Дисциплина Дифференциальное Исчисление (ДИ)

(Консультация по выполнению ИДЗ 1, 2, 3)

Кафедра высшей математики ТПУ

Лектор:

доцент

Тарбокова Татьяна Васильевна

1

Предел и непрерывность функции одного аргумента

Определение понятия функции одного аргумента	Если каждому элементу x из множества X ($x \in X$) поставлен в соответствие определенный элемент y из множества Y ($y \in Y$), то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$ со значениями во множестве Y. Элементы $x \in X$ называют значениями аргумента, а элементы $y \in Y$ – значениями функции. Множество X называется областью определения функции, а множество всех значений функции – областью значений функции. В случаях, когда множества X и Y – числовые множества, соответствующие функции, называют числовыми функциями.
Основные элементарные функции	Степенная $y = x^n$, Показательная $y = a^x$, Логарифмическая $y = \log_a x$, Тригонометрические $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$, Обратные тригонометрические $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = arctgx,\ y = arcc$, постоянная $y = c$.
Определение элементарных функций	Элементарными называют функции, которые получаются из основных элементарных функций в результате применения к ним конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции (суперпозиции) функций.

Определение предела функции *f(x)* в точке *x = a*.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a ($x \to a$), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε $(\forall \varepsilon > 0)$ существует такое положительное число δ, зависящее от ε $(\exists \delta(\varepsilon) > 0)$, что для всех значений x из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, следует выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Используя логические символы, можно записать:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

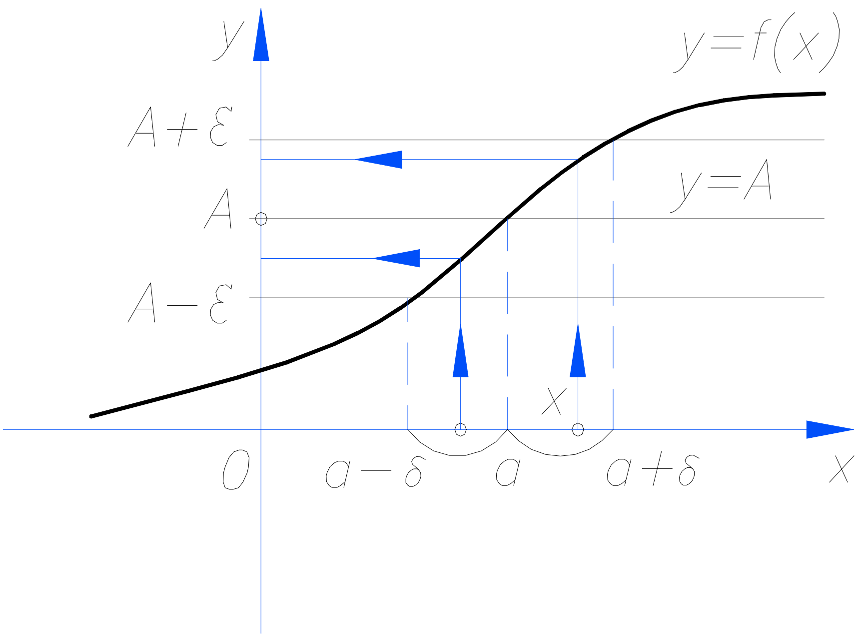
$$\Updownarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) -$$

Геометрический смысл этого определения заключается в следующем.

Какую бы узенькую полоску шириной 2ε, параллельную оси абсцисс и содержащую прямую $y = A$ посередине (ε – окрестность точки $y = A$: $U_\varepsilon(A)$), мы ни выделили, всегда существует такой симметричный интервал длиной 2δ с центром в точке $x = a$, $x \neq a$ (проколотая δ – окрестность точки $x = a$: $\dot{U}_\delta(a)$), что для всех x из проколотой δ – окрестности точки $x = a$ значения функции $f(x)$ попадают в ε – окрестность точки $y = A$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall U_e(A))(\exists \dot{U}_\partial(a))(\forall x \in \dot{U}_\partial(a),\ x \in X) \Rightarrow f(x) \in U_e(A)$$



Для любого ипсилон больше нуля положительное дельта найдется,
Такое, что если x из проколотой дельта – окрестности точки a любой берется,
Значение функции $f(x)$ в ипсилон – окрестность точки A попадется.

Определение предела функции при $x \to \infty$

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при стремлении x к бесконечности, если для любого положительного сколь угодно малого числа ε существует сколь угодно большое положительное число M, что для всех x из области определения функции из выполнения неравенства $|x| > M$ следует выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$. То есть

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists M(\varepsilon)>0)(\forall x\in X, |x|>M) \Rightarrow |f$$

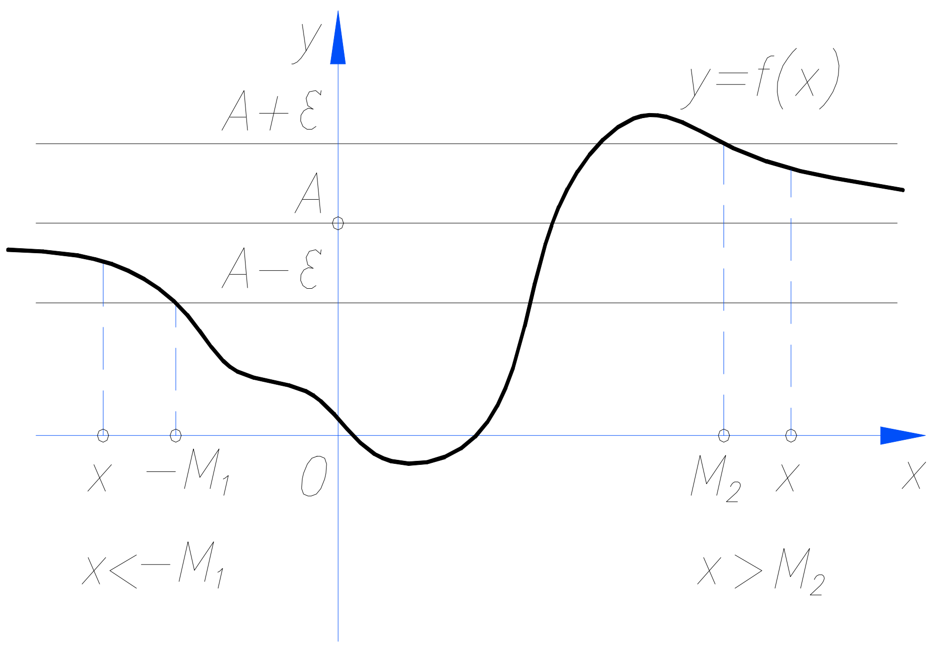
В частности, если $x \to +\infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists M>0)(\forall x\in X, x>M) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon;$$

если же $x \to -\infty$, тогда

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists M>0)(\forall x\in X, x<-M) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon;$$

Неравенство $|x| > M$ – эквивалентно системе двух неравенств: $\left\{\begin{array}{l} x > M, \\ x < -M. \end{array}\right.$



Определение непрерывной в точке $x = x_0$ функции

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если предел функции в точке $x = x_0$ равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

1.6.

Три условия для непрерывной в точке $x = x_0$ функции	1. Функция $f\,(x)$ определена в точке $x = x_0$. 2. Существует предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$. 3. Предел функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ совпадает со значением функции $f(x)$ в этой точке.

1.7.

Теорема о непрерывности элементарных функций	Все элементарные функции непрерывны во всех точках области определения этих функций. Для элементарных функций предел функции в точке равен значению этой функции в данной точке.

Раскрытие неопределённости вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$

$f(x) = \left\{\frac{0}{0}\right\},\ x \to a,\ \lvert a \rvert < \infty$			$c = \mathrm{const} \neq 0$, $b = \mathrm{const} \neq 0$
№ n/n	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
1	$f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$ $= \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + ... + b_m}$. $P_n(a) = Q_m(a) = 0$	Разделить многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ на разность $(x - a)$, сократить $f(x)$ на эту разность $(x - a)$ и подставить вместо x значение $x = a$.	$\left\{\frac{0}{c}\right\} = 0; \left\{\frac{\infty}{c}\right\}$ $\left\{\frac{c}{0}\right\} = \infty; \left\{\frac{c}{\infty}\right\}$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{d}{b}$ $d = const$; $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – повторить приём
2	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt{u_1(x)} - \sqrt{u_2(x)}$	Умножить и разделить функцию $f(x)$ на сопряженное иррациональное выражение $\left(\sqrt{u_1(x)} + \sqrt{u_2(x)}\right)$, использовать формулу сокращенного умножения $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ и сократить $f(x)$ на разность $(x - a)$.	------ // ------

3	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt[3]{u_1(x)} - \sqrt[3]{u_2(x)}$ или $\sqrt[3]{u_1(x)} + \sqrt[3]{u_2(x)}$	Умножить и разделить разность кубических корней на неполный квадрат суммы, а сумму кубических корней – на неполный квадрат разности, воспользоваться формулами сокращенного умножения: $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$; $(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$ и сократить функцию $f(x)$ на разность $(x-a)$.	$\left\{\frac{0}{c}\right\}=0; \left\{\frac{\infty}{c}\right\}$ $\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty; \left\{\frac{c}{\infty}\right\}$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{d}{b}$ $d=const;$ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – повторить приём

Замечание.

При делении многочлена $P_n(x)$ или $Q_m(x)$ на разность $(x-a)$ опираются на **теорему Безу**: если число $x = a$ является корнем многочлена (при $x = a$ многочлен равен нулю), то этот многочлен делится на разность $(x-a)$ без остатка.

Деление многочлена на разность $(x-a)$ осуществляется по тем же правилам, по которым делятся столбиком числа:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n & x-a \\
\hline
\underline{a_0x^n - aa_0x^{n-1}} & a_0x^{n-1} + (a_1+aa_0)x^{n-2} + \ldots = P_{n-1}(x) \\
\_\,(a_1+aa_0)x^{n-1} + a_2x^{n-2} & \\
\underline{(a_1+aa_0)x^{n-1} - a(a_1+aa_0)x^{n-2}} & \\
\_\,(a_2+a(a_1+aa_0))x^{n-2} + a_3x^{n-3} & \\
\underline{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \\
\underline{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Обратите внимание на то, что индекс в обозначении многочлена соответствует старшей степени x этого многочлена.

В результате деления получим представление многочлена $P_n(x)$ в виде произведения многочлена $P_{n-1}(x)$ на разность $(x-a)$:

$$P_n(x) = (x-a)\,P_{n-1}(x).$$

Предел дробно-рациональной функции

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_m}, \qquad x\to\infty$$

1) $m > n \geq 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$;

2) $n = m \geq 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$;

3) $n > m \geq 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty.$

Более того, если функция $f(x)$ представляет собой отношение линейных комбинаций степенных функций, показатели которых неотрицательны (то есть m и n не обязательно целые, но обязательно неотрицательные), то при $x\to\infty$ можно оставить в числителе и в знаменателе только **слагаемые наибольших степеней x,** а остальными пренебречь. Предел функции при $x \to \infty$ из-за отбрасывания слагаемых, содержащих меньшие степени x (в том числе и $x^0 = 1$), не изменяется, то есть

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^0}{b_0 x^m + b_1 x^{m_1} + \ldots + b_l x^0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m},$$

где $n > n_1 > n_2 > \ldots \geq 0$, $m > m_1 > m_2 > \ldots \geq 0$ (слагаемые записываются в порядке убывания степеней x).

