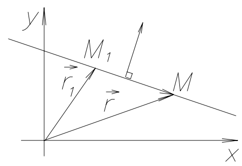
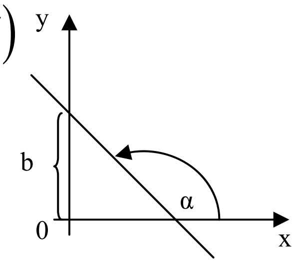
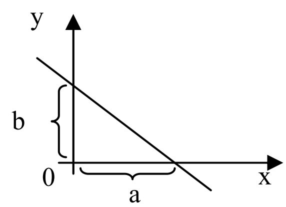
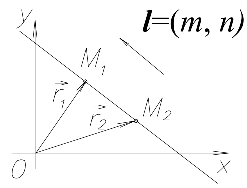
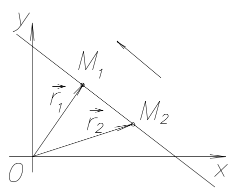
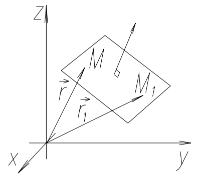
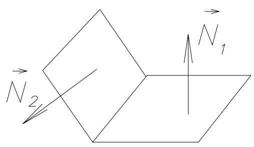
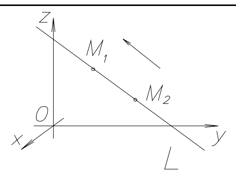
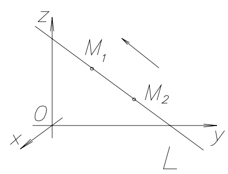
ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ТАБЛИЦАХ

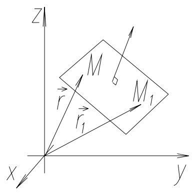
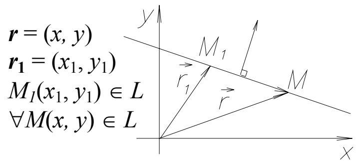
ТАБЛИЦА 1

№	**Уравнения прямой L на плоскости (в R_2)**	**Рисунки, пояснения**
1	$\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1) = 0}$ Уравнение прямой L, **проходящей через точку $M_1(x_1,y_1) \in L$, перпендикулярно вектору $N = (A,B)$**	$\mathbf{N} = (A,B)$ $\mathbf{r} = (x, y)$ $\mathbf{r_1} = (x_1, y_1)$ $M_1(x_1, y_1) \in L$ $\forall M(x, y) \in L$ 
2	$\underline{Ax + By + D = 0}$ **Общее** уравнение прямой L	$D = -Ax_1 - By_1$; $M_1(x_1, y_1) \in L$; $\mathbf{N}=(A,B)\perp L$
3	$\underline{y = kx+b}$ Уравнение прямой L **с угловым коэффициентом**	$k = y' = -\dfrac{A}{B} = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha = \left(\widehat{\bar{l},\bar{i}}\right)$ $b = -\dfrac{D}{B}$ $\alpha \geq 0$ 
4	$\underline{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$ Уравнение прямой L **в отрезках**	$y=0 \Rightarrow x=a$ $x=0 \Rightarrow y=b$ $a = -\dfrac{D}{A}$; $b = -\dfrac{D}{B}$ 
5	$\underline{\dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n}}$ Уравнение прямой L **каноническое**	$\mathbf{l}=(m, n)$ $\mathbf{l}=(m, n) \parallel L$ $M_1(x_1, y_1)\in L$ $\forall M(x, y)\in L$ 
6	$\underline{\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}}$ Уравнение прямой L, **проходящей через две данные точки M_1 и M_2**	$\mathbf{l}=(m, n) \parallel L$ $M_1(x_1, y_1)\in L$ $M_2(x_2, y_2)\in L$ $\forall M(x, y)\in L$ $m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$ 
7	$\underline{\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt. \end{cases}}$ Уравнение прямой L **параметрическое**	$\dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n} = t$, $\forall t\in R_1$ – параметр

