

## Варианты домашних заданий

### Индивидуальное задание №3

#### Вариант 1

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt{4+n^2}}{n};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{(1-2x)^2};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4-x^2}{x^2+7x+10};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+3}{4x-5} \right)^{\frac{x+1}{3}};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -1-0} \left( 2 - 3^{\frac{1}{x+1}} \right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{2-x} - \frac{5x}{x^2-4} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+3) - \ln 3}{x^2};$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{\sin^2 x};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -1+0} \left( 2 - 3^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} \sqrt{x^2-4}, & x < -2, \\ x-3, & -2 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases} \quad 2.2. y = \frac{1}{2^x-1}; \quad 2.3. y = \frac{-2+x}{|x|}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow \pi$ , если  $\alpha(x) = 1 + \cos 3x$  и  $\beta(x) = \sin^2 7x$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = e^{2x} - \cos x$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = x \cdot \ln(x+1);$$

$$5.2. y = 1 - \sin x + (1-x^2)^3;$$

$$5.3. y = x^2 \cdot e^{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$5.4. y = \frac{3x^5 - 2x^4 + 4}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$5.5. y = 2\sqrt[3]{x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^2 + x + 1}};$$

$$5.6. y = \cos^3(1 - 5x^2);$$

$$5.7. y = \ln(2x + \sqrt{2^x - \sqrt{x} + 1});$$

$$5.8. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{1 - \sin x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (\sin x)^{x^2}$ .

7. Найдите производную параметрической функции: 
$$\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = \frac{1}{2}t^2 - t. \end{cases}$$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = \frac{4x - x^2}{4}, x_0 = 2;$$

$$8.2. \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \end{cases} M_0\left(\frac{a}{8}; a \frac{3\sqrt{3}}{8}\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = x^2 \cdot e^{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$9.2. \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin^2 t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt[3]{x}$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала  $y = \sqrt[3]{7.76}$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = \ln(1 - \cos 2x)$  в точке  $x_0 = \pi/2$ .

## Вариант №2

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1+2n^3}}{n+2};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + 3x - 1}{2x^3 + x - 2};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5}{x^2 - 4} \right)^{x^2 + 1};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{arctg} x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{x}}};$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+3)!}{(n+2)! - n!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{3x};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+2) - \ln x);$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{x}}}.$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq 2, \\ x^2 + 3, & x > 2; \end{cases} \quad 2.2. y = 2 - 3^{\frac{x+1}{x}}; \quad 2.3. y = \frac{x-1}{|x|}$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = a^x - a^{-x}$  и  $\beta(x) = \operatorname{tg} x$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = a^x - \cos x$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = (x+1) \cdot \ln x;$$

$$5.2. y = 2 - \cos x + (1 - x^2)^4;$$

$$5.3. y = x^3 \cdot e^{\sqrt{x^2 - x + 1}};$$

$$5.4. y = \frac{2x^3 - 2x + 1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$5.5. y = \sqrt[4]{x+3} - \frac{3}{(x^2 + x + 1)^2};$$

$$5.6. y = \cos^2(1 - 5x^3);$$

$$5.7. y = \ln(x - \sqrt{3^x - \sqrt{x+1}});$$

$$5.8. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^3 x + \sqrt{1 + \sin x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (\cos x)^{x^2}$ .

7. Найдите производную параметрической функции: 
$$\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

8.1.  $y = 1 + x - x^2$ ,  $x_0 = 2$ ;                      8.2. 
$$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \quad M_0\left(\frac{1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

9.1.  $y = x^2 \cdot e^{x^2+1}$ ;                                      9.2. 
$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt[4]{x}$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала  $y = \sqrt[4]{16.06}$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = \ln(1 - \sin 2x)$  в точке  $x_0 = \pi/8$ .

### Вариант №3

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4n}}{\sqrt[3]{2n^3 + 10}};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 10}{x^2 - 5x + 6};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 1}{2x - 5} \right)^x;$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -3+0} \left( 3 + 2^{-\frac{1}{x+3}} \right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n-1)!}{(n-1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)(\ln(3x+1) - \ln(3x-4));$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{e^{2x} - 1};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -3-0} \left( 3 + 2^{-\frac{1}{x+3}} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x + 3 & x > 3; \end{cases}$$

$$2.2. y = 9^{x+7};$$

$$2.3. y = \frac{x+2}{|x|}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если

$$\alpha(x) = 1 - \cos \sqrt[3]{x^2} \text{ и } \beta(x) = \sqrt[3]{x} - x.$$

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции

$$y = e^{\sqrt{\sin x}} - 1 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = x^2 \cdot \ln x;$$

$$5.2. y = 2 - \cos x + x^2;$$

$$5.3. y = x^3 \cdot e^{\sqrt[3]{x^2 - x + 1}};$$

$$5.4. y = \frac{x^3 + 2x^2 - 11}{\sqrt{1 - x^3}};$$

$$5.5. y = \sqrt[4]{3x - 1} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + x + 1}};$$

$$5.6. y = \operatorname{tg}^2(1 + 5x^3);$$

$$5.7. y = \log_3(x - \sqrt{3^x - \sqrt{x}});$$

$$5.8. y = \arcsin(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{1 - \sin x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (\sin(1 + x))^{x^2}$ .

7. Найдите производную параметрической функции: 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y = y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = 1 + x^3 - 2x^5, x_0 = -1;$$

$$8.2. \begin{cases} x = 2 \sin^3 t, \\ y = 2 \cos^3 t, \end{cases} M_0\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $y''_{xx}$  для функций:

$$9.1. y = x \cdot e^{x^2 - 1};$$

$$9.2. \begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \frac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2}$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(0.98)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = x \cdot e^{x^2 - 1}$ ; в точке  $x_0 = 1$ .

## Вариант №4

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 - 3n + 1};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{6x^2 - 3};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 14};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5(2x+1)}{x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 3-0} \left( 1 - 4^{-\frac{1}{x-3}} \right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{2n! - 3(n+1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x}{x^2 - 9} - \frac{1}{x-3} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} \sin \sqrt{x})}{x};$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 3+0} \left( 1 - 4^{-\frac{1}{x-3}} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3 + \sqrt{x}, & x > 4; \end{cases}$$

$$2.2. y = 1 - \frac{1}{x+2};$$

$$2.3. y = \frac{x-2}{|x|}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = e^{\sqrt{x^3}} - 1$  и  $\beta(x) = 1 - \cos(\sin x)$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = 1 - \sqrt[3]{\cos x}$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = (1 - x^2) \cdot \ln x;$$

$$5.2. y = 2x^2 - \operatorname{tg} x + 2;$$

$$5.3. y = x \cdot e^{\sqrt[5]{x-x^2+1}};$$

$$5.4. y = \frac{\sin(2x^2 - 11)}{\sqrt{x^3 - 1}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{x-3} - \frac{1}{\sqrt{x^3 + x + 1}};$$

$$5.6. y = \operatorname{ctg}^2(1 - 5x^3);$$

$$5.7. y = \log_2(3x - \sqrt{4^x - \sqrt{2x}});$$

$$5.8. y = \arccos(\ln x + \sqrt{1 - e^x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции

$$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = 2x^3 - x^2, x_0 = -1;$$

$$8.2. \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} M_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2 - 1};$$

$$9.2. \begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала  $y = \sqrt[3]{1.012}$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2 - 1}$  в точке  $x_0 = -1$ .