Предел функции $f(x) = \dfrac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$ при $x \to \infty$

1) $n > m \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \infty;$

2) $n = m \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \dfrac{a_0}{b_0};$

3) $m > n \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = 0.$

Пусть $f(x) = q^x$, q = const.

Предел функции $f(x) = q^x$, q = const, если

1) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x = 0;$

2) $q = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x = 1;$

3) $1 < q < \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x = \infty;$

4) $-\infty < q \leq -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x -$ не существует.

Сравнение бесконечно малых функций

Определение бесконечно малой функции	Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если **предел** этой функции равен **нулю** при $x \to a$: $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции (б. м. ф.)

при $x \to a$, то есть $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$, тогда:

1) $\alpha(x)$ – б. м. ф. **более высокого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ – б. м. ф.

при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0 \Leftrightarrow \alpha(x)=o\ (\beta(x));$$

2) α (x) – б. м. ф. **более низкого порядка** малости по сравнению с β (x) – б. м. ф.

при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty \Leftrightarrow \beta(x)=o\ (\alpha(x));$$

3) α (x) и β (x) – б. м. ф. **одинакового порядка** малости

при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0 \ \Leftrightarrow \alpha(x)=c\ (\beta(x));$$

4) α (x) и β (x) – б. м. ф., **эквивалентные** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1 \Leftrightarrow \ \alpha(x)\sim\beta(x);$$

5) α (x) – б. м. ф. ***k*-го порядка** малости по сравнению с β (x) – б. м. ф. при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c\neq 0 \Leftrightarrow \alpha(x)=c\ (\beta^k(x)).$$

Теорема о первом замечательном пределе.

Предел функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ существует и равен единице: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Теорема о втором замечательном пределе.

Предел функции $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, если $x\to 0$, и функции $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x$, если $x\to\infty$, существует и равен числу $e\approx 2{,}718281828459045\ ...$:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

Применение первого и второго замечательных пределов позволяет доказать справедливость формул в **таблице эквивалентных** бесконечно малых функций при $x \to a$.

$\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$			
1	$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
2	$tg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6а	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
3	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$
4	$arctg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7а	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
5	$1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1+\alpha(x))^{\mu} - 1 \sim$ $\sim \mu\alpha(x)$

Замечание. В случаях, когда аргумент $\alpha(x)$ функции в вычисляемом пределе стремится не к нулю, а к отличному от нуля числу, например, $\alpha(x) \to a$, $a \neq 0$, вводят новую переменную $t = \alpha(x) - a$.

Тогда, если $\alpha(x) \to a$, то $t \to 0$ (функция $t(x)$ должна быть непрерывной функцией в окрестности точки $t = 0$).

Новая переменная $t \to 0$ (при $\alpha(x) \to a$), и для нее легко можно использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

Например, вычислим предел

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln(\operatorname{tg} x)} = \left\{ \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\ln 1} \right\} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left| x - \frac{\pi}{4} = t \Leftrightarrow x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \to 0 \right| =$$

Предварительно сделаем следующие преобразования:

$$\cos x = \cos(t + \frac{\pi}{4}) = \cos t \cos\frac{\pi}{4} - \sin t \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t);$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} t \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} t + 1}{1 - \operatorname{tg} t} = \frac{1 - \operatorname{tg} t + 2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t} = 1 + \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t};$$

$$\frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0$$

и воспользуемся результатами преобразований:

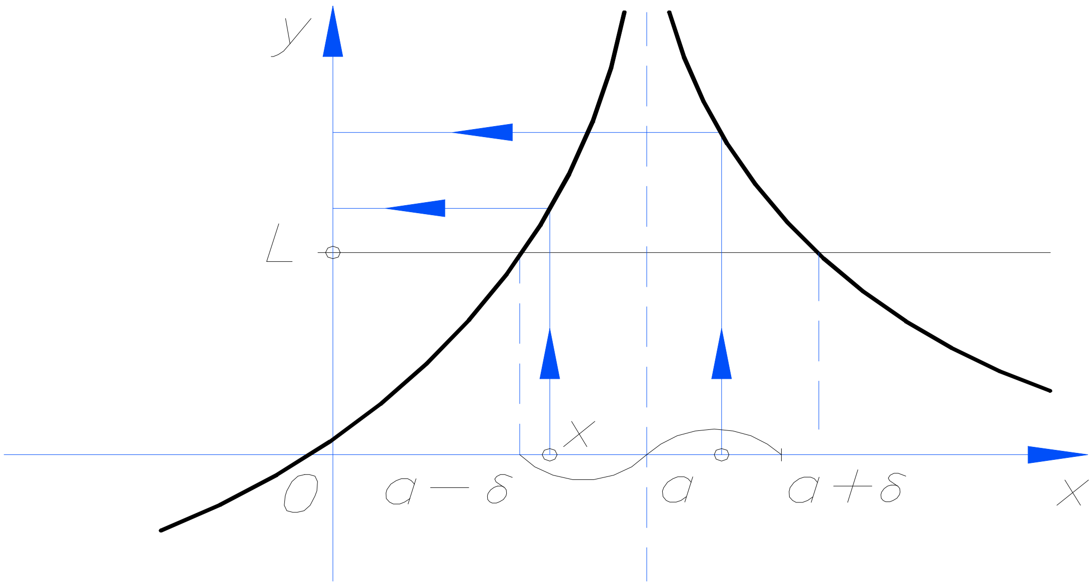
=

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t+\cos t)-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t-\sin t)}{\ln(1+\frac{2\,\mathrm{tg}\,t}{1-\mathrm{tg}\,t})}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin t}{2\frac{\mathrm{tg}\,t}{1-\mathrm{tg}\,t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\,t}{2\frac{t}{1-t}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Определение бесконечно большой функции	Функция *f*(*x*) называется бесконечно большой при $x\to a$, если для любого сколь угодно большого положительного числа *L* $(\forall L>0)$ существует такое положительное число δ, зависящее от *L* $(\exists\delta(L)>0)$, что для всех *x* из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $0<\lvert x-a\rvert<\delta$, выполняется неравенство $\lvert f(x)\rvert>L$. При этом пишут: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$; это и означает, что функция *f*(*x*) является бесконечно большой. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\Leftrightarrow(\forall L>0)(\exists\delta(L)>0)(\forall x\in X,0<\lvert x-a\rvert<\delta)$:

То есть при стремлении значений *x* к точке *x* = *a* значения функции *f* (*x*) становятся больше сколь угодно большого предварительно заданного числа *L*.

Бесконечно большие функции (б. б. ф.), так же как и бесконечно малые, можно



сравнивать между собой.

Если предел отношения двух бесконечно больших функций равен:

1. Бесконечности, тогда в числителе – б. б. ф. более высокого порядка роста;
2. Нулю, тогда в числителе – б. б. ф. более низкого порядка роста;
3. Постоянному числу, не равному нулю или единице, тогда эти бесконечно большие функции одинакового порядка роста;
4. Единице, тогда бесконечно большие функции эквивалентны.

Полезно иметь в виду, что при вычислении пределов отношений конечного числа б. б. ф. складываемых функций слагаемые более низкого порядка роста можно отбрасывать, а сумму заменять слагаемым **самого высокого порядка роста**.

При $x \to \infty$ **самый высокий** порядок **роста** имеет **показательная** функция $f(x) = a^x$; степенная функция $f(x) = x^n$ имеет порядок роста, более низкий по сравнению с показательной функцией, но более высокий по сравнению с логарифмической; логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ имеет самый низкий порядок роста по сравнению и с показательной функцией, и со степенной. Это обозначают так:

$$\log_a x << x^n << a^x, \quad \text{при } x \to \infty.$$

Очень эффективным при вычислении пределов оказывается применение следующих **правил**:

1. **Предел отношения б. м. ф. (б. б. ф.) не изменится, если заменить эти функции эквивалентными.**
2. **Разность эквивалентных б. м. ф. (б. б. ф.) есть б. м. ф. (б. б. ф.) более высокого порядка малости (роста) по сравнению с уменьшаемой и вычитаемой б. м. ф. (б. б. ф.).**
3. **Сумма конечного числа б. м. (б. б.) слагаемых разного порядка малости (роста) эквивалентна слагаемому самого низкого (высокого) порядка малости (роста).**
4. Если б. м. ф. $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ при $x \to a$, $A=\text{const} \neq 0$, то $A+\alpha(x) \sim A+\alpha_1(x)$ при $x \to a$.

Например. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{2x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Чтобы вычислить **предел** $\lim\limits_{x\to a} u^v$,

можно воспользоваться основным логарифмическим тождеством $u^v = e^{v\ln u}$.

Например. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+5x} = \lim\limits_{x\to 0} (1+5x)^{\frac{1}{x}} \left\{1^\infty\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}} = e^5$.

Если же $u \to 1, v \to \infty$,

то есть в случае неопределенность вида $\left\{1^\infty\right\}$,

можно применить следующую последовательность тождественных преобразований:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a} (1+(u-1))^v = \lim_{x\to a} (1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}\cdot(u-1)\cdot v} = e^{\lim\limits_{x\to a}(u-1)\cdot v}.$$

Например.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x} = \left\{1^{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x+3}{x-2}-1\right)\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5}{x-2}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x}} = e^{5}$$

.

Непрерывность функции одного аргумента

Определение непрерывной на интервале (*a, b*) функции	Функция называется непрерывной на интервале (*a, b*), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.
Определение предела справа для функции *f*(*x*): $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$	Число *A* называется пределом справа для функции *f(x)* при *x*, стремящемся к *a* ($x \to a$), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε $(\forall\varepsilon > 0)$ существует такое положительное число δ, зависящее от ε $(\exists\delta(\varepsilon) > 0)$, что для всех значений *x* из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $0 < x - a < \delta$, следует выполнение неравенства $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$.

Точки *x* берутся справа от точки *x* = *a*.

Правосторонний предел обозначают также $f(a+0)$.

Определение предела слева для функции *f*(*x*): $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$	Число *A* называется пределом слева функции *f(x)* при **x,** стремящемся к *a* ($x \to a$), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε $(\forall\varepsilon > 0)$ существует такое положительное число δ, зависящее от ε $(\exists\delta(\varepsilon) > 0)$, что для всех значений **x** из области определения функции, удовлетворяющих неравенству: $-\delta < x - a < 0$, следует выполнение неравенства: $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$.

Точки *x* берутся **слева** от точки *x* = *a*.

Левосторонний предел обозначают также $f(a-0)$.