№	**Уравнения плоскости *P***	**Рисунки, пояснения**
1	$\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$ Уравнение плоскости P, **проходящей через данную точку M_1, перпендикулярно данному вектору $N=(A,B,C)$**	$\mathbf{N} = (A, B\ C)$  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ $\mathbf{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$ $M_1(x_1, y_1, z_1)\in P$ $\forall M(x, y, z)\in P$
2	$\underline{Ax + By + Cz + D = 0}$ **Общее** уравнение плоскости P	$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$
3	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ Уравнение плоскости P **в отрезках**	$y=0,\ z=0 \Rightarrow x=a$ $x=0,\ z=0 \Rightarrow y=b$ $x=0,\ y=0 \Rightarrow z=c$
4	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ Уравнение плоскости P, **проходящей через три данные точки**	$M_1(x_1, y_1, z_{,1})\in P$, $\mathbf{M_1M}\in P$ $M_2(x_2, y_2, z_2)\in P$, $\mathbf{M_2M_1}\in P$ $M_3(x_3, y_3, z_3)\in P$, $\mathbf{M_3M_1}\in P$ $\forall M(x, y, z)\in P$
	Уравнения прямой *L* в трехмерном пространстве (R_3)	**Рисунки, пояснения**
1	$\begin{cases} \mathbf{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0} \\ \mathbf{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.} \end{cases}$ **Общее** уравнение прямой L	$\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$ $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ $\mathbf{N_1} \not\parallel \mathbf{N_2}$ $L=\{P_1\cap P_2\}$ $\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)=[\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}]$ 
2	$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ Уравнения прямой L **канонические**	$\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)$ $M_1(x_1, y_1, z_1)\in L$ $\forall M(x, y, z)\in L$ 
3	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ Уравнения прямой L, **проходящей через две данные точки M_1 и M_2**	$\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)$, $\mathbf{l}t=\mathbf{M_1M_2}$ $m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$, $p=z_2-z_1$ $M_1(x_1, y_1, z_1)\in L$ $M_2(x_2, y_2, z_2)\in L$ $\forall M(x, y, z)\in L$ 
4	$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt \end{cases}$ **Параметрические уравнения** прямой L	$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}=t,$ $\forall t\in R_1$

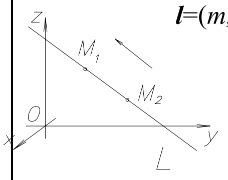
Уравнения плоскости P в трехмерном пространстве R_3 и уравнения прямой L в двухмерном пространстве R_2

