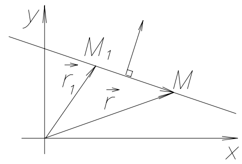
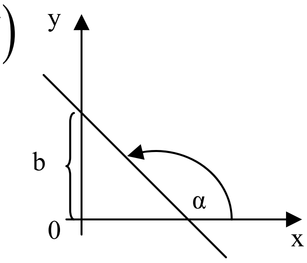
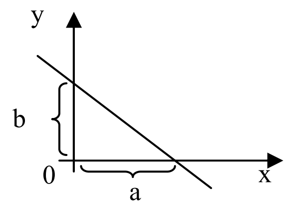
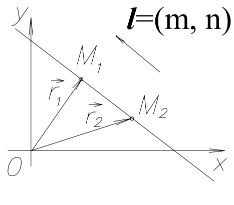
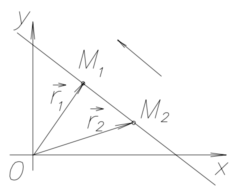
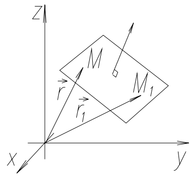
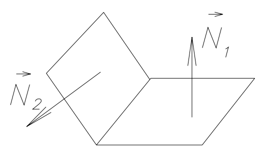
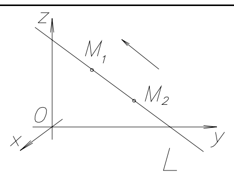
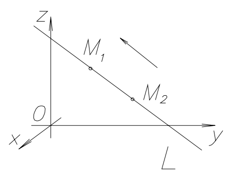
## ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ТАБЛИЦАХ

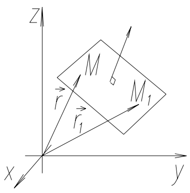
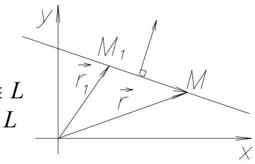
*ТАБЛИЦА* 1

| № | **Уравнения прямой *L* на плоскости (в $R_2$)** | **Рисунки, пояснения** |
|---|---|---|
| 1 | $\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)=0}$<br><br>Уравнение прямой $L$, **проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)\in L$, перпендикулярно вектору $N=(A,B)$** | $\mathbf{N}=(A,B)$<br>$\mathbf{r}=(x,y)$<br>$\mathbf{r_1}=(x_1,y_1)$<br>$M_1(x_1,y_1)\in L$<br>$\forall M(x,y)\in L$<br> |
| 2 | $\underline{Ax+By+D=0}$<br>**Общее** уравнение прямой $L$ | $D=-Ax_1-By_1$; $M_1(x_1,y_1)\in L$;<br>$\mathbf{N}=(A,B)\perp L$ |
| 3 | $\underline{y=kx+b}$<br><br>Уравнение прямой $L$ **с угловым коэффициентом** | $k=y'=-\frac{A}{B}=\mathrm{tg}\alpha,\ \alpha=\widehat{(\bar{l},\bar{i})}$<br>$b=-\frac{D}{B}$ $\alpha\geq 0$<br> |
| 4 | $\underline{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$<br><br>Уравнение прямой $L$ **в отрезках** | $y=0\Rightarrow x=a$<br>$x=0\Rightarrow y=b$<br>$a=-\frac{D}{A}$;<br>$b=-\frac{D}{B}$<br> |
| 5 | $\underline{\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}}$<br><br>Уравнение прямой $L$ **каноническое** | $\mathbf{l}$=(m, n)<br>$\mathbf{l}=(m,n)\,\vert\vert\,L$<br>$M_1(x_1,y_1)\in L$<br>$\forall M(x,y)\in L$<br> |
| 6 | $\underline{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$<br><br>Уравнение прямой $L$, **проходящей через две данные точки $M_1$ и $M_2$** | $\mathbf{l}=(m,n)\,\vert\vert\,L$<br>$M_1(x_1,y_1)\in L$<br>$M_2(x_2,y_2)\in L$<br>$\forall M(x,y)\in L$<br><br>$m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$ |
| 7 | $\underline{\begin{cases}x=x_1+mt,\\ y=y_1+nt.\end{cases}}$<br>Уравнение прямой $L$ **параметрическое** | $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=t$, $\forall t\in R_1$ – параметр |