Теорема о необходимых и достаточных условиях существования предела *A* функции *f*(*x*) в точке *x* = *a*	Предел *A* функции *f* (*x*) в точке *x* = *a* существует тогда и только тогда, когда существуют односторонние пределы этой функции в точке *x* = *a* и эти односторонние пределы равны между собой: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$, или $f(a-0) = f(a+0) = A$
Определение непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции	Функция *f*(*x*) называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на интервале (*a, b*) и в точке *x* = *a* – справа ($f(a+0) = f(a)$), а в точке *x* = *b* – слева ($f(b-0) = f(b)$).

Определение точек разрыва функции	Точки, в которых **нарушается хотя бы одно из трех** условий непрерывности функции, называются точками разрыва графика функции, или просто точками разрыва.
Определение точек устранимого разрыва функции	Односторонние пределы функции в исследуемой точке **конечны и равны** между собой. В самой точке функция не определена или не задана.
Определение точек разрыва первого рода функции	Односторонние пределы функции в исследуемой точке **конечны, но не равны** между собой.
Определение точек разрыва второго рода функции	Хотя бы один из односторонних пределов функции в исследуемой точке равен **бесконечности или не существует**.

Элементарные функции терпят разрыв в точках, не принадлежащих области их определения.

Функция **кусочно-аналитическая** (состоит из «кусочков» аналитических, то есть элементарных, функций), не является элементарной. Такая функция может иметь **разрыв** в точках, где эта функция **не определена**, а также в точках, где **происходит переход** от одного аналитического задания функции к другому (от одной формулы к другой) – это точки, «подозрительные» на разрыв. В точке, «подозрительной» на разрыв, функция может оказаться непрерывной, если в этой точке выполняются все три условия непрерывности функции:

1. Функция определена в точке;
2. Существует конечный предел функции в этой точке;
3. Предел функции в точке равен значению функции в этой точке.

Для исследования **элементарной** функции **на непрерывность** можно применить такой **план**:

1. Найти точки, которые не принадлежат области определения данной функции.
2. Вычислить односторонние пределы функции в этих точках.
3. Сделать вывод о характере разрыва функции в исследуемых точках.

Для исследования **кусочно-аналитической** функции **на непрерывность** можно предложить такой **план**:

1. Найти точки, в которых данная функция не определена – точки разрыва графика функции.
2. Указать точки, в которых происходит переход от одной формулы задания функции к другой формуле, – точки, «подозрительные» на разрыв.
3. Вычислить односторонние пределы функции во всех этих точках (найденных по предыдущим двум пунктам плана).
4. Сделать вывод о характере разрыва или о непрерывности функции в исследуемых точках.

Дифференциальное и интегральное исчисление

4.1. Таблица производных

1. $(const)' = 0;$

степенные функции

2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$

2a. $(x)' = 1;$

2b. $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u';$

2c. $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$

2e. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot u';$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$

3a. $(e^u)' = e^u \cdot u';$

логарифмические функции

4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$

4a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

$(\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b; \quad \ln a^n = n \ln a)$

тригонометрические функции

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

7. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$

8. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$

обратные тригонометрические функции

9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

12. $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

гиперболические функции

13. $(sh\, u)' = ch\, u \cdot u';$

14. $(ch\, u)' = sh\, u \cdot u';$

15. $(th\, u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u';$

16. $(cth\, u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u';$

показательно – степенные функции

17. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$

модуль функции

18. $|u|' = \operatorname{sgn} u \cdot u'$, $(|u| = \operatorname{sgn} u \cdot u)$,

где $\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, u > 0 \\ -1, u < 0; \\ 0, u = 0. \end{cases}$ – функция знак *u*

(сигнум u).

Правила дифференцирования

1. $(cu)' = c \cdot u';$

1a. $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u';$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v';$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$

4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2};$

5. сложная функция

$(F(u(x)))' = F'_u \cdot u'_x;$

6. параметрически заданная функция

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};\ y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t};$

7. ***неявно заданная функция*** $y = y(x)$ уравнением $F(x, y) = 0; \Rightarrow$ чтобы найти производную неявно заданной функции, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0$, считая y функцией от x и применяя правило 5 дифференцирования сложной функции;

8. ***логарифмическое дифференцирование***

$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x);$

$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'.$

Приложения производной

Теоремы Роля, Лагранжа, Коши

Теорема	Если	то
Ролля	$f(x)$: 1. *непрерывна на отрезке* $[a,b]$; 2. *дифференцируема на интервале* (a,b); 3. *принимает равные значения на концах отрезка, то есть* $f(a)=f(b)$,	существует хотя бы одна точка ξ, $a<\xi<b$, что $f'(\xi)=0$
Лагранжа	$f(x)$: 1. *непрерывна на отрезке* $[a,b]$; 2. *дифференцируема на интервале* (a,b),	существует хотя бы одна точка ξ, $a<\xi<b$, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$
Коши	$f(x)$ *и* $g(x)$: 1. *непрерывны на отрезке* $[a,b]$; 2. *дифференцируемы на интервале* (a,b) 3. $g'(x)\neq 0$ *во всех точках интервала* (a,b),	существует хотя бы одна точка ξ, $a<\xi<b$, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad \text{или} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

№ п/п	Вид неопределенности	Преобразования	Результат преобразований (c, d – const $\neq 0$)
1	$\{0\cdot\infty\}$	$f(x)\cdot h(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{h(x)}}=\dfrac{h(x)}{\frac{1}{f(x)}}$	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ – применить правило Лопиталя
2	$\{\infty-\infty\}$	2.1. Дроби привести к общему знаменателю; 2.2. Умножить и разделить разность функций на сопряженное выражение, если это разность квадратных корней; 2.3. Умножить и разделить разность функций на неполный квадрат суммы этих функций, если это разность корней кубических; 2.4. $f(x)-h(x)=\dfrac{\frac{1}{h(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot h(x)}}$	$\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty$; $\left\{\frac{c}{\infty}\right\}=0$; $\left\{\frac{0}{c}\right\}=0$; $\left\{\frac{\infty}{c}\right\}=\infty$; $\left\{\frac{c}{d}\right\}=A$ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ – применить правило Лопиталя
3	$\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$.	3.1. $y=u^v\Rightarrow \ln y=v\ln u$; $\lim\limits_{x\to a}\ln y=A\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}y=e^A$. 3.2. $y=u^v=e^{v\cdot\ln u}$	См. выше

Исследования функции без применения производных

№ п/п	Цель исследования	Действия	Вывод
1	Найти область определения функции	Найти точки, в которых функция не определена или не задана (точки разрыва графика функции)	Исключить найденные точки из области определения функции
2	Найти вертикальные асимптоты	Вычислить односторонние пределы функции в точках разрыва и в точках, «подозрительных» на разрыв для кусочно-аналитической функции	Если хотя бы один из односторонних пределов в исследуемой точке равен бесконечности, то график функции имеет вертикальную асимптоту: $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty \Rightarrow x=a$ – вертикальная асимптота
3	Исследовать функцию на четность и нечетность	Если $f(-x)=f(x)$, то функция четная. Если $f(-x)=-f(x)$, то функция нечетная	Ограничиться исследованием функции на интервале $(0,\infty)$. График четной функции симметричен относительно оси *OY*, график нечетной функции симметричен относительно начала координат
4	Исследовать функцию на периодичность	*T* – период функции – (наименьшее из всех возможных значений, удовлетворяющих уравнению: $f(x+T)=f(x)$	Ограничиться исследованием на интервале, по длине равном периоду *T*, за пределы интервала продолжить график функции периодическим образом
5	Найти точки пересечения с осями координат	Решив уравнение $y=f(x)=0$, найти $x_0 : f(x_0)=0$. Найти $y(0)=y_0$	Точка пересечения графика с осью OX: $(x_0,0)$. Точка пересечения графика с осью OY: $(0,y_0)$
6	Найти наклонные, в частности, горизонтальные асимптоты	Вычислить пределы $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$	Если *k* и *b* – конечные числа, то уравнение наклонных асимптот $y=kx+b$, причем, при $\kappa=0$ асимптота горизонтальная $y=b$

Исследования функции с применением производных

<table>
<tr><th>№ п / п</th><th>Цель исследования</th><th colspan="4">**Действия и вывод**</th></tr>
<tr><td rowspan="10">1</td><td rowspan="10">Найти интервалы монотонности и точки локальных экстремумов функции</td><td colspan="4">1.1.1. Найти критические точки первого порядка $x_i, i = 1,2,...,n$:
$y'(x_i) = 0$ или $y'(x_i) = \infty$, или $y'(x_i) -$ не существует
(**необходимое** условие существования экстремума функции в точке);

1.2.1. Применить **первое достаточное** условие существования экстремума функции в критической точке:</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x < x_1$</td><td>x_1</td><td>$x > x_x$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>—</td><td>Критическая точка первого порядка</td><td>+</td></tr>
<tr><td>y</td><td>Функция убывает</td><td>$(x_1, y(x_1)) -$ точка минимума</td><td>Функция возрастает</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x < x_2$</td><td>x_2</td><td>$x > x_2$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>+</td><td>Критическая точка первого порядка</td><td>—</td></tr>
<tr><td>y</td><td>Функция возрастает</td><td>$(x_2, y(x_2)) -$ точка максимума</td><td>Функция убывает</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">1.2.2. Если x_3 и x_4 – стационарные точки (все производные до (2*к*–1) порядка равны нулю), можно применить **второе достаточное** условие существования экстремума функции в точке:
$y^{(2k)}(x_3) > 0 \Rightarrow (x_3, y(x_3)) -$ точка локального минимума;
$y^{(2k)}(x_4) < 0 \Rightarrow (x_4, y(x_4)) -$ точка локального максимума;
$y^{(2k)}(x_5) = 0,\ y^{(2k+1)} \neq 0$ – в точке $(x_5, y(x_5))$ экстремума нет.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба</td><td colspan="4">2.1. Найти критические точки второго порядка $x_j, j = 1,2,...,m$:
$y''(x_j) = 0$ или $y''(x_j) = \infty$, или $y''(x_j) -$ не существует
(**необходимое** условие существования точки перегиба графика);
2.2. Применить **достаточные** условия выпуклости и вогнутости графика и существования точек перегиба:</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x < x_6$</td><td>x_6</td><td>$x > x_6$</td></tr>
<tr><td>y''</td><td>+</td><td>Критическая точка второго порядка, точка непрерывности</td><td>—</td></tr>
<tr><td>y</td><td>График функции вогнутый</td><td>$(x_6, y(x_6)) -$ точка перегиба</td><td>График функции выпуклый</td></tr>
</table>

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1

Вариант №0

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^2+1}{5n^2}=2.$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-8x+6}{x-3}=4$.

2. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-100n^2+1}{100-15n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n!}{3n!-(n-1)!}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-5x+1}{2x^3-7x^2-2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{x^2+3}-3x^2\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^3-2\sqrt{2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-5}\right)^{x-1}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln 5}{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{x}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin(x)}-1}{\operatorname{tg}x^2}$;

л) $\lim\limits_{x\to 2-0}\left(\dfrac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)$; м) $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(\dfrac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)$.