ТАБЛИЦА 3

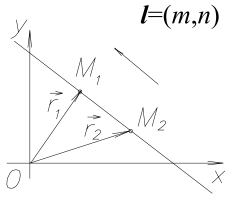
Уравнения плоскости P в R_3 в координатной форме	Векторная форма уравнений P, L в R_3 и R_2	Уравнения прямой L в R_2 в координатной форме
I R_3	**Уравнения P и L, проходящих через данную точку M_1 перпендикулярно данному вектору N**	R_2 I
$\boldsymbol{N}=(A,B,C)$  $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ $\boldsymbol{r_1}=(x_1,y_1,z_1)$ $M_1(x_1,y_1,z_1)\in P$ $\forall M(x,y,z)\in P$ $\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$	$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{M_1M}$ $\boldsymbol{M_1M}\perp \boldsymbol{N}(P)$ $\boldsymbol{M_1M}\perp \boldsymbol{N}(L)$ $\underline{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{N})=0}$ $\underline{(\boldsymbol{M_1M},\boldsymbol{N})=0}$ Условие ортогональности векторов	$\boldsymbol{N}=(A,B)$  $\boldsymbol{r}=(x,y)$ $\boldsymbol{r_1}=(x_1,y_1)$ $M_1(x_1,y_1)\in L$ $\forall M(x,y)\in L$ $\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)=0}$
II R_3	**Общие уравнения**	R_2 II
$\underline{Ax+By+Cz+D=0}$ $D=-Ax_1-By_1-Cz_1$	$\underline{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{N})+D=0}$ $D=-(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{N})$	$\underline{Ax+By+D=0}$ $D=-Ax_1-By_1$
III R_3	**Через n фиксированных точек M**	R_2 III
n = 3 $M_1(x_1,y_1,z_1)\in P$, $\boldsymbol{M_1M}\in P$ $M_2(x_2,y_2,z_2)\in P$, $\boldsymbol{M_2M_1}\in P$ $M_3(x_3,y_3,z_3)\in P$, $\boldsymbol{M_3M_1}\in P$ $\forall M(x,y,z)\in P$ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	$M_1\in P, L$ $M_2\in P, L$ $\forall M\in P, L$ $M_3\in P$	n = 2 $M_1(x_1,y_1)\in L$, $M_2(x_2,y_2)\in L$ $\forall M(x,y)\in L$ $\boldsymbol{M_1M}\,\|\,\boldsymbol{M_2M_1}$ $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix}=\bar{0}$
$A=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$ $B=-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$ $C=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$ (1. I.)	$(\boldsymbol{M_1M},\boldsymbol{M_1M_2},\boldsymbol{M_1M_3})=0$ Условие компланарности векторов $[\boldsymbol{M_1M},\boldsymbol{M_1M_2}]=\boldsymbol{0}$ Условие коллинеарности векторов	$A=y_2-y_1$; $B=-(x_2-x_1)$, $\Leftrightarrow$ $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ (1. I.)
IV R_3	**Уравнения в отрезках**	R_2 IV
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ $y=0,\ z=0 \Rightarrow x=a$ $x=0,\ z=0 \Rightarrow y=b$ $x=0,\ y=0 \Rightarrow z=c$	$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{i}/a+\boldsymbol{j}/b+\boldsymbol{k}/c$ $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\tau})=1$ $\boldsymbol{\tau}=(1/a,\ 1/b,\ 1/c)$ $\lvert\boldsymbol{r}\rvert\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\tau})=1/\lvert\boldsymbol{\tau}\rvert$	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ $y=0 \Rightarrow x=a$ $x=0 \Rightarrow y=b$

Уравнения прямой L в трехмерном пространстве R_3 и в двухмерном пространстве R_2

ТАБЛИЦА 4

<table>
<tr><td>Уравнения прямой L в R_3 в координатной форме</td><td colspan="2">Векторная форма уравнений прямой L в R_2 и R_3</td><td colspan="2">Уравнения прямой L в R_2 в координатной форме</td></tr>
<tr><td>I</td><td colspan="2">Канонические уравнения прямой L</td><td colspan="2">I</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{l}=(m,n,p)$


$\mathbf{l}=(m,n,p)\,||\,L$
$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L$
$M_2(x_2,y_2,z_2)\in L$
$\forall M(x,y,z)\in L$
$$\underline{\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}}$$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{M_1M}\,||\,\boldsymbol{l}$
$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{M_1M_2}\,||\,\boldsymbol{l}$

$[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{l}\,]=0$
$[\boldsymbol{M_1M},\ \boldsymbol{l}\,]=0$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{l}=(m,n)$


$\boldsymbol{l}=(m,n)\,||\,L$
$M_1(x_1,y_1)\in L$
$M_2(x_2,y_2)\in L$
$\forall M(x,y)\in L$
$$\underline{\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}}$$</td></tr>
<tr><td>II</td><td colspan="2">Параметрические уравнения прямой L</td><td colspan="2">II</td></tr>
<tr><td>$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=t,\quad \forall t\in R_1$
$$\underline{\begin{cases}x=x_1+mt,\\ y=y_1+nt,\\ z=z_1+pt\end{cases}}$$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1\,||\,\boldsymbol{l},\ \forall t\in R_1$
$\boldsymbol{M_1M}\,||\,\boldsymbol{l}$

$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{M_1M}=t\boldsymbol{l}$
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t\boldsymbol{l}$
$\underline{[\boldsymbol{M_1M},\ t\boldsymbol{l}\,]=0}$</td><td colspan="2">$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=t,\quad \forall t\in R_1$
$$\underline{\begin{cases}x=x_1+mt,\\ y=y_1+nt.\end{cases}}$$</td></tr>
<tr><td>III</td><td colspan="2">Уравнения прямой L, проходящей через две данные точки M_1 и M_2</td><td colspan="2">III</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{l}\,||\,L$, $\mathbf{l}=(m,n,p)$, $t\boldsymbol{l}=\boldsymbol{M_1M_2}$
$m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1,\ p=z_2-z_1$
$$\underline{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{M_1M}\,||\ \boldsymbol{M_1M_2}\,||\ \boldsymbol{l}$
$M_1\in L,\ M_2\in L,\ \forall M\in L$