| № | Уравнения плоскости ***P*** | Рисунки, пояснения |
|---|---|---|
| 1 | $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$<br>Уравнение плоскости *P* ,<br>**проходящей через данную точку $M_1$,**<br>**перпендикулярно данному вектору $N=(A,B,C)$** | <br>$\mathbf{r} = (x, y, z)$<br>$\mathbf{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$<br>$M_1(x_1, y_1, z_1) \in P$<br>$\forall M(x, y, z) \in P$ |
| 2 | $Ax + By + Cz + D = 0$<br>**Общее** уравнение плоскости *P* | $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$ |
| 3 | $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$<br>Уравнение плоскости *P* **в отрезках** | $y=0,\ z=0 \Rightarrow x=a$<br>$x=0,\ z=0 \Rightarrow y=b$<br>$x=0,\ y=0 \Rightarrow z=c$ |
| 4 | $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$<br>Уравнение плоскости *P* ,<br>**проходящей через три данные точки** | $M_1(x_1, y_1, z_1) \in P$, $\mathbf{M_1M} \in P$<br>$M_2(x_2, y_2, z_2) \in P$, $\mathbf{M_2M_1} \in P$<br>$M_3(x_3, y_3, z_3) \in P$, $\mathbf{M_3M_1} \in P$<br>$\forall M(x, y, z) \in P$ |
| | **Уравнения прямой *L* в трехмерном пространстве ($R_3$)** | **Рисунки, пояснения** |
| 1 | $\begin{cases} \mathbf{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0} \\ \mathbf{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.} \end{cases}$<br>**Общее** уравнение прямой *L* | $\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$<br>$\mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ $\mathbf{N_1} \nparallel \mathbf{N_2}$<br>$L=\{P_1 \cap P_2\}$<br>$\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)=[\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}]$<br> |
| 2 | $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$<br>Уравнения прямой *L*<br>**канонические** | $\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)$<br>$M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$<br>$\forall M(x, y, z) \in L$<br> |
| 3 | $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$<br>Уравнения прямой *L*,<br>**проходящей через две данные точки $M_1$ и $M_2$** | $\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)$, $\mathbf{l}t=\mathbf{M_1M_2}$<br>$m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$, $p=z_2-z_1$<br>$M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$<br>$M_2(x_2, y_2, z_2) \in L$<br>$\forall M(x, y, z) \in L$<br> |
| 4 | $\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt \end{cases}$<br>**Параметрические уравнения** прямой *L* | $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=t,$<br>$\forall t \in R_1$ |

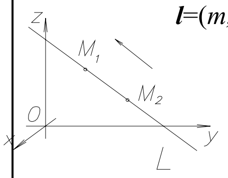
## Уравнения плоскости $P$ в трехмерном пространстве $R_3$ и уравнения прямой $L$ в двухмерном пространстве $R_2$

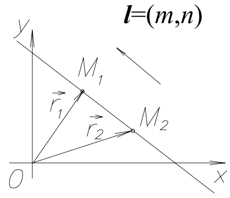
*ТАБЛИЦА* 3

| Уравнения плоскости $P$ в $R_3$ в координатной форме | Векторная форма уравнений $P$, $L$ в $R_3$ и $R_2$ | Уравнения прямой $L$ в $R_2$ в координатной форме |
|---|---|---|
| I $R_3$ | **Уравнения $P$ и $L$, проходящих через данную точку $M_1$ перпендикулярно данному вектору $N$** | $R_2$ I |
| $\mathbf{N}=(A,B,C)$<br><br><br>$\mathbf{r} = (x, y, z)$<br>$\mathbf{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$<br>$M_1(x_1, y_1, z_1) \in P$<br>$\forall M(x, y, z) \in P$<br>$\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$ | $\mathbf{r}-\mathbf{r_1} = \mathbf{M_1M}$<br>$\mathbf{M_1M} \perp \mathbf{N}(P)$<br>$\mathbf{M_1M} \perp \mathbf{N}(L)$<br><br>$\underline{(\mathbf{r}-\mathbf{r_1},\mathbf{N}) = 0}$<br>$\underline{(\mathbf{M_1M},\mathbf{N}) = 0}$<br>Условие ортогональности векторов | $\mathbf{N} = (A,B)$<br><br><br>$\mathbf{r} = (x, y)$<br>$\mathbf{r_1} = (x_1, y_1)$<br>$M_1(x_1, y_1) \in L$<br>$\forall M(x, y) \in L$<br>$\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1) = 0}$ |
| II $R_3$ | **Общие уравнения** | $R_2$ II |
| $\underline{Ax + By + Cz + D = 0}$<br><br>$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$ | $\underline{(\mathbf{r},\mathbf{N}) + D = 0}$<br><br>$D = -(\mathbf{r_1}, \mathbf{N})$ | $\underline{Ax + By + D = 0}$<br><br>$D = -Ax_1 - By_1$ |
| III $R_3$ | **Через $n$ фиксированных точек $M$** | $R_2$ III |
| n = 3<br>$M_1(x_1,y_1,z_1) \in P$, $\mathbf{M_1M} \in P$<br>$M_2(x_2,y_2,z_2) \in P$, $\mathbf{M_2M_1} \in P$<br>$M_3(x_3,y_3,z_3) \in P$, $\mathbf{M_3M_1} \in P$<br>$\forall M(x,y,z) \in P$<br>$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ | $M_1 \in P, L$<br>$M_2 \in P, L$<br>$\forall M \in P, L$<br>$M_3 \in P$<br><br>$(\mathbf{M_1M},\mathbf{M_1M_2},\mathbf{M_1M_3})=0$<br>Условие компланарности векторов<br><br>$[\mathbf{M_1M},\mathbf{M_1M_2}] = \mathbf{0}$<br>Условие коллинеарности векторов | n = 2<br>$M_1(x_1,y_1) \in L$,<br>$M_2(x_2, y_2) \in L$<br>$\forall M(x, y) \in L$<br>$\mathbf{M_1M} \parallel \mathbf{M_2M_1}$<br>$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{0}$ |
| $A=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$<br>$B=-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$<br>$C=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$ (1. I.) | | $A = y_2-y_1$; $B = -(x_2-x_1)$,<br>$\Leftrightarrow$<br>$A(x-x_1) + B(y-y_1) = 0$<br>(1. I.) |
| IV $R_3$ | **Уравнения в отрезках** | $R_2$ IV |
| $\underline{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1}$<br>$y=0,\ z=0 \Rightarrow x=a$<br>$x=0,\ z=0 \Rightarrow y=b$<br>$x=0,\ y=0 \Rightarrow z=c$ | $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$<br>$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}/a + \mathbf{j}/b + \mathbf{k}/c$<br>$(\mathbf{r}, \boldsymbol{\tau}) = 1$<br>$\boldsymbol{\tau} = (1/a,\ 1/b,\ 1/c)$<br>$\lvert \mathbf{r} \rvert \cos(\mathbf{r}, \boldsymbol{\tau}) = 1/\lvert \boldsymbol{\tau} \rvert$ | $\underline{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$<br>$y=0 \Rightarrow x=a$<br>$x=0 \Rightarrow y=b$ |