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

а) $y=\begin{cases}x, & x<0,\\ 3, & 0\le x<4,\\ \sqrt{x}, & x\ge 4;\end{cases}$ б) $y=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$;

в) $y=|x|+2.$

4. Сравните бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to 0$, если $\alpha(x)=\ln(\sqrt[4]{1-\cos(\sqrt{x})}+1)$ и $\beta(x)=e^{\sqrt{x}}-1$.

5. Определите порядок малости относительно x функции $y=\left(e^{x^2}-\cos x\right)$ при $x\to 0$.

Задача 1. Используя определение предела последовательности (предела функции),

докажите а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^2+1}{5n^2}=2$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-8x+6}{x-3}=4$

Решение 1 *а*). Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^2+1}{5n^2}=2.$

Для любого $\varepsilon>0$ попробуем найти такое натуральное число N, что для всякого натурального $n>N$ выполнялось неравенство

$$|x_n - 2| < \varepsilon.$$

Для этого найдем абсолютную величину разности

$$\left|\frac{10n^2+1}{5n^2} - 2\right| = \left|\frac{10n^2+1-10n^2}{5n^2}\right| = \left|\frac{1}{5n^2}\right| = \frac{1}{5n^2}.$$

Значит, неравенство $|x_n - 2| < \varepsilon$ выполняется, если $\frac{1}{5n^2} < \varepsilon$, откуда $n > \sqrt{\frac{1}{5\varepsilon}}$.

Поэтому в качестве N можно взять целую часть числа $\sqrt{\frac{1}{5\varepsilon}}$, т.е. $N = E\left(\sqrt{\frac{1}{5\varepsilon}}\right)$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что из неравенства $n > N$ будет следовать $|x_n - 2| < \varepsilon$, а это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10n^2+1}{5n^2} = 2.$$

Решение 1 *б*). Докажите, что $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-8x+6}{x-3} = 4$

Первый способ – используется определение предела функции по Коши. Следуя определению предела функции по Коши надо доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из равенства $0 < |x-3| < \delta$ следует $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

Рассмотрим модуль разности $|f(x)-4|$ относительно модуля $|x-3|$. Другими словами, необходимо решить неравенство

$$\left|\frac{2x^2-8x+6}{x-3} - 4\right| = \left|\frac{2x^2-8x+6-4x+12}{x-3}\right| = \left|\frac{2(x-3)^2}{x-3}\right| = 2|x-3| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство показывает, что как только $|x - 3| < \varepsilon/2 = \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Следовательно, $\delta = \varepsilon/2$ и

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-8x+6}{x-3} = 4.$$

Задача 2.

Решение 2 *а*). Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-n^2+5}{1+2n-5n^3}$.

Убедившись, что имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, оставляем старшие степени n в числителе и в знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n^2+5}{1+2n-5n^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{-5n^3} = -5.$$

Решение 2 б). Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n!}{3n!-(n-1)!}$.

Убедившись, что имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty-\infty}$, вынесем в числителе и знаменателе общий множитель $(n-1)!$. Учитывая, что $n! = (n-1)!\cdot n$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n!}{3n!-(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)!\cdot n}{3(n-1)!\cdot n-(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)!\cdot n}{(n-1)!(3n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n-1}.$$

Далее оставляем старшую степень n в числителе и знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n!}{3n!-(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3}.$$

Решение 2 *г*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{x^2+3}-3x^2\right)$.

Анализируя условие задачи, заключаем, что при $x\to\infty$ функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин (случай $\infty-\infty$). После этого преобразуем данную функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Тем самым данный случай нахождения предела функции сводится к случаю $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4}{x^2+3}-3x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4-3x^4-9x^2}{x^2+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^2}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^2}{x^2}=-9$$

Оставляем главную часть бесконечно большой x^2 в знаменателе.

Решение 2 *д*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+x-3}$.

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой $x=1$. В этом случае дробь представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай $\dfrac{0}{0}$). Делаем преобразование, чтобы сократить дробь на множитель $(x-1)$, стремящийся к нулю. Разлагаем числитель и знаменатель на множители (делением многочлена на многочлен):

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x-4}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x+4)}{(x-1)(2x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+4}{2x+3}=\frac{7}{5}.$$

Решение 2 *е*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^3-2\sqrt{2}}$.

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой $x=\sqrt{2}$. В этом случае дробь представляет отношение двух бесконечно малых функций (неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$). Делаем преобразование, чтобы сократить дробь на множитель $(x-\sqrt{2})$, стремящийся к нулю. Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители, используя формулу разности квадратов в числителе и разности кубов в знаменателе:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Тогда получим

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x^3-2\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+2\right)}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(x^2+\sqrt{2}x+2\right)}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Решение 2 *ж*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-5}\right)^{x-1}$.

Убедившись сначала, что при указанном изменении аргумента функция представляет степень, основание которой стремиться к единице, а показатель – к бесконечности (неопределённость вида 1^{∞}). Далее преобразуем функцию так, чтобы использовать 2-й замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Выделив целую часть из дроби, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-5}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x-5}\right)^{\frac{(3x-5)}{4}\frac{4}{(3x-5)}(x-1)}.$$

Первый множитель показателя степени забираем для е, второй и третий остается. Таким образом, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-5}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x-5}\right)^{\frac{(3x-5)}{4}\frac{4}{(3x-5)}(x-1)}\quad e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x-1)}{(3x-5)}}=e^{\frac{4}{3}}.$$

Решение 2 *з*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln 5}{x}$.

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой $x = 0$. В этом случае дробь представляет отношение двух бесконечно малых функций (неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$). Используем свойства логарифмов:

$$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b},\;\; \ln a+\ln b=\ln ab,\; \ln a^{b}=b\ln a.$$

В результате получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(5+x)-\ln 5}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{5+x}{5}}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{5}{x}\cdot\frac{1}{5}}\right)=\ln e^{5}=5.$$

Решение 2 *и*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{x}$.

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой $x = 0$. В этом случае дробь представляет отношение двух бесконечно малых функций (неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$).

Воспользуемся таблицей 1.

Эквивалентные бесконечно малые ($\alpha(x)$ – б.м.)

Таблица 1.

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$
$1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$	$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$

Замени выражение, стоящее в числителе на эквивалентную бесконечно малую функцию ($2\cdot x\cdot\ln 3$) и получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\ln 3}{x} = 2\ln 3.$$

Решение 2 *к*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin(x)}-1}{\operatorname{tg}x^2}$.

Аналогично убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой $x = 0$. В этом случае дробь представляет отношение двух бесконечно малых функций (неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$). Воспользуемся таблицей 1 и получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin(x)}-1}{\operatorname{tg}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Решение 2 *л*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2-0}\left(\dfrac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)$.

Если переменная x будет стремиться к 2 слева, т. е. $(x - 2)$ будет отрицательной бесконечно малой, то $\left(-\dfrac{1}{x-2}\right)$ будет положительной бесконечно большой и

$$\lim_{x\to 2-0}\left(\frac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{1-3^{\frac{1}{x-2}}}\right) = \frac{1}{1-3^{+\infty}} = 0.$$

Решение 2 *м*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(\dfrac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)$.

Аналогично, если переменная x будет стремиться к 2 справа, то $(x-2)$ будет положительной бесконечно малой, и $\left(-\dfrac{1}{x-2}\right)$ будет отрицательной бесконечно большой и

$$\lim_{x\to 2+0}\left(\frac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)=\frac{1}{1-3^{-\infty}}=1.$$

Задача 3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически функцию:

$$a)\ y=\begin{cases} x, & x<0,\\ 3, & 0\le x<4,\\ \sqrt{x}, & x\ge 4.\end{cases}$$

Решение. Область определения функции $D\,(y) = (-\infty;\,+\infty)$. Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная. Она задана тремя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрыв в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$, где меняется ее аналитическое выражение.

Исследуя точку $x_1 = 0$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0} x=0, \qquad \lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0} 3=3,$$

Односторонние пределы функции конечны, но не равны между собой. Поэтому, вследствие невыполнения 2-го условия непрерывности, в точке $x_1 = 0$ функция имеет разрыв первого рода.

В этой точке разрыва функция имеет конечный скачок:

$$h=\lim_{x\to +0} f(x)-\lim_{x\to -0} f(x)=3-0=3\,.$$

Исследуя точку $x_2 = 4$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0} 3=3, \qquad \lim_{x\to 4+0} f(x)=\lim_{x\to 4+0} \sqrt{x}=2,$$

Односторонние пределы функции конечны, но не равны между собой. Поэтому, вследствие невыполнения 2-го условия непрерывности, в точке $x_2 = 4$ функция имеет разрыв первого рода.

В этой точке разрыва функция имеет конечный скачок:

$$h=\lim_{x\to 4+0} f(x)-\lim_{x\to 4-0} f(x)=2-3=-1.$$

Во всех остальных точках числовой оси $y = f(x)$ непрерывна, так как формулы, которыми она задана, определяют собой элементарные непрерывные функции.

График функции на рис.1.

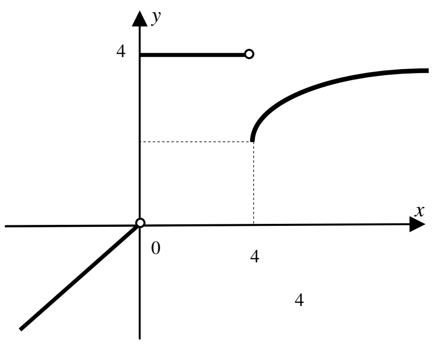


Рис.1.

Задача 3 *б*) Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически функцию:

$$y=\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}.$$

Решение. Область определения функции $D(y)=(-\infty;\,2)\cup(2;+\infty)$. Элементарная функция $y=f(x)$ определена, а следовательно, и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=2$. В точке $x=2$ функция имеет разрыв, поскольку она определена в любой окрестности этой точки, за исключением самой точки.

Найдем односторонние пределы функции в этой точке

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\left(\frac{1}{2^{-\infty}+1}\right)=1,\qquad \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\left(\frac{1}{2^{+\infty}+1}\right)=0,$$

Односторонние пределы функции конечны, но не равны между собой. Следовательно, функция в точке $x=2$ имеет разрыв первого рода; при этом она имеет конечный скачок:

$$h=\lim_{x\to 2+0}f(x)-\lim_{x\to 2-0}f(x)=0-1=-1.$$

Исследуем поведение функции при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\frac{1}{2^0+1}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\frac{1}{2^0+1}=\frac{1}{2}.$$

График функции на рис.4.2.1.

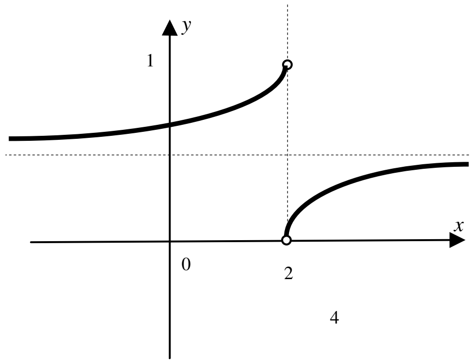


Рис. 4.2.1.