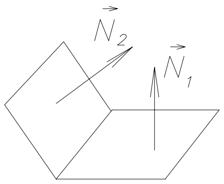
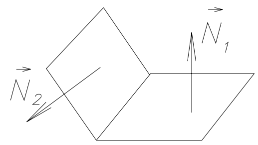
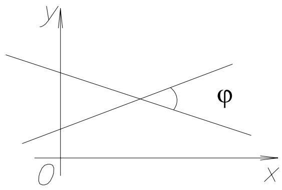
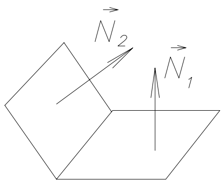
$[\boldsymbol{M_1M},\boldsymbol{M_1M_2}]=0$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{l}\,||\,L$, $\boldsymbol{l}=(m,n)$, $t\boldsymbol{l}=\boldsymbol{M_1M_2}$
$m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1$
$$\underline{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">IV Общие уравнения прямой L в R_3 $(P_1\cap P_2)$</td><td colspan="3">Уравнение прямой L с угловым коэффициентом k в R_2
V</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$
$\boldsymbol{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ $\quad \boldsymbol{N_1}\not\parallel\boldsymbol{N_2}$
$L=\{P_1\cap P_2\}$
$$\underline{\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}}$$
$\boldsymbol{N_1}\not\parallel\boldsymbol{N_2}\Leftrightarrow P_1\cap P_2\Leftrightarrow\quad Rang\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{bmatrix}=2.$</td><td colspan="3">$Ax+By+D=0,\ B\neq 0$
$\Downarrow$
$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{D}{B}$$
$\underline{y=kx+b}\quad k=y'=-\frac{A}{B}=\operatorname{tg}\alpha\ ,\ \alpha=\left(\widehat{\bar{l},\bar{i}}\right)$
$b=-\frac{D}{B}\qquad \alpha\geq 0$</td></tr>
</table>

ТАБЛИЦА 4*а* (продолжение таблицы 4)

Связь между уравнениями прямой L в R_3	**Связь между уравнениями прямой L в R_2**
Общие (2.IV) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ $\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow z_0=0$ $\begin{cases}A_1x+B_1y+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+D_2=0\end{cases} \Rightarrow M_0(x_0,y_0,0)\in L$ или $\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow M_1(x_1,0,z_1)\in L$ или $\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow x_2=0 \Rightarrow M_2(0,y_2,z_2)\in L$ $\left.\begin{matrix}\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1),\\ \mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{l}=[\mathbf{N_1},\mathbf{N_2}]=(m,n,p)$ $t=\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{0-z_0}{p}$ – **канонические** (2.I) $\begin{cases}x-x_0+mt,\\ y-y_0+nt,\\ z=0+pt\end{cases}$ – **параметрические** (2.II) $\Downarrow$ $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{0-z_0}{z_1-z_0}$ – **через две точки** $M_0\in L$, $M_1\in L$ (2.III) $\begin{cases}(x-x_0)(y_1-y_0)=(y-y_0)(x_1-x_0),\\ (y-y_0)(z_1-z_0)=(0-z_0)(y_1-y_0)\end{cases}$ – **общие** (2.IV)	**С угловым коэффициентом**: (2.V) $y=kx+b \qquad \vec{N}=(k,-1)$, $\Downarrow$ $\begin{cases}x=x_1,\ y=kx_1+b=y_1 \Rightarrow M_1(x_1,y_1)\in L,\\ x=x_2,\ y=kx_2+b=y_2 \Rightarrow M_2(x_2,y_2)\in L.\end{cases}$ $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ **через точки $M_1\in L$ и $M_2\in L$** (1.III) (2.III) $\begin{cases}x_2-x_1=m,\\ y_2-y_1=n\end{cases} \Rightarrow \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$ – **канонические** (2.I) $\Downarrow$ $\begin{cases}n(x-x_1)=m(y-y_1)\\ n(x-x_1)-m(y-y_1)=0,\\ n=A;\ -m=B;\end{cases}$ $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \qquad M_1(x_1,y_1)\in L$ $\mathbf{N}=(A,B)\perp L$ (1.I) $\Downarrow$ $-Ax_1-By_1=D$ $Ax+By+D=0$ – **общее** (1.II)

