

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx.$

► $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 4 \sin t, \quad dx = 4 \cos t dt, \\ \sin t = x/4, \quad t = \arcsin x/4 \end{array} \right| \quad (8.5)$

$(8.5) \int 16 \sin^2 t \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} 4 \cos t dt = 256 \int \sin^2 t \cos^2 t dt =$
 $= 64 \int \sin^2 2t dt = 32 \int (1 - \cos 4t) dt = 32t - 8 \sin 4t + C =$
 $= 32 \arcsin \frac{x}{4} - 8 \sin 4 \left(\arcsin \frac{x}{4} \right) + C =$
 $= 32 \arcsin \frac{x}{4} - \frac{x}{4} (8 - x^2) \sqrt{16 - x^2} + C. \blacktriangleleft$

2. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 5x + 1}}.$

► $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 5x + 1}} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, \quad t = \frac{1}{x}, \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| \quad (8.5)$

$(8.5) - \int \frac{dt}{t^2 \frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{5}{t} + 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 5t + 1}} =$

$= - \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}} = - \ln \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{t^2 + 5t + 1} \right| + C =$

$= - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} + 1} \right| + C =$

$= C - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 1}}{x} \right|. \blacktriangleleft$

3. $\int (x - 7) \sin 5x dx.$

► $\int (x - 7) \sin 5x dx = \left| \begin{array}{l} u = x - 7, \quad du = dx, \\ dv = \sin 5x dx, \quad v = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right| \quad (8.6)$

$(8.6) - \frac{1}{5} (x - 7) \cos 5x + \frac{1}{5} \int \cos 5x dx =$

$= -\frac{1}{5} (x - 7) \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C. \blacktriangleleft$

4. $\int \arccos 4x dx.$

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright \int \arccos 4x dx = \\ & = \left| \begin{array}{l} u = \arccos 4x, \quad du = -\frac{4dx}{\sqrt{1-16x^2}}, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| \quad (8.6) \\ & \stackrel{(8.6)}{=} x \arccos 4x + 4 \int \frac{xdx}{\sqrt{1-16x^2}} = \\ & = x \arccos 4x - \frac{1}{4} \sqrt{1-16x^2} + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5. $\int xe^{x-7} dx.$

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright \int xe^{x-7} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^{x-7} dx, \quad v = e^{x-7} \end{array} \right| \quad (8.6) \\ & \stackrel{(8.6)}{=} xe^{x-7} - \int e^{x-7} dx = xe^{x-7} - e^{x-7} + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

6. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right| \quad (8.6) \\ & \stackrel{(8.6)}{=} \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ & = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

7. $\int (x^2 - 4x + 3)e^{-2x} dx.$

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright \int (x^2 - 4x + 3)e^{-2x} dx = \\ & = \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 4x + 3, \quad du = (2x - 4)dx, \\ dv = e^{-2x} dx, \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right| \quad (8.6) \\ & \stackrel{(8.6)}{=} -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)e^{-2x} + \int (x - 2)e^{-2x} dx = \\ & = \left| \begin{array}{l} u = x - 2, \quad du = dx, \\ dv = e^{-2x} dx, \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right| \quad (8.6) \\ & \stackrel{(8.6)}{=} -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)e^{-2x} - \frac{1}{2}(x - 2)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

8. $\int \frac{\ln(\ln(x+1))\ln(x+1)}{x+1} dx.$

$$\begin{aligned}
& \triangleright \int \frac{\ln(\ln(x+1))\ln(x+1)}{x+1} dx = \\
& = \left[\begin{array}{l} u = \ln(\ln(x+1)), \quad du = \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} \\ dv = \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx, \quad v = \frac{1}{2} \ln^2(x+1) \end{array} \right] \quad (8.6) \\
& \stackrel{(8.6)}{=} \frac{\ln^2(x+1)}{2} \ln(\ln(x+1)) - \frac{1}{2} \int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \\
& = \frac{\ln^2(x+1)}{2} \ln(\ln(x+1)) - \frac{1}{4} \ln^2(x+1) + C \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

ИДЗ-8.4

Найти неопределенные интегралы.

1

- 1.1. $\int \frac{3x^2 + 20x + 9}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx$. (Ответ: $6 \ln|x + 3| - \ln|x + 1| + 2 \ln|x + 5| + C$.)
- 1.2. $\int \frac{12dx}{(x-2)(x^2 - 2x + 3)}$. (Ответ: $3 \ln|x - 3| - 4 \ln|x - 2| + \ln|x + 1| + C$.)
- 1.3. $\int \frac{43x - 67}{(x-1)(x^2 - x - 12)} dx$. (Ответ: $2 \ln|x - 1| + 5 \ln|x - 4| - 7 \ln|x + 3| + C$.)
- 1.4. $\int \frac{2x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 7}{(x^2 + x - 2)(x + 3)} dx$. (Ответ: $x^2 + 5 \ln|x + 3| + \ln|x + 2| + \ln|x - 1| + C$.)
- 1.5. $\int \frac{8x dx}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)}$. (Ответ: $-5 \ln|x + 5| + 6 \ln|x + 3| - \ln|x + 1| + C$.)
- 1.6. $\int \frac{2x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x}{(x^2 - 5x + 6)(x + 1)} dx$. (Ответ: $x^2 + x + 2 \ln|x + 1| + 4 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 3| + C$.)
- 1.7. $\int \frac{2x^4 + 8x^3 - 45x - 61}{(x-1)(x^2 + 5x + 6)} dx$. (Ответ: $x^2 - 8 \ln|x - 1| + 5 \ln|x + 3| + \ln|x + 2| + C$.)
- 1.8. $\int \frac{2x^4 + 17x^3 + 32x^2 - 7x}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx$. (Ответ: $x^2 - x - 5 \ln|x + 5| + 3 \ln|x + 1| - 3 \ln|x + 3| + C$.)