**Уравнения прямой $L$ в трехмерном пространстве $R_3$ и в двухмерном пространстве $R_2$**

*ТАБЛИЦА* 4

<table>
<tr><td>Уравнения прямой $L$ в $R_3$ в координатной форме</td><td>Векторная форма уравнений прямой $L$ в $R_2$ и $R_3$</td><td>Уравнения прямой $L$ в $R_2$ в координатной форме</td></tr>
<tr><td colspan="3">I **Канонические уравнения прямой $L$** I</td></tr>
<tr><td>

$\mathbf{l}=(m,n,p)$<br>$\mathbf{l}=(m,n,p)\,||\,L$<br>$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L$<br>$M_2(x_2,y_2,z_2)\in L$<br>$\forall M(x,y,z)\in L$<br>$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$</td><td>$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\mathbf{M_1M}\,||\,\mathbf{l}$<br>$\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\mathbf{M_1M_2}\,||\,\mathbf{l}$<br><br>$[\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{l}]=0$<br>$[\mathbf{M_1M},\ \mathbf{l}]=0$</td><td>

$\mathbf{l}=(m,n)$<br>$\mathbf{l}=(m,n)\,||\,L$<br>$M_1(x_1,y_1)\in L$<br>$M_2(x_2,y_2)\in L$<br>$\forall M(x,y)\in L$<br>$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">II **Параметрические уравнения прямой $L$** II</td></tr>
<tr><td>$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=t,\quad \forall t\in R_1$<br>$$\begin{cases} x=x_1+mt,\\ y=y_1+nt,\\ z=z_1+pt \end{cases}$$</td><td>$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\,||\,\mathbf{l},\ \forall t\in R_1$<br>$\mathbf{M_1M}\,||\,\mathbf{l}$<br><br>$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\mathbf{M_1M}=t\mathbf{l}$<br>$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{l}$<br>$[\mathbf{M_1M},\ t\mathbf{l}]=0$</td><td>$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=t,\quad \forall t\in R_1$<br>$$\begin{cases} x=x_1+mt,\\ y=y_1+nt. \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">III **Уравнения прямой $L$, проходящей через две данные точки $M_1$ и $M_2$** III</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{l}\,||\,L,\ \mathbf{l}=(m,n,p),\ \mathbf{l}t=\mathbf{M_1M_2}$<br>$m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1,\ p=z_2-z_1$<br>$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$</td><td>$\mathbf{M_1M}\,||\,\mathbf{M_1M_2}\,||\,\mathbf{l}$<br>$M_1\in L,\ M_2\in L,\ \forall M\in L$<br><br>$[\mathbf{M_1M},\mathbf{M_1M_2}]=0$</td><td>$\mathbf{l}\,||\,L,\ \mathbf{l}=(m,n),\ t\mathbf{l}=\mathbf{M_1M_2}$<br>$m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1$<br>$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>IV **Общие уравнения прямой $L$ в $R_3$** $(P_1\cap P_2)$</td><td>**Уравнение прямой $L$ с угловым коэффициентом $k$ в $R_2$**<br>V</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$<br>$\mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)\quad \mathbf{N_1}\nparallel\mathbf{N_2}$<br>$L=\{P_1\cap P_2\}$<br>$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$<br>$\mathbf{N_1}\nparallel\mathbf{N_2}\Leftrightarrow P_1\cap P_2\Leftrightarrow\quad Rang\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}=2.$</td><td>$Ax+By+D=0,\ B\neq 0$<br>$\Downarrow$<br>$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{D}{B}$$<br>$\underline{y=kx+b}\qquad k=y'=-\frac{A}{B}=\mathrm{tg}\alpha\ ,\ \alpha=\left(\widehat{\bar{l},\bar{i}}\right)$<br>$b=-\frac{D}{B}\qquad \alpha\geq 0$</td></tr>
</table>