Взаимное расположение плоскостей *P* в трёхмерном пространстве R_3 и прямых *L* в двухмерном пространстве R_2

ТАБЛИЦА 5

I Обозначения, принятые в таблице 2, {P1,P2} в R_3	I	Обозначения, принятые в таблице 2, {L1,L2} в R_2 I
$\left.\begin{array}{l}P1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ P2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{array}\right\}\Psi$ $\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$; $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ $\mathrm{Rang}\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{bmatrix}=\mathrm{Rang}A(\psi)$ $\mathrm{Rang}\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\end{bmatrix}=\mathrm{Rang}B(\psi)$ 	R_3 $\cos\varphi=\dfrac{(\vec N_1,\vec N_2)}{\lvert\vec N_1\rvert\lvert\vec N_2\rvert}$  $\mathbf{N_1}=(A_1, B_1, C_1)$; $\mathbf{N_2}=(A_2, B_2, C_2)$ R_2  $\mathbf{N_1}=(A_1,B_1)$ $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2)$	а) $\left.\begin{array}{l}L1: A_1x+B_1y+D_1=0,\\ L2: A_2x+B_2y+D_2=0\end{array}\right\}\chi$ $\mathbf{N_1}=(A_1,B_1)$; $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2)$ $\mathrm{Rang}\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{bmatrix}=\mathrm{Rang}A(\chi)$ $\mathrm{Rang}\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & D_2\end{bmatrix}=\mathrm{Rang}B(\chi)$ б) $L1$: $y=k_1x+b_1$ $L2$: $y=k_2x+b_2$ $tg\varphi=\left\lvert\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\rvert$ $\Downarrow$ $k_1=tg\,\alpha_1$; $k_2=tg\,\alpha_2$ $tg\varphi=\mathrm{tg}\,(\alpha_2-\alpha_1)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha_2-\mathrm{tg}\alpha_1}{1+\mathrm{tg}\alpha_1\mathrm{tg}\alpha_2}$,
II **Признаки взаимного расположения плоскостей {P1, P2} и прямых {L1, L2}** II		
Плоскости {$P1$, $P2$} в R_n;n=3	Как расположены *P* и *L*	Прямые {$L1$, $L2$} в R_n; n=2
$P1\cap P2$ **(пересекаются)** $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\neq\pm1$ $P1\perp P2\Leftrightarrow \mathbf{N_1}\perp\mathbf{N_2}\Leftrightarrow\cos\varphi=0$ $\{P1\cap P2\}=L$, $L\in P1$, $L\in P2$ *Rang* $A(\psi)$= = *Rang* $B(\psi)$= $2<3=n$ совместная неопределенная система (ψ)	$\underbrace{P1\cap P2, L1\cap L2}$ $\mathbf{N_1}\nparallel\mathbf{N_2}$ $\varphi\neq\pi k$, $k=0,\ \pm1, \pm2, \ldots$ $\cos\varphi\neq\pm1$ 	$L1\cap L2$ **(пересекаются)** а) $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\neq\pm1$ $L1\perp L2\Leftrightarrow\mathbf{N_1}\perp\mathbf{N_2}\Leftrightarrow\cos\varphi=0$ б) $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\neq0$ $1+k_1k_2\neq0$ $L1\perp L2\Leftrightarrow1+k_1k_2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k_2=-1/k_1$ $\{L1\cap L2\}=M$, $M\in L1$, $M\in L2$ *Rang* $A(\chi)$= = *Rang* $B(\chi)$= $2=n$ совместная определенная система (χ)
$P1\mid\mid P2$ **(параллельны)** $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ $\cos\varphi=\pm1$	$\underbrace{P1\parallel P2, L1\parallel L2}$ $\mathbf{N_1}=\lambda\mathbf{N_2}$; $D_1\neq\lambda D_2$ $\lambda\in R_1$ 1=*Rang* $A(\psi,\chi)$ < < *Rang* $B(\psi,\chi)$ = 2 системы (ψ),(χ) несовместны	$L1\mid\mid L2$ **(параллельны)** а) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ $\cos\varphi=\pm1$ б) $k_1=k_2$; $b_1\neq b_2$ $tg\varphi=0$
$P1\equiv P2$ **(совпадают)** $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=\lambda\in R_1$ $\cos\varphi=\pm1$	$\underbrace{P1\equiv P2, L1\equiv L2}$ $\mathbf{N_1}=\lambda\mathbf{N_2}$; $D_1=\lambda D_2$; $\lambda\in R_1$ *Rang* $A(\psi,\chi)$= = *Rang* $B(\psi,\chi)$= 1 совместные неопределенные системы (ψ), (χ)	$L1\equiv L2$ **(совпадают)** а) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=\lambda\in R_1$ $\cos\varphi=\pm1$ б) $k_1=k_2$, $b_1=b_2$ $tg\varphi=0$