## Вариант №5

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 1} + n}{\sqrt[4]{n^3 - 1} - n};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + (x+1)^3}{2x^3 - 3(x+1)^3};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 2x^2 - 5}{x^2 - 3x + 2};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x^2};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x(1 - \cos 4x)};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 2+0} \left( 1 - 3^{\frac{1}{2-x}} \right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n-1)!}{2n(n+1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+11} - 2\sqrt{x-1}}{x^2 - 25};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 2) - \ln 2}{x^2};$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 2-0} \left( 1 - 3^{\frac{1}{2-x}} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции

$$2.1. y = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$2.2. y = \frac{1}{1 + 8^{\frac{1}{3-x}}};$$

$$2.3. y = \frac{2|x|}{x+1}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = \sin(1 - \cos x)$  и  $\beta(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} - 1$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = (1-x) \cdot \ln(1-x);$$

$$5.2. y = 2x^5 - \operatorname{arctg} x + 1;$$

$$5.3. y = x^2 \cdot 7^{\sqrt{1-x^2+x}};$$

$$5.4. y = \frac{\ln(2x^2 - 11)}{e^{x^3-1}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x^3+x}};$$

$$5.6. y = \sin^2(1+x^3);$$

$$5.7. y = \log_2\left(3 - \sqrt{4^x - \frac{1}{\sqrt{2x}}}\right);$$

$$5.8. y = \arccos(\cos x + \sqrt{e^x - 1}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции

$$y = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = x^5 - 2x^3, x_0 = 1;$$

$$8.2. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} M_0\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}; 1\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (x^2 - 1) \cdot e^{1-x^2};$$

$$9.2. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt[3]{x}$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала  $y = \sqrt[3]{27.54}$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции

$$y = (x^2 - 1) \cdot e^{1-x^2} \text{ в точке } x_0=0.$$

## Вариант №6

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n};$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{3(n+1)!};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + 1}}{x + 1};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right);$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^5 - x};$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+11} - 2\sqrt{x-1}}{x^2 - 25};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+2}{3x-1} \right)^x;$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} x \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{2} \right) - \ln \frac{x}{2} \right);$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{4x^2};$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x}}{5 \sin x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{1}{1 + 3 \frac{1}{x+4}};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{1}{1 + 3 \frac{1}{x+4}}.$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 2 \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi+4}{2} - x, & x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$2.2. y = 1 + 2 \frac{1}{3^{x-2}};$$

$$2.3. y = \frac{|x|}{x+3}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если

$$\alpha(x) = \sqrt{\cos x} - 1 \text{ и } \beta(x) = \sqrt[3]{1-x^2} - 1.$$

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = \operatorname{tg} x - \sin x$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = (1+x) \cdot \ln(x^2 - 1);$$

$$5.2. y = \frac{1}{x} - 5^x - 10;$$

$$5.3. y = (1-x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1-x^2+x}};$$

$$5.4. y = \frac{\sin(2-x^3)}{e^{\sqrt{x-1}}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{x^2+3} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3+x}};$$

$$5.6. y = \cos^2(1+x^3);$$

$$5.7. y = \log_3(3 - \sqrt{4^x - \sqrt{2x}});$$

$$5.8. y = \arcsin(\cos(x + \sqrt{e^x - 1})).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (1+x)^{\sin x}$ .

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \cos 2t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = 1 + \sin x - \cos 2x, x_0 = \frac{\pi}{6};$$

$$8.2. \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} M_0(1; 2).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (x^2 - 1) \cdot \ln(1 - x^2);$$

$$9.2. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \cos 2t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$  и вычислите

приблизенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.016)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = (x^2 - 1) \cdot \ln(1 - x^2)$  в точке  $x_0=0$ .

## Вариант №7

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - 5n}{4n^2 + 5n - 2} \right)^2;$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + x + 2};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x - 2};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^{2x};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{1 - \cos x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 4-0} \left( 1 - 3^{-\frac{1}{x-4}} \right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{2n! - 3(n+1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-6} - 2x \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\ln(2x+1));$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 4+0} \left( 1 - 3^{-\frac{1}{x-4}} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 4 + \sqrt{x}, & x > 4; \end{cases}$$

$$2.2. y = -1 + 2^{\frac{1}{x+2}};$$

$$2.3. y = \frac{2|x|}{x+1}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = \sqrt[4]{1+x^2} - 1$  и  $\beta(x) = \sin^2 5x$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$  при  $x \rightarrow 1$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = x \cdot \ln(x^2 - 1);$$

$$5.2. y = \sqrt{x} - 2^x - 3;$$

$$5.3. y = (1 - \sqrt{x})^3 \cdot e^{\sin^4 x};$$

$$5.4. y = \frac{2 - x^3 + x^5}{e^{x-1}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{3 - x^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{1 - x^3 + x}};$$

$$5.6. y = \cos^2(1 - x^4);$$

$$5.7. y = \log_3(\sqrt{3} - \sqrt{4^x - \sqrt{1-x}}); \quad 5.8. y = \arccos(\sin(x + \sqrt{e^x - 1})).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (1 - x)^{\ln x}$ .

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = 1 + \sin x - \cos 2x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{6}; \quad 8.2. \begin{cases} x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \\ y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}, \end{cases} \quad M_0\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (x^2 - 1) \cdot \ln(x^2 - 1);$$

$$9.2. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \arcsin x$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(0.08)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = (x^2 - 1) \cdot \ln(x^2 - 1)$  в точке  $x_0=2$ .

## Вариант №8

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{3^n + 2};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^4 - 7x - 2};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 4}{3x - 1} \right)^{2x-1};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{1 - \cos 3x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -2-0} \left( \frac{x-3}{x^2-4} \right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{2(n+2)! - (n+1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x+2} - \frac{x^2+5}{x+1} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{12x} \ln(1+6x);$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x}{x^2};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -2+0} \left( \frac{x-3}{x^2-4} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & x > 1; \end{cases}$$

$$2.2. y = 2 + \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-2}}};$$

$$2.3. y = \frac{|2-x|}{2-x}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{x^2})$  и  $\beta(x) = \operatorname{tg} 2x$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = \ln(1 + \sqrt{x^3})$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = x^4 \cdot \ln(x-1);$$

$$5.2. y = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 3;$$

$$5.3. y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot e^{\cos^4 x};$$

$$5.4. y = \frac{2 + x^3 - x^5}{e^{x+1}};$$

$$5.5. y = \sqrt{3x - x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^3 + x}};$$

$$5.6. y = \cos^3(1 - x^4);$$

$$5.7. y = 4^{\sqrt{3} - \sqrt{4^x - \sqrt{1-x}}};$$

$$5.8. y = \arctg(\sin(x + \sqrt{e^x - 1})).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$ .

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = x + \sin x + \cos 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$8.2. \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^2}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^2}, \end{cases} \quad M_0\left(\frac{6}{5}; \frac{12}{5}\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (1 - x^2) \cdot \ln(x^2 - 1);$$

$$9.2. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(0.97)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$  в точке  $t_0 = \pi/3$ .



## Вариант №9

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{3n};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{2x^3 - 2x + 3};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 - x - 2}{x^2 - 4x + 3};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+4}{2x-1} \right)^{\frac{1-2x}{4}};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{3x} - 1}{5x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -0} 12^{x^{\frac{1}{-1}+1}};$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{2n! - 5(n+1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x+2} - \frac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 4} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 3}{x^2 - x - 2};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 - 4x);$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{2x}};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow +0} 12^{x^{\frac{1}{-1}+1}}.$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ 1 - x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$$

$$2.2. y = -1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}};$$

$$2.3. y = 1 + \frac{x}{|x|}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = x \cdot e^x$  и  $\beta(x) = \sqrt[5]{1 + \sin 2x} - 1$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = e^{3x} - \cos x$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = x^4 \cdot \ln(1 - x);$$

$$5.2. y = e^x - \frac{1}{x} - 3x;$$

$$5.3. y = \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{3-x} \right) \cdot 5^{\cos^4 x};$$

$$5.4. y = \frac{2+x-x^4}{e^{x+1}};$$

$$5.5. y = \sqrt[4]{3x-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1+x^3-2x}};$$

$$5.6. y = \operatorname{tg}^3(1-x-x^4);$$

$$5.7. y = 4^{\sqrt{3}-\sqrt{4^x-\sqrt{1-x}}};$$

$$5.8. y = \operatorname{arctg}(\sin(x + \sqrt{e^x-1})).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (\operatorname{tg}^2 x)^{\ln x}$ .

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t^2 - 2t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = x + \sin x - \cos 2x, \quad x_0 = \pi;$$

$$8.2. \begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, \end{cases} \quad M_0(0; 0).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = \sqrt{x^2-1} \cdot \ln(x^2-1);$$

$$9.2. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = t^2 - 2t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt{x^2+x+3}$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.97)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = x + \sin x - \cos 2x$  в точке  $x_0 = \pi$ .