Задача 3 *в*). Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически функцию

$$y=|x|+2.$$

Решение: Область определения функции $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная:

$$y=|x|+2=\begin{cases}x+2, & \textit{если}\ \ x\ge 0,\\ -x+2, & \textit{если}\ \ x<0.\end{cases}$$

Она задана двумя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрыв в точке $x=0$, где меняется ее аналитическое выражение.

Исследуя точку $x=0$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа:

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}(x+2)=2,\qquad \lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}(-x+2)=2,$$

Односторонние пределы функции конечны, равны между собой и равны значению функции в точке. Следовательно, в точке выполняются все условия непрерывности: функция определена в окрестности точки $x=0$ и

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to+0}f(x)=f(0).$$

Поэтому в точке $x = 0$ функция $y = |x| + 2$ непрерывна.

График функции на рис.4.2.2.

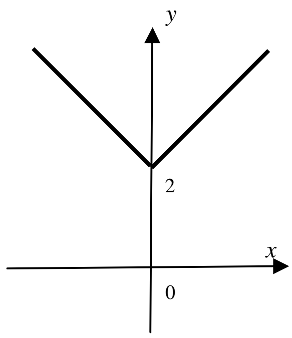


Рис. 4.2.2.

Задача 4. Сравните бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to 0$, если
$\alpha(x) = \ln(\sqrt[4]{1-\cos(\sqrt{x})}+1)$ и $\beta(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$.

Решение: Для сравнения двух бесконечно малых при $x \to x_0$ используем следующее определение:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{cases} 0 & - \ a(x) \text{ б.м. более высокогопорядка, чем } b(x), \\ \infty & - \ a(x) \text{ б.м. низшего порядка относительно } b(x), \\ C,\ C \neq 0, \text{const} & - \ a(x)\ и\ b(x) \text{ б.м. одного порядка.} \end{cases}$$

Находим предел отношения $\alpha(x)$ к $\beta(x)$ при $x \to 0$, используя таблицу эквивалентных бесконечно малых (таблица 1 в примере 2.и.):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sqrt[4]{1-\cos(\sqrt{x})}+1)}{e^{\sqrt{x}}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-\cos(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[4]{2x}} = +\infty.$$

Следовательно, $\alpha(x) = \ln(\sqrt[4]{1-\cos(\sqrt{x})}+1)$ бесконечно малая более низкого порядка, чем $\beta(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$ при $x \to 0$.

Задача 5. Определите порядок малости относительно x функции

$$y = \left(e^{x^2} - \cos x\right) \text{ при } x \to 0.$$

Решение: Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой $\beta(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c, \text{ где } c = \text{const} \neq 0.$$

Находим предел отношения функции $y = \left(e^{x^2} - \cos x\right)$ к функции x^k при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x^2}-\cos x\right)}{x^k}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^2}{2}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x^k}=\frac{3}{2},\text{ при } k=2.$$

Следовательно, порядок малости относительно x функции $y=\left(e^{x^2}-\cos x\right)$

при $x\to 0$ равен 2.

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания №2

Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x)=1-x+(x+2)^2$, $x_0=3$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}1+e^{\frac{-1}{|x-2|}}, & x\neq 2;\\ 1, & x=2,\end{cases}$ $x_0=2$.

Решение 1.1. $f(x)=1-x+(x+2)^2$, в точке $x_0=3$.

По определению производной:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

где $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Найдем $f(x_0+\Delta x)$ для заданной функции. В $f(x)$ вместо x подставим $x_0+\Delta x$:

$$f(x_0+\Delta x)=1-[x_0+\Delta x]+([x_0+\Delta x]+2)^2 \Rightarrow$$

$$f(3+\Delta x)=1-[3+\Delta x]+([3+\Delta x]+2)^2.$$

Найдем $\Delta f(3)$ для заданной функции:

$$\Delta f(3)=f(3+\Delta x)-f(3)=1-[3+\Delta x]+([3+\Delta x]+2)^2-[1-3+(3+2)^2]=$$

$$=1-3-\Delta x+25+10\Delta x+\Delta x^2-23=9\Delta x+\Delta x^2.$$

Подставим полученное приращение функции в точке $x_0=3$ в определение производной:

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{9\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(9+\Delta x)=9.$$

Таким образом, $f'(3)=9$.

Решение 1.2. $f(x)=\begin{cases}1+e^{\frac{-1}{|x-2|}}, & x\neq 2;\\ 1, & x=2,\end{cases}$

По определению производной:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Однако, данная функция кусочно-аналитическая. Поэтому, производная будет существовать в точке x_0, если

$$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0).$$

По определению односторонних производных:

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},\qquad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Найдем односторонние производные, учитывая, что $f(x_0)=f(2)=1$:

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\left(1+e^{\frac{-1}{|2+\Delta x-2|}}\right)-1}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{e^{\frac{-1}{|\Delta x|}}}{\Delta x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{-\frac{1}{\Delta x}}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

по правилу Лопиталя

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{\Delta x^2}}{\frac{1}{\Delta x^2}\cdot e^{-\frac{1}{\Delta x}}}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-1}{e^{-\frac{1}{\Delta x}}}=0.$$

Аналогичный результат получим для правосторонней производной:

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-1}{|\Delta x|}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-1}{\Delta x}}}{\Delta x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{\frac{1}{\Delta x}}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\Delta x^2}}{-\frac{1}{\Delta x^2}\cdot e^{\frac{1}{\Delta x}}}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0.$$

Таким образом, односторонние производные в точке x_0= 2 равны, следовательно, производная функции в точке x_0= 2 существует и равна нулю $f'(2)=0$.

Замечание. Для функций, у которых производная в точке x_0 приводит к неопределенности $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, производная ищется по определению.

Задача 2. Найти производную функций:

2.1. $y=2+2x^2+\ln(x-3);$ 2.2. $y=3^x-\log_3 x+x^3;$

2.3. $y=(1-4x)^4\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}$; 2.4. $y=\dfrac{3x^4-2x^3+10x-12}{1-x^2};$

2.5. $y=\sqrt[3]{1-x-3\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-3x^2+x^4}}$; 2.6. $y=\sin^3(2-x+x^2);$

2.7. $y=\ln\left(5^x-\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}}\right);$ 2.8. $y=arcctg\left(tg4x+\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}\right).$

Решение 2.1. $y=2+2x^2+\ln(x-3)$.

Воспользуемся правилом дифференцирования суммы и таблицей производных:

$$(u+v)'=u'+v'.$$

Тогда

$$y'=\left(2+2x^2+\ln(x-3)\right)'=2'+\left(2x^2\right)'+\left(\ln(x-3)\right)'=0+4x+\frac{1}{x-3}$$

.

Решение 2.2. $y=3^x-\log_3 x+x^3$.

Воспользуемся правилом дифференцирования суммы и таблицей производных:

$$y'=\left(3^x\right)'-\left(\log_3 x\right)'+\left(x^3\right)'=3^x\ln 3-\frac{1}{x\ln 3}+3x^2.$$

Решение 2.3. $y=(1-4x)^4\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}$.

Воспользуемся правилом дифференцирования произведения

$$(u\cdot v)'=u'v+uv'.$$

и правилом дифференцирования сложной функции

$$(y(u))'=y'_u\cdot u'_x.$$

Тогда

$$y'=\left((1-4x)^4\right)'\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}+(1-4x)^4\cdot\left(3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}\right)'=$$

$$=4(1-4x)^3(1-4x)'\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}+(1-4x)^4\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}\left(\sqrt[5]{(1+2x)^2}\right)'=$$

$$=4(1-4x)^3(-4)\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}+(1-4x)^4\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}\cdot\frac{2}{5}(1+2x)^{-\frac{3}{5}}\cdot 2$$

.

Решение 2.4. $y=\dfrac{3x^4-2x^3+10x-12}{1-x^2}$;.

Воспользуемся правилом дифференцирования частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

$$y'=\frac{(3x^4-2x^3+10x-12)'\cdot(1-x^2)-(3x^4-2x^3+10x-12)\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{(12x^3-6x^2+10)\cdot(1-x^2)-(3x^4-2x^3+10x-12)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}.$$

Решение 2.5. $y=\sqrt[3]{1-x-3\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-3x^2+x^4}}$.

Перепишем заданную функцию в более удобном для дифференцирования виде:

$$y=(1-x-3\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}-(3-3x^2+x^4)^{-\frac{1}{2}}.$$

Найдем производную как от степенной функции:

$$y'=\frac{1}{3}(1-x-3\sqrt{x})^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-x-3\sqrt{x})'+\frac{1}{2}(3-3x^2+x^4)^{-\frac{3}{2}}\cdot(3-3x^2+x^4)'=$$

$$=\frac{1}{3}(1-x-3\sqrt{x})^{-\frac{2}{3}}\cdot(-1-\frac{3}{2\sqrt{x}})+\frac{1}{2}(3-3x^2+x^4)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-6x+4x^3)$$

.

Решение 2.6. $y = \sin^3(2 - x + x^2)$.

Перепишем заданную функцию в более удобном для дифференцирования виде:

$$y = \left(\sin(2 - x + x^2)\right)^3.$$

Продифференцируем сложную функцию сначала как степенную $y = u^3$, затем как тригонометрическую $u = \sin v$, затем как сумму элементарных функций $v = 2 - x + x^2$.

$$y' = 3\left(\sin(2 - x + x^2)\right)^2 \cdot (\sin(2 - x + x^2))' =$$

$$= 3\left(\sin(2 - x + x^2)\right)^2 \cdot \cos(2 - x + x^2) \cdot (2 - x + x^2)' =$$

$$= 3\left(\sin(2 - x + x^2)\right)^2 \cdot \cos(2 - x + x^2) \cdot (-1 + 2x)$$

Решение 2.7. $y = \ln(5^x - \sqrt{x^2 + \sqrt{2x + \sqrt{x}}})$.

Найдем производную сложной функции:

$$y' = \frac{1}{5^x - \sqrt{x^2 + \sqrt{2x + \sqrt{x}}}} (5^x - \sqrt{x^2 + \sqrt{2x + \sqrt{x}}})' =$$

$$= \frac{1}{5^x - \sqrt{x^2 + \sqrt{2x + \sqrt{x}}}} \left(5^x \ln 5 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{2x + \sqrt{x}}}} \cdot (x^2 + \sqrt{2x + \sqrt{x}})' \right) =$$

$$= \frac{1}{5^x - \sqrt{x^2 + \sqrt{2x + \sqrt{x}}}} \left(5^x \ln 5 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{2x + \sqrt{x}}}} \cdot (2x + \frac{1}{2\sqrt{2x + \sqrt{x}}} (2x + \sqrt{x})' \right) =$$

$$= \frac{1}{5^x - \sqrt{x^2 + \sqrt{2x + \sqrt{x}}}} \left(5^x \ln 5 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{2x + \sqrt{x}}}} \cdot (2x + \frac{1}{2\sqrt{2x + \sqrt{x}}} (2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}) \right)$$

.