- 1.9. $\int \frac{6x^2 + 6x - 6}{(x+1)(x^2+x-2)} dx$. (Ответ: $3 \ln|x+1| +$
 $+ \ln|x-1| + 2 \ln|x+2| + C$.)
- 1.10. $\int \frac{37x - 85}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx$. (Ответ: $4 \ln|x-1| -$
 $- 7 \ln|x+3| + 3 \ln|x-4| + C$.)
- 1.11. $\int \frac{3x^2 + 3x - 24}{(x^2-x-2)(x-3)} dx$. (Ответ: $2 \ln|x-2| +$
 $+ 3 \ln|x-3| - 2 \ln|x+1| + C$.)
- 1.12. $\int \frac{2x^4 - 7x^3 + 3x + 20}{(x-2)(x^2-2x-3)} dx$. (Ответ: $x^2 + x -$
 $- 4 \ln|x-2| + 3 \ln|x-3| + 3 \ln|x+1| + C$.)
- 1.13. $\int \frac{3x^2 - 15}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx$. (Ответ: $\ln|x+2| -$
 $- \ln|x-1| + 3 \ln|x+3| + C$.)
- 1.14. $\int \frac{x^2 - 19x + 6}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx$. (Ответ: $18 \ln|x+3| -$
 $- \ln|x-1| - 16 \ln|x+2| + C$.)
- 1.15. $\int \frac{6x dx}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$. (Ответ: $\ln|x-1| +$
 $+ 3 \ln|x+1| - 4 \ln|x+2| + C$.)
- 1.16. $\int \frac{4x^2 + 32x + 52}{(x^2+6x+5)(x+3)} dx$. (Ответ: $3 \ln|x+1| +$
 $+ 2 \ln|x+3| - \ln|x+5| + C$.)
- 1.17. $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx$. (Ответ: $4 \ln|x-1| -$
 $- 7 \ln|x+3| + 5 \ln|x-4| + C$.)
- 1.18. $\int \frac{2x^4 + 8x^3 - 17x - 5}{(x^2+2x-3)(x+2)} dx$. (Ответ: $x^2 - \ln|x-1| +$
 $+ \ln|x+2| - 2 \ln|x+3| + C$.)
- 1.19. $\int \frac{2x^4 + 17x^3 + 40x^2 + 37x + 36}{(x+1)(x^2+8x+15)} dx$. (Ответ: $x^2 - x +$
 $+ 3 \ln|x+1| + 3 \ln|x+3| - 3 \ln|x+5| + C$.)
- 1.20. $\int \frac{6x^2}{(x-1)(x^2+3x+2)} dx$. (Ответ: $\ln|x-1| -$
 $- 3 \ln|x+1| + 8 \ln|x+2| + C$.)
- 1.21. $\int \frac{6x^4}{(x^2-1)(x+2)} dx$. (Ответ: $3x^2 - 12x +$
 $+ \ln|x-1| - 3 \ln|x+1| + 32 \ln|x+2| + C$.)

- 1.22. $\int \frac{2x^2 - 26}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx$. (Ответ: $2 \ln|x + 3| - 3 \ln|x + 1| + 3 \ln|x + 5| + C$.)
- 1.23. $\int \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x + 1)(x^2 + 8x + 15)} dx$. (Ответ: $6 \ln|x + 3| - 2 \ln|x + 1| - 2 \ln|x + 5| + C$.)
- 1.24. $\int \frac{2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 40x - 70}{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)} dx$. (Ответ: $x^2 - x + 4 \ln|x - 1| - \ln|x + 3| + 2 \ln|x - 4| + C$.)
- 1.25. $\int \frac{2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 13}{(x^2 - 5x + 6)(x + 1)} dx$. (Ответ: $x^2 + x + 2 \ln|x + 1| + \ln|x - 2| + \ln|x - 3| + C$.)
- 1.26. $\int \frac{6x^4 - 21x^2 + 3x + 24}{(x^2 + x - 2)(x + 1)} dx$. (Ответ: $3x^2 - 12x + 2 \ln|x - 1| - 3 \ln|x + 1| + 10 \ln|x + 2| + C$.)
- 1.27. $\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 21x^2 - 26}{(x^2 - 5x + 4)(x + 3)} dx$. (Ответ: $x^2 + x + 4 \ln|x - 1| + \ln|x + 3| - 2 \ln|x - 4| + C$.)
- 1.28. $\int \frac{7x^2 - 17x}{(x - 2)(x^2 - 2x - 3)} dx$. (Ответ: $2 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 3| + 2 \ln|x + 1| + C$.)
- 1.29. $\int \frac{6x^4 - 30x^2 + 30}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$. (Ответ: $3x^2 - 12x + \ln|x - 1| - 3 \ln|x + 1| + 2 \ln|x + 2| + C$.)
- 1.30. $\int \frac{3x^2 - 17x + 2}{(x - 1)(x^2 + 5x + 6)} dx$. (Ответ: $20 \ln|x + 3| - \ln|x - 1| - 16 \ln|x + 2| + C$.)

2

- 2.1. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$. (Ответ: $x + \frac{1}{x} - \ln|x| + 2 \ln|x - 1| + C$.)
- 2.2. $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2} dx$. (Ответ: $x + \ln|x| + \frac{1}{x} - 2 \ln|x - 1| + C$.)
- 2.3. $\int \frac{3x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 - 1)} dx$. (Ответ: $2 \ln|x - 1| -$

- $$-\frac{2}{x-1} + \ln|x+1| + C.)$$
- 2.4. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2} dx. (Ответ: \frac{2}{x} - 3 \ln|x| + 3 \ln|x-1| + C.)$
- 2.5. $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx. (Ответ: 2x^2 - 3 \ln|x| -$
 $-\ln|x+1| - \frac{4}{x+1} + C.)$
- 2.6. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx. (Ответ: \ln|x+1| - \ln|x| - \frac{2}{x} + C.)$
- 2.7. $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)} dx. (Ответ: 3 \ln|x-1| -$
 $-\frac{2}{x-1} + \ln|x+1| + C.)$
- 2.8. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3} dx. (Ответ: \frac{1}{x} - 3 \ln|x| +$
 $+ \ln|x-1| + C.)$
- 2.9. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx. (Ответ: \ln|x| + \ln|x-1| +$
 $+\frac{2}{x-1} + C.)$
- 2.10. $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - x - 2}{x(x+1)^2} dx. (Ответ: 2x^2 - 2 \ln|x| -$
 $- 2 \ln|x+1| - \frac{5}{x+1} + C.)$
- 2.11. $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} dx. (Ответ: x^2 + \ln|x| -$
 $-\ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + C.)$
- 2.12. $\int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2} dx. (Ответ: \ln|x+1| - 2 \ln|x| -$
 $-\frac{6}{x+1} + C.)$
- 2.13. $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)} dx. (Ответ: 2x - \ln|x| - \frac{1}{x} -$
 $-\ln|x+1| + C.)$

$$2.14. \int \frac{x^3 - 3}{(x-1)(x^2-1)} dx. \left(\text{Ответ: } x + \frac{1}{x-1} + \right. \\ \left. + 2 \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \right)$$

$$2.15. \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx. \left(\text{Ответ: } 2 \ln|x| + \frac{6}{x+1} - \right. \\ \left. - \ln|x+1| + C \right)$$

$$2.16. \int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2 + x} dx. \left(\text{Ответ: } 2 \ln|x| - 2 \ln|x-1| - \right. \\ \left. - \frac{3}{x-1} + C \right)$$

$$2.17. \int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{(x^2 + x)(x+1)} dx. \left(\text{Ответ: } 2x^2 - \ln|x| - \right. \\ \left. - 3 \ln|x+1| - \frac{5}{x+1} + C \right)$$

$$2.18. \int \frac{4x dx}{(x^2 - 1)(x+1)}. \left(\text{Ответ: } \ln|x-1| - \ln|x+1| - \right. \\ \left. - \frac{2}{x+1} + C \right)$$

$$2.19. \int \frac{dx}{x^3 + x^2}. \left(\text{Ответ: } \ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x} + C \right)$$

$$2.20. \int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2} dx. \left(\text{Ответ: } x - \ln|x| - \right. \\ \left. - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1| + C \right)$$