## Вариант №10

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 1}{2^{2n} + 1};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 5x^6 - 1}{2x^7 - 2x};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^3 - 27};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-4} \right)^{8x-1};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(4x)}{\operatorname{tg}(3x^2)};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -3+0} \left( 2 - 2^{\frac{1}{x+3}} \right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n+3)!}{n(n! - (n+2)!)};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x-2} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 12} - 2}{\sqrt{x^2 - 7} - 3};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(2x+1) - \ln(2x-2));$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\sin x}{2}} - e^{3x}}{2x};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -3-0} \left( 2 - 2^{\frac{1}{x+3}} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x < 3, \\ x^2, & x \geq 3; \end{cases}$$

$$2.2. y = 2^{\frac{-1}{x-1}} - 1;$$

$$2.3. y = 2 + \frac{|x|}{2}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = \sqrt{1+x^2} \cdot \sin x - 1$  и  $\beta(x) = \sin^3 x$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = 1 - \cos \sqrt[3]{x^2}$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = (x+1)^4 \cdot \ln(x);$$

$$5.2. y = 2^x - \sqrt{x} - 3x;$$

$$5.3. y = \left( \frac{1}{\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+4} \right) \cdot 5^{\sin^4 3x};$$

$$5.4. y = \frac{2x - 3x^2 - x^3}{x^2 + 1};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{3-x-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1+3x-4x^2}};$$

$$5.6. y = \operatorname{tg}^5(1+4x-x^4);$$

$$5.7. y = \log_5(\sqrt{3} - \sqrt{4^x - x^4});$$

$$5.8. y = \operatorname{arctg}(\ln x + \sqrt{1-e^x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln^2 x}$ .

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t - \cos t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = 1 + e^{-3x}, x_0 = 0;$$

$$8.2. \begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases} M_0\left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (1-x)^2 \cdot e^{x^2-1};$$

$$9.2. \begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t - \cos t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = x^{11}$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.021)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = (1-x)^2 \cdot e^{x^2-1}$  в точке  $x_0 = 2$ .

## Вариант №11

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} - 1}{1 - 6^n};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x + 2}{x^3 + 3};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x - 4};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 3}{2x - 1} \right)^x;$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3 \sin x}{x - 2 \operatorname{tg} x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{1}{1 + 2 \frac{1}{x+3}};$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n+3)!}{n(n! + (n+2)!)};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 9} \left( \frac{18}{81 - x^2} - \frac{1}{x - 9} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -2(x+2) \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(4x - 2)}{e^{2x-1} - 1};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{1}{1 + 2 \frac{1}{x+3}}.$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 2-x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$2.3. y = 2^{-\frac{1}{x}};$$

$$2.2. y = \frac{x-3}{|x|}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 4$ , если  $\alpha(x) = \ln(x-3)$  и  $\beta(x) = x^2 - 5x + 4$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = \sqrt[3]{1-5x^4} - 1$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = x^4 \cdot e^{x+1};$$

$$5.2. y = 3^x - \sqrt{1+x} - x^3;$$

$$5.3. y = \left( \frac{1}{\sqrt{4-x}} - \sqrt{\ln x + 4} \right) \cdot 5^{\sin^2 3x};$$

$$5.4. y = \frac{2 - 3x^3 + x^4}{\sqrt{1-x}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{3+x-2x^3} - \frac{1}{\cos(1-x) - 4x^2};$$

$$5.6. y = \operatorname{ctg}^5(1-x^4);$$

$$5.7. y = \log_5(\sqrt{3} - \sin 4x + \cos^4 x);$$

$$5.8. y = \operatorname{arctg} \sqrt{1-e^x}.$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$ .

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \sin t - t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = 1 + \ln(x-1) - x^2, x_0 = 2; \quad 8.2. \begin{cases} x = \frac{1+t}{t^2}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{4}; \frac{11}{8}\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (1-x)^2 \cdot \sin(x^2 - 1);$$

$$9.2. \begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \sin t - t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = x^{21}$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.998)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = (1-x)^2 \cdot \sin(x^2 - 1)$  в точке  $x_0 = -1$ .

## Вариант №12

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{n\sqrt{n^2 - 2}};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - x + 1}{x^3 + 1};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+3}\right)^{x+2};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x - \sin x)^2}{x^2};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 6-0} \frac{1}{7^{6-x}};$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} 3x \left( \ln \left(1 + \frac{x}{3}\right) - \ln \frac{x}{3} \right);$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - 1}{1 - \cos x};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 6+0} \frac{1}{7^{6-x}}.$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x - 3, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{x}, & x > 2 \end{cases}$$

$$2.2. y = 1 + 2^{-\frac{1}{3x-1}};$$

$$2.3. y = \frac{|x-2|}{x-1}$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 7$ , если  $\alpha(x) = \ln(x-6)$  и  $\beta(x) = \sqrt[3]{8-x} - 1$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = \sqrt[3]{x^4 + \sin x}$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = (1-x)^2 \cdot 2^{x+1};$$

$$5.2. y = \ln x + \frac{1}{x} - \cos x;$$

$$5.3. y = \left( \frac{1}{9-x^2} - \sqrt{e^x + x^3} \right) \cdot \operatorname{tg}^2 3x;$$

$$5.4. y = \frac{2 + 3x^2 + 5x^4}{\sqrt{1+x}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{3-2x^3} - \frac{1}{\sin(1-x) - 4x^2};$$

$$5.6. y = \operatorname{ctg}^4(1+x^5);$$

$$5.7. y = \log_2(\sqrt{3} - \cos 4x + \sin^4 x);$$

$$5.8. y = \operatorname{arccctg} \sqrt{1-e^x}.$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (\sin x)^{\sqrt{1-x}}$ .

7. Найдите производную параметрической функции: 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{t^2 - t}, \\ y = t + t^2. \end{cases}$$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = 1 + \operatorname{tg}^2 x, x_0 = \pi;$$

$$8.2. \begin{cases} x = 1 + \sin t, \\ y = 1 - \cos 2t, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (x-1)^2 \cdot \cos(x^2 - 1);$$

$$9.2. \begin{cases} x = \frac{1}{t^2 + t}, \\ y = t + t^2. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = x^6$  и вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(2.01)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = (x-1)^2 \cdot \cos(x^2 - 1)$  в точке  $x_0 = -1$ .



### Вариант №13

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{5n};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x + 1}{3x^3 - 1};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{2x^2 - 9x + 9};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x;$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{4x+8};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{1 + 4 \frac{1}{x+1}};$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n}{(n+1)!+n!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{6}{9-x^2} - \frac{1}{3-x} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x^2} - 2};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+5) - \ln 5}{x};$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{1 + 4 \frac{1}{x+1}}.$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 4, \\ -2\sqrt{x}, & x > 4; \end{cases}$$

$$2.2. y = 4^{\frac{1}{2-x}};$$

$$2.3. y = \frac{|x|}{x+1}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = 3^{\sin x} - 1$  и  $\beta(x) = \sqrt[5]{1-x} - 1$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = \sqrt{1 + \ln(1 + \sin x)} - 1$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = x^4 \cdot \ln(1-x);$$

$$5.2. y = 2^x - \operatorname{ctg} x + x^2;$$

$$5.3. y = (1-x)^3 \cdot e^{\sqrt[5]{x-1}};$$

$$5.4. y = \frac{3x^4 + 2x^3 - 1}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$5.5. y = \sqrt{3x^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 1}};$$

$$5.6. y = \operatorname{tg}^2(1-x^3);$$

$$5.7. y = \ln(1 - \sqrt{5^x - \sqrt{x}});$$

$$5.8. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{1 - \sin x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции

$$y = (\sin x)^{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \operatorname{tg} t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = 10 + x(3 - 2x^3), x_0 = -1;$$

$$8.2. \begin{cases} x = \frac{1+t}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}, \end{cases} M_0(0; 2).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (x-1)^2 \cdot \cos(1-x^2);$$

$$9.2. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt[3]{x^2}$  и Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.03)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = x^2 \cdot \cos(1-x^2)$  в точке  $x_0 = -1$ .

## Вариант №14

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 10n + 1}{10n^3 + 15n};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 4}{3x + 2} \right)^{\frac{x+1}{3}};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{4+x}}};$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+10x)}{x};$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{4+x}}}.$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} 2, & x \leq 0, \\ x^2 + 2, & 0 < x \leq 1, \\ -x, & x > 1; \end{cases}$$

$$2.2. y = \frac{x}{x^2 - 9};$$

$$2.3. y = \frac{x+2}{|x+1|}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = 1 - \cos x$  и  $\beta(x) = \sin^3 3x$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = \sqrt[4]{1 + \ln^2(1+x^2)} - 1$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = x \cdot \ln(1-x^2);$$

$$5.2. y = 7^x - \arccos x + x^7;$$

$$5.3. y = (1 - x^3) \cdot e^{\sqrt{x-1}};$$

$$5.4. y = \frac{x - 2x^3 + 3}{\sqrt{1 - x^3}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{1 - 3x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - x}};$$

$$5.6. y = \sin^3(1 - x^2);$$

$$5.7. y = \ln(x^2 + \sqrt{5^x - \sqrt{x}});$$

$$5.8. y = \operatorname{arctg}(\cos^2 x + \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (\sin \sqrt{x})^x$ .