*ТАБЛИЦА 4а* (продолжение таблицы 4)

<table>
<tr><th>Связь между уравнениями прямой $L$ в $R_3$</th><th>Связь между уравнениями прямой $L$ в $R_2$</th></tr>
<tr><td>

**Общие** (2.IV)

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow z_0=0$$

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+D_2=0 \end{cases} \Rightarrow M_0(x_0,y_0,0)\in L$$

или $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow M_1(x_1,0,z_1)\in L$

или $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x_2=0 \Rightarrow M_2(0,y_2,z_2)\in L$

$\left.\begin{matrix} \mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1), \\ \mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{l}=[\mathbf{N_1},\mathbf{N_2}]=(m,n,p)$

$t=\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{0-z_0}{p}$ – **канонические** (2.I)

-

$\begin{cases} x\text{-}x_0+mt, \\ y\text{-}y_0+nt, \\ z=0+pt \end{cases}$ – **параметрические** (2.II)

$\Downarrow$

$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{0-z_0}{z_1-z_0}$ – **через две точки** $M_0\in L$, $M_1\in L$ (2.III)

$\begin{cases} (x-x_0)(y_1-y_0)=(y-y_0)(x_1-x_0), \\ (y-y_0)(z_1-z_0)=(0-z_0)(y_1-y_0) \end{cases}$ –

**общие** (2.IV)

</td><td>

**С угловым коэффициентом**: (2.V)

$y=kx+b \qquad \vec{N}=(k,-1),$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x=x_1,\ y=kx_1+b=y_1 \Rightarrow M_1(x_1,y_1)\in L, \\ x=x_2,\ y=kx_2+b=y_2 \Rightarrow M_2(x_2,y_2)\in L. \end{cases}$

$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ **через точки** $M_1\in L$ **и** $M_2\in L$

(1.III) (2.III)

$\begin{cases} x_2-x_1=m, \\ y_2-y_1=n \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$

– **канонические** (2.I)

$\Downarrow$

$\begin{cases} n(x\text{-}x_1)=m(y\text{-}y_1) \\ n(x\text{-}x_1)\text{-}m(y\text{-}y_1)=0, \\ n=A;\ -m=B; \end{cases}$

$A(x\text{-}x_1)+B(y\text{-}y_1)=0 \qquad M_1(x_1,y_1)\in L$

$\mathbf{N}=(A,B)\perp L$ (1.I)

$\Downarrow$

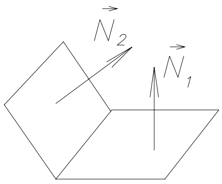
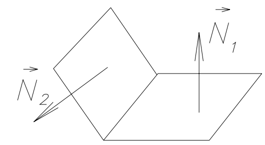
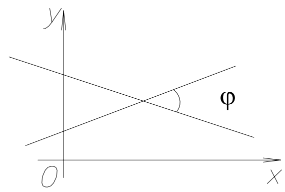
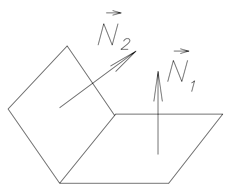
$-Ax_1-By_1=D$

$Ax+By+D=0$ – **общее** (1.II)