$$2.21. \int \frac{6x - 2x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx. \left(\text{Ответ: } -\ln|x| - \ln|x-1| - \right. \\ \left. - \frac{3}{x-1} + C \right)$$

$$2.22. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2} dx. \left(\text{Ответ: } 2x + \ln|x| - \right. \\ \left. - \frac{3}{x} - \ln|x+1| + C \right)$$

$$2.23. \int \frac{x^3 - 4x + 5}{(x^2 - 1)(x-1)} dx. \left(\text{Ответ: } x - \ln|x-1| - \right. \\ \left. - \frac{1}{x-1} + 2 \ln|x+1| + C \right)$$

$$2.24. \int \frac{3x^2 + 2}{x(x+1)^2} dx. \left(\text{Ответ: } 2 \ln|x| + \ln|x+1| + \right. \\ \left. + \frac{5}{x+1} + C \right)$$

$$2.25. \int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1} dx. \left(\text{Ответ: } \ln|x+1| - \right. \\ \left. - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C. \right)$$

$$2.26. \int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)} dx. \left(\text{Ответ: } 2 \ln|x| + \ln|x-1| + \right. \\ \left. + \frac{2}{x-1} + C. \right)$$

$$2.27. \int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2} dx. \left(\text{Ответ: } 2 \ln|x+1| - \ln|x| - \right. \\ \left. - \frac{2}{x} + C. \right)$$

$$2.28. \int \frac{dx}{x^3-x^2} \left(\text{Ответ: } \frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-1| + C. \right)$$

$$2.29. \int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x} dx. \left(\text{Ответ: } \ln|x| + \ln|x-1| - \right. \\ \left. - \frac{3}{x-1} + C. \right)$$

$$2.30. \int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2} dx. \left(\text{Ответ: } 2x + \ln|x| + \frac{1}{x} + \right. \\ \left. + 2 \ln|x+1| + C. \right)$$

3

$$3.1. \int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx. \left(\text{Ответ: } 2 \ln|x-1| - \right. \\ \left. - \ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \right)$$

$$3.2. \int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx. \left(\text{Ответ: } 2 \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x^2 - \right. \\ \left. - 2x+4| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C. \right)$$

$$3.3. \int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx. \left(\text{Ответ: } \ln|x+1| - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+13| - \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C. \right)$$

$$3.4. \int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx. \left(\text{Ответ: } 3 \ln|x-1| - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+5| - 2 \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \right)$$

$$3.5. \int \frac{x^2 + 3x - 6}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)} dx. \left(\text{Ответ: } \ln|x^2 + 6x + 13| - \ln|x+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C. \right)$$

$$3.6. \int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} dx. \left(\text{Ответ: } 2 \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \right)$$

$$3.7. \int \frac{36dx}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)}. \left(\text{Ответ: } 2 \ln|x+2| - \ln|x^2 - 2x + 10| + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + C. \right)$$

$$3.8. \int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx. \left(\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 13| - \ln|x+1| + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C. \right)$$

$$3.9. \int \frac{7x-10}{x^3+8} dx. \left(\text{Ответ: } \ln|x^2 - 2x + 4| - 2 \ln|x+2| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C. \right)$$

$$3.10. \int \frac{4x^2 + 3x + 17}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx. \left(\text{Ответ: } 3 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \right)$$

$$3.11. \int \frac{4x+2}{x^4+4x^2} dx. \left(\text{Ответ: } \ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \right)$$

$$3.12. \int \frac{x^2 - 5x + 40}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)} dx. \left(\text{Ответ: } 3 \ln|x+2| - \ln|x^2 - 2x + 10| + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + C. \right)$$

$$3.13. \int \frac{4x - x^2 - 12}{x^3 + 8} dx. \left(\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 4| - 2 \ln|x+2| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C. \right)$$

$$3.14. \int \frac{x^2 - 13x + 40}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx. \quad (\text{Ответ: } 3 \ln|x+1| - \ln|x^2 - 4x + 13| - \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C.)$$

$$3.15. \int \frac{3-9x}{x^3-1} dx. \quad (\text{Ответ: } \ln|x^2+x+1| - 2 \ln|x-1| - 4\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.)$$

$$3.16. \int \frac{6-9x}{x^3+8} dx. \quad (\text{Ответ: } 2 \ln|x+2| - \ln|x^2 - 2x + 4| - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.)$$

$$3.17. \int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+10| - \ln|x+2| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + C.)$$

$$3.18. \int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx. \quad (\text{Ответ: } 3 \ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| - 5 \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C.)$$

$$3.19. \int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx. \quad (\text{Ответ: } 2 \ln|x-1| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.)$$

$$3.20. \int \frac{19x-x^2-34}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx. \quad (\text{Ответ: } \ln|x^2-4x+13| - 3 \ln|x+1| + 3 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C.)$$

$$3.21. \int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx. \quad (\text{Ответ: } 3 \ln|x+2| + \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+10| + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + C.)$$

$$3.22. \int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}. \quad (\text{Ответ: } \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+6x+13| - \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C.)$$

$$3.23. \int \frac{2x^2 + 4x + 20}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx. \quad (\text{Ответ: } \ln|x+1| + \\ + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 13| + 3 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C.)$$

$$3.24. \int \frac{5x + 13}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)} dx. \quad (\text{Ответ: } \ln|x+1| - \\ - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 6x + 13| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C.)$$

$$3.25. \int \frac{4x^2 + x + 10}{x^3 + 8} dx. \quad (\text{Ответ: } 2 \ln|x+2| + \ln|x^2 - \\ - 2x + 4| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.)$$

$$3.26. \int \frac{4x^2 + 7x + 5}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx. \quad (\text{Ответ: } 2 \ln|x-1| + \\ + \ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.)$$

$$3.27. \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} dx. \quad (\text{Ответ: } 2 \ln|x-1| + \\ + \frac{1}{2} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.)$$

$$3.28. \int \frac{6x dx}{x^3 - 1}. \quad (\text{Ответ: } 2 \ln|x-1| - \ln|x^2 + x + 1| + \\ + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.)$$

$$3.29. \int \frac{5x^2 + 17x + 36}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)} dx. \quad (\text{Ответ: } 3 \ln|x+1| + \\ + \ln|x^2 + 6x + 13| - \frac{9}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C.)$$

$$3.30. \int \frac{2x + 22}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)} dx. \quad (\text{Ответ: } \ln|x+2| - \\ - \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 10| + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + C.)$$

4

$$4.1. \int \frac{5x dx}{x^4 + 3x^2 - 4}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+ \\ + 1| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| + C.)$$

- 4.2. $\int \frac{2x^5 - 2x + 1}{1 - x^4} dx$. (Ответ: $\frac{1}{4} \ln|x+1| - x^2 - \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$.)
- 4.3. $\int \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$. (Ответ: $x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| - \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.)
- 4.4. $\int \frac{5dx}{x^4 + 3x^2 - 4}$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.)
- 4.5. $\int \frac{x^3 + 8x - 2}{x^4 + 4x^2} dx$. (Ответ: $2 \ln|x| + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.)
- 4.6. $\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 5}{(x-1)^2(x^2+4)} dx$. (Ответ: $\ln|x^2 + 4| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.)
- 4.7. $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^4 - x^2} dx$. (Ответ: $\ln|x| - \frac{3}{x} - \ln|x-1| + \ln|x+1| + C$.)
- 4.8. $\int \frac{x^3 - x - 5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.)
- 4.9. $\int \frac{x^3 - x - 1}{x^4 - x^2} dx$. (Ответ: $\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$.)
- 4.10. $\int \frac{2x^2 - 7x + 10}{(x-1)(x^3 - x^2 + 4x - 4)} dx$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.)
- 4.11. $\int \frac{4x + 2}{x^4 + 4x^2} dx$. (Ответ: $\ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.)

