрии гиперболического параболоида, плоскости xOz и yOz − плоскостями симметрии. Ось аппликат, называемая *осью* гиперболического параболоида, пересекает его в начале координат; эта точка называется *вершиной* параболоида.

Если рассмотреть сечение гиперболического параболоида оординатными плоскостями xOz: $y = 0$ и yOz: $x = 0$, и плоскостями, им параллельными ($x = h_1$, $y = h_2$), то в сечении получаются параболы. Например, сечение гиперболического параболоида плоскостью $x = h_1$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h_1, \end{cases}$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем: $\frac{h_1^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ и уравнение параболы $y^2 = -2b^2 z + \frac{b^2 h_1^2}{a^2}$.

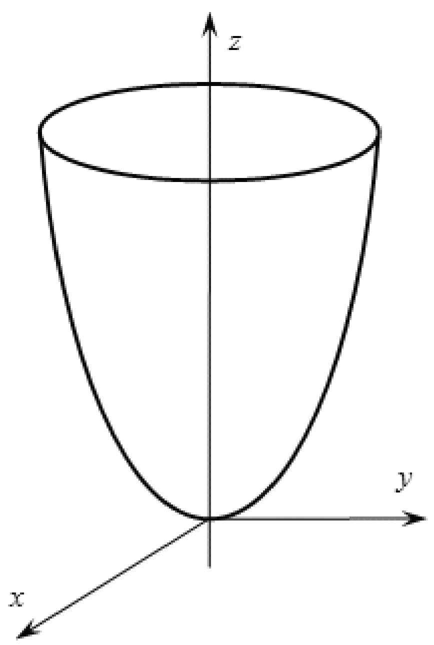

Рис 5.

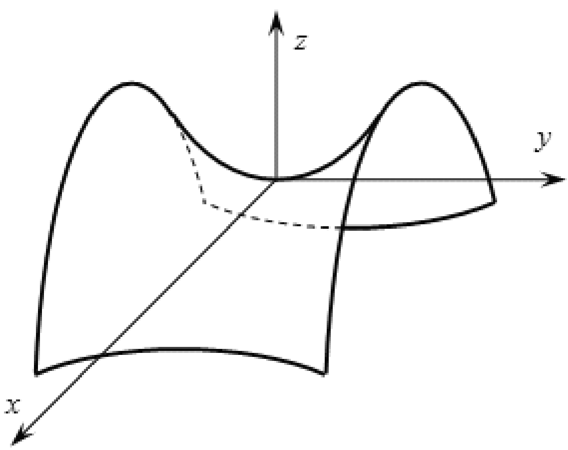

Рис 6.

Рассматривая аналогично сечения гиперболического параболоида плоскостью xOy: $z = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскости xOy: $z = h$, получаем кривые второго порядка *гиперболического* типа. Это либо гипербола (при $|h| > 0$), либо пара пересекающихся прямых (при $h = 0$). Таким образом, по форме гиперболический параболоид напоминает седло, эту поверхность часто называют *седловой*.

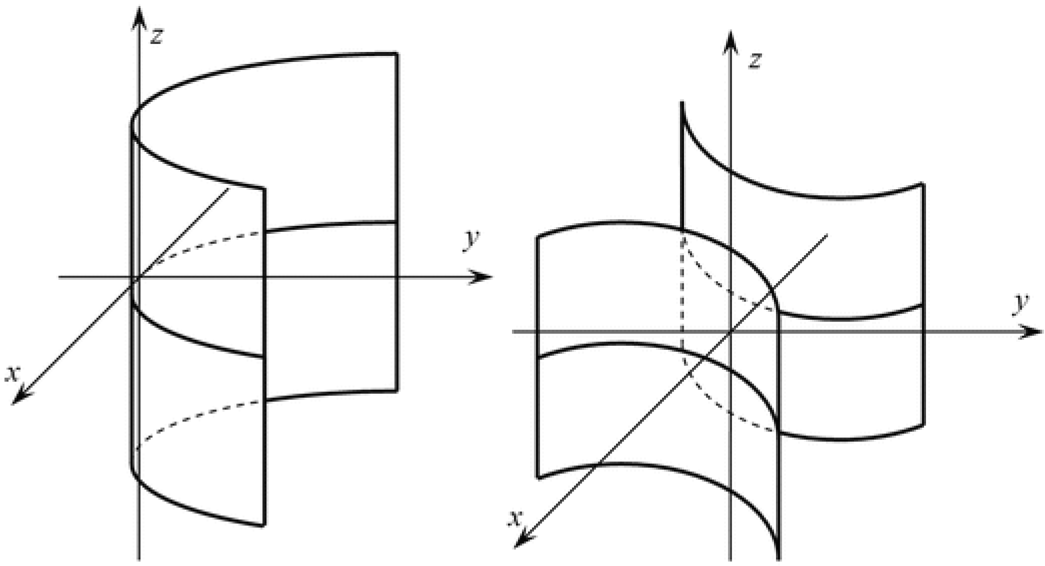

Рис 7.

Остальные одиннадцать видов поверхностей относятся к классам *цилиндрических* поверхностей (*эллиптический*, *гиперболический* и *параболический* (рис.7) цилиндры); *пар плоскостей* (*пересекающихся*, *параллельных* и *совпавших*) и *мнимых* поверхностей (мнимый *эллипсоид*, мнимый *конус*, мнимый *эллиптический цилиндр*, *пары* мнимых *пересекающихся* и мнимых *параллельных* плоскостей).

№	Вид поверхности второго порядка	Уравнение
1	*Эллипсоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$
2	*Мнимый* эллипсоид	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=-1$
3	*Однополостный гиперболоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$
4	*Двуполостный гиперболоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$
5	*Эллиптический параболоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$
6	*Гиперболический параболоид*	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z$
7	*Конус*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$
8	*Мнимый* конус	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$
9	*Эллиптический* цилиндр	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$
10	*Гиперболический* цилиндр	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$
11	*Параболический* цилиндр	$Y^2=2pX$

12	*Мнимый* эллиптический цилиндр	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$
13	Пара *мнимых пересекающихся* плоскостей	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$
14	Пара *пересекающихся* плоскостей	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$
15	Пара *параллельных* плоскостей	$X^2-a^2=0$
16	Пара *мнимых параллельных* плоскостей	$X^2+a^2=0$
17	Пара *совпавших* плоскостей	$X^2=0$