</td></tr>
</table>

**Взаимное расположение плоскостей *P* в трёхмерном пространстве $R_3$ и прямых *L* в двухмерном пространстве $R_2$**

*ТАБЛИЦА* 5

| | | |
|---|---|---|
| I Обозначения, принятые в таблице 2, {P1,P2} в $R_3$ | I | Обозначения, принятые в таблице 2, {L1,L2} в $R_2$ I |
| $\left.\begin{array}{l} P1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ P2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right\}\Psi$<br>$\boldsymbol{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$;<br>$\boldsymbol{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$<br>$\text{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}=\text{RangA}(\psi)$<br>$\text{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix}=\text{RangB}(\psi)$<br> | $R_3$ $\cos\varphi=\dfrac{(\vec{N}_1,\vec{N}_2)}{\lvert\vec{N}_1\rvert\lvert\vec{N}_2\rvert}$<br><br>$\boldsymbol{N_1}=(A_1, B_1, C_1)$; $\boldsymbol{N_2}=(A_2, B_2, C_2)$<br>$R_2$<br><br>$\boldsymbol{N_1}=(A_1,B_1)$<br>$\boldsymbol{N_2}=(A_2,B_2)$ | а) $\left.\begin{array}{l} L1: A_1x+B_1y+D_1=0, \\ L2: A_2x+B_2y+D_2=0 \end{array}\right\}\chi$<br>$\mathbf{N_1}=(A_1,B_1)$; $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2)$<br>$\text{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}=\text{RangA}(\chi)$<br>$\text{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{bmatrix}=\text{RangB}(\chi)$<br>б) $L1$: $y=k_1x+b_1$<br>$L2$: $y=k_2x+b_2$<br>$tg\varphi=\left\lvert\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\rvert$<br>$\Downarrow$<br>$k_1=tg\,\alpha_1$; $k_2=tg\,\alpha_2$<br>$tg\varphi=\text{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\dfrac{\text{tg}\alpha_2-\text{tg}\alpha_1}{1+\text{tg}\alpha_1\text{tg}\alpha_2}$, |
| II **Признаки взаимного расположения плоскостей {P1, P2} и прямых {L1, L2}** II | | |
| Плоскости {*P*1, *P*2} в $R_n$;*n*=3 | Как расположены *P* и *L* | Прямые {*L*1, *L*2} в $R_n$; *n*=2 |
| $P1\cap P2$ **(пересекаются)**<br>$cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\neq\pm1$<br>$P1\perp P2 \Leftrightarrow \mathbf{N_1}\perp\mathbf{N_2} \Leftrightarrow cos\varphi=0$<br>$\{P1\cap P2\}=L$, $L\in P1$, $L\in P2$<br>$Rang\ A(\psi)=$<br>$= Rang\ B(\psi)= 2 < 3=n$<br>совместная неопределенная система ($\psi$) | $\underbrace{P1\cap P2, L1\cap L2}$<br>$\mathbf{N_1} \nparallel \mathbf{N_2}$<br>$\varphi\neq\pi k$,<br>$k=0, \pm1, \pm2, \ldots$<br>$\cos\varphi\neq\pm1$<br> | $L1\cap L2$ **(пересекаются)**<br>а) $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\neq\pm1$<br>$L1\perp L2\Leftrightarrow \boldsymbol{N}_1\perp\boldsymbol{N}_2\Leftrightarrow cos\varphi=0$<br>б) $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\neq0$<br>$1+k_1k_2\neq0$<br>$L1\perp L2 \Leftrightarrow 1+k_1k_2=0 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow k_2=-1/k_1$<br>$\{L1\cap L2\}=M$, $M\in L1$, $M\in L2$<br>$Rang\ A(\chi)=$<br>$= Rang\ B(\chi)= 2=n$<br>совместная определенная система ($\chi$) |
| $P1\,\|\,P2$ **(параллельны)**<br>$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$<br>$cos\varphi=\pm1$ | $\underbrace{P1\parallel P2, L1\parallel L2}$<br>$\boldsymbol{N_1}=\lambda\boldsymbol{N_2}$; $D_1\neq\lambda D_2$<br>$\lambda\in R_1$<br>$1=Rang\ A(\psi,\chi) <$<br>$< Rang\ B(\psi,\chi) = 2$<br>системы ($\psi$),($\chi$) несовместны | $L1\,\|\,L2$ **(параллельны)**<br>*а)* $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$<br>$cos\varphi=\pm1$<br>*б)* $k_1=k_2$; $b_1\neq b_2$<br>$tg\varphi=0$ |
| $P1\equiv P2$ **(совпадают)**<br>$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=\lambda\in R_1$<br>$cos\varphi=\pm1$ | $\underbrace{P1\equiv P2, L1\equiv L2}$<br>$\boldsymbol{N_1}=\lambda\boldsymbol{N_2}$; $D_1=\lambda D_2$; $\lambda\in R_1$<br>$Rang\ A(\psi,\chi)=$<br>$= Rang\ B(\psi,\chi)= 1$<br>совместные неопределенные системы ($\psi$), ($\chi$) | $L1\equiv L2$ **(совпадают)**<br>*а)* $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=\lambda\in R_1$<br>$cos\varphi=\pm1$<br>*б)* $k_1=k_2$, $b_1=b_2$<br>$tg\varphi=0$ |

**Расстояния $d(P1,P2)$ между плоскостями $P1$ и $P2$ и $d(L1,L2)$ между прямыми $L1$ и $L2$ в $R_3$, пересечение $\{P\cap L\}$ плоскости $P$ и прямой $L$ в $R_3$**

*ТАБЛИЦА* 6

<table>
<tr>
<th>I $P1 \parallel P2,\ L1 \parallel L2$ в $R_3$<br>координатная форма</th>
<th>$P1 \parallel P2,\ L1 \parallel L2,\ \overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2, \bar{l}_1 \parallel \bar{l}_2$<br>векторная форма</th>
<th>$L1 \parallel L2$ в $R_2$ II<br>координатная форма</th>
</tr>
<tr>
<td>