- 4.12. $\int \frac{x^3 - x + 2}{x^4 + x^2} dx$. (Ответ: $\ln|x| + \frac{2}{x} + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$.)
- 4.13. $\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$. (Ответ: $\frac{1}{3} \ln|x^2 + 1| + \arctg x - \frac{1}{3} \ln|x^2 + 4| + C$.)
- 4.14. $\int \frac{2x^5 - 2x^3 + x^2}{1 - x^4} dx$. (Ответ: $\frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x-1| - x^2 - \frac{1}{2} \arctg x + C$.)
- 4.15. $\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$. (Ответ: $x + \frac{1}{3} \arctg x - \frac{8}{3} \arctg \frac{x}{2} + C$.)
- 4.16. $\int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^4 - 1} dx$. (Ответ: $\ln|x-1| - \frac{3}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{4} \ln|x^2 + 1| - \frac{5}{2} \arctg x + C$.)
- 4.17. $\int \frac{x^3 + 4x - 3}{x^4 + 4x^2} dx$. (Ответ: $\ln|x| + \frac{3}{4x} + \frac{3}{8} \arctg \frac{x}{2} + C$.)
- 4.18. $\int \frac{7x - 2}{(x-1)(x^2 + 4)} dx$. (Ответ: $\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| - \arctg \frac{x}{2} + C$.)
- 4.19. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 4x - 2}{x^4 + 3x^2 - 4} dx$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \arctg \frac{x}{2} + C$.)
- 4.20. $\int \frac{4x^2 - 2}{x^4 - x^2} dx$. (Ответ: $\ln|x-1| - \frac{2}{x} - \ln|x+1| + C$.)
- 4.21. $\int \frac{2x^3 - 2x - 5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1| + \ln|x^2 + 4| + \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C$.)

$$4.22. \int \frac{3x-8}{(x-1)^2(x^2+4)} dx. \left(\text{Ответ: } \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + C. \right)$$

$$4.23. \int \frac{x^2 dx}{x^4+5x^2+4}. \left(\text{Ответ: } \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + C. \right)$$

$$4.24. \int \frac{2-8x}{x^4+4x^2} dx. \left(\text{Ответ: } \ln|x^2+4| - 2 \ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \right)$$

$$4.25. \int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1} dx. \left(\text{Ответ: } \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x+1| - \frac{3}{4} \ln|x^2+1| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \right)$$

$$4.26. \int \frac{2x^3+8x-3x^2-27}{x^4+13x^2+36} dx. \left(\text{Ответ: } \ln|x^2+9| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \right)$$

$$4.27. \int \frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9} dx. \left(\text{Ответ: } \frac{3}{2} \ln|x^2+9| + \ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x + C. \right)$$

$$4.28. \int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4} dx. \left(\text{Ответ: } \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - x^2 + \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \right)$$

$$4.29. \int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4} dx. \left(\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + \frac{5}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + C. \right)$$

$$4.30. \int \frac{(2x+3) dx}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)}. \left(\text{Ответ: } -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \right)$$

$$5.1. \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x+3}}. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x+3} - 4 \ln |\sqrt{x+3} + 2| + C.)$$

$$5.2. \int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} - 6\sqrt{x+3} + C.)$$

$$5.3. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} - 4\sqrt{(x-3)^3} + 18\sqrt{x-3} + C.)$$

$$5.4. \int \frac{xdx}{2 + \sqrt{x+4}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 2(x+4) + 2\sqrt{x+4} - 4 \ln |\sqrt{x+4} + 2| + C.)$$

$$5.5. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{18}{5}\sqrt{(x+1)^5} + 9\sqrt{(x+1)^3} - 54\sqrt{x+1} + C.)$$

$$5.6. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} \right| + C.)$$

$$5.7. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{3}} \right| + C.)$$

$$5.8. \int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3} dx. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x+2} + \sqrt{5} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{5}} \right| + C.)$$

$$5.9. \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x} - 6 \ln |\sqrt{x+3}| + C.)$$

$$5.10. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{3}} + C.)$$

$$5.11. \int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4 \ln|\sqrt{x}+1| + C.)$$

$$5.12. \int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1} + C.)$$

$$5.13. \int \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x} + \ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C.)$$

$$5.14. \int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x+5} - 6 \ln|\sqrt{x+5}+3| + C.)$$

$$5.15. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x-1} - 2 \ln|1+\sqrt{x-1}| + C.)$$

$$5.16. \int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}. \quad (\text{Ответ: } 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-7} + C.)$$

$$5.17. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x-1} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C.)$$

$$5.18. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-7}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{7}\sqrt{(x-7)^7} + \frac{6}{5}\sqrt{(x-7)^5} + 2\sqrt{(x-7)^3} + 2\sqrt{x-7} + C.)$$

$$5.19. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-4}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{5}\sqrt{(x-4)^5} + \frac{4}{3}\sqrt{(x-4)^3} + 2\sqrt{x-4} + C.)$$

$$5.20. \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x+4} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+4} + C.)$$

$$5.21. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{7}\sqrt{(x+2)^7} - \frac{6}{5}\sqrt{(x+2)^5} + 2\sqrt{(x+2)^3} - 2\sqrt{x+2} + C.)$$

$$5.22. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x+10}. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x} - 2\sqrt{10} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{10}} + C.)$$

$$5.23. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}. \quad (\text{Ответ: } \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + C.)$$

$$5.24. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x-2} - 2 \ln |1+\sqrt{x-2}| + C.)$$

$$5.25. \int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.)$$

$$5.26. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{5} \sqrt{(x-2)^5} + \frac{8}{3} \sqrt{(x-2)^3} + 8\sqrt{x-2} + C.)$$

$$5.27. \int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x-2} - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.)$$

$$5.28. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{7} \sqrt{(x+6)^7} + \frac{12}{5} \sqrt{(x+6)^5} + 8\sqrt{(x+6)^3} + 16\sqrt{x+6} + C.)$$

$$5.29. \int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x-6} - 6 \ln |\sqrt{x-6}+3| + C.)$$

$$5.30. \int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x-8} - 4 \ln |\sqrt{x-8}+2| + C.)$$