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = x + \sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{4}, \quad x_0 = 2\pi;$$

$$8.2. \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases} \quad M_0(-3; -6).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = x^3 \cdot \ln^2 x;$$

$$9.2. \begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt{4x - 1}$  и Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(2.56)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = x^3 \cdot \ln^2(x + 1)$  в точке  $x_0 = 0$ .

## Вариант №15

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (2n-1)^2}{(n+1)^2 + (n-1)^2};$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n-1)! - (n+1)!};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 1}{x^3 + 2x - 1};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{2x+1} - \frac{2x^3+1}{4x^2} \right);$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^x;$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x};$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x^5)}{\sqrt[3]{1+x^5} - 1};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -1-0} \left( 1 + 2^{-\frac{1}{x+1}} \right);$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -1+0} \left( 1 + 2^{-\frac{1}{x+1}} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2; \end{cases}$$

$$2.2. y = \frac{1}{x^2 - 4};$$

$$2.3. y = \frac{2x}{|x+2|}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 1$ , если

$$\alpha(x) = \frac{1-x}{1+x} \text{ и } \beta(x) = 2 - 2\sqrt{x}.$$

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции

$$y = \sin(\sqrt{1+x^2} - 1) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = x + 1 + \ln(1-x);$$

$$5.2. y = 2^{x+1} - \operatorname{tg} x + x^3;$$

$$5.3. y = (1 - x^2)^3 \cdot e^{\sqrt[5]{x-1}};$$

$$5.4. y = \frac{3 + x^4 - 2x^3}{\sqrt{1 - x^3}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{3x^2 - x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 1}};$$

$$5.6. y = \operatorname{ctg}^2(1 - 2x^3);$$

$$5.7. y = \ln(5^x - \sqrt{1 - \sqrt{x}});$$

$$5.8. y = \operatorname{arctg}(\sin^4 x + \sqrt{1 - \cos x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции  $y = (\sin \sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ .

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = t + e^t, \\ y = t - e^{-t}. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = 1 + x^3 + x^5, x_0 = -1;$$

$$8.2. \begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t, \end{cases} M_0(0; 0).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (1 - x)^3 \cdot \ln^2(x - 1);$$

$$9.2. \begin{cases} x = t + e^t, \\ y = t - e^{-t}. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = x^7$  и Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(2.002)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = x \cdot \ln^2(x + 1)$  в точке  $x_0 = 1$ .

## Вариант №16

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^3 + (2n-1)^3};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{6x^2 - 3};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x - 2};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right)^{x(x+2)};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x+2}{x^2 - 9};$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n-1)!}{(n-1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - \frac{x^2}{x+1}\right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 - \sqrt{35x+1}}{x-1};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4 \sin x)}{x};$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x+2}{x^2 - 9}.$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} 2 - x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 + 1, & x > 0; \end{cases}$$

$$2.2. y = \frac{1}{e^{x-1} - 1};$$

$$2.3. y = \frac{3|x|}{x}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x^2})$  и  $\beta(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = 1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = 1 - x + \ln(1 + x);$$

$$5.2. y = 3^{x+1} - \cos x + (x+1)^3;$$

$$5.3. y = (1 + 2x^3)^2 \cdot e^{\sqrt{1-x}};$$

$$5.4. y = \frac{3x^4 + x^3 - 3}{\sqrt{1-2x^2}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{3x-3} - \frac{1}{\sqrt[4]{10-x^4+x}};$$

$$5.6. y = \operatorname{tg}^3(1-2x)^2;$$

$$5.7. y = \ln(2^x - \sqrt{x - \sqrt{2x}});$$

$$5.8. y = \operatorname{arctg}(\sin 4x + \sqrt{\cos x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции

$$y = (\sin \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$$

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

8.1.  $y = \sin^3 x + \cos^2 x, x_0 = \frac{\pi}{6};$

8.2.  $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}, \end{cases} M_0\left(3; \frac{2}{3}\right).$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

9.1.  $y = (1+x)^3 \cdot \ln^2(x+1);$

9.2.  $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt[3]{2x + \cos x}$  и Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(0.01)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = \frac{x^3}{x+1}$  в точке  $x_0 = 1$ .



## Вариант №17

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - 5n}{n^2 + 5n} \right)^3;$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 3}{6x^2 - 2};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 11x + 10}{3x^2 - 5x + 6};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+3} \right)^{\frac{x+1}{3}};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -2+0} \left( 1 - 5^{\frac{1}{x^2-4}} \right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x^2 - 9} - \frac{1}{2x - 6} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+1) \cdot \ln(x^2 + 1) - \ln x^2);$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -2+0} \left( 1 - 5^{\frac{1}{x^2-4}} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} x - 2, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & x > 4; \end{cases}$$

$$2.2. y = -1 + 2^{\frac{1}{x+3}};$$

$$2.3. y = \frac{x-2}{|x|}.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = 3^{x^2} - \cos x$  и  $\beta(x) = 5 \sin x^2$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = \ln(x^2 + 2x - 2)$  при  $x \rightarrow 1$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = 1 - x^2 + \ln(1 - x);$$

$$5.2. y = 3^x - \log_3 x + x^3;$$

$$5.3. y = (1 + 2x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1-x}};$$

$$5.4. y = \frac{3x^2 - 3}{\sqrt{2 - x^2}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{3x^3 - x} - \frac{1}{\sqrt{10 - x^2 + x^4}};$$

$$5.6. y = \sin^4(x - 2x^2);$$

$$5.7. y = \ln(3^x - \sqrt{2x - \sqrt{2 + x}});$$

$$5.8. y = \cos(\operatorname{arctg} 4x + \sqrt{\operatorname{tg} x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции

$$y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{\sin x}}.$$

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t - t^2. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = x - x^3 - 2x^5, x_0 = 1;$$

$$8.2. \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; 2\sqrt{2}\right).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = (x - 1)^3 \cdot \ln^2(1 - x);$$

$$9.2. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t - t^2. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt{1 + x + \sin x}$  и Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(0.01)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = \frac{x - 1}{x + 1}$  в точке  $x_0 = 0$ .

## Вариант №18

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 - 15}{7n^5 + 5n + 1};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 5};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 1-0} \left( 1 - 7^{\frac{1}{x-1}} \right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{4}{4-x} - \frac{3}{16-x^2} \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \cdot \ln(1 + 2 \sin x);$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \cdot \operatorname{tg}(3x)};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 1+0} \left( 1 - 7^{\frac{1}{x-1}} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} x + 2, & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & x > 4; \end{cases}$$

$$2.2. y = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x-1}}};$$

$$2.3. y = 2|x - 3|.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 2$ , если

$$\alpha(x) = \frac{4 - x^2}{2 + x} \text{ и } \beta(x) = \ln(3 - x).$$

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции

$$y = \sqrt[3]{1+x} - 1 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = 1 - 2x + \ln(1 - 2x);$$

$$5.2. y = 4^x - \log_4 x + x^4;$$

$$5.3. y = (1 - 2x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1+x}};$$

$$5.4. y = \frac{3x^2 + 3}{\sqrt{2 + x^2}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{3x^3 + x} - \frac{1}{\sqrt{10 + x^2 - x^4}};$$

$$5.6. y = \sin^3(x + 2x^2);$$

$$5.7. y = \ln(3^x + \sqrt{2x + \sqrt{2 - x}});$$

$$5.8. y = \cos(\operatorname{arctg} 4x - \sqrt{\operatorname{ctg} x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции

$$y = x^{\frac{1}{\cos x}}.$$

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3 + \ln 2t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = \operatorname{arctg} x - 2, x_0 = 0;$$

$$8.2. \begin{cases} x = 1 - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \end{cases} M_0(0; 0).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = x \cdot \ln^3 x;$$

$$9.2. \begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3 + \ln 2t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x/2)}$  и Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.02)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  в точке  $x_0 = 0$ .