$P1:\ Ax+By+Cz+D_1=0$

$P2:\ \underbrace{Ax+By+Cz+D_2=0}\ ,\ D_1 \neq D_2$

$\overline{N}_1=\overline{N}_2=\overline{N}=(A,B,C)\perp P1,P2$

$\Leftarrow$

$d(P1,P2)=d(M_1,P2)=d(M_2,P1)=$

$=\dfrac{\left|A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$M_1(x_1,y_1,z_1)\in P1, M_2(x_2,y_2,z_2)\in P2$

</td>
<td rowspan="2">

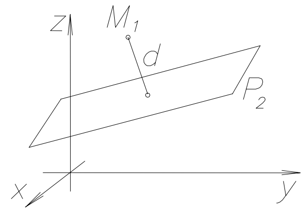
$\overline{N}=(A,B,C)\quad \bar{l}=(m,n,p)$

$d(P1,P2)=d(M_1,P2)=$

$d(M_2,P1)=d(L1,L2)=$

$=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$

$=\left|np_{\overline{N}}\,\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\dfrac{\left|(\overrightarrow{M_1M_2},\overline{N})\right|}{\left|\overline{N}\right|}$




</td>
<td>

$L1:\quad Ax+By+D_1=0$

$L2:\quad \underbrace{Ax+By+D_2=0}$

$\overline{N}_1=\overline{N}_2=\overline{N}=(A,B)\perp L1,L2$

$\Rightarrow$

$d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$

$=\dfrac{\left|A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$M_1(x_1,y_1)\in L1, M_2(x_2,y_2)\in L2$

</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">

$L1:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}\quad \bar{l}_1=\bar{l}_2=\bar{l}=(m,n,p)$

$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L1$

$L2:\dfrac{x-x_2}{m}=\dfrac{y-y_2}{n}=\dfrac{z-z_2}{p}\quad M_2(x_2,y_2,x_2)\in L2$

$d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$

$=\dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m & n & p\end{vmatrix}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\quad \Leftarrow$

</td>
<td rowspan="2">

$L1:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$

$L2:\dfrac{x-x_2}{m}=\dfrac{y-y_2}{n}$

$\bar{l}_1=\bar{l}_2=\bar{l}=(m,n,0)$

$M_1(x_1,y_1)\in L1$

$M_2(x_2,y_2)\in L2$

$\Rightarrow$

$d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$

$=\dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ m & n & 0\end{vmatrix}}{\sqrt{m^2+n^2}}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)$

$=h_{\Delta M_1M_{2\,2},\bar{l}}=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\bar{l}\right]\right|}{\left|\bar{l}\right|}$

$h$ – высота треугольника

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th>III Прямые $L1$ и $L2$ скрещиваются в $R_3$<br>$P1 \parallel P2$ ($L1\subset P1$, $L2\subset P2$)</th>
<th>Прямая $L$ и плоскость $P$ пересекаются в $R_3$ IV<br>$\{P\cap L\}=M_1$</th>
</tr>
<tr>
<td>

$L1:\quad \underbrace{\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}}$

$L1 \parallel \bar{l}_1=(m_1,n_1,p_1), M_1(x_1,y_1,z_1)\in L1$

$L2:\quad \underbrace{\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}}$

$L2 \parallel \bar{l}_2=(m_2,n_2,p_2), M_2(x_2,y_2,z_2)\in L2$

$d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=h_{\Pi(\overline{M_1M_2},\bar{l}_1\bar{l}_2)}=$

$=\dfrac{V_{\Pi(\overline{M_1M_2},\bar{l}_1\bar{l}_2)}}{S_{\Delta\,\bar{l}_1,\bar{l}_2}}=\dfrac{\left|(M_1M_2,\bar{l}_1,\bar{l}_2)\right|}{\left|\left[\bar{l}_1,\bar{l}_2\right]\right|}=$

$=\dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}\neq 0$

($d(L1,L2)=0\Leftrightarrow L1\cap L2$); $\Pi(\boldsymbol{M_1M_2},\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_2})$ –параллелепипед, построенный на векторах $\boldsymbol{M_1M_2}$, $\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_2}$, $h$ – его высота

</td>
<td>

$P:\ \underbrace{Ax+Bx+Cz+D=0}$

$P\perp\overline{N}=(A,B,C)\perp P$

$L:\underbrace{\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}}_{L\,\parallel\,\bar{l}=(m,n,p)}$

$M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$

$\cos(\overline{N},\bar{l})=\cos(\dfrac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$

$\sin\varphi=\cos(\overline{N},\bar{l})=\dfrac{(\overline{N},\bar{l})}{\left|\overline{N}\right|\left|\bar{l}\right|}=$