6

$$6.1. \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx. \quad (\text{Ответ: } 3\sqrt[3]{x+1} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} + 6\sqrt[6]{x+1} - 3 \ln |\sqrt[3]{x+1}+1| - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x+1} + C.)$$

$$6.2. \int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx. \quad (\text{Ответ: } x + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + 4 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C.)$$

$$6.3. \int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{6}{7} \sqrt[6]{(x+1)^7} - (x+1) + \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x+1)^5} + C.)$$

$$6.4. \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}} dx. \quad (\text{Ответ: } x + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + C.)$$

$$6.5. \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.)$$

$$6.6. \int \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2} (2x+1) + \frac{3}{5} \sqrt[6]{(2x+1)^5} + C.)$$

$$6.7. \int \frac{\sqrt{x-1} dx}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{6}{7} \sqrt[6]{(x-1)^7} - (x-1) + \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x-1)^5} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt{x-1} - 3\sqrt[3]{x-1} + 6\sqrt[6]{x-1} - 6 \ln |\sqrt[6]{x-1} + 1| + C.)$$

$$6.8. \int \frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx. \quad (\text{Ответ: } (x-1) - \frac{24}{5} \sqrt[6]{(x-1)^5} + 12\sqrt[3]{(x-1)^2} + 96\sqrt[3]{x-1} - 384\sqrt[6]{x-1} + 768 \ln |\sqrt[6]{x-1} + 2| + C.)$$

$$6.9. \int \frac{\sqrt{x+3} dx}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3}} \quad (\text{Ответ: } \frac{6}{7} \sqrt[6]{(x+3)^7} - (x+3) +$$

$$+ \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x+3)^5} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+3)^2} + 2\sqrt{x+3} - 3\sqrt[3]{x+3} + \\ + 6\sqrt[6]{x+3} - 6 \ln|\sqrt[6]{x+3} + 1| + C.)$$

$$6.10. \int \frac{\sqrt[6]{x-1} dx}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{3} \sqrt[3]{(x-1)^2} - \\ - 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{x-1} - 6\sqrt[6]{x-1} + 6 \ln|\sqrt[6]{x-1} + \\ + 1| + C.)$$

$$6.11. \int \frac{\sqrt{x+3} dx}{1 + \sqrt[3]{x+3}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{6}{7} \sqrt[6]{(x+3)^7} - \\ - \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x+3)^5} + 2\sqrt{x+3} - 6\sqrt[6]{x+3} - \\ - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x+3} + C.)$$

$$6.12. \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx. \quad (\text{Ответ: } x + \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - \\ - 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \frac{1}{2} \ln|\sqrt[3]{x} + 1| - \\ - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.)$$

$$6.13. \int \frac{\sqrt[6]{x+3} dx}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x+3}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+3)^2} - \\ - 2\sqrt{x+3} + 3\sqrt[3]{x+3} - 6\sqrt[6]{x+3} + 6 \ln|\sqrt[6]{x+3} + \\ + 1| + C.)$$

$$6.14. \int \frac{x+1 + \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1 + \sqrt[3]{x+1})} dx. \\ (\text{Ответ: } \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x+1} + C.)$$

$$6.15. \int \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - \\ - 6\sqrt[6]{x} + 3 \ln|\sqrt[3]{x} + 1| + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.)$$

$$6.16. \int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}} dx. \left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}(3x+1) - \right. \\ \left. - \frac{4}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5} + 2\sqrt[3]{(3x+1)^2} - 4\sqrt{3x+1} + \right. \\ \left. + 12\sqrt[3]{3x+1} - 48\sqrt[6]{3x+1} + 96 \ln |\sqrt[6]{3x+1} + \right. \\ \left. + 2| + C. \right)$$

$$6.17. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}. \left(\text{Ответ: } \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + \right. \\ \left. + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3 \ln |\sqrt[6]{2x+1} - 1| + C. \right)$$

$$6.18. \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} - 1} dx. \left(\text{Ответ: } \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x} + 30\sqrt[6]{x} + \right. \\ \left. + \frac{54}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2\sqrt[6]{x}-1-\sqrt{5}}{2\sqrt[6]{x}-1+\sqrt{5}} \right| + 24 \ln |\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} - \right. \\ \left. - 1| + C. \right)$$

$$6.19. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \sqrt[4]{x}}. \left(\text{Ответ: } -\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - x - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \right. \\ \left. - 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} - 4 \ln |1 - \sqrt[4]{x}| + C. \right)$$

$$6.20. \int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1} - \sqrt[3]{3x+1}} dx. \left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{4}{3}\sqrt{3x+1} + 2\sqrt[3]{3x+1} + 4\sqrt[6]{3x+1} + \right. \\ \left. + 4 \ln |\sqrt[6]{3x+1} - 1| + C. \right)$$

$$6.21. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x - 4\sqrt[3]{x^2}}. \left(\text{Ответ: } 2\sqrt{x} + 24\sqrt[6]{x} + \right. \\ \left. + 24 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2} \right| + C. \right)$$

$$6.22. \int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{3}{2} x^{2/3} + 6x^{1/6} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.)$$

$$6.23. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x - \sqrt[3]{x^2}}. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1} \right| + C.)$$

$$6.24. \int \frac{\sqrt{x} dx}{3x + \sqrt[3]{x^2}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{3} \sqrt{x} - \frac{2}{3} \sqrt[6]{x} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \sqrt[6]{9x} + C.)$$

$$6.25. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \sqrt[3]{x}}. \quad (\text{Ответ: } 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1} \right| - \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + C.)$$

$$6.26. \int \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[6]{x})} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{4} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| + C.)$$

$$6.27. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt[4]{x}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} - x + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[6]{x} - 4 \ln |\sqrt[4]{x} + 1| + C.)$$

$$6.28. \int \frac{\sqrt{3x+1} - 1}{\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt{3x+1}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{3} (3x+1) - \frac{2}{5} \sqrt[6]{(3x+1)^5} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{(3x+1)^2} - \frac{4}{3} \sqrt{3x+1} + 2\sqrt[3]{3x+1} - 4\sqrt[6]{3x+1} + 4 \ln |\sqrt[6]{3x+1} + 1| + C.)$$

$$6.29. \int \frac{\sqrt{x} dx}{4x - \sqrt[3]{x^2}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2} \sqrt{x} + \frac{3}{8} \sqrt[6]{x} + \frac{3}{32} \ln \left| \frac{2\sqrt[6]{x} - 1}{2\sqrt[6]{x} + 1} \right| + C.)$$

$$6.30. \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} - \\ - 3\sqrt[3]{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} + 3 \ln |\sqrt[3]{x+1}+1| + \\ + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x+1} + C.)$$