## Вариант №19

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2 + (n+2)^2}{(n+2)^3 - (n+1)^3};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x + 3};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-2}\right)^{2(x+1)};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin(x)} - 1}{x^2};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 2-0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-2}}\right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n!}{3n! - 2(n-1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2-4}\right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{2 - \sqrt{x^2 + 4}};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1 + 3x^2);$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2(x))^{\operatorname{ctg}^2(x)};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 2+0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-2}}\right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} 2, & x \leq 0, \\ x^2 + 2, & 0 < x \leq 2, \\ x - 1, & x > 2; \end{cases}$$

$$2.2. y = \frac{1}{\frac{1}{e^{x-1}}};$$

$$2.3. y = |x| - x.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = \sqrt{1 + (2x)^2} - 1$  и  $\beta(x) = \ln(1 - x^2)$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = x^3 + 1000x^2$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = x - x^3 + \ln(1 + 2x);$$

$$5.2. y = 2^x + \log_2 x - x^2;$$

$$5.3. y = (1 + 2x^2) \cdot e^{\sqrt[4]{1-x}};$$

$$5.4. y = \frac{x^2 - x}{\sqrt{2 - x^3}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{x^3 - 2x} - \frac{1}{\sqrt{10 + 3x^4}};$$

$$5.6. y = \cos^4(x - 2x^2);$$

$$5.7. y = \ln(5^x - \sqrt{2x + \sqrt{2 - 5x}});$$

$$5.8. y = \sin(\operatorname{arctg} 4x + \sqrt{\operatorname{tg} x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции

$$y = (\sqrt{1-x})^{\frac{1}{x^2}}.$$

7. Найдите производную параметрической функции: 
$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{t} - 2 \cdot t^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

8.1.  $y = \arctg \frac{1}{x}, x_0 = 1;$

8.2. 
$$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \end{cases} M_0(2; 3).$$

9. Найдите производную второго порядка  $y''_{xx}$  для функций:

9.1.  $y = x^3 \cdot \ln x;$

9.2. 
$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{t} - 2 \cdot t^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \sqrt{x^2 + 5}$  и Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.97)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = \frac{x-1}{x^2+1}$  в точке  $x_0 = -1$ .

## Вариант №20

1. Найдите пределы:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 100n^2 + 1}{100 - 15n^4};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 7x + 2}{2x^2 + 5x - 2};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{2x^2 + x - 3};$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x-5} \right)^{x-1};$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{x};$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow -2-0} \left( \frac{1}{1-3 - \frac{1}{x-2}} \right);$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)!}{3(n-2)! - (n-1)!};$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^4}{x^2 + 3} - 3x^2 \right);$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^3 - 2\sqrt{2}};$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x) - \ln 5}{x};$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin(x)} - 1}{\operatorname{tg} x^2};$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -2+0} \left( \frac{1}{1-3 - \frac{1}{x-2}} \right).$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$2.1. y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 3, & 0 \leq x < 4, \\ \sqrt{x}, & x \geq 4; \end{cases}$$

$$2.2. y = \frac{1}{\frac{1}{2^{x-2}} + 1};$$

$$2.3. y = |x| + 2.$$

3. Сравните бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\alpha(x) = \ln(\sqrt[4]{1 - \cos(\sqrt{x})} + 1)$  и  $\beta(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$ .

4. Определите порядок малости относительно  $x$  функции  $y = (e^{-x^2} - \cos x)$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Найдите производную функций:

$$5.1. y = (1+x)^2 + \ln(1+x);$$

$$5.2. y = 6^x - \log_3 x + x^6;$$

$$5.3. y = (1-x)^3 \cdot e^{\sqrt[3]{1+2x}};$$

$$5.4. y = \frac{3x-1}{\sqrt{2-x}};$$

$$5.5. y = \sqrt[3]{x^3-x} - \frac{1}{\sqrt{1-3x^2+x^4}};$$

$$5.6. y = \sin^2(2x-x^2);$$

$$5.7. y = \ln(5^x + 3 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}});$$

$$5.8. y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 4x + \sqrt{\cos x}).$$

6. Найдите производную степенно-показательной функции

$$y = (\sqrt{1-x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

7. Найдите производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 1 - \sin^3 2t. \end{cases}$

8. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составьте уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$8.1. y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x}, \quad x_0 = -2;$$

$$8.2. \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \end{cases} \quad M_0(-7; 4).$$

9. Найдите производную второго порядка  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для функций:

$$9.1. y = x \cdot e^{x^3};$$

$$9.2. \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 1 - \sin^3 2t. \end{cases}$$

10. Найдите дифференциал функции  $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$  и Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.58)$ .

11. Найдите дифференциал второго порядка функции  $y = \frac{x+1}{x-1}$  в точке  $x_0 = -1$ .



## Индивидуальное задание №4

### Вариант 1

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталю:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]; \quad 1.2. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}. \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}.$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x_0=1; \quad 2.2. y = x \cdot \sin x^2, x_0=0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1; \quad 3.3. y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}; \quad 3.2. y = x - 2 \ln x.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = x + \sqrt{x}, [0;4]; \quad 4.2. y = \frac{x+3}{x^2+7}, [-3;7].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = \frac{(x+1)^2}{x-2} \quad 5.2. y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

6. Найдите область определения функции  $z = \ln(y + x^2 - 4)$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \ln(e^x + e^y)$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = xy \ln(x+y)$  если

$$x = t^2 + 1, y = \frac{1}{t^2}.$$

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции

$$z = \operatorname{arctg} xy \text{ если } x = \frac{u}{v^2}, y = \frac{u^2}{v}.$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением

$$z^2 x + x^2 y + y^2 z + 2x - y = 0.$$

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y - 1$ .  
Найдите
- 12.1. производную в точке  $M(2, 1)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $O(0, 0)$ ;
  - 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $N(2, 2)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $y^2 - 2z^2 - x^2 = 1$  в точке  $M(1, 2, 1)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 2y^2$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 4$ . Постройте чертёж.

## Вариант 2

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталю:

1.1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x^n \cdot \sin \frac{a}{x} \right];$

1.3.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos(\pi x/2)};$

1.2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x \right).$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

2.1.  $y = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4};$

2.2.  $y = x \cdot e^{-6x^2}, x_0=0.$

3. Найдите экстремумы функций:

3.1.  $y = \frac{2}{3}x^2 \cdot \sqrt[3]{6x-7};$

3.3.  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1};$

3.2.  $y = \ln x + \frac{1}{x}.$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

4.1.  $y = x^4 - 2x^2 + 3, [-3;2];$

4.1.  $y = \frac{x-5}{x^2+11}, [-3;7].$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

5.1.  $y = x + \ln(x^2 - 4);$

5.2.  $y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}.$

6. Найдите область определения функции  $z = \sqrt{x^2 - y^2 + 1}$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = x^2 + y^2 - 9$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{y^2}{4x}}.$

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = x^2y - y^3x$ , если

$$x = te^{-t}, \quad y = \frac{e^t}{e^t + 1}.$$

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции

$$z = \frac{x+y}{x-y}, \text{ если } x = u^2v^2, \quad y = \frac{u^2}{v^2} - 1.$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z^3 + 3x^2z = 2xy$ .
12. Функция  $u = u(x, y, z)$  задана уравнением  $u = xyz$ . Найдите
- 12.1. производную в точке  $M(5, 1, 2)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(0, 1, 1)$ ;
- 12.1.  $\text{grad } u$  в точке  $K(3, 1, 1)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - y^2 + z^2 = 4$  в точке  $M(1, 1, 2)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = \frac{x^3}{3} + 2y^2 - x + y$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = (x^2 - y^2) \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$  в области, ограниченной кривыми  $y^2 = x, x = 2$ . Постройте чертёж.

### Вариант 3

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталю:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \infty} [x^n \cdot e^{-x}]; \quad 1.2. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}; \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad 2.2. y = \frac{\ln(1-3x)}{x}, \quad x_0=0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = x \cdot \sqrt{2-x^2}; \quad 3.2. y = \frac{1 + \ln x}{x}; \quad 3.3. y = (x-1)^4.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, \quad \left[-\frac{1}{2}; 3\right]; \quad 4.2. y = \frac{x-4}{x^2+9}, \quad [-4; 6].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 \quad 5.2. y = x^3 \cdot e^x.$$

6. Найдите область определения функции  $z = \ln(x+y+1)$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = 1 - \sqrt{1-x^2-y^2}$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ,  $(a, b - \text{const})$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \sqrt{xy} + x$  если  $x = \log_2 t$ ,  $y = 2^t$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции

$$z = \arcsin \frac{x}{y}, \quad \text{если } x = u + v, \quad y = u^2 + v^2.$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - xz - yz = 2$ .