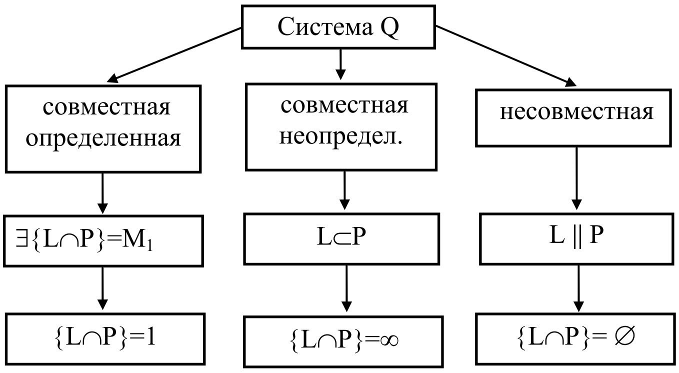
$=\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\neq\pm1$

$\left.\begin{array}{l}\sin\varphi=\pm1\\ \cos\varphi=0\\ (\overline{N},\bar{l})=0\end{array}\right\}(P\parallel L)\cup(L\subset P)$

$\sin\varphi=0\Leftrightarrow L\perp P, \boldsymbol{l}\,||\,\boldsymbol{N}$

</td>
</tr>
</table>

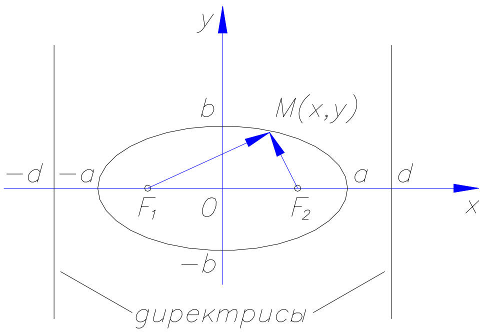
*ТАБЛИЦА 6а* (продолжение таблицы 6)

| | |
|---|---|
| VI **Векторная запись условий ортогональности (*P*⊥*L*), коллинеарности (*P*\|\|*L*) плоскости *P* и прямой *L* в $R_3$,**<br>**пересечения *P* и *L* (*P*∩*L*).** | **$\{P\cap L\}=M_1(x_1,y_1,z_1)$ – координаты точки пересечения плоскости *P* и прямой *L* в $R_3$** V |
| $1. L\perp P \Leftrightarrow \left[\bar l, \overline{N}\right] = \vec{0}$<br>$2. L \parallel P \Leftrightarrow (\bar l, \overline{N}) = 0$<br>$3. L\cap P \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} L: \bar r = r_0 + t\bar l \ (2.II) \\ P: (\bar r, \overline{N}) + D = 0 (1.II) \end{array}\right\} \Rightarrow$<br>$\Rightarrow (\bar r_0 + t\bar l, \overline{N}) + D = 0,$<br>$t = -\dfrac{(\bar r_0, \overline{N}) + D}{(\bar l, \overline{N})} = t_1 \Leftrightarrow M_1(t_1) = \left\{L\cap P\right\}$ | $\left.\begin{array}{l} P: Ax + By + Cz + D = 0 \\ L: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p} = t \end{array}\right\} Q; \begin{array}{l} P\perp \overline{N} = (A,B,C) \\ M_0(x_0,y_0,z_0)\in L \\ L\parallel \bar l = (m,n,p) \end{array}$<br>$A(x_0+mt) + B(y_0+nt) + C(z_0+pt) + D = 0 \Rightarrow t = t_1$ (2.II) $\Rightarrow$<br>$\begin{cases} x_1 = x_0 + t_1 m \\ y_1 = y_0 + t_1 n \Rightarrow \\ z_1 = z_0 + t_1 p \end{cases} \begin{array}{l} M_1(x_1,y_1,z_1)\in L, \\ M_1(x_1,y_1,z_1)\in P \end{array}$<br><br> |

## КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Определение эллипса.**

**Эллипсом** называется множество всех точек плоскости, для которых ***сумма расстояний*** от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами и равная ***2a.***




$a$ – большая полуось эллипса;
$b$ – малая полуось эллипса;
$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса;
$c^2 = a^2 - b^2$, $c$ – фокусное расстояние эллипса;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$, $\varepsilon$ – эксцентриситет эллипса;

$\vec{r}_1 = \overrightarrow{F_1M}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{F_2M}$ – фокальные радиусы-векторы;

по определению $r_1 + r_2 = 2a$.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm d$ называются директрисами эллипса.

**Каноническое** уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**Строят** эллипс, вписывая его в прямоугольник со сторонами длиной $2a$ и $2b$ и с центром симметрии в начале координат.
Уравнение эллипса со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ центром имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

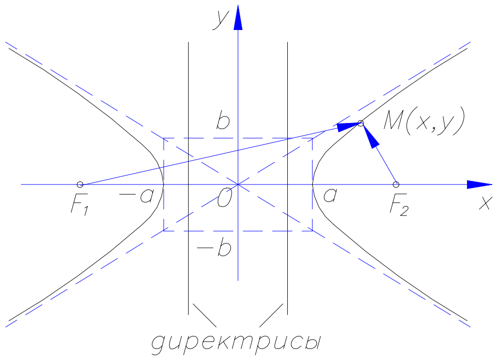
Чтобы привести **общее уравнение эллипса**
$a_{11}x^2 + a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$, где коэффициенты $a_{11}$ и $a_{22}$
должны иметь одинаковые знаки, **к каноническому виду,** нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным $x$ и $y$.