7

$$7.1. \int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}} + \\ + C.)$$

$$7.2. \int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}. \\ (\text{Ответ: } \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}(x/2)-4}{\sqrt{5}} + C.)$$

$$7.3. \int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x} dx. \quad (\text{Ответ: } 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \\ + 3 \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right| - 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.)$$

$$7.4. \int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2)-4}{\operatorname{tg}(x/2)-1} \right| + C.)$$

$$7.5. \int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}. \\ (\text{Ответ: } -\frac{1}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2)-2-\sqrt{5}}{\operatorname{tg}(x/2)-2+\sqrt{5}} \right| + C.)$$

$$7.6. \int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}. \quad (\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)-1}{2} + C.)$$

$$7.7. \int \frac{dx}{5-3\cos x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.)$$

$$7.8. \int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}. \quad (\text{Ответ: } \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2)-5}{\operatorname{tg}(x/2)-3} \right| + C.)$$

$$7.9. \int \frac{dx}{3+5\cos x}. \quad (\text{Ответ: } -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2)-2}{\operatorname{tg}(x/2)+2} \right| + C.)$$

$$7.10. \int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln \left| 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \right. \\ \left. + 3 \right| + C.)$$

$$7.11. \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x} \cdot \left(\text{Ответ: } \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg}(x/2) + 4}{3} + C. \right)$$

$$7.12. \int \frac{dx}{8 + 4 \cos x} \cdot \left(\text{Ответ: } \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} + C. \right)$$

$$7.13. \int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x} \cdot \left(\text{Ответ: } \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) - 1/2}{\operatorname{tg}(x/2) + 2} \right| + C. \right)$$

$$7.14. \int \frac{dx}{7 \sin x - 3 \cos x} \cdot \left(\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{58}} \ln \left| \frac{3 \operatorname{tg}(x/2) + 7 - \sqrt{58}}{3 \operatorname{tg}(x/2) + 7 + \sqrt{58}} \right| + C. \right)$$

$$7.15. \int \frac{dx}{2 + 4 \sin x + 3 \cos x} \cdot \left(\text{Ответ: } -\frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) - 4 - \sqrt{21}}{\operatorname{tg}(x/2) - 4 + \sqrt{21}} \right| + C. \right)$$

$$7.16. \int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x} \cdot \left(\text{Ответ: } -\frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) - 2}{\operatorname{tg}(x/2) - 1/2} \right| + C. \right)$$

$$7.17. \int \frac{2 - \sin x + 3 \cos x}{1 + \cos x} dx \cdot \left(\text{Ответ: } 3x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right| + C. \right)$$

$$7.18. \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x} \cdot \left(\text{Ответ: } \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{15}} + C. \right)$$

$$7.19. \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} \cdot \left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{\operatorname{tg}(x/2) + 2} \right)$$

$$7.20. \int \frac{7 + 6 \sin x - 5 \cos x}{1 + \cos x} dx \cdot \left(\text{Ответ: } 12 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 6 \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right| - 5x + C. \right)$$

$$7.21. \int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x} \cdot \left(\text{Ответ: } \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{7}} + C. \right)$$

$$7.22. \int \frac{6 \sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx. \quad (\text{Ответ: } 6 \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right| - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x + C.)$$

$$7.23. \int \frac{dx}{3 \cos x - 4 \sin x}. \quad (\text{Ответ: } C - \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) - 1/3}{\operatorname{tg}(x/2) + 3} \right|.)$$

$$7.24. \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{2} + C.)$$

$$7.25. \int \frac{dx}{4 \sin x - 6 \cos x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2\sqrt{13}} \ln \left| \frac{3 \operatorname{tg}(x/2) + 2 - \sqrt{13}}{3 \operatorname{tg}(x/2) + 2 + \sqrt{13}} \right| + C.)$$

$$7.26. \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{5} \ln \left| 5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right| + C.)$$

$$7.27. \int \frac{dx}{\cos x - 3 \sin x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} + C.)$$

$$7.28. \int \frac{dx}{4 - 4 \sin x + 3 \cos x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) - 7}{\operatorname{tg}(x/2) - 1} \right| + C.)$$

$$7.29. \int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) + 3 - \sqrt{10}}{\operatorname{tg}(x/2) + 3 + \sqrt{10}} \right| + C.)$$

$$7.30. \int \frac{dx}{2 - 3 \cos x + \sin x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{5 \operatorname{tg}(x/2) + 1 - \sqrt{6}}{5 \operatorname{tg}(x/2) + 1 + \sqrt{6}} \right| + C.)$$

8

$$8.1. \int \frac{dx}{8 \sin^2 x - 16 \sin x \cos x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{16} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x} \right| + C.)$$

- 8.2. $\int \frac{dx}{16 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x}$.
(Ответ: $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{2 \operatorname{tg} x} \right| + C$.)
- 8.3. $\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$. (Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C$.)
- 8.4. $\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$. (Ответ: $\ln |\operatorname{tg}^2 x + 2| +$
 $+\frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$.)
- 8.5. $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}$.
(Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C$.)
- 8.6. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} dx$. (Ответ: $\frac{1}{4} \ln |\operatorname{tg}^4 x - 1| + C$.)
- 8.7. $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \cos^2 x}$.
(Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x - \sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} x + \sqrt{5}} \right| + C$.)
- 8.8. $\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}$.
(Ответ: $\frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} + C$.)
- 8.9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$. (Ответ: $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg}^2 x) + C$.)
- 8.10. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$. (Ответ: $\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x| + C$.)
- 8.11. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$. (Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$.)
- 8.12. $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 8 \sin x \cos x}$.
(Ответ: $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 2} \right| + C$.)
- 8.13. $\int \frac{\sin 2x}{4 \sin^4 x + \cos^4 x} dx$. (Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (2 \operatorname{tg}^2 x) + C$.)

- 8.14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$. (Ответ: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + C$.)
- 8.15. $\int \frac{dx}{4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x}$. (Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{2} + C$.)
- 8.16. $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x - 2}$.
(Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} x} \right| + C$.)
- 8.17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 3 \cos^2 x}$.
(Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{2}} + C$.)
- 8.18. $\int \frac{dx}{5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}$.
(Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{15}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} \operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\sqrt{5} \operatorname{tg} x + \sqrt{3}} \right| + C$.)
- 8.19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x}$.
(Ответ: $\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2 \operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C$.)
- 8.20. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + 4 \cos^4 x} dx$. (Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$.)
- 8.21. $\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 16 \sin^2 x}$. (Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4 \operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} + C$.)
- 8.22. $\int \frac{dx}{2 \cos^2 x + 3}$. (Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C$.)
- 8.23. $\int \frac{dx}{3 - 2 \sin^2 x}$. (Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C$.)
- 8.24. $\int \frac{3 \operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx$. (Ответ: $\frac{3}{2} \ln |\operatorname{tg}^2 x + 4| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C$.)
- 8.25. $\int \frac{dx}{5 + 3 \sin^2 x}$. (Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C$.)

- 8.26. $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin^2 x} dx$. (Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$.)
- 8.27. $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}$. (Ответ: $\operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} x \sqrt{-1}) + C$.)
- 8.28. $\int \frac{dx}{6 - 3 \cos^2 x}$. (Ответ: $\frac{1}{6} \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} x) + C$.)
- 8.29. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg}^2 x + 3| + C$.)
- 8.30. $\int \frac{\sin^2 x}{3 \sin^2 x - \cos^2 x} dx$. (Ответ: $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x +$
 $+ \frac{\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} x) + C$.)