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = (1 + \log_y x)^3$ . Найдите

- 12.1. производную в точке  $M(e, 1.9)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(3e, -2e)$ ;
- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $K(1, 2)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = x^3 - 3xy + y^3$  в точке  $M(1, 1, -1)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x - 2y + 5$  в области, ограниченной прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ . Постройте чертёж.

### Вариант 4

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталья:

1.1.  $\lim_{x \rightarrow 1} [\ln x \cdot \ln(x-1)]$ ;      1.2.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ ;      1.3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ .

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

2.1.  $y = \ln x, x_0 = e$ ;      2.1.  $y = \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^4}}, x_0=0$ .

3. Найдите экстремумы функций:

3.1.  $y = (1+x) \cdot e^x$ ;      3.2.  $y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2}$ ;      3.3.  $y = 2x^3 - 3x^2$ .

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

4.1.  $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, [-3;1]$ ;      4.2.  $y = \frac{x-2}{x^2+5}, [-2;3]$ .

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

5.1.  $y = x + \frac{2x}{x^2-1}$ ;      5.2.  $y = x + \frac{1}{x^2}$ .

6. Найдите область определения функции  $z = \sqrt{3-x+y}$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = -\sqrt{9-x^2-y^2}$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = xe^y + ye^x$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ , если  $x = ctgt, y = \cos t$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ если } x = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}, y = u + v.$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ .

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = \ln(x+y)$ . Найдите

- 12.1. производную в точке  $M(1, 2)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(-3, 6)$ ;
- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $K(1, 1)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $3x^2 + y^2 + z^2 = 8$  в точке  $M(1, -1, 2)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 + xy + y^2 - 2xy - 3y$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = 5x^2 + 3xy + y^2 + 4$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x = -1$ ,  $y = -1$ ,  $x + y = 1$ . Постройте чертёж.



### Вариант 5

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(1-x)}; \quad 1.2. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}; \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right].$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \ln(2+x), \quad x_0 = -1; \quad 2.1. y = \frac{x^3}{6} - \sin x^3, \quad x_0 = 0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4; \quad 3.2. y = (1+x) \cdot e^{-x}; \quad 3.3. y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = x^3 - 3x + 1, \quad \left[\frac{1}{2}; 2\right]; \quad 4.2. y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, \quad [-1; 3].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = 2x - \arcsin x; \quad 5.2. y = \ln \frac{x-1}{x+2}.$$

6. Найдите область определения функции  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = x - 3y + 4$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$  ( $a = \text{const}$ ).

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \ln(x^2 + y^2)$ , если  $x = \operatorname{tgt}, \quad y = \frac{1}{\sin t}$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = \frac{y}{x}$ , если  $x = u^v, \quad y = u^2$ .

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x y z = x + y + z$ .

12. Функция  $u = u(x, y, z)$  задана уравнением  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ . Найдите

12.1. производную в точке  $M(-3, 1, 0)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $O(0, 0, 0)$ ;

12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $N(1, 2, 2)$ .

13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $-3x^2 + y^2 + z^2 = 8$  в точке  $M(0, -2, 2)$ .

14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 + y^3 - 3axy$  ( $a > 0$ ).

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 25$ . Постройте чертёж.

### Вариант 6

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталья:

1.1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x^3}{\sin^6 2x}$ ;      1.2.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$ ;      1.3.  $\lim_{x \rightarrow 0} [\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x]$ .

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

2.1.  $y = \sqrt{2+x}$ ,  $x_0 = -1$ ;      2.2.  $y = \frac{1 - e^{-3x}}{x}$ ,  $x_0 = 0$ .

3. Найдите экстремумы функций:

3.1.  $y = x^3 - 6x^2 + 12x$ ;      3.2.  $y = \frac{x^3}{x^2 + 3}$ ;      3.3.  $y = x^3(x + 2)^2$ .

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

4.1.  $y = x^3 - 12x + 7$ ,  $[0; 3]$ ;      4.2.  $y = \frac{\ln x}{x}$ ,  $(0; \infty)$ .

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

5.1.  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}$ ;      5.2.  $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$ .

6. Найдите область определения функции  $z = \ln(x + y - 2)$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = x \sin \frac{x}{y}$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$ , если  $x = \sqrt{t}$ ,  $y = \ln t$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = \ln \frac{x}{y}$ , если  $x = \ln(e + uv)$ ,  $y = 1 + uv$ .

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z^3 - 3xyz = a^3$  ( $a - \text{const}$ ).

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ .  
Найдите
- 12.1. производную в точке  $M(3, 1)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(6, 5)$ ;
  - 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $K(2, 1)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $3x^2 + y^2 - 4z^2 = -12$  в точке  $M(1, -1, 2)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $y = x + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ . Постройте чертёж.

### Вариант 7

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталья:

1.1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 6x + 6 \sin x}{x^5}$ ;    1.2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\frac{6}{1+2 \ln x}}$ ;    1.3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right]$ .

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

2.1.  $y = \sqrt[3]{3+x}$ ,  $x_0 = -2$ ;    2.2.  $y = \sin(100x^2)$ ,  $x_0 = 0$ .

3. Найдите экстремумы функций:

3.1.  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ ;    3.2.  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ ;    3.3.  $y = 2x^2 - x^4$ .

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

4.1.  $y = x^3 - 18x^2 + 96x$ ,  $[0;9]$ ;    4.2.  $y = \frac{(x+2)^2}{x-1}$ ,  $[-4;0]$ .

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

5.1.  $y = \frac{2}{x^2 - 4}$ ;    5.2.  $y = xe^{-x}$ .

6. Найдите область определения функции  $z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \cos xy^2$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = x^y$ , если  $x = \operatorname{arctg} t$ ,  $y = \ln t$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = \operatorname{tg}(x+y)$ , если  $x = 2^{uv}$ ,  $y = u - v$ .

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ .

12. Функция  $u = u(x, y, z)$  задана уравнением  $u = xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$ . Найдите

12.1. производную в точке  $M(1, 2, -3)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(3, 3, -1)$ ;

- 12.2.  $\text{grad}u$  в точке  $K(1, 0, 1)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 9$  в точке  $M(1, -2, -2)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 + xy^2 + 3axy$  ( $a > 0$ ).
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = xy$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 4$ . Постройте чертёж.

### Вариант 8

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталя:

1.1.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \cdot \operatorname{tg} x$ ;      1.2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ ;      1.3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}$ .

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

2.1.  $y = e^{2+x}$ ,  $x_0 = -2$ ;      2.2.  $y = \cos(100x^2)$ ,  $x_0 = 0$ .

3. Найдите экстремумы функций:

3.1.  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ ;      3.2.  $y = \sqrt{2x - x^2}$ ;      3.3.  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ .

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

4.1.  $y = x^3 - 12x + 7$ ,  $[-3; 0]$ ;      4.2.  $y = \frac{x^3 + 16}{x}$ ,  $[1; 4]$ .

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

5.1.  $y = (x + 4)e^{2x}$ ;      5.2.  $y = x - \ln(x + 1)$ .

6. Найдите область определения функции  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = 4 - 2x + y$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \sin(x^2 + xy)$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = e^{x-2y}$  если  $x = \sin t$ ,  $y = t^3$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = \ln(2x + 3y)$ , если  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = u^2 - v^2$ .

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$ .

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $u = xy^2 + z^3 - xyz$ . Найдите  
12.1. производную в точке  $M(1, 1, 2)$  в направлении, образующим с осями координат углы  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$  соответственно;

- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $K(2, 1, 1)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$  в точке  $M(-1, 1, -1)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 - 4y^2$  в области, ограниченной кривыми  $x^2 = y - 2$ ,  $y = 6$ . Постройте чертёж.



### Вариант 9

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталья:

1.1.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$ ;      1.2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\ln x}$ ;      1.3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$ .

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

2.1.  $y = e^{2-x}$ ,  $x_0 = 2$ ;      2.2.  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{64 - x^3}}$ ,  $x_0 = 0$ .