Решение 2.8. $y = arcctg\left(tg4x + \frac{1}{\sqrt{\cos x}} \right)$.

Перепишем заданную функцию в более удобном для дифференцирования виде:

$$y = arcctg\left(tg4x + (\cos x)^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Найдем производную сложной функции:

$$y' = \frac{1}{1 + \left(tg4x + (\cos x)^{-\frac{1}{2}} \right)^2} \left(tg4x + (\cos x)^{-\frac{1}{2}} \right)' =$$

$$=\frac{1}{1+\left(tg4x+\frac{1}{\sqrt{\cos\ x}}\right)^2}\left(\frac{4}{\cos^2 4x}-\frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-\sin x)\right).$$

Замечание. В заданиях на нахождение производной нет необходимости упрощать полученные выражения. Однако, при вычислении производных высших порядков или в задачах на приложение производной упрощение выражений обязательно.

Задача 3. Найти производную показательно- степенной функции $y=(\cos\sqrt{1-x})^{x^2}$.

Решение. Можно воспользоваться правилом: производная показательно-степенной функции равна сумме производных от неё как от показательной и как от степенной функции.

$$y' = (\cos\sqrt{1-x})^{x^2}(\ln(\cos\sqrt{1-x}))2x + x^2(\cos\sqrt{1-x})^{x^2-1}(-\sin\sqrt{1-x})\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

Но можно выполнить тождественное преобразование над данной функцией:

$$y=(\cos\sqrt{1-x})^{x^2}=e^{\ln(\cos\sqrt{1-x})^{x^2}}=e^{x^2\cdot\ln(\cos\sqrt{1-x})}.$$

Получили показательную функцию с показателем в виде произведения двух сложных функций.

$$y'=e^{x^2\cdot\ln(\cos\sqrt{1-x})}\cdot(x^2\cdot\ln(\cos\sqrt{1-x}))'=$$

$$=e^{x^2\cdot\ln(\cos\sqrt{1-x})}\cdot\left((x^2)'\cdot\ln(\cos\sqrt{1-x})+x^2\cdot(\ln(\cos\sqrt{1-x}))'\right)=$$

$$=e^{x^2\cdot\ln(\cos\sqrt{1-x})}\cdot\left(2x\cdot\ln(\cos\sqrt{1-x})+x^2\cdot\frac{1}{\cos\sqrt{1-x}}(\cos\sqrt{1-x})'\right)=$$

$$=e^{x^2\cdot\ln(\cos\sqrt{1-x})}\cdot\left(2x\cdot\ln(\cos\sqrt{1-x})+x^2\cdot\frac{-\sin\sqrt{1-x}}{\cos\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right).$$

Заметим, что первый множитель – это исходная функция. Поэтому окончательный результат можно записать как

$$y'=(\cos\sqrt{1-x})^{x^2}\cdot\left(2x\cdot\ln(\cos\sqrt{1-x})+x^2\cdot\frac{-\sin\sqrt{1-x}}{\cos\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right).$$

Задача 4. Найти производную неявно заданной функции $y=y(x)$: $\sin(x\cdot y)=\ln(x+y)$.

Решение. Продифференцируем левую и правую части равенства по x:

$$(\sin(x\cdot y))'=(\ln(x+y))' \Rightarrow$$

$$\cos(xy)\cdot(x\cdot y)'=\frac{1}{x+y}(x+y)' \Rightarrow$$

$$\cos(xy)\cdot(x'y+xy')=\frac{1}{x+y}(x'+y').$$

Учитывая, что x – свободная переменная, а $y(x)$ – функция, запишем:

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')=\frac{1}{x+y}(1+y').$$

Раскроем скобки и выразим y' :

$$y\cos(xy)+xy'\cos(xy)=\frac{1}{x+y}+y'\cdot\frac{1}{x+y}\ \Rightarrow$$

$$y'\left(x\cos(xy)-\frac{1}{x+y}\right)=\frac{1}{x+y}-y\cos(xy)\ \Rightarrow$$

$$y'=\frac{\dfrac{1}{x+y}-y\cos(xy)}{x\cos(xy)-\dfrac{1}{x+y}}.$$

Задача 5. Найти производную параметрически заданной функции:

$$\begin{cases} x=\sin^3 2t, \\ y=t-\cos^3 2t. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой для производной параметрически заданной функции $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t): \end{cases}$ $\qquad y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем производные y'_t и x'_t:

$$y'_t=1-3\cos^2 2t\cdot(-\sin 2t)\cdot 2=1+6\cos^2 2t\cdot\sin 2t,$$

$$x'_t=3\sin^2 2t\cdot\cos 2t\cdot 2=6\sin^2 2t\cdot\cos 2t.$$

Подставим найденные производные по параметру t в формулу y'_x:

$$y'_x=\frac{1+6\cos^2 2t\cdot\sin 2t}{6\sin^2 2t\cdot\cos 2t}.$$

Задача 6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0;y_0)$:

6.1. $y=arcctg\dfrac{\sqrt{3}}{x},\ x_0=-1$; $\qquad$ 6.2. $\begin{cases} x=2t^3+1, \\ y=t^4, \end{cases}$ $\ M_0(-15;\,16)$.

Решение. 6.1. $y=arcctg\dfrac{\sqrt{3}}{x},\ x_0=-1$.

Угловой коэффициент k касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 – это производная функции $y=y(x)$ в точке x_0. Тогда

$$k=y'=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)'=\frac{1}{1+\dfrac{3}{x^2}}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{x^2}=\frac{-\sqrt{3}}{x^2+3}.$$

Найдем y' в точке $x_0=-1$:

$$k=y'(-1)=\frac{-\sqrt{3}}{(-1)^2+3}=\frac{-\sqrt{3}}{4}.$$

Уравнение касательной и нормали к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 имеют вид:

$$y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0) \qquad \text{и} \qquad y-y(x_0)=\frac{-1}{y'(x_0)}(x-x_0)$$

соответственно.

Найдем $y(x_0)$:

$$y(-1) = arcctg\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\frac{\pi}{3} + \pi n.$$

Выберем значение функции $y(-1)$ для n=0 (для определенности) и запишем уравнение касательной

$$y + \frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{4}(x+1)$$

и нормали

$$y + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}(x+1).$$

Решение. 6.1. $\begin{cases} x = 2t^3 + 1, \\ y = t^4, \end{cases}$ $M_0(-15;\ 16)$.

Угловой коэффициент k касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 – это производная функции $y=y(x)$ в точке x_0. Тогда

$$k = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4t^3}{6t^2} = \frac{2}{3}t.$$

Чтобы найти y' в точке x_0, нужно вычислить точку t_0. Подставим $x_0= -15$ в функцию $x = 2t^3 + 1$:

$$-15 = 2t^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad t_0 = -2.$$

Проверим, удовлетворяет ли найденная t_0 функции $y = t^4$ при y_0=16:

$$16 \equiv (-2)^4.$$

Получили истинное высказывание, значит t_0 найдена правильно. Найдем y' в точке $t_0= -2$:

$$k = y'_x(-2) = \frac{2}{3}\cdot(-2) = -\frac{4}{3}.$$

запишем уравнение касательной

$$y - 16 = \frac{-4}{3}(x+15)$$

и нормали

$$y - 16 = \frac{3}{4}(x+15).$$

Задача 7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (x-1)\cdot e^{x^3}$; 7.2. $\begin{cases} x = 2t^3 + 1, \\ y = t^4, \end{cases}$

Решение. 7.1. $y = (x-1)\cdot e^{x^3}$.

По определению производной второго порядка

$$y'' = (y')'.$$

Найдем производную первого порядка:

$$y' = (x-1)'\cdot e^{x^3} + (x-1)(e^{x^3})' = e^{x^3} + (x-1)\cdot 3x^2\cdot e^{x^3}.$$

Для вычисления второй производной упростим выражение y':

$$y' = (1 + 3x^3 - 3x^2)\cdot e^{x^3}.$$

$$y'' = (1+3x^3-3x^2)'\cdot e^{x^3} + (1+3x^3-3x^2)\cdot(e^{x^3})' =.$$
$$= (9x^2-6x)\cdot e^{x^3} + (1+3x^3-3x^2)\cdot 3x^2\cdot e^{x^3} =$$
$$= (9x^5-9x^4+12x^2-6x)\cdot e^{x^3}.$$

Задача 8. Найти дифференциал функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(3.8)$.

Решение. По определению дифференциала функции первого порядка
$$dy = y'dx.$$
Тогда
$$dy = \left(\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right)' dx = \frac{-4}{2\sqrt{(4x+1)^3}}dx = \frac{-2}{\sqrt{(4x+1)^3}}dx.$$
При достаточно малых приращениях свободной переменной x дифференциал функции можно считать приближенно равным приращению функции, т.е. $\Delta y \approx dy$. Тогда,
$$\Delta y = y(x) - y(x_0) \approx y'(x_0)dx \Rightarrow$$
$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)dx.$$
Выберем в качестве x_0 число, достаточно близкое к числу x=3.8, но при котором $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ легко вычисляются. Таким числом является $x_0 = 3.75$. Тогда
$$dx = x - x_0 = 3.8 - 3.75 = 0.05.$$
Подставим числовые значения в приближенную формулу:
$$y(3.8) \approx y(3.75) + y'(3.75)dx \Rightarrow$$
$$y(3.8) \approx \frac{1}{\sqrt{4\cdot 3.75+1}} - \frac{2}{\sqrt{(4\cdot 3.75+1)^3}}\cdot 0.05 = \frac{1}{\sqrt{16}} - \frac{2}{\sqrt{(16)^3}}\cdot 0.05$$
$$y(3.8) \approx \frac{1}{4} - \frac{0.1}{4^3} = \frac{159}{640}.$$

Задача 9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. По определению дифференциал второго порядка равен:
$$d^2y = y''dx^2.$$
Найдем первую и вторую производные:
$$y' = \frac{(\sqrt{x+1})'(x-1) - (x-1)'\sqrt{x+1}}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{\dfrac{(x-1)}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - 2(x+1)}{2\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^2} = \frac{-x-3}{2\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^2}$$
$$y'' = \frac{(-x-3)'\cdot\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^2 - (-x-3)\cdot(\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^2)'}{2\left(\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^2\right)^2} =$$

$$=\frac{-\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^2+(x+3)\cdot\left(\dfrac{(x-1)^2}{2\sqrt{x+1}}+2(x-1)\sqrt{x+1}\right)}{2(x+1)(x-1)^4}=$$

$$=\frac{-\sqrt{x+1}\cdot(x-1)+(x+3)\cdot\left(\dfrac{(x-1)+2\sqrt{x+1}\cdot 2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}\right)}{2(x+1)\cdot(x-1)^3}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}\cdot(1-x)\cdot 2\sqrt{x+1}+(x+3)\cdot\left(5x+3\right)}{2(x+1)\cdot 2\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^3}=\frac{2(1-x)(x+1)+(5x^2+18x+9)}{4(x+1)^{3/2}\cdot(x-1)^3}=$$

$$=\frac{3x^2+18x+11}{4(x+1)^{3/2}\cdot(x-1)^3}$$

Найдем вторую производную функции в точке $x_0=3$:

$$y''(3)=\frac{3\cdot(3)^2+18\cdot 3+11}{4(3+1)^{3/2}\cdot(3-1)^3}=\frac{92}{4\cdot 8^2}=\frac{23}{64}$$

Подставляя в формулу для второго дифференциала в точке

$$d^2y(x_0)=y''(x_0)dx^2$$

получим: $$d^2y(3)=\frac{23}{64}dx^2.$$

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания №3

Задача 1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-4x-1}{x^2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2xtgx}\right]$.

