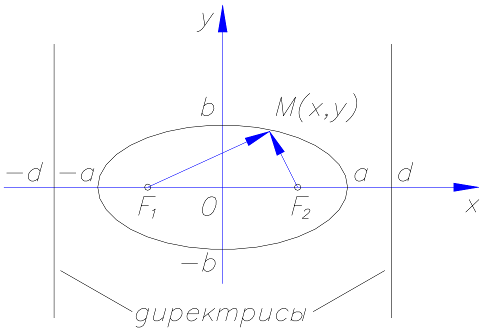
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение эллипса.

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых ***сумма расстояний*** от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами и равная ***2a.***



a – большая полуось эллипса;
b – малая полуось эллипса;
$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса;
$c^2 = a^2 - b^2$, c – фокусное расстояние эллипса;
$\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$, ε – эксцентриситет эллипса;
$\vec{r}_1 = \overrightarrow{F_1M}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{F_2M}$ – фокальные радиусы-векторы;
по определению $r_1 + r_2 = 2a$.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm d$ называются директрисами эллипса.

Каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Строят эллипс, вписывая его в прямоугольник со сторонами длиной $2a$ и $2b$ и с центром симметрии в начале координат.
Уравнение эллипса со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ центром имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

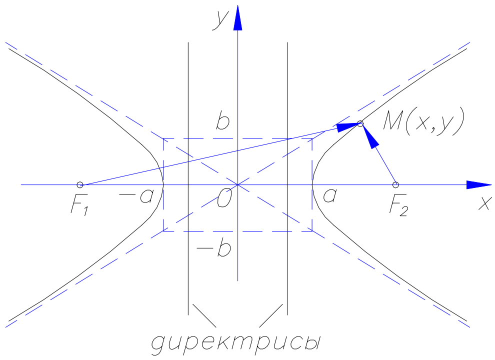
Чтобы привести **общее уравнение эллипса**
$a_{11}x^2 + a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$, где коэффициенты a_{11} и a_{22}
должны иметь одинаковые знаки, **к каноническому виду,** нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным x и y.

Например, приведем уравнение кривой
$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$
к каноническому виду:
$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.
Полученное уравнение является каноническим уравнением окружности, радиус которой равен 2, а центр находится в точке $M(1,-3)$.

Признак уравнения окружности:

1. коэффициенты при квадратах переменных одинаковые;
2. отсутствует произведение переменных.

Определение гиперболы. **Гиперболой** называется множество всех точек плоскости, для которых ***модуль разности расстояний*** от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами и равная ***2a.***



a – действительная полуось гиперболы;
b – мнимая полуось гиперболы;
$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы гиперболы;
$c^2 = a^2 + b^2$, c – фокусное расстояние гиперболы;
$\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$, ε – эксцентриситет гиперболы;
$\vec{r_1} = \vec{F_1M}$, $\vec{r_2} = \vec{F_2M}$ – фокальные радиусы-векторы;

по определению $|r_1 - r_2| = 2a$. Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm d$ называются директрисами гиперболы.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Каноническое уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Строят гиперболу, изобразив предварительно прямоугольник со сторонами длиной $2a$ и $2b$ и с центром симметрии в начале координат, а затем вписывают ветви гиперболы в углы между асимптотами гиперболы (прямыми, на которых лежат диагонали прямоугольника), помещая вершины гиперболы в точки с координатами *(– a, 0)*, *(a, 0)*.
Уравнение гиперболы со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ центром имеет вид

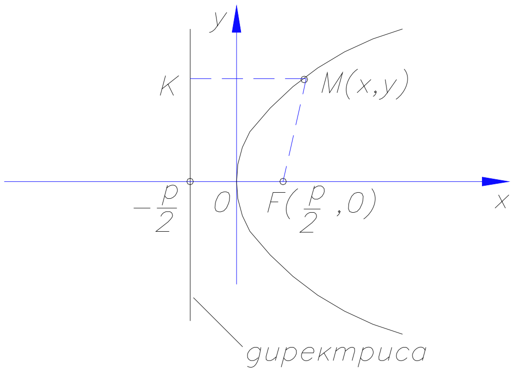
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Чтобы привести **общее уравнение гиперболы** $a_{11}x^2 + a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$, где коэффициенты a_{11} и a_{22} должны иметь противоположные знаки, **к каноническому виду**, нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным x и y.