3. Найдите экстремумы функций:

3.1.  $y = 3 - 2x^2 - x^4$ ;      3.2.  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x-4}}$ ;      3.3.  $y = e^x + e^{-x}$ .

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

4.1.  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ ,  $[-2; 0.5]$ ;      4.2.  $y = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$ ,  $[-2; 1]$ .

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

5.1.  $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$ ;      5.2.  $y = x^2 e^x$ .

6. Найдите область определения функции  $z = \sqrt{2 + x - y}$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = x^2 + y^2 + 2$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = xy^2 + \sin \frac{x}{y}$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \sin xy$ , если  $x = t^2$ ,  $y = e^{-t}$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = 2^{\frac{x}{y}}$ , если  $x = 3u - 4v$ ,  $y = 2uv$ .

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ .

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = \arctg(xy)$ . Найдите

- 12.1. производную в точке  $M(1, 1)$  в направлении биссектрисы первого координатного угла;
- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $K(1, 0)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$  в точке  $M(1, 1, 1)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = \sqrt{2 - 2x^2 - y^2}$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Постройте чертёж.

### Вариант 10

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталья:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right); \quad 1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{(x/2)}}{x + e^x}; \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \frac{1}{\sqrt[4]{2x-1}}, x_0=1; \quad 2.2. y = \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}, x_0=0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = \frac{1}{3}x^3 - x^4; \quad 3.2. y = x \cdot \sqrt[3]{x-1}; \quad 3.3. y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, [-3;0]; \quad 4.2. y = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2, [-3;0].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = \ln(x^2 - 4x + 8); \quad 5.2. y = (x-1)e^{3x}.$$

6. Найдите область определения функции  $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = 2x - 2y + 1$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = x^2 e^{\frac{y}{x}}$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \sqrt{x}y + 1$ , если  $x = 3t + 1, y = \ln t$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = 2x - y^2$ , если  $x = \ln(u + v), y = \ln u + \ln v$ .

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ .

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = 3x^4 - xy + y^3$ . Найдите

12.1. производную в точке  $M(1, 2)$  в направлении, составляющем с осью  $Ox$  угол в  $60^\circ$ , а с осью  $Oy$  —  $120^\circ$ ;

- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $N(2, 1)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $y^2 - 2z^2 + x^2 = 3$  в точке  $M(-2, 1, 1)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 - 2y^2 + 4x$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 9$ . Постройте чертёж.

## Вариант 11

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталю:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right);$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cdot \cos x}{x^4}.$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \cos^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$2.2. y = \frac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}, \quad x_0=0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = x - \ln(1+x^2);$$

$$3.2. y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}};$$

$$3.3. y = x - \sqrt[3]{x^2}.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \quad [0;1];$$

$$4.2. y = \frac{x-3}{x^2+7}, \quad [2;8].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = x^3 \ln x;$$

$$5.2. y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2.$$

6. Найдите область определения функции  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ . Сделайте

чертеж.

7. Постройте график функции  $z = x^2 + y^2 - 4$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = x \cdot 2^{\frac{x}{y}}$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ , если

$$x = (t-1)^2, \quad y = 4^{t^2}.$$

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции

$$z = \frac{1}{\sin xy}, \quad \text{если } x = \frac{1}{\sqrt{u+1}}, \quad y = \frac{v}{u}.$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $\ln z = x + y + z - 1$ .
12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = \ln(e^x + e^y)$ . Найдите
- 12.1. производную в точке  $O(0, 0)$  в направлении вектора  $\vec{l} = \{-3, 4\}$ ;
- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $N(1, 1)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $2x^2 - y^2 + z^2 = 2$  в точке  $M(1, 1, 1)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  в области  $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$ . Постройте чертёж.

## Вариант 12

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталю:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^2); \quad 1.2. \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}; \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}.$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \sin^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad 2.2. y = x \cdot \ln(1 - 2x^2), \quad x_0 = 0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x; \quad 3.2. y = \frac{x}{1+x^2}; \quad 3.3. y = x \cdot e^{-x}.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = x^4 + 4x, \quad [-2; 2]; \quad 4.2. y = \sqrt{100 - x^2}, \quad [-6; 8].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = \frac{x^3 + 16}{x}; \quad 5.2. y = x^2 - 2 \ln x.$$

6. Найдите область определения функции  $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 4}$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = 2x + 3y - 6$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \ln \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \arcsin \frac{y}{x}$ , если  $x = 3^{-t}$ ,  $y = t^3$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{если } x = \sqrt{u} + v, \quad y = uv.$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z^3 + xz + y - 2x = 0$ .

12. Функция  $u = u(x, y, z)$  задана уравнением

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z. \text{ Найдите}$$

12.1. производную в точке  $O(0, 0, 0)$  в направлении вектора  $\vec{l} = \{1, -2, 3\}$ ;

12.2.  $\text{grad}u$  в точке  $O(0, 0, 0)$ .

13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 9$  в точке  $M(1, 0, 2)$ .

14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = xy - x^2y - xy^2$ .

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = \sqrt{3 - x^2 - 2y^2}$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Постройте чертёж.



### Вариант 13

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталья:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\operatorname{ctg}(x - \alpha)}{\ln(x - \alpha)}; \quad 1.2. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right); \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}, \quad x_0=1; \quad 2.2. y = x \cdot \sin 25x^2, \quad x_0=0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = 2x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}; \quad 3.2. y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}; \quad 3.2. y = x \cdot \ln x.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = 81x - x^4, \quad [-1;4]; \quad 4.2. y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, \quad [-1;3].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = x^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-x}; \quad 5.7. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

6. Найдите область определения функции  $z = \ln(x - y + 5)$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = -x^2 - y^2 + 1$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \ln(x + e^y)$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = e^{x^2 y}$  если

$$x = \lg t, \quad y = \frac{1}{t^3}.$$

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = y^x$ ,

$$\text{если } x = 3u^2 + 1, \quad y = u^3 + v^3.$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ . Найдите
- 12.1. производную в точке  $M(1, 2)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(2, 0)$ ;
  - 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $K(2, 2)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - 10y + 2z^2 = 2$  в точке  $M(2, 1, 2)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 6x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = y^2 + 2xy - 3x^2 + x$  в замкнутой области, ограниченной прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 2$ . Постройте чертёж.

### Вариант 14

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталья:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{\frac{1}{x(x-1)}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right); \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{2x} + x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \sqrt[3]{x}, x_0 = -1;$$

$$2.2. y = x^3 \cdot e^{-2x}, x_0 = 0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = x^2(x-12)^2;$$

$$3.2. y = \frac{16}{x(4-x^2)};$$

$$3.3. y = \sqrt{x} \cdot \ln x.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = x^3 - 3x + 1, [0;2];$$

$$4.2. y = \frac{x^2}{x^2 - 4}, (-2;3].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2;$$

$$5.2. y = \ln(2x^2 + 3).$$

6. Найдите область определения функции  $z = \ln(x^2 + y + 1)$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = -x^2 - y^2$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = ye^x$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = 2^{\frac{x}{y}}$ , если  $x = 1/\sqrt{t}$ ,  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{t}$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции

$$z = \left( \frac{x}{y} \right)^2, \text{ если } x = \sin(2u + v), \quad y = \cos(u + 2v).$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^3 + 2y^3 + z^3 - 2xyz - 2y + 8 = 0$ .
12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = \sin(x^2 + y^2)$ . Найдите
- 12.1. производную в точке  $M(1, 1)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(3, 7)$ ;
- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $K(0, \sqrt{\pi/2})$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$  в точке  $M(1, 1, 3)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$  в области  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ . Постройте чертёж.

### Вариант 15

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталя:

1.1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ ; 1.2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos x}}{x^2}$ ; 1.3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{\frac{2}{\operatorname{tg} x}}$ .

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

2.1.  $y = \sqrt[4]{2-x}$ ,  $x_0=1$ ; 2.2.  $y = x^4 + \sin x^2$ ,  $x_0=0$ .

3. Найдите экстремумы функций:

3.1.  $y = x^3 + x^2 + 3$ ; 3.2.  $y = \frac{x^2 + 6x + 13}{x - 3}$ ; 3.3.  $y = x^2 \cdot e^{-x}$ .

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

4.1.  $y = x^3(8-x)$ ,  $[0;7]$ ; 4.2.  $y = \frac{3-x}{x^2+7}$ ,  $[-3;2]$ .