Решение 1 *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-4x-1}{x^2}$.

По теореме Лопиталя если $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ при $x\to x_0$ и существует предел отношения производных этих функций $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=const$ то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогично правило Лопиталя формулируется для функций, стремящихся к бесконечности $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$.

Т.е. правило Лопиталя применимо к неопределенностям вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Поэтому, начнем решение с установления неопределенности.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-4x-1}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{4x}-4x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-4}{2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

применим правило Лопиталя еще раз:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4e^{2x}-4)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}}{2}=4.$$

Решение 1 *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}$.

Установим вид неопределенности. Для этого подставим в функцию значение переменной *x*, к которому она стремится:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}=\left|\infty^0\right|.$$

Для такого вида неопределенности правило Лопиталя неприменимо. Воспользуемся определением логарифма: $a=e^{\ln a}$ и запишем

$$\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}=e^{\ln\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}}.$$

По свойству логарифма $\ln x^b=b\ln x$, тогда

$$e^{\ln\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}}=e^{\frac{2}{x-1}\cdot\ln\left(\ln x\right)}=e^{\frac{2\ln\left(\ln x\right)}{x-1}}.$$

Применим выполненное преобразование для вычисления предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2\ln\left(\ln x\right)}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln\left(\ln x\right)}{x-1}}.$$

Последнее равенство можно применить в силу непрерывности показательной функции.

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln\left(\ln x\right)}{x-1}}=e^{\left|\frac{\infty}{\infty}\right|}.$$

Теперь можно применить правило Лопиталя.

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln\left(\ln x\right)}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2\ln\left(\ln x\right))'}{(x-1)'}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x\ln x}}=e^{\frac{2}{\infty}}=e^0=1$$

.

Решение 1 *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2xtgx}\right]$.

Установим неопределенность

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2xtgx}\right]=\left|\infty-\infty\right|.$$

Приведем дроби к общему знаменателю, тем самым преобразуем неопределенность вида $\left|\infty-\infty\right|$ к неопределенности $\left|\frac{0}{0}\right|$:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2xtgx}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x^2tgx}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{2xtgx+\frac{x^2}{\cos^2 x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2xtgx\cdot\cos^2 x+x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x\sin x\cdot\cos x+x^2}=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(\sin 2x+x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{(\sin 2x+x)+x(2\cos 2x+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 2x+x+2x\cos 2x+x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{2\cos 2x+1+2\cos 2x-4x\sin 2x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2+1+2-0+1}=\frac{1}{4}$$

.

Задача 2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=e^{3-2x},\ x_0=1$; *б*) $y=\dfrac{x-\ln(1-x^2)}{x}$, $x_0=0$.

Решение *а*) $y=e^{3-2x},\ x_0=1$.

Формула Тейлора в окрестности точки x_0 имеет вид

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n$$

Задача может быть решена двумя способами.

I способ. Найдем значение функции и n ее производных в точке $x_0=1$:

$$\begin{aligned}
&y(1)=e\\
&y'=-2e^{3-2x} &&\Rightarrow\ y'(1)=-2e,\\
&y''=-2(-2)e^{3-2x} &&\Rightarrow\ y''(1)=(-2)^2e,\\
&y'''=-2(-2)(-2)e^{3-2x} &&\Rightarrow\ y'''(1)=(-2)^3e,\\
&&&\cdots\\
&y^{(n)}=(-2)^n e^{3-2x} &&\Rightarrow\ y^{(n)}(1)=(-2)^n e.
\end{aligned}$$

Подставим полученные значения производных в формулу Тейлора и запишем ответ:

$$f(x)=e-\frac{2e}{1!}(x-1)+\frac{4e}{2!}(x-1)^2+...+(-1)\frac{2^n e}{n!}(x-1)^n+R_n$$

II способ. Выделим в показателе функции степень (x–1). Для этого выполним тождественное преобразование (вычтем и прибавим единицу) и запишем функцию как произведение двух множителей:

$$y=e^{3-2x}=e^{3-2(x-1+1)}=e^{3-2([x-1]+1)}=e^{1-2[x-1]}=e^1\cdot e^{-2[x-1]}.$$

Используем для разложения по формуле Тейлора стандартное разложение Маклорена для функции

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+...+\frac{t^n}{n!}+R_n.$$

Положим $t=-2(x-1)$ и запишем ответ:

$$y = e\left(1-\frac{2}{1!}(x-1)+\frac{4}{2!}(x-1)^2+\ldots+(-1)\frac{2^n}{n!}(x-1)^n+R_n\right) \Rightarrow$$

$$y = e-\frac{2e}{1!}(x-1)+\frac{4e}{2!}(x-1)^2+\ldots+(-1)\frac{2^n e}{n!}(x-1)^n+R_n.$$

б) $y=\dfrac{x-\ln(1-x^2)}{x}$, x_0=0. Так как x_0=0, то для заданной функции необходимо записать формулу Маклорена. Используем стандартное разложение Маклорена для функции $\ln(1+t)$,

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+R_n,$$

положив $t=-x^2$. Подставим это разложение в функцию:

$$y=\frac{x-\left(-x^2-\dfrac{(-x^2)^2}{2}+\dfrac{(-x^2)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{(-x^2)^n}{n}+R_n\right)}{x} \Rightarrow$$

$$y=\frac{x-\left(-x^2-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{-x^6}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n}+R_n\right)}{x}.$$

Раскроем скобки и разделим каждое слагаемое на знаменатель x:

$$y=1+x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{n}+R_n.$$

Задача 3. Найти экстремумы функций:

а) $y=(x^2+x+2)(x^2+x-2)$; *б)* $y=\dfrac{e^x}{(x+3)^2}$; *в)* $y=x+\sqrt{3-x}$.

Решение *а)* $y=(x^2+x+2)(x^2+x-2)$. Область определения D[y]=R.

Согласно достаточному признаку экстремума, точка x_0 является экстремумом, если при переходе через x_0 меняется знак первой производной заданной функции. Найдем производную функции:

$$y'=(x^2+x+2)'(x^2+x-2)+(x^2+x+2)(x^2+x-2)'=$$
$$=(2x+1)(x^2+x-2)+(x^2+x+2)(2x+1).$$

Приравняем производную к нулю, чтобы найти критические точки (необходимый признак экстремума). Для этого разложим выражение производной на множители:

$$y'=(2x+1)(x^2+x-2+x^2+x+2)=(2x+1)(2x^2+2x)=2x(2x+1)(x+1)=0$$

.

Имеем критические точки:

$$x_1=0,\ \ x_2=-\frac{1}{2},\ \ x_3=-1.$$

Проверим достаточный признак экстремума. Для этого поместим на числовую ось x_1, x_2, x_3 и рассмотрим знак производной слева и справа от каждой из критических точек (рис. 4.2.3):

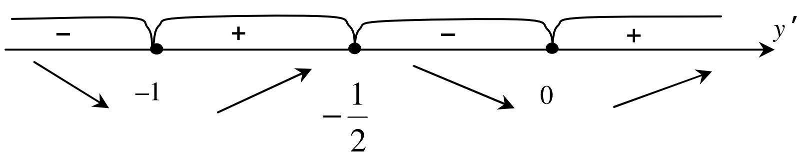


Рис. 4.2.3.

Получили, что точка x_1=1 – точка минимума, $x_2=-\frac{1}{2}$ – точка максимума, x_3=0 – точка минимума данной функции. Более того, можно сделать вывод о поведении функции: на интервале (–∞;–1) функция убывает, на интервале (–1; $-\frac{1}{2}$) – возрастает, на интервале ($-\frac{1}{2}$;0) – убывает, на интервале (0;+ ∞) – возрастает.

Решение *б*) $y=\dfrac{e^x}{(x+3)^2}$. Область определения функции – вся числовая ось кроме x = –3. Согласно достаточному признаку экстремума, точка x_0 является экстремумом, если при переходе через x_0 меняется знак первой производной заданной функции. Найдем производную функции:

$$y'=\frac{(e^x)'(x+3)^2-((x+3)^2)'e^x}{(x+3)^4}=\frac{e^x(x+3)^2-2(x+3)e^x}{(x+3)^4}=$$

$$=\frac{e^x(x+3-2)}{(x+3)^3}=\frac{e^x(x+1)}{(x+3)^3}.$$

Найдем критические точки. Для этого приравняем производную к нулю и рассмотрим точки, в которых производная не существует:

$$y'=0\Rightarrow x_1=-1$$

$$y'\nexists\Rightarrow x_2=-3$$

Проверим достаточный признак экстремума. Для этого поместим на числовую ось x_1, x_2 и рассмотрим знак производной слева и справа от каждой из критических точек (рис. 4.2.4):

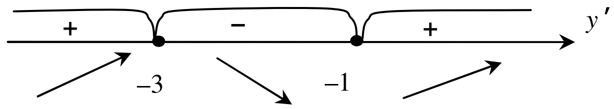


Рис. 4.2.4.

Получили, что точка x_1= –1 – точка минимума, x_2= –3 – точка максимума данной функции. Более того, можно сделать вывод о поведении функции: на интервале (–∞;–3) функция возрастает, на интервале (–3;–1) – убывает, на интервале (–1,+ ∞) – возрастает.

Решение *в*) $y=x+\sqrt{3-x}$. Область определения функции – полупрямая $x\le 3$. Найдем критические точки:

$$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=\frac{2\sqrt{3-x}-1}{2\sqrt{3-x}}.$$

$$y'=0\Rightarrow\sqrt{3-x}=\frac{1}{2}\Rightarrow 3-x=\frac{1}{4}\Rightarrow x_1=\frac{11}{4},$$

$$y'\nexists\Rightarrow x_2=3.$$

Проверим достаточный признак экстремума. Для этого поместим на числовую ось x_1, x_2 и рассмотрим знак производной слева и справа от каждой из критических точек (рис. 4.2.5):

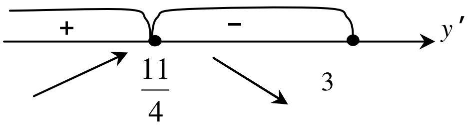


Рис. 4.2.5.

Получили, что точка $x_1 = \frac{11}{4}$ – точка максимума, $x_2 = 3$ – не является экстремумом. Это граница области определения. А по определению локального экстремума точка-экстремум должна иметь двустороннюю окрестность, в которой функция принимает максимальное или минимальное значение. Можно сделать вывод о поведении функции: на интервале $(-\infty; \frac{11}{4})$ функция возрастает, на интервале $(\frac{11}{4}; 3)$ – убывает.