Например, приведем уравнение кривой
$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$
к каноническому виду:
$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.
Полученное уравнение является каноническим уравнением окружности, радиус которой равен 2, а центр находится в точке $M(1,-3)$.
**Признак уравнения окружности:**

1. коэффициенты при квадратах переменных одинаковые;
2. отсутствует произведение переменных.

**Определение гиперболы.**

**Гиперболой** называется множество всех точек плоскости, для которых ***модуль разности расстояний*** от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами и равная ***2a.***




$a$ – действительная полуось гиперболы;

$b$ – мнимая полуось гиперболы;

$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы гиперболы;

$c^2 = a^2 + b^2$, $c$ – фокусное расстояние гиперболы;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$, $\varepsilon$ – эксцентриситет гиперболы;

$\vec{r}_1 = \overrightarrow{F_1M}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{F_2M}$ – фокальные радиусы-векторы;

по определению $|r_1 - r_2| = 2a$. Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm d$ называются директрисами гиперболы.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

**Каноническое** уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**Строят** гиперболу, изобразив предварительно прямоугольник со сторонами длиной $2a$ и $2b$ и с центром симметрии в начале координат, а затем вписывают ветви гиперболы в углы между асимптотами гиперболы (прямыми, на которых лежат диагонали прямоугольника), помещая вершины гиперболы в точки с координатами *(– a, 0)*, *(a, 0)*.

Уравнение гиперболы со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0,,y_0)$ центром имеет вид

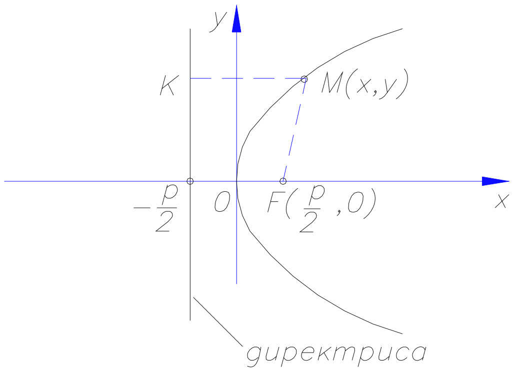
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Чтобы привести **общее уравнение гиперболы**

$a_{11}x^2 + a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$, где коэффициенты $a_{11}$ и $a_{22}$ должны иметь противоположные знаки, **к каноническому виду**, нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным $x$ и $y$.

Гипербола, уравнение которой $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, называется **сопряженной** по отношению к гиперболе, имеющей уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Фокусы сопряженной гиперболы расположены на мнимой оси.

| | |
|---|---|
| **Определение параболы.** | **Параболой** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на ***одинаковом расстоянии*** от данной ***точки,*** называемой фокусом, и от данной ***прямой***, называемой директрисой и не проходящей через фокус. |




**Каноническое** уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

**Строят** параболу, откладывая одинаковые отрезки от точек параболы до фокуса с координатами $F(\frac{p}{2},0)$ и до директрисы, уравнение которой $x = -\frac{p}{2}$. Вершина параболы находится в точке $O(0,0)$.

Уравнение параболы со смещенной при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ вершиной имеет вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Чтобы привести **общее** уравнение параболы $a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$ к **каноническому виду**, нужно ***выделить полный квадрат*** по переменной $y$ и удвоенный параметр $p$ по переменной $x$.

Парабола, уравнение которой $x^2 = 2py$, называется **сопряженной** по отношению к параболе, имеющей уравнение $y^2 = 2px$. Фокус сопряженной параболы расположен в точке $F(0,\frac{p}{2})$, а ее директриса имеет уравнение $y = -\frac{p}{2}$.

## Полярная система координат

Полярная система координат состоит из некоторой точки $O$, называемой **полюсом**, и исходящего из нее луча $OE$, называемого **полярной осью**. Кроме этого задается единица масштаба для измерения длин отрезков.

$\rho -$ это расстояние от точки $M$ до полюса $O$,

$\varphi -$ угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом $OM$.

Полярные и декартовы координаты точки связаны соотношениями:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Чтобы получить изображение кривой в полярной системе координат, постройте лучи, выходящие из полюса 0 под углами $\varphi$ к полярной оси. На каждом луче отложите длину вычисленного Вами полярного радиуса $\rho$. Если $\rho -$ отрицательное число, то для построения соответствующей точки нужно отложить модуль $\rho$ на луче, повёрнутом на 180° вокруг полярной оси, то есть отложить от полярной оси угол $(\varphi + 180^\circ)$. Соедините построенные Вами точки плавной линией.

Кривые, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $\rho = a\sin k\varphi$, $\rho = a\cos k\varphi$, называют розами. Причем, если $k$ – четное, то лепестков у розы $2k$, а если число $k$ – нечетное, то у розы $k$ лепестков.