9

- 9.1. $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$. (Ответ: $\frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x +$
 $+ \frac{1}{144} \sin^3 6x + C$.)
- 9.2. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cos^3 x dx$. (Ответ: $\frac{5}{9} \sqrt[5]{\sin^9 x} -$
 $- \frac{5}{19} \sqrt[5]{\sin^{19} x} + C$.)
- 9.3. $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$. (Ответ: $\frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{1}{11} \sin^{11} x + C$.)
- 9.4. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$. (Ответ: $\frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$.)
- 9.5. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$. (Ответ: $C - 3 \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} -$
 $- \frac{3}{5} \sqrt[3]{\sin^5 x}$.)
- 9.6. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cos^3 2x dx$. (Ответ: $\frac{5}{16} \sqrt[5]{\sin^8 2x} -$
 $- \frac{5}{36} \sqrt[5]{\sin^{18} 2x} + C$.)
- 9.7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$. (Ответ: $3 \sqrt[3]{\sin x} -$
 $- \frac{3}{7} \sqrt[3]{\sin^7 x} + C$.)

- 9.8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$. (Ответ: $3 \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^5 x} + C$.)
- 9.9. $\int \frac{3 \sin^3 x}{\cos^4 x} dx$. (Ответ: $\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{3}{\cos x} + C$.)
- 9.10. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$. (Ответ: $\frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + C$.)
- 9.11. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$. (Ответ: $\frac{5}{12} \sqrt[5]{\cos^{12} x} - \frac{5}{2} \sqrt[5]{\cos^2 x} + C$.)
- 9.12. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$. (Ответ: $\frac{3}{11} \sqrt[3]{\cos^{11} x} - \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^5 x} + C$.)
- 9.13. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos^3 x dx$. (Ответ: $\frac{3}{5} \sqrt[3]{\sin^5 x} - \frac{3}{11} \sqrt[3]{\sin^{11} x} + C$.)
- 9.14. $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \sin^3 2x dx$. (Ответ: $\frac{5}{36} \sqrt[5]{\cos^{18} 2x} - \frac{5}{16} \sqrt[5]{\cos^8 2x} + C$.)
- 9.15. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$. (Ответ: $\frac{5}{2} \sqrt[5]{\sin^2 x} - \frac{5}{12} \sqrt[5]{\sin^{12} x} + C$.)
- 9.16. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx$. (Ответ: $\frac{1}{16} x - \frac{1}{128} \sin 8x + \frac{1}{96} \sin^3 4x + C$.)
- 9.17. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$. (Ответ: $\frac{3}{7} \sqrt[3]{\cos^7 x} - 3 \sqrt[3]{\cos x} + C$.)
- 9.18. $\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \sin^3 x dx$. (Ответ: $\frac{5}{19} \sqrt[5]{\cos^{19} x} - \frac{5}{9} \sqrt[5]{\cos^9 x} + C$.)

- 9.19. $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx$. (Ответ: $\frac{1}{16} x - \frac{1}{128} \sin 8x + \frac{1}{96} \sin^3 4x + C$.)
- 9.20. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx$. (Ответ: $\frac{3}{2} \sqrt[3]{\sin 2x} - \frac{3}{14} \sqrt[3]{\sin^7 2x} + C$.)
- 9.21. $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$. (Ответ: $\frac{3}{14} \sqrt[3]{\cos^7 2x} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\cos 2x} + C$.)
- 9.22. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$. (Ответ: $\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$.)
- 9.23. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$. (Ответ: $\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$.)
- 9.24. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$. (Ответ: $\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$.)
- 9.25. $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$. (Ответ: $\frac{1}{11} \cos^{11} x - \frac{1}{9} \cos^9 x + C$.)
- 9.26. $\int \frac{3 \cos^3 x}{\sin^4 x} dx$. (Ответ: $\frac{3}{\sin x} - \frac{1}{\sin^3 x} + C$.)
- 9.27. $\int \sin^5 x \sqrt[5]{\cos^3 x} dx$. (Ответ: $\frac{5}{9} \sqrt[5]{\cos^{18} x} - \frac{5}{8} \sqrt[5]{\cos^8 x} - \frac{5}{28} \sqrt[5]{\cos^{28} x} + C$.)
- 9.28. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$. (Ответ: $\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C$.)
- 9.29. $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx$. (Ответ: $\frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x - \frac{1}{144} \sin^3 6x + C$.)

$$9.30. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^5 x} + C.)$$

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2 - 5x + 6)} dx.$$

► Подынтегральная функция представляет собой рациональную дробь. Разложим ее знаменатель на множители: $(x+1)(x-2)(x-3)$. Согласно формуле (8.9), в разложении правильной дроби на простейшие каждому множителю знаменателя вида $x-a$ соответствует слагаемое $\frac{A}{x-a}$. Поэтому в данном случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2 - 5x + 6)} &= \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}. \end{aligned}$$

Приведя правую часть последнего равенства к общему знаменателю и приравняв числители дробей, получим тождество

$$7x - x^2 - 4 \equiv A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2).$$

Коэффициенты A, B, C определим с помощью метода частных значений (см. § 8.6):

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -12 = 12A, \\ 6 = -3B, \\ 8 = 4C, \end{array}$$

откуда $A = -1, B = -2, C = 2$. Подставив найденные коэффициенты в разложение подынтегральной функции на простейшие дроби, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2 - 5x + 6)} dx &= \int \left(-\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-3} \right) dx = \\ &= -\ln|x+1| - 2\ln|x-2| + 2\ln|x-3| + C^* = \\ &= \ln \frac{(x-3)^2}{|x+1|(x-2)^2} + C^*, \end{aligned}$$

где C^* — постоянная интегрирования. ◀

$$\begin{aligned}
& 2. \int \frac{15x - x^2 - 11}{(x-1)(x^2 + x - 2)} dx. \\
& \quad \blacktriangleright \int \frac{15x - x^2 - 11}{(x-1)(x^2 + x - 2)} dx = \int \frac{15x - x^2 - 11}{(x-1)^2(x+2)} dx \stackrel{(8.9)}{=} \\
& \quad \stackrel{(8.9)}{=} \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \right) dx \stackrel{\S 8.6}{=} \\
& \quad \stackrel{\S 8.6}{=} \left| \begin{array}{l} 15x - x^2 - 11 \equiv A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2, \\ x=1 \quad \left| \begin{array}{l} 3 = 3B, \quad B=1, \\ -45 = 9C, \quad C=-5, \\ -1 = A+C, \quad A=4 \end{array} \right. \\ x^2 \end{array} \right| = \\
& \quad = \int \left(\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{5}{x+2} \right) dx = \\
& \quad = 4 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 5 \ln|x+2| + C^*.
\end{aligned}$$

Ответим, что для нахождения коэффициентов мы использовали комбинированный метод: метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов (см. § 8.6). ◀

$$3. I(x) = \int \frac{x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 43x + 27}{(x-2)(x^2 - 2x + 5)} dx.$$