Задача 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^4 - 8x^2 + 3, \quad [-2;1]$; *б)* $y = \dfrac{x^3 - 1}{4x^2}, \quad [-8;-1]$.

Решение *а)* $y = x^4 - 8x^2 + 3, \quad [-2;1]$.

Найдем производную и приравняем ее к нулю:

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2).$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2.$$

Однако, $x_3 = 2 \notin [-2;1]$, поэтому, исключаем ее из рассмотрения. Вычислим значения функции в критических точках и на концах интервала:

$$y(0) = 3, \qquad y(-2) = -13, \qquad y(1) = -4.$$

Выбираем наибольшее и наименьшее значение из полученных:

$$y_{наибольшее} = 3,$$
$$y_{наименьшее} = -13.$$

Решение *б)* $y = \dfrac{x^3 - 1}{4x^2}, \quad [-8;-1]$.

Найдем производную и приравняем ее к нулю:

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot (x^3 - 1)}{x^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot x^3 + 2x}{x^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3 + 2}{x^3}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt[3]{2}, \quad y' \nexists \Rightarrow x_2 = 0.$$

Однако, $x_2 = 0 \notin [-8;-1]$, поэтому, исключаем ее из рассмотрения. Вычислим значения функции в критических точках и на концах интервала:

$$y(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{4}} \approx 0.158,$$

$$y(-8) = \frac{-3}{4 \cdot 4} \approx -0.188,$$

$$y(-1) = \frac{-2}{4} = -0.5.$$

Выбираем наибольшее и наименьшее значение из полученных:

$$y_{наибольшее} = y(\sqrt[3]{2}) \approx 0.158,$$
$$y_{наименьшее} = y(-1) = -0.5.$$

Задача 5. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$;   *б*) $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Решение *а*) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$.

1. Область определения функции – вся числовая ось, кроме точки $x = 0$.
2. Вертикальные асимптоты: $x = 0$. Найдем пределы слева и справа:

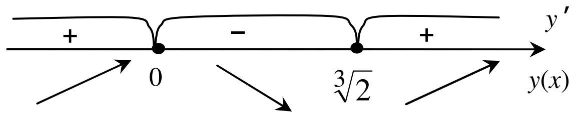
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+1}{x^2} = \frac{1}{(-0)^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+1}{x^2} = \frac{1}{(+0)^2} = +\infty .$$

3. Функция не периодическая, общего вида.
4. Критические точки:

$$y' = \frac{3x^2\cdot x^2 - 2x\cdot(x^3+1)}{x^4} = \frac{x^4-2x}{x^4} = \frac{x^3-2}{x^3}.$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \sqrt[3]{2}, \quad y' \nexists \Rightarrow x_2 = 0.$$

5. Экстремумы и промежутки возрастания и убывания:



6. Точки, подозрительные на перегиб. Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю:

$$y'' = \frac{3x^2\cdot x^3 - 3x^2(x^3-2)}{x^6} = \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}.$$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; x = \varnothing,$$

$$y' \nexists \Rightarrow x = 0.$$

7. Точка x_0 является точкой перегиба, если при переходе через x_0 меняется знак второй производной. Для заданной функции вторая производная положительна для любого x из области определения функции. Следовательно, перегибов нет. Согласно достаточному признаку выпуклости и вогнутости функции, если $y'' > 0$, то функция вогнута $\cup$.
8. Найдем наклонные асимптоты: $y = k\,x + b$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[y(x) - kx\right].$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x^3} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$$

Таким образом, наклонная асимптота – прямая $y = x$.

9. Нули функции и некоторые вспомогательные точки: $y(-1)=0$, $y(\sqrt[3]{2}) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Результаты исследования сводим в таблицу

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2};\infty)$
$y(x)$	$\nearrow \cup$	0	$\nearrow \cup$	вертикальная асимптота	$\cup \searrow$	*min*	$\nearrow \cup$
$y'(x)$	+	+	+	$\nexists$	–	0	+
$y''(x)$	+	+	+	$\nexists$	+	+	+

Построение графика начинаем с асимптот: вертикальной $x = 0$ и наклонной $y = x$.

Затем ставим вспомогательные точки $y(-1)=0$, $y(\sqrt[3]{2}) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Теперь, согласно

данным таблицы, рисуем кривую, возрастающую вогнуто от асимптоты $y = x$ к асимптоте $x = 0$ через точку
$y(-1)=0$. Следующая часть графика – кривая убывает вогнуто от асимптоты $x = 0$ до точки *min*, затем вогнуто возрастает, приближаясь к асимптоте $y = x$. График функции изображен на рисунке 4.2.6.

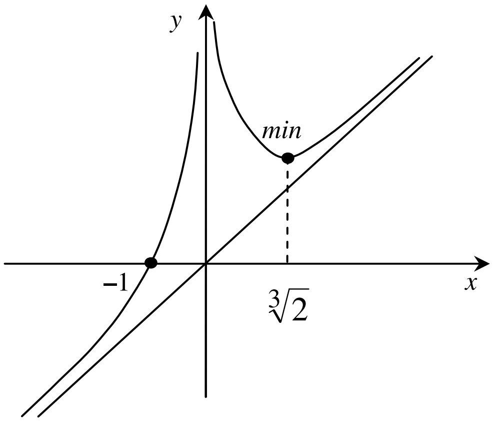


Рис. 4.2.6.

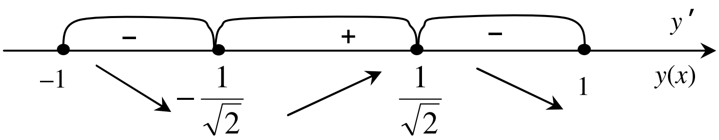
Решение *b*) $y = x\sqrt{1-x^2}$.

1. Область определения функции – отрезок $-1 \le x \le 1$.
2. Вертикальных асимптот нет.
3. Функция не периодическая, нечетная (можно исследовать и построить функцию на полуинтервале, а на вторую половину достроить центрально симметрично).
4. Критические точки:

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\; x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y' \nexists \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1.$$

5. Экстремумы и промежутки возрастания и убывания:



6. Точки, подозрительные на перегиб. Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю:

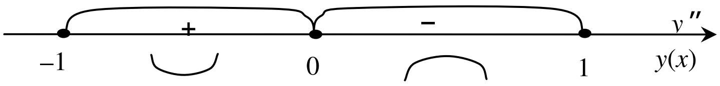
$$y'' = \frac{-4x\cdot\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{-4x\cdot(1-x^2) + x(1-2x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{-3x+2x^3}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}},\; x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}},\qquad y' \nexists \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1.$$

Однако, $x_{2,3} = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \notin D[y]$. Поэтому, исключаем их из рассмотрения.

7. Точка x_0 является точкой перегиба, если при переходе через x_0 меняется знак второй производной. Исследуем знак второй производной.



8. Наклонных асимптот нет, т.к. область определения – отрезок. А наклонные асимптоты существуют только при $x \to \pm\infty$.

9. Нули функции и некоторые вспомогательные точки: $y(\pm 1)=0$, $y(0)=0$,

$$y(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Результаты исследования сводим в таблицу

x	$[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}};0)$	0	$(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}};1]$
$y(x)$	∪ ↘	*min*	↗ ∪		↗ ∩		∩ ↘
$y'(x)$	−	0	+	+	+	0	−
$y''(x)$	+	+	+	0	−	+	−

График функции изображен на рисунке 4.2.7.

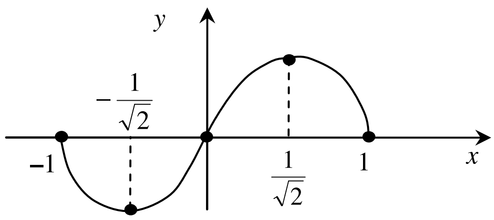


Рис. 4.2.7.

Задача 6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;1) \cup (1;\infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = 1$

3) Горизонтальные асимптоты:

$y = 1 \ (x \to -\infty)$, $y = -2 \ (x \to +\infty)$

4) Наклонные асимптоты: –

5) Стационарные точки: –2; 0; 2; 4.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: –1.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-2;-1), (1;2), (4;\infty)$;

б) убывания:

$(-\infty;-2), (-1;1), (2;4)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$(-\infty;-5/2), (0;1), (1;3), (5;\infty)$;

б) вогнутости:

$(-5/2;-1), (-1;0), (3;5)$.

9) Значение функции в некоторых точках: $y(-5/2)= 3/4$, $y(-2)= 1/2$,

$y(-1)= 4$, $y(0)= 1$, $y(2)= -1$, $y(3)= -2$, $y(4)= -3.5$, $y(5)= -2.5$.

Решение. Результаты аналитического исследования функции изобразим схематически:

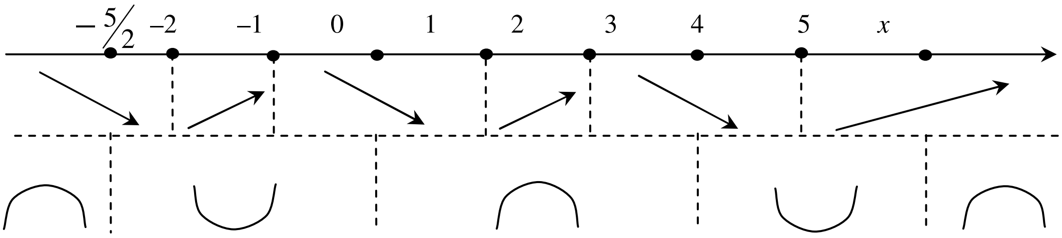


Рис. 4.2.8. Промежутки возрастания и убывания; выпуклости и вогнутости

Построение графика начинаем с асимптот. Затем строим заданные в пункте 9 некоторые точки. График функции изображен на рисунке 4.2.9.

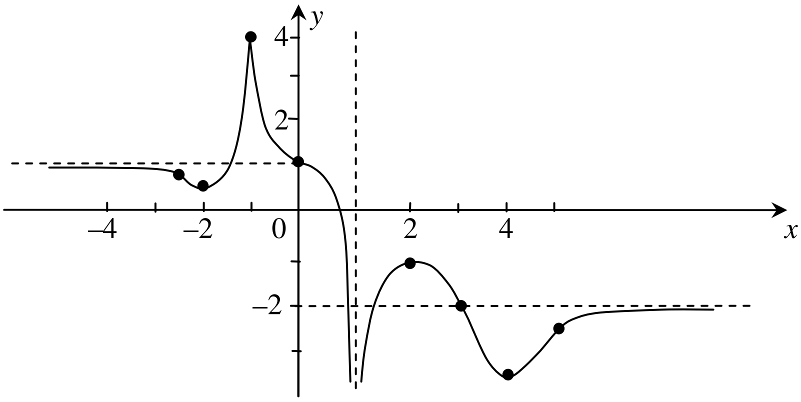


Рис. 4.2.9.