Расстояния $d(P1,P2)$ между плоскостями $P1$ и $P2$ и $d(L1,L2)$ между прямыми $L1$ и $L2$ в R_3, пересечение $\{P\cap L\}$ плоскости P и прямой L в R_3

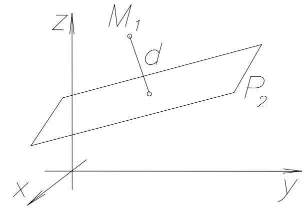
ТАБЛИЦА 6

<table>
<tr>
<td>I **$P1 \parallel P2$, $L1 \parallel L2$ в R_3**
координатная форма</td>
<td>**$P1 \parallel P2$, $L1 \parallel L2$, $\bar N_1 \parallel \bar N_2, \bar l_1 \parallel \bar l_2$**
векторная форма</td>
<td>**$L1 \parallel L2$ в R_2** II
координатная форма</td>
</tr>
<tr>
<td>

P1: $Ax+By+Cz+D_1=0$
P2: $\underbrace{Ax+By+Cz+D_2=0}$, $D_1 \neq D_2$
$\bar N_1=\bar N_2=\bar N=(A,B,C)\perp P1,P2$
⇐
$d(P1,P2)=d(M_1,P2)=d(M_2,P1)=$
$=\frac{|A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
$M_1(x_1,y_1,z_1)\in P1, M_2(x_2,y_2,z_2)\in P2$

</td>
<td rowspan="2">

$\bar N=(A,B,C)$ $\bar l=(m,n,p)$
$d(P1,P2)=d(M_1,P2)=$
$d(M_2,P1)=d(L1,L2)=$
$=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$
$=\left|np_{\bar N}\overline{M_1M_2}\right|=\frac{|(\overline{M_1M_2},\bar N)|}{|\bar N|}$



</td>
<td>

L1: $Ax+By+D_1=0$
L2: $\underbrace{Ax+By+D_2=0}$
$\bar N_1=\bar N_2=\bar N=(A,B)\perp L1,L2$
⇒
$d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$
$=\frac{|A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
$M_1(x_1,y_1)\in L1, M_2(x_2,y_2)\in L2$

</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">

$L1:\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ $\bar l_1=\bar l_2=\bar l=(m,n,p)$
$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L1$
$L2:\frac{x-x_2}{m}=\frac{y-y_2}{n}=\frac{z-z_2}{p}$ $M_2(x_2,y_2,x_2)\in L2$
$d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$
$=\frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m & n & p\end{vmatrix}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ ⇐

</td>
<td rowspan="2">

$L1:\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$
$L2:\frac{x-x_2}{m}=\frac{y-y_2}{n}$
$\bar l_1=\bar l_2=\bar l=(m,n,0)$
$M_1(x_1,y_1)\in L1$
$M_2(x_2,y_2)\in L2$
⇒
$d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=$
$=\frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ m & n & 0\end{vmatrix}}{\sqrt{m^2+n^2}}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)$
$=h_{\Delta M_1M_{2\,2},\bar l}=\frac{|[\overline{M_1M_2},\bar l]|}{|\bar l|}$
h – высота треугольника