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

5.1.  $y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$ ; 5.2.  $y = e^{3x-x^2}$ .

6. Найдите область определения функции  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = 3 - x - y$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \ln \sqrt{x^2 + y}$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \frac{x}{y^2}$ , если

$$x = \cos \frac{1}{t}, \quad y = \frac{1}{\cos t}.$$

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции

$$z = x^3 + y, \quad \text{если } x = e^{u-v}, \quad y = e^{u+v}.$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $xz^5 + y^2z - x^3 = 0$ .

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ . Найдите

- 12.1. производную в точке  $M(1, 1)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $N(2, 2)$ ;
- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $K(3, 4)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0$  в точке  $M(1, 1, 2)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$  в квадрате  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ . Постройте чертёж.

### Вариант 16

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталю:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} 2x - 2x}; \quad 1.2. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{2 \operatorname{tg} 2x}; \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x} \right].$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \ln(2-x), \quad x_0 = 1; \quad 2.2. y = \sin(5x/2)^2, \quad x_0 = 0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = x^3 + x^2 - x + 2; \quad 3.2. y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}; \quad 3.3. y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}, \quad [-2; 2]; \quad 4.2. y = \frac{x-2}{x^2+5}, \quad [2; 8].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = e^{2x-x^2}; \quad 5.2. y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

6. Найдите область определения функции  $z = \ln(x^2 + y^2 - 2)$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = -x^2 - y^2 + 2$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \operatorname{arctg} \frac{1}{xy}$ , если

$$x = \sqrt[3]{t}, \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}.$$

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = y^{2x}$ ,

$$\text{если } x = u \cdot v, \quad y = \frac{v}{u}.$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением

$$x - yz + e^z = 0.$$

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ . Найдите

12.1. производную в точке  $M(3, 4)$  в направлении радиус-вектора точки  $M$ ;

12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $K(1/2, 1/2)$ .

13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 2z = 2$  в точке  $M(-2, 3, 0)$ .

14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 2x^2 + xy^2 - 16x$ .

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$  в прямоугольнике  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

Постройте чертёж.



## Вариант 17

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталья:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{2x} - 1} \right]; \quad 1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\operatorname{tg}^6 \frac{x}{2}}; \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \ln(3 - x), \quad x_0 = 2; \quad 2.2. y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2}, \quad x_0 = 0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = 14x - x^4; \quad 3.2. y = x - \operatorname{arctg} x; \quad 3.2. y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = x^3 - 3x + 1; \quad \left[ -1; \frac{1}{2} \right]; \quad 4.2. y = \frac{x + 6}{x^2 + 13}, \quad [-5; 5].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}; \quad 5.2. y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

6. Найдите область определения функции  $z = \sqrt{x^2 + y - 1}$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = 3 - x - 2y$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = \sqrt[3]{x^3 + y^2}$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$ , если

$$x = 3t^2, \quad y = \sqrt{t^2 + 1}.$$

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = \frac{x}{y}$ ,

$$\text{если } x = u^2 + v^2, \quad y = u \cdot v.$$

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением

$$x + y + z = e^z.$$

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ . Найдите
- 12.1. производную в точке  $O(0, 0)$  в направлении от точки  $O$  к точке  $N(3, 4)$ ;
  - 12.7.  $\text{grad} u$  в точке  $O(0, 0)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $2x^2 - 2y^2 + 7z^2 = -3$  в точке  $M(4, 7, 3)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^4$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$  в замкнутой области, ограниченной треугольником с вершинами в точках  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 0)$  и  $C(0, 1)$ . Постройте чертёж.

## Вариант 18

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталья:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 1} (x)^{\frac{m}{x^2-1}};$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)};$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right].$$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$2.1. y = \ln(3+x), \quad x_0 = -2;$$

$$2.2. y = \frac{x + \ln(1-x)}{x}, \quad x_0 = 0.$$

3. Найдите экстремумы функций:

$$3.1. y = x^3 - 6x^2 + 9x;$$

$$3.2. y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1};$$

$$3.3. y = x \cdot \sqrt{1-x}.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$4.1. y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, \quad [0;2];$$

$$4.2. y = \frac{x-3}{x^2+16}, \quad [-5;5].$$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

$$5.1. y = x + \frac{1}{x};$$

$$5.2. y = x^3 \cdot e^{-x}.$$

6. Найдите область определения функции  $z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = 1 - x^2 - y^2$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = e^{x-2y}$  если  $x = \sin^2 t, \quad y = t^3$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = x^2 + y^3$ , если  $x = 2u + 4v^3, \quad y = 3u^2 + v$ .

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $e^z - xyz - 1 = 0$ .
12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = \ln(x^2 + y^2)$ . Найдите
- 12.1. производную в точке  $M(1, 3)$  в направлении вектора  $\vec{l} = \{1, -2\}$ ;
- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $N(1, 0)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $2x^2 - 2y^2 - z^2 = 2$  в точке  $M(-2, 1, 2)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 - xy + y^2 - x$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x - 2y - 3$  в области, ограниченной прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ . Постройте чертёж.

### Вариант 19

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталю:

1.1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right];$

1.2.  $\lim_{x \rightarrow 2a} \left( 3 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4a}};$

1.3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [(\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \cdot \ln x].$

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

2.1.  $y = e^{3-x}, x_0 = 2;$

2.2.  $y = \frac{\ln(1 - 3x^3)}{x}, x_0 = 0.$

3. Найдите экстремумы функций:

3.1.  $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x;$

3.2.  $y = (x - 5) \cdot e^x;$

3.2.  $y = \frac{x^3}{(x - 2)(x + 3)}.$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

4.1.  $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, [-2; 0];$

4.2.  $y = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}, [-0.1; 4].$

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

5.1.  $y = e^{-x^2};$

5.2.  $y = \frac{4x}{1 + x^2}.$

6. Найдите область определения функции  $z = \sqrt{3 - x + y}$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = 2 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = y \cos \frac{2x}{y}$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , если  $x = a \cos t, y = a \sin t (a - \text{const})$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = x^3 - y^3$ , если  $x = u \cdot v, y = u^2 + v^2$ .

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ .
12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = 3yx^2$ . Найдите
- 12.1. производную в точке  $M(-9, 12)$  в направлении биссектрисы первого координатного угла;
- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $M(-9, 12)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$  в точке  $M(1, 1, 1)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 - 2xy + y^4$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$  в квадрате  $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$ . Постройте чертёж.

### Вариант 20

1. Вычислите указанные пределы, используя правило Лопиталя:

1.1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{1 - xe^x}$ ;      1.2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ ;      1.3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\operatorname{tg} x - \operatorname{sec} x]$ .

2. Запишите формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

2.1.  $y = e^{x-4}$ ,  $x_0 = 1$ ;      2.2.  $y = \frac{x - \ln(1+x)}{x}$ ,  $x_0 = 0$ .

3. Найдите экстремумы функций:

3.1.  $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ ;      3.2.  $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$ ;      3.3.  $y = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$ .

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

4.1.  $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ ,  $[0; 4]$ ;      4.2.  $y = \frac{x-3}{x^2+16}$ ,  $[3; 10]$ .

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

5.1.  $y = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$ ;      5.2.  $y = \frac{2^x}{x}$ .

6. Найдите область определения функции  $z = \ln(x + y^2 + 2)$ . Сделайте чертеж.

7. Постройте график функции  $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Укажите область определения функции.

8. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции  $u = 3x^2y - e^{xy} + \sqrt{xy}$ .

9. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$  сложной функции  $z = xy$ , если  $x = \ln(1+t^2)$  и  $y = \operatorname{arctg} t$ .

10. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  сложной функции  $z = 2x - y^2$ , если  $x = \ln(u+v)$ ,  $y = \ln u + \ln v$ .

11. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если функция  $z = z(x, y)$  задана неявно уравнением  $z^3 + zxy - x = 0$ .

12. Функция  $z = z(x, y)$  задана уравнением  $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ . Найдите

- 12.1. производную в точке  $M(1, 1)$  в направлении от точки  $M$  к точке  $O(0,0)$ ;
- 12.2.  $\text{grad } z$  в точке  $M(1, 1)$ .
13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $2z + y^2 + x^2 = 0$  в точке  $M(1, 1, -1)$ .
14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 4x + 4y + 4$  в прямоугольнике  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . Постройте чертёж.