Гипербола, уравнение которой $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, называется **сопряженной** по отношению к гиперболе, имеющей уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Фокусы сопряженной гиперболы расположены на мнимой оси.

Определение параболы.

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на ***одинаковом расстоянии*** от данной ***точки,*** называемой фокусом, и от данной ***прямой***, называемой директрисой и не проходящей через фокус.



Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Строят параболу, откладывая одинаковые отрезки от точек параболы до фокуса с координатами $F(\frac{p}{2},0)$ и до директрисы, уравнение которой $x = -\frac{p}{2}$. Вершина параболы находится в точке $O(0,0)$.

Уравнение параболы со смещенной при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ вершиной имеет вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Чтобы привести **общее** уравнение параболы $a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$ к **каноническому виду**, нужно ***выделить полный квадрат*** по переменной y и удвоенный параметр p по переменной x.

Парабола, уравнение которой $x^2 = 2py$, называется **сопряженной** по отношению к параболе, имеющей уравнение $y^2 = 2px$. Фокус сопряженной параболы расположен в точке $F(0,\frac{p}{2})$, а ее директриса имеет уравнение $y = -\frac{p}{2}$.

Полярная система координат

Полярная система координат состоит из некоторой точки *O*, называемой **полюсом**, и исходящего из нее луча *OE*, называемого **полярной осью**. Кроме этого задается единица масштаба для измерения длин отрезков.

$\rho -$ это расстояние от точки *M* до полюса *O*,

$\varphi -$ угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом *OM*.

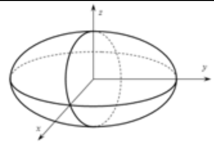
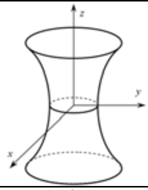
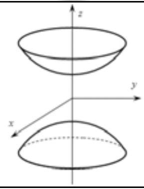
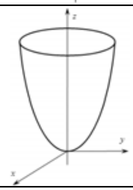
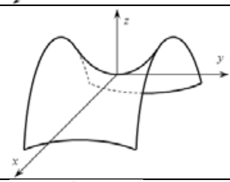
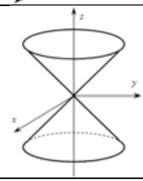
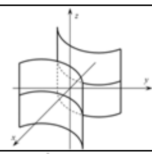
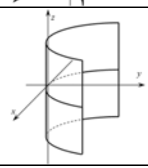
Полярные и декартовы координаты точки связаны соотношениями:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Чтобы получить изображение кривой в полярной системе координат, постройте лучи, выходящие из полюса 0 под углами φ к полярной оси. На каждом луче отложите длину вычисленного Вами полярного радиуса ρ. Если $\rho -$ отрицательное число, то для построения соответствующей точки нужно отложить модуль ρ на луче, повёрнутом на 180° вокруг полярной оси, то есть отложить от полярной оси угол $(\varphi + 180^\circ)$. Соедините построенные Вами точки плавной линией.

Кривые, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $\rho = a\sin k\varphi$, $\rho = a\cos k\varphi$, называют розами. Причем, если k – четное, то лепестков у розы $2k$, а если число k – нечетное, то у розы k лепестков.

Поверхности второго порядка

№	Вид поверхности второго порядка	Уравнение	Рисунок
1	*Эллипсоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$	
2	*Мнимый* эллипсоид	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=-1$	
3	*Однополостный гиперболоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$	
4	*Двуполостный гиперболоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$	
5	*Эллиптический параболоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$	
6	*Гиперболический параболоид*	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z$	
7	*Конус*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$	
8	*Мнимый* конус	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$	
9	*Эллиптический* цилиндр	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$	
10	*Гиперболический* цилиндр	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$	
11	*Параболический* цилиндр	$Y^2 = 2pX$	
12	*Мнимый* эллиптический цилиндр	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$	
13	Пара *мнимых пересекающихся* плоскостей	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$	
14	Пара *пересекающихся* плоскостей	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$	
15	Пара *параллельных* плоскостей	$X^2-a^2=0$	
16	Пара *мнимых параллельных* плоскостей	$X^2+a^2=0$	
17	Пара *совпавших* плоскостей	$X^2=0$	