▶ Так как подынтегральная функция является неправильной дробью, то путем деления числителя на знаменатель можно представить ее в виде суммы целого многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \left(x - 4 + \frac{-2x^2 + 3x - 13}{(x+2)(x^2 - 2x + 5)} \right) dx \stackrel{\S 8.6}{=} \frac{x^2}{2} - 4x + \\
& \quad + \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2 - 2x + 5} \right) dx = \\
& = \left| \begin{array}{l} -2x^2 + 3x - 13 \equiv A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x-2), \\ x=2 \quad \left| \begin{array}{l} -15 = 5A, \quad A = -3, \\ -2 = A + B, \quad B = 1, \\ -13 = 5A - 2C, \quad C = -1 \end{array} \right. \\ x^2 \\ x^0 \end{array} \right| = \\
& \quad = \frac{x^2}{2} - 4x + \int \left(\frac{-3}{x-2} + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 5} \right) dx = \\
& \quad = -3 \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 5| + C^*. \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

$$4. \int \frac{2x^3 - 5x^2 + 8x - 32}{x^4 + 9x^2 + 20} dx.$$

$$\begin{aligned}
& \blacktriangleright \int \frac{2x^3 - 5x^2 + 8x - 22}{x^4 + 9x^2 + 20} dx = \int \frac{2x^3 - 5x^2 + 8x - 22}{(x^2 + 4)(x^2 + 5)} dx = \\
& = \int \left(\frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 5} \right) dx = \\
& = \left[\begin{array}{l} 2x^3 - 5x^2 + 8x - 22 \equiv (Ax + B)(x^2 + 5) + \\ \quad + (Cx + D)(x^2 + 4), \\ \left. \begin{array}{l} x^3 \quad 2 = A + C, \\ x^2 \quad -5 = B + D, \\ x \quad 8 = 5A + 4C, \\ x^0 \quad -22 = 5B + 4D, \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 0, B = -2, \\ C = 2, D = -3 \end{array} \right] = \\
& = \int \left(\frac{-2}{x^2 + 4} + \frac{2x - 3}{x^2 + 5} \right) dx = -\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \ln(x^2 + 5) - \\
& \quad - \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C^*. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

$$5. \int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}} dx.$$

$$\begin{aligned}
& \blacktriangleright \int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}} dx \stackrel{\S 8.7}{=} \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-2} = t, \quad x-2 = t^2, \\ x = t^2 + 2, \quad dx = 2t dt \end{array} \right| = \\
& = -2 \int \frac{(t^2 + 3)t dt}{t-3} = -2 \int \left(t^2 + 3t + 12 + \frac{36}{t-3} \right) dt = \\
& = -2 \left(\frac{1}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^2 + 12t + 36 \ln |t-3| \right) + C = \\
& = -\frac{2}{3} \sqrt{(x-2)^3} - 3(x-2) - 24\sqrt{x-2} - \\
& \quad - 72 \ln |\sqrt{x-2} - 3| + C. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

$$6. \int \frac{4\sqrt{x-2} + \sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2} + 2\sqrt[3]{x-2}} dx.$$

$$\begin{aligned}
& \blacktriangleright \int \frac{4\sqrt{x-2} - \sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2} + 2\sqrt[3]{x-2}} dx \stackrel{\S 8.7}{=} \\
& \stackrel{\S 8.7}{=} \left| \begin{array}{l} m = \text{HOK}(2, 3, 6) = 6, \quad x-2 = t^6, \\ x = t^6 + 2, \quad dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \\
& = \int \frac{(4t^3 - t)6t^5 dt}{t^3 + 2t^2} = 6 \int \frac{4t^6 - t^4}{t+2} dt = \\
& = 6 \int \left(4t^5 - 8t^4 + 15t^3 - 30t^2 + 60t - 120 + \frac{240}{t+2} \right) dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6\left(\frac{2}{3}t^6 - \frac{8}{5}t^5 + \frac{15}{4}t^4 - 10t^3 + 30t^2 - 120t + \right. \\
&\quad \left. + 240 \ln|t + 2|\right) + C = 4(x - 2) - \frac{48}{5}\sqrt[6]{(x - 2)^5} + \\
&\quad + \frac{45}{2}\sqrt[3]{(x - 2)^2} - 60\sqrt{x - 2} + 180\sqrt[3]{x - 2} - \\
&\quad - 720\sqrt[6]{x - 2} + 1440 \ln|\sqrt[6]{x - 2} + 2| + C \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

$$7. \int \frac{dx}{3 \sin x - 2 \cos x + 1}.$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{3 \sin x - 2 \cos x + 1} \quad (8.13)$$

$$(8.13) \left| \begin{aligned} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \end{aligned} \right| =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{6t - 2 + 2t^2 + 1 + t^2} = 2 \int \frac{dt}{3t^2 + 6t - 1} =$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1/3} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{(t+1)^2 - 4/3} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \left| \frac{t+1 - 2/\sqrt{3}}{t+1 + 2/\sqrt{3}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg}(x/2) + \sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} \operatorname{tg}(x/2) + \sqrt{3} + 2} \right| + C. \quad \blacktriangleleft$$

$$8. \int \frac{dx}{2 \sin^2 x - \sin 2x + 3 \cos^2 x}$$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{2 \sin^2 x - \sin 2x + 3 \cos^2 x} \quad (8.14)$$

$$(8.14) \left| \begin{aligned} t = \operatorname{tg} x, \quad \sin^2 x = \frac{x^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \\ \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{2t^2 - 2t + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - t + 3/2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 5/4} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t - 1/2}{\sqrt{5}/2} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{5}} + C. \quad \blacktriangleleft$$

$$9. \int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}} dx &\stackrel{(8.15)}{\underset{(8.16)}{=}} \left| \begin{array}{l} \sin 4x = t, \\ dx = 4 \cos 4x dx \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{(1-t^2) dt}{\sqrt[5]{t}} = \\ &= \frac{1}{4} \int (t^{-1/5} - t^{9/5}) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} t^{4/5} - \frac{5}{14} t^{14/5} \right) + C = \\ &= \frac{5}{16} \sqrt[5]{\sin^4 4x} - \frac{5}{56} \sqrt[5]{\sin^{14} 4x} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

8.10. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 8

Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{x}{4} (x^2-2) \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C.)$$

$$2. \int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{4\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}} \right| + C.)$$

$$3. \int (x+1)\sqrt{x^2+2x} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+3x)^3} + C.)$$

$$4. \int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx. \quad (\text{Ответ: } x \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.)$$

$$5. \int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx. \quad (\text{Ответ: } x \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x} - \arctg \sqrt{x} + C.)$$

$$6. \int \frac{2x dx}{(x+1)(x^2+1)^2} \quad (\text{Ответ: } \frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C.)$$

$$7. \int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x+1}(\ln|x+1| - 2) + C.)$$

$$8. \int e^{\sqrt[3]{x}} dx. \quad (\text{Ответ: } 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C.)$$