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>III **Прямые $L1$ и $L2$ скрещиваются в R_3**
$P1 \parallel P2$ ($L1\subset P1$, $L2\subset P2$)</td>
<td>**Прямая L и плоскость P пересекаются в R_3** IV
$\{P\cap L\}=M_1$</td>
</tr>
<tr>
<td>

$L1:\underbrace{\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}}$
$L1\parallel \bar l_1=(m_1,n_1,p_1), M_1(x_1,y_1,z_1)\in L1$
$L2:\underbrace{\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}}$
$L2\parallel \bar l_2=(m_2,n_2,p_2), M_2(x_2,y_2,z_2)\in L2$
$d(L1,L2)=d(M_1,L2)=d(M_2,L1)=h_{\Pi(\overline{M_1M_2},\bar l_1\bar l_2)}=$
$=\frac{V_{\Pi(\overline{M_1M_2},\bar l_1\bar l_2)}}{S_{\Delta\bar l_1,\bar l_2}}=\frac{|(\mathrm{M_1M_2},\bar l_1,\bar l_2)|}{|[\bar l_1,\bar l_2]|}=$
$=\frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}\neq 0$
($d(L1,L2)=0\Leftrightarrow L1\cap L2$); $\Pi(\boldsymbol{M_1M_2},\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_2})$ –параллелепипед, построенный на векторах $\boldsymbol{M_1M_2}$, $\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_2}$, h – его высота

</td>
<td>

$P:\underbrace{Ax+Bx+Cz+D=0}$
$P\perp\bar N=(A,B,C)\perp P$
$L:\underbrace{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}_{L\parallel\bar l=(m,n,p)}$
$M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$
$\cos(\bar N,\bar l)=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$
$\sin\varphi=\cos(\bar N,\bar l)=\frac{(\bar N,\bar l)}{|\bar N||\bar l|}=$
$=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\neq\pm 1$
$\left.\begin{array}{l}\sin\varphi=\pm1\\ \cos\varphi=0\\ (\bar N,\bar l)=0\end{array}\right\}(P\parallel L)\cup(L\subset P)$
$\sin\varphi=0\Leftrightarrow L\perp P, \boldsymbol{l}\parallel\boldsymbol{N}$

</td>
</tr>
</table>

ТАБЛИЦА 6а (продолжение таблицы 6)

VI **Векторная запись условий ортогональности (*P*⊥*L*), коллинеарности (*P*‖*L*) плоскости *P* и прямой *L* в R_3, пересечения *P* и *L* (*P*∩*L*).**	**$\{P\cap L\}=M_1(x_1,y_1,z_1)$ – координаты точки пересечения плоскости *P* и прямой *L* в R_3** V
$1. L\perp P \Leftrightarrow \left[\bar{l},\bar{N}\right]=\vec{0}$ $2. L\parallel P \Leftrightarrow (\bar{l},\bar{N})=0$ $3. L\cap P \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} L: \bar{r}=r_0+t\bar{l}\,(2.II) \\ P:(\bar{r},\bar{N})+D=0(1.II) \end{matrix}\right\}\Rightarrow$ $\Rightarrow(\bar{r}_0+t\bar{l},\bar{N})+D=0,$ $t=-\dfrac{(\bar{r}_0,\bar{N})+D}{(\bar{l},\bar{N})}=t_1\Leftrightarrow M_1(t_1)=\left\{L\cap P\right\}$	$\left.\begin{matrix} P: Ax+By+Cz+D=0 \\ L: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t \end{matrix}\right\}Q; \quad \begin{matrix} P\perp\bar{N}=(A,B,C) \\ M_0(x_0,y_0,z_0)\in L \\ L\parallel\bar{l}=(m,n,p) \end{matrix}$ $A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0\Rightarrow t=t_1$ (2.II) $\Rightarrow$ $\left\{\begin{matrix} x_1=x_0+t_1m \\ y_1=y_0+t_1n \\ z_1=z_0+t_1p \end{matrix}\right.\Rightarrow \begin{matrix} M_1(x_1,y_1,z_1)\in L, \\ M_1(x_1,y_1,z_1)\in P \end{